

Aus Zeit- und Performancegründen werden die Lösungen ohne Inhaltsverzeichnis bereitgestellt.

Aufgabenblatt 1

ArithLogik/Betrag



ArithLogik/Betrag/Ag_Betrag_UnglFuerBetragAlsDoppelUnglSchreiben.tex

Aufgabe 1.1 (Eigenschaften des Betrags)

Weisen Sie mit Hilfe einer Fallunterscheidung nach, dass für alle reellen x und alle reellen $c \geq 0$ gilt:

$$|x| \leq c \iff -c \leq x \leq c.$$

Lösung:

Die Äquivalenz $A \iff B$ lässt sich auch als Verknüpfung zweier Implikationen $(A \implies B) \wedge (B \implies A)$ auffassen, wodurch sich eine Beweisführung oftmals leichter in zwei Teilschritten ausführen lässt.

Seien von nun an $x \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ mit $c \geq 0$ beliebig.

Eine Fallunterscheidung erleichtert das Vorgehen bei der Beweisführung:

Fall 1 ($x \geq 0$): Ist $x \geq 0$, so gilt $|x| = x$.

$\Leftarrow$: Wegen $-c \leq x \leq c$ gilt insbesondere $x \leq c$. Wegen $|x| = x$ folgt dann auch $|x| \leq c$.

$\Rightarrow$: Mit $x \geq 0$, also $|x| = x$, folgt aus $|x| \leq c$, dass $0 \leq x = |x| \leq c$ gilt. Dies stellt eine Verschärfung von $-c \leq x \leq c$ dar.

Fall 2 ($x < 0$): Ist $x < 0$, so gilt $|x| = -x$.

$\Leftarrow$: Wegen $-c \leq x \leq c$ gilt insbesondere $-c \leq x$. Multipliziert man die letzte Ungleichung mit $-1 < 0$, so ergibt sich $c \geq -x$. Wegen $|x| = -x$ folgt dann auch $c \geq |x|$, also $|x| \leq c$.

$\Rightarrow$: Aus $|x| \leq c$ folgt mit $x < 0$ (also $|x| = -x$), dass $-x \leq c$ gilt. Multipliziert man die letzte Ungleichung mit $-1 < 0$, so erhält man $-c \leq x < 0$, welches eine Verschärfung von $-c \leq x \leq c$ ist.

Insgesamt ist damit die Behauptung gezeigt.



ArithLogik/Betrag/Ag_Betrag_lineareBetragsglgn.tex

Aufgabe 1.2 (Lineare Betragsgleichungen) spf

Lösen Sie die folgenden Gleichungen, indem Sie jeweils eine Fallunterscheidung vornehmen. Überprüfen Sie stets, ob die erhaltenen Lösungen den Fallvoraussetzungen genügen!

Lösung:

Die unterschiedlichen Fälle ergeben sich aus einer Untersuchung des Vorzeichens des Terms bzw. der Terme innerhalb der Betragsstriche. Bei mehr als einem Betragsterm werden die kritischen Stellen zur Identifikation der Fälle auf einem Zahlenstrahl markiert. Je nach Vorzeichen des Terms wird der jeweilige Betrag entsprechend aufgelöst.

a) $2x = 2 \cdot |x| - 2$

$$\{-\frac{1}{2}\}$$

Lösung:

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

$x \geq 0$: Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$ ist

$$2x = 2 \cdot |x| - 2 \iff 2x = 2x - 2 \iff 0 = -2.$$

Folglich gibt es kein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$, das die gegebene Gleichung $2x = 2 \cdot |x| - 2$ löst.

$x < 0$: Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x < 0$ ist wegen $2 \cdot |x| = 2 \cdot (-x) = -2x$

$$2x = 2 \cdot |x| - 2 \iff 2x = -2x - 2 \iff 4x = -2 \iff x = -\frac{1}{2}.$$

Abgleich mit der Fallvoraussetzung: Wegen $-\frac{1}{2} < 0$ ist $-\frac{1}{2}$ tatsächlich eine Lösung der gegebenen Gleichung.

Insgesamt folgt $\{x \in \mathbb{R} \mid 2x = 2 \cdot |x| - 2\} = \emptyset \cup \{-\frac{1}{2}\} = \{-\frac{1}{2}\}$.

b) $|3x - 5| = 2$

$$\{1; \frac{7}{3}\}$$

Lösung:

$x \geq \frac{5}{3}$: Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq \frac{5}{3}$ gilt wegen $3x - 5 \geq 0$

$$|3x - 5| = 2 \iff 3x - 5 = 2 \iff 3x = 7 \iff x = \frac{7}{3}.$$

Abgleich mit der Fallvoraussetzung: Wegen $\frac{7}{3} \geq \frac{5}{3}$ ist $\frac{7}{3}$ tatsächlich eine Lösung der gegebenen Gleichung.

$x < \frac{5}{3}$: Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x < \frac{5}{3}$ ist $3x - 5 < 0$ und wegen $|3x - 5| = -(3x - 5) = -3x + 5$

$$|3x - 5| = 2 \iff -3x + 5 = 2 \iff -3x = -3 \iff x = 1.$$

Abgleich mit der Fallvoraussetzung: Wegen $1 = \frac{3}{3} < \frac{5}{3}$ ist 1 tatsächlich eine Lösung der gegebenen Gleichung.

Insgesamt folgt $\{x \in \mathbb{R} \mid |3x - 5| = 2\} = \{1; \frac{7}{3}\}$.

c) $|3x - 5| = x - 2$

$$\emptyset$$

Lösung:

$x \geq \frac{5}{3}$: Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq \frac{5}{3}$ gilt wegen $3x - 5 \geq 0$

$$|3x - 5| = x - 2 \iff 3x - 5 = x - 2 \iff 2x = 3 \iff x = \frac{3}{2}.$$

Wegen $\frac{3}{2} = \frac{9}{6} < \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$ erfüllt $\frac{3}{2}$ die Fallvoraussetzung jedoch *nicht*.

$x < \frac{5}{3}$: Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x < \frac{5}{3}$ ist $3x - 5 < 0$ und wegen $|3x - 5| = -(3x - 5) = -3x + 5$

$$|3x - 5| = x - 2 \iff -3x + 5 = x - 2 \iff -4x = -7 \iff x = \frac{7}{4}.$$

Wegen $\frac{7}{4} = \frac{21}{12} > \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$ erfüllt $\frac{7}{4}$ die Fallvoraussetzung jedoch *nicht*.

Insgesamt folgt $\{x \in \mathbb{R} \mid |3x - 5| = x - 2\} = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$.

d) $|t - 4| = 3t + 5$

$$\{-\frac{1}{4}\}$$

Lösung:

$t \geq 4$: Für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t \geq 4$ ist

$$|t - 4| = 3t + 5 \iff t - 4 = 3t + 5 \iff -2t = 9 \iff t = -\frac{9}{2}.$$

Wegen $-\frac{9}{2} < 4$ erfüllt $-\frac{9}{2}$ die Fallvoraussetzung jedoch *nicht*.

t < 4: Für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t < 4$ ist wegen $|t - 4| = -(t - 4) = -t + 4$

$$|t - 4| = 3t + 5 \iff -t + 4 = 3t + 5 \iff -4t = 1 \iff t = -\frac{1}{4}.$$

Wegen $-\frac{1}{4} < 4$ ist $-\frac{1}{4}$ tatsächlich eine Lösung der gegebenen Gleichung.

Insgesamt folgt $\{t \in \mathbb{R} \mid |t - 4| = 3t + 5\} = \emptyset \cup \{-\frac{1}{4}\} = \{-\frac{1}{4}\}$.

e) $|y + 4| = 2 \cdot |y - 1|$

$$\{-\frac{2}{3}; 6\}$$

Lösung:

Eine Betrachtung am Zahlenstrahl offenbart drei Fälle:



y ≥ 1: Für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $y \geq 1$ gilt auch $y \geq -4$ und es folgt

$$|y + 4| = 2 \cdot |y - 1| \iff y + 4 = 2 \cdot (y - 1) \iff y + 4 = 2y - 2 \iff 6 = y.$$

Wegen $6 \geq 1$ ist 6 tatsächlich eine Lösung der gegebenen Gleichung.

-4 ≤ y < 1: Für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $y < 1$ und $y \geq -4$ folgt

$$|y + 4| = 2 \cdot |y - 1| \iff y + 4 = 2 \cdot (-y + 1) \iff 3y = -2 \iff y = -\frac{2}{3}.$$

Wegen $-4 < -\frac{2}{3} \leq 1$ ist $-\frac{2}{3}$ tatsächlich eine Lösung der gegebenen Gleichung.

y < -4: Für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $y < -4$ gilt auch $y < 1$ und es folgt

$$|y + 4| = 2 \cdot |y - 1| \iff -y - 4 = 2 \cdot (-y + 1) \iff y = 6.$$

Wegen $6 \not\leq -4$ erfüllt 6 die Fallvoraussetzung jedoch *nicht*.

(Allerdings ist 6 nach der obigen Betrachtung eine Lösung der gegebenen Gleichung.)

Insgesamt folgt $\{y \in \mathbb{R} \mid |y + 4| = 2 \cdot |y - 1|\} = \{6\} \cup \{-\frac{2}{3}\} \cup \emptyset = \{-\frac{2}{3}; 6\}$.

f) $\frac{|1 + s|}{|3 - s|} = 5$

$$\{\frac{7}{3}; 4\}$$

Lösung:

Für alle $s \in \mathbb{R}$ mit $s \neq 3$ gilt $\frac{|1 + s|}{|3 - s|} = 5 \iff |s + 1| = 5 \cdot |-s + 3|$.

Eine Betrachtung am Zahlenstrahl offenbart drei Fälle:



s > 3: Für alle $s \in \mathbb{R}$ mit $s > 3$ gilt auch $s \geq -1$ und es folgt mit $5 \cdot |-s + 3| = 5 \cdot (-(-s + 3)) = 5s - 15$

$$|s + 1| = 5 \cdot |-s + 3| \iff s + 1 = 5s - 15 \iff -4s = -16 \iff s = 4.$$

Wegen $4 > 3$ ist 4 tatsächlich eine Lösung der Gleichung.

1 ≤ s < 3: Für alle $s \in \mathbb{R}$ mit $s < 3$ und $s \geq -1$ folgt mit $5 \cdot |-s + 3| = 5 \cdot (-s + 3) = -5s + 15$

$$|s + 1| = 5 \cdot |-s + 3| \iff s + 1 = -5s + 15 \iff 6s = 14 \iff s = \frac{7}{3}.$$

Wegen $-1 < 0 < \frac{7}{3} < 3$ ist $\frac{7}{3}$ tatsächlich eine Lösung der Gleichung.

$s < 1$: Für alle $s \in \mathbb{R}$ mit $s < -1$ gilt auch $s < 3$ und es folgt mit $5 \cdot |-s + 3| = 5 \cdot (-s + 3) = -5s + 15$ und $|s + 1| = -(s + 1) = -s - 1$

$$|s + 1| = 5 \cdot |-s + 3| \iff -s - 1 = -5s + 15 \iff 4s = 16 \iff s = 4.$$

4 erfüllt wegen $4 > 0 > -1$ nicht die Fallvoraussetzungen. Oben haben wir aber schon gesehen, dass 4 eine Lösung der Gleichung ist.

Insgesamt folgt $\left\{s \in \mathbb{R} \mid \left|\frac{1+s}{3-s}\right| = 5\right\} = \{4\} \cup \left\{\frac{7}{3}\right\} \cup \emptyset = \left\{\frac{7}{3}; 4\right\}$.

g) $\left|\frac{2z+4}{z-3}\right| = 1$

$$\{-7; -\frac{1}{3}\}$$

Lösung:

Für alle $z \in \mathbb{R}$ mit $z \neq 3$ gilt $\left|\frac{2z+4}{z-3}\right| = 1 \iff |2z+4| = |z-3|$ wegen $\left|\frac{2z+4}{z-3}\right| = \frac{|2z+4|}{|z-3|}$

Eine Betrachtung am Zahlenstrahl offenbart drei Fälle:



$z > 3$: Für alle $z \in \mathbb{R}$ mit $z > 3$ gilt auch $z \geq -2$, also $2z + 4 \geq 0$ und es folgt

$$|2z + 4| = |z - 3| \iff 2z + 4 = z - 3 \iff z = -7.$$

Wegen $-7 > 3$ erfüllt -7 nicht die Fallvoraussetzung.

$-2 \leq z < 3$: Für alle $z \in \mathbb{R}$ mit $z < 3$ und $z \geq -2$, also $2z + 4 \geq 0$, folgt mit $|z - 3| = -(z - 3) = -z + 3$

$$|2z + 4| = |z - 3| \iff 2z + 4 = -z + 3 \iff 3z = -1 \iff z = -\frac{1}{3}.$$

Wegen $-2 = -\frac{6}{3} < -\frac{1}{3} < 0 < 3$ ist $-\frac{1}{3}$ tatsächlich eine Lösung der Gleichung.

$z < -2$: Für alle $z \in \mathbb{R}$ mit $z < -2$, also $2z + 4 < 0$, gilt auch $z < 3$ und es folgt mit $|z - 3| = -(z - 3) = -z + 3$ und $|2z + 4| = -(2z + 4) = -2z - 4$

$$|2z + 4| = |z - 3| \iff -2z - 4 = -z + 3 \iff -z = 7 \iff z = -7.$$

Wegen $-7 < -2$ ist -7 tatsächlich eine Lösung der Gleichung.

Insgesamt folgt $\left\{z \in \mathbb{R} \mid \left|\frac{2z+4}{z-3}\right| = 1\right\} = \emptyset \cup \left\{-\frac{1}{3}\right\} \cup \{-7\} = \{-7; -\frac{1}{3}\}$.

h) $|u + 2| + |u + 4| - 12 = 0$

$$\{-9; 3\}$$

Lösung:

Eine Betrachtung am Zahlenstrahl offenbart drei Fälle:



$u \geq -2$: Für alle $u \in \mathbb{R}$ mit $u \geq -2$ gilt auch $u \geq -4$ und es folgt

$$|u + 2| + |u + 4| - 12 = 0 \iff u + 2 + u + 4 = 12 \iff 2u = 6 \iff u = 3.$$

Wegen $3 \geq -2$ ist 3 tatsächlich eine Lösung der Gleichung.

$$-4 \leq u < -2: \text{ Für alle } u \in \mathbb{R} \text{ mit } u < -2 \text{ und } u \geq -4 \text{ folgt mit } |u+2| = -(u+2) = -u-2$$

$$|u+2| + |u+4| - 12 = 0 \iff -u-2+u+4 = 12 \iff 0 = 10.$$

Also gibt es kein $u \in \mathbb{R}$ mit $-4 \leq u < -2$ und $|u+2| + |u+4| - 12 = 0$.

$$u < -4: \text{ Für alle } u \in \mathbb{R} \text{ mit } u < -4 \text{ gilt auch } u < -2 \text{ und es folgt mit } |u+2| = -(u+2) = -u-2 \text{ und } |u+4| = -(u+4) = -u-4$$

$$|u+2| + |u+4| - 12 = 0 \iff -u-2-u-4 = 12 \iff -2u = 18 \iff u = -9.$$

Wegen $-9 < -4$ ist -4 tatsächlich eine Lösung der Gleichung.

Insgesamt folgt $\{u \in \mathbb{R} \mid |u+2| + |u+4| - 12 = 0\} = \{3\} \cup \emptyset \cup \{-9\} = \{-9; 3\}$.

i) $|\ell+1| + |2\ell+3| = |\ell-4|$

$$\{-4; 0\}$$

Lösung:

Eine Betrachtung am Zahlenstrahl offenbart vier Fälle:



$\ell \geq 4$: Für alle $\ell \in \mathbb{R}$ mit $\ell \geq 4$ gilt auch $\ell \geq -1$ und $\ell \geq -\frac{3}{2}$, also $2\ell+3 \geq 0$ und damit ergibt sich

$$|\ell+1| + |2\ell+3| = |\ell-4| \iff \ell+1+2\ell+3 = \ell-4$$

$$\iff 2\ell = -8 \iff \ell = -4.$$

Wegen $-4 < 4$ erfüllt -4 aber nicht die Fallvoraussetzungen.

$-1 \leq \ell < 4$: Für alle $\ell \in \mathbb{R}$ mit $\ell < 4$ und $\ell \geq -1$ gilt auch $\ell \geq -\frac{3}{2}$, also $2\ell+3 \geq 0$ und wegen $|\ell-4| = -(\ell-4) = -\ell+4$ folgt

$$|\ell+1| + |2\ell+3| = |\ell-4| \iff \ell+1+2\ell+3 = -\ell+4$$

$$\iff 4\ell = 0 \iff \ell = 0.$$

Wegen $-1 \leq 0 < 4$ ist 0 tatsächlich eine Lösung der Gleichung.

$-\frac{3}{2} \leq \ell < -1$: Für alle $\ell \in \mathbb{R}$ mit $\ell < -1$ und $\ell \geq -\frac{3}{2}$, also $2\ell+3 < 0$, gilt auch $\ell < 4$ und wegen $|\ell-4| = -(\ell-4) = -\ell+4$ und $|\ell+1| = -(\ell+1) = -\ell-1$ folgt

$$|\ell+1| + |2\ell+3| = |\ell-4| \iff -\ell-1+2\ell+3 = -\ell+4$$

$$\iff 2\ell = 2 \iff \ell = 1.$$

Wegen $1 > -1$ erfüllt 1 aber nicht die Fallvoraussetzungen.

$\ell < -\frac{3}{2}$: Für alle $\ell \in \mathbb{R}$ mit $\ell < -\frac{3}{2}$, also $2\ell+3 < 0$, gilt auch $\ell < 4$ und $\ell < -1$ und wegen $|\ell-4| = -(\ell-4) = -\ell+4$, $|\ell+1| = -(\ell+1) = -\ell-1$ und $|2\ell+3| = -(2\ell+3) = -2\ell-3$ folgt

$$|\ell+1| + |2\ell+3| = |\ell-4| \iff -\ell-1-2\ell-3 = -\ell+4$$

$$\iff -2\ell = 8 \iff \ell = -4.$$

Wegen $-4 = -\frac{8}{2} < -\frac{3}{2}$ ist -4 tatsächlich eine Lösung der Gleichung.

Insgesamt ergibt sich $\{\ell \in \mathbb{R} \mid |\ell+1| + |2\ell+3| = |\ell-4|\} = \emptyset \cup \{0\} \cup \emptyset \cup \{-4\} = \{-4; 0\}$.



ArithLogik/Betrags/Ag_Betrags_lineareBetragsunglgn.tex

Aufgabe 1.3 (lineare Betragsungleichungen)

SPF

Geben Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen an!

a) $|4\xi + 1| > -2$

$\mathbb{R}$

Lösung:

Für alle $\xi \in \mathbb{R}$ gilt

$$|4\xi + 1| \geq 0 > -2.$$

b) $|7 - 3x| < 5$

$(\frac{2}{3}; 4)$

Lösung:

$7 - 3x$ wechselt sein Vorzeichen bei $x = \frac{7}{3}$.

Fall 1 ($x \leq \frac{7}{3}$): Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \leq \frac{7}{3}$, gilt $7 - 3x \geq 0$ also

$$\begin{aligned} & |7 - 3x| < 5 \\ \Leftrightarrow & 7 - 3x < 5 \quad | + 3x - 5 \\ \Leftrightarrow & 2 < 3x \quad | \cdot \frac{1}{3} > 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{2}{3} < x. \end{aligned}$$

Also sind alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \leq \frac{7}{3}$ und $x > \frac{2}{3}$ Lösungen der Ungleichung.

Fall 2 ($x > \frac{7}{3}$): Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > \frac{7}{3}$, gilt $7 - 3x < 0$ also

$$\begin{aligned} & |7 - 3x| < 5 \\ \Leftrightarrow & -(7 - 3x) < 5 \\ \Leftrightarrow & -7 + 3x < 5 \quad | + 7 \\ \Leftrightarrow & 3x < 12 \quad | \cdot \frac{1}{3} > 0 \\ \Leftrightarrow & x < 4. \end{aligned}$$

Also sind alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > \frac{7}{3}$ und $x < 4$ Lösungen der Ungleichung.

Die Gesamtlösungsmenge ist

$$\begin{aligned} & \left((-\infty; \frac{7}{3}] \cap (\frac{2}{3}; \infty) \right) \\ & \cup \left((\frac{7}{3}; \infty) \cap (-\infty; 4) \right) \\ & = (\frac{2}{3}; \frac{7}{3}] \cup (\frac{7}{3}; 4) = (\frac{2}{3}; 4). \end{aligned}$$

c) $|7 - 3t| < 2t + 3$

$(\frac{4}{5}; 10)$

Lösung:

$7 - 3t$ wechselt sein Vorzeichen bei $t = \frac{7}{3}$.

Fall 1 ($t \leq \frac{7}{3}$): Für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t \leq \frac{7}{3}$, gilt $7 - 3t \geq 0$ also

$$\begin{aligned} & |7 - 3t| < 2t + 3 \\ \Leftrightarrow & 7 - 3t < 2t + 3 \quad | + 3t - 3 \\ \Leftrightarrow & 4 < 5t \quad | \cdot \frac{1}{5} > 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{4}{5} < t. \end{aligned}$$

Also sind alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t \leq \frac{7}{3}$ und $t > \frac{4}{5}$ Lösungen der Ungleichung.

Fall 2 ($t > \frac{7}{3}$): Für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t > \frac{7}{3}$, gilt $7 - 3t < 0$ also

$$\begin{aligned} & |7 - 3t| < 2t + 3 \\ \Leftrightarrow & -(7 - 3t) < 2t + 3 \\ \Leftrightarrow & -7 + 3t < 2t + 3 \quad | + 7 - 2t \\ \Leftrightarrow & t < 10. \end{aligned}$$

Also sind alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t > \frac{7}{3}$ und $t < 10$ Lösungen der Ungleichung.

Die Gesamtlösungsmenge ist

$$\begin{aligned} & \left((-\infty; \frac{7}{3}] \cap (\frac{4}{5}; \infty) \right) \\ & \cup \left((\frac{7}{3}; \infty) \cap (-\infty; 10) \right) \\ & = (\frac{4}{5}; \frac{7}{3}] \cup (\frac{7}{3}; 10) = (\frac{4}{5}; 10). \end{aligned}$$

d) $\frac{|7 - 3r|}{2r + 3} < 1$

$(-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (\frac{4}{5}; 10)$

Lösung:

$7 - 3r$ wechselt sein Vorzeichen bei $r = \frac{7}{3}$.

$2r + 3$ wechselt sein Vorzeichen bei $r = -\frac{3}{2}$, wo die Ungleichung nicht definiert ist.

Es ergeben sich drei Fälle:

$$\begin{array}{ccc} \text{Fall 3} & & \text{Fall 2} & & \text{Fall 1} \\ \hline & -\frac{3}{2} & & \frac{7}{3} & \end{array}$$

Fall 1 ($r > \frac{7}{3}$): Für alle $r \in \mathbb{R}$ mit $r > \frac{7}{3}$, gilt $7 - 3r < 0$ und $2r + 3 > 0$, also

$$\begin{aligned} & \frac{|7 - 3r|}{2r + 3} < 1 \quad | \cdot (2r + 3) \\ \Leftrightarrow & -(7 - 3r) < 2r + 3 \\ \Leftrightarrow & -7 + 3r < 2r + 3 \quad | + 7 - 2r \\ \Leftrightarrow & r < 10. \end{aligned}$$

Also sind alle $r \in \mathbb{R}$ mit $r > \frac{7}{3}$ und $r < 10$ Lösungen der Ungleichung.

Fall 2 ($-\frac{3}{2} < r \leq \frac{7}{3}$): Für alle $r \in \mathbb{R}$ mit $-\frac{3}{2} < r \leq \frac{7}{3}$, gilt $7 - 3r \geq 0$ und $2r + 3 > 0$, also

$$\begin{aligned} \frac{|7-3r|}{2r+3} &< 1 & | \cdot (2r+3) \\ \iff 7-3r &< 2r+3 & | + 3r-3 \\ \iff 4 &< 5r & | \cdot \frac{1}{5} > 0 \\ \iff \frac{4}{5} &< r. \end{aligned}$$

Also sind alle $r \in \mathbb{R}$ mit $-\frac{3}{2} < r \leq \frac{7}{3}$ und $r > \frac{4}{5}$ Lösungen der Ungleichung.

Fall 3 ($r < -\frac{3}{2}$): Für alle $r \in \mathbb{R}$ mit $r < -\frac{3}{2}$, gilt $7 - 3r \geq 0$ und $2r + 3 < 0$, also

$$\begin{aligned} \frac{|7-3r|}{2r+3} &< 1 & | \cdot (2r+3) \\ \iff 7-3r &> 2r+3 & | + 3r-3 \\ \iff 4 &> 5r & | \cdot \frac{1}{5} > 0 \\ \iff \frac{4}{5} &> r. \end{aligned}$$

Also sind alle $r \in \mathbb{R}$ mit $r < -\frac{3}{2}$ und $r < \frac{4}{5}$ Lösungen der Ungleichung.

Die Gesamtlösungsmenge ist

$$\begin{aligned} &\left((-\infty; -\frac{3}{2}) \cap (-\infty; \frac{4}{5}) \right) \\ &\cup \left((-\frac{3}{2}; \frac{7}{3}] \cap (\frac{4}{5}; \infty) \right) \\ &\cup \left((\frac{7}{3}; \infty) \cap (-\infty; 10) \right) \\ &= (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (\frac{4}{5}; \frac{7}{3}] \cup (\frac{7}{3}; 10) \\ &= (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (\frac{4}{5}; 10). \end{aligned}$$

e) $|2z - 5| + |4z + 5| < 9 + |3z|$
 $(-3; -\frac{1}{5}) \cup (1; 3)$

Lösung:

$2z - 5$ wechselt sein Vorzeichen bei $z = \frac{5}{2}$.

$|4z + 5|$ wechselt sein Vorzeichen bei $z = -\frac{5}{4}$.

$3z$ wechselt sein Vorzeichen bei $z = 0$.

Es ergeben sich vier Fälle:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Fall 4} & \text{Fall 3} & & \text{Fall 2} & & \text{Fall 1} & \\ \hline & \frac{5}{4} & 0 & & \frac{5}{2} & & \end{array}$$

Fall 1 ($z \geq \frac{5}{2}$): Für alle $z \in \mathbb{R}$ mit $z \geq \frac{5}{2}$, gilt $2z - 5 \geq 0$, $4z + 5 \geq 0$ und $3z \geq 0$, also

$$\begin{aligned} &|2z - 5| + |4z + 5| < 9 + |3z| \\ \iff 2z - 5 &+ 4z + 5 < 9 + 3z \\ \iff 6z &< 9 + 3z \\ \iff 3z &< 9 \\ \iff z &< 3. \end{aligned}$$

Also sind alle $z \in \mathbb{R}$ mit $z \geq \frac{5}{2}$ und $z < 3$ Lösungen der Ungleichung.

Fall 2 ($0 \leq z < \frac{5}{2}$): Für alle $z \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq z < \frac{5}{2}$, gilt $2z - 5 < 0$, $4z + 5 \geq 0$ und $3z \geq 0$, also

$$\begin{aligned} &|2z - 5| + |4z + 5| < 9 + |3z| \\ \iff -(2z - 5) &+ 4z + 5 < 9 + 3z \\ \iff -2z + 5 &+ 4z + 5 < 9 + 3z \\ \iff 2z + 10 &< 9 + 3z \\ \iff 1 &< z. \end{aligned}$$

Also sind alle $z \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq z < \frac{5}{2}$ und $z > 1$ Lösungen der Ungleichung.

Fall 3 ($-\frac{5}{4} \leq z < 0$): Für alle $z \in \mathbb{R}$ mit $-\frac{5}{4} \leq z < 0$, gilt $2z - 5 < 0$, $4z + 5 \geq 0$ und $3z < 0$, also

$$\begin{aligned} &|2z - 5| + |4z + 5| < 9 + |3z| \\ \iff -(2z - 5) &+ 4z + 5 < 9 - 3z \\ \iff -2z + 5 &+ 4z + 5 < 9 - 3z \\ \iff 2z + 10 &< 9 - 3z \\ \iff 5z &< -1 \\ \iff z &< -\frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Also sind alle $z \in \mathbb{R}$ mit $-\frac{5}{4} \leq z < 0$ und $z < -\frac{1}{5}$ Lösungen der Ungleichung.

Fall 4 ($z < -\frac{5}{4}$): Für alle $z \in \mathbb{R}$ mit $z < -\frac{5}{4}$, gilt $2z - 5 < 0$, $4z + 5 < 0$ und $3z < 0$, also

$$\begin{aligned} &|2z - 5| + |4z + 5| < 9 + |3z| \\ \iff -(2z - 5) &- (4z + 5) < 9 - 3z \\ \iff -2z + 5 &- 4z - 5 < 9 - 3z \\ \iff -6z &< 9 - 3z \\ \iff -9 &< 3z \\ \iff -3 &< z. \end{aligned}$$

Also sind alle $z \in \mathbb{R}$ mit $z < -\frac{5}{4}$ und $z > -3$ Lösungen der Ungleichung.

Die Gesamtlösungsmenge ist

$$\begin{aligned} &\left((-\infty; -\frac{5}{4}) \cap (-3; \infty) \right) \\ &\cup \left([-\frac{5}{4}; 0) \cap (-\infty; -\frac{1}{5}) \right) \\ &\cup \left([0; \frac{5}{2}) \cap (1; \infty) \right) \\ &\cup \left([\frac{5}{2}; \infty) \cap (-\infty; 3) \right) \\ &= (-3; -\frac{5}{4}) \cup [-\frac{5}{4}; -\frac{1}{5}) \cup (1; \frac{5}{2}) \cup [\frac{5}{2}; 3) \\ &= (-3; -\frac{1}{5}) \cup (1; 3). \end{aligned}$$

$$f) \left| \frac{3\alpha - 5}{3 - 2\alpha} \right| \geq 1$$

$$(-\infty; \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}; \frac{8}{5}] \cup [2; \infty)$$

Lösung:

Die Ungleichung ist für $\alpha = \frac{3}{2}$ nicht definiert.

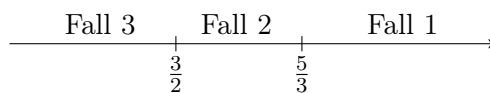
Für alle $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$ gilt

$$\begin{aligned} & \left| \frac{3\alpha - 5}{3 - 2\alpha} \right| \geq 1 \\ \Leftrightarrow & \left| \frac{3\alpha - 5}{3 - 2\alpha} \right| \geq 1 \quad | \cdot |3 - 2\alpha| \\ \Leftrightarrow & |3\alpha - 5| \geq |3 - 2\alpha|. \end{aligned}$$

$3\alpha - 5$ wechselt sein Vorzeichen bei $\alpha = \frac{5}{3}$.

$3 - 2\alpha$ wechselt sein Vorzeichen bei $\alpha = \frac{3}{2}$, wo die Ungleichung nicht definiert ist.

Es ergeben sich drei Fälle:



Fall 1 ($\alpha \geq \frac{5}{3}$): Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \geq \frac{5}{3}$, gilt $3\alpha - 5 \geq 0$ und $3 - 2\alpha < 0$, also

$$\begin{aligned} & \left| \frac{3\alpha - 5}{3 - 2\alpha} \right| \geq 1 \\ \Leftrightarrow & |3\alpha - 5| \geq |3 - 2\alpha| \\ \Leftrightarrow & 3\alpha - 5 \geq -(3 - 2\alpha) \\ \Leftrightarrow & 3\alpha - 5 \geq -3 + 2\alpha \\ \Leftrightarrow & \alpha \geq 2. \end{aligned}$$

Also sind alle $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \geq \frac{5}{3}$ und $\alpha \geq 2$ Lösungen der Ungleichung.

Fall 2 ($\frac{3}{2} < \alpha < \frac{5}{3}$): Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\frac{3}{2} < \alpha < \frac{5}{3}$, gilt $3\alpha - 5 < 0$ und $3 - 2\alpha < 0$, also

$$\begin{aligned} & \left| \frac{3\alpha - 5}{3 - 2\alpha} \right| \geq 1 \\ \Leftrightarrow & |3\alpha - 5| \geq |3 - 2\alpha| \\ \Leftrightarrow & -(3\alpha - 5) \geq -(3 - 2\alpha) \\ \Leftrightarrow & -3\alpha + 5 \geq -3 + 2\alpha \\ \Leftrightarrow & 8 \geq 5\alpha \\ \Leftrightarrow & \frac{8}{5} \geq \alpha. \end{aligned}$$

Also sind alle $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\frac{3}{2} < \alpha < \frac{5}{3}$ und $\alpha \leq \frac{8}{5}$ Lösungen der Ungleichung.

Fall 3 ($\alpha < \frac{3}{2}$): Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \frac{3}{2}$, gilt $3\alpha - 5 < 0$ und $3 - 2\alpha > 0$, also

$$\begin{aligned} & \left| \frac{3\alpha - 5}{3 - 2\alpha} \right| \geq 1 \\ \Leftrightarrow & |3\alpha - 5| \geq |3 - 2\alpha| \\ \Leftrightarrow & -(3\alpha - 5) \geq 3 - 2\alpha \\ \Leftrightarrow & -3\alpha + 5 \geq 3 - 2\alpha \\ \Leftrightarrow & 8 \geq \alpha. \end{aligned}$$

Also sind alle $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \frac{3}{2}$ und $\alpha \leq 8$ Lösungen der Ungleichung.

Die Gesamtlösungsmenge ist

$$\begin{aligned} & ((-\infty; \frac{3}{2}) \cap (-\infty; 8]) \\ & \cup ((\frac{3}{2}; \frac{5}{3}) \cap (-\infty; \frac{8}{5}]) \\ & \cup ([\frac{5}{3}; \infty) \cap [2; \infty)) \\ & = (-\infty; \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}; \frac{8}{5}] \cup [2; \infty). \end{aligned}$$

$$g) \frac{|\beta - 3| + 2\beta - 2}{|5 - 2\beta| - 2} \geq 1$$

$$[\frac{2}{3}; \frac{3}{2}) \cup (\frac{7}{2}; \infty)$$

Lösung:

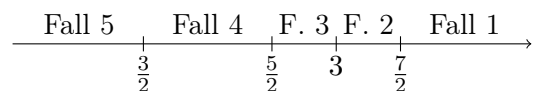
Die Ungleichung ist für $\beta = \frac{3}{2}$ und $\beta = \frac{7}{2}$ nicht definiert.

$\beta - 3$ wechselt sein Vorzeichen bei $\beta = 3$.

$5 - 2\beta$ wechselt sein Vorzeichen bei $\beta = \frac{5}{2}$.

$|5 - 2\beta| - 2$ wechselt sein Vorzeichen bei $\beta = \frac{3}{2}$ und bei $\beta = \frac{7}{2}$.

Es ergeben sich fünf Fälle:



Fall 1 ($\beta > \frac{7}{2}$): Für alle $\beta \in \mathbb{R}$ mit $\beta > \frac{7}{2}$, gilt $\beta - 3 > 0$ und $5 - 2\beta < 0$, also

$$\begin{aligned} & \frac{|\beta - 3| + 2\beta - 2}{|5 - 2\beta| - 2} \geq 1 \\ \Leftrightarrow & \frac{\beta - 3 + 2\beta - 2}{-(5 - 2\beta) - 2} \geq 1 \\ \Leftrightarrow & \frac{3\beta - 5}{2\beta - 7} \geq 1. \end{aligned}$$

Da $\beta > \frac{7}{2}$ ist, bleibt das Ungleichungszeichen beim Multiplizieren mit $(2\beta - 7)$ erhalten und es folgt

$$\begin{aligned} & \frac{|\beta - 3| + 2\beta - 2}{|5 - 2\beta| - 2} \geq 1 \\ \Leftrightarrow & \frac{3\beta - 5}{2\beta - 7} \geq 1 \\ \Leftrightarrow & 3\beta - 5 \geq 2\beta - 7 \\ \Leftrightarrow & \beta \geq -2. \end{aligned}$$

Also sind alle $\beta \in \mathbb{R}$ mit $\beta > \frac{7}{2}$ und $\beta \geq -2$ Lösungen der Ungleichung.

Fall 2 ($3 \leq \beta < \frac{7}{2}$): Für alle $\beta \in \mathbb{R}$ mit $3 \leq \beta < \frac{7}{2}$, gilt $\beta - 3 > 0$ und $5 - 2\beta < 0$, also

$$\begin{aligned} & \frac{|\beta-3|+2\beta-2}{|5-2\beta|-2} \geq 1 \\ \iff & \frac{\beta-3+2\beta-2}{-(5-2\beta)-2} \geq 1 \\ \iff & \frac{3\beta-5}{2\beta-7} \geq 1. \end{aligned}$$

Da $\beta < \frac{7}{2}$ ist, dreht sich das Ungleichungszeichen beim Multiplizieren mit $(2\beta - 7)$ um und es folgt

$$\begin{aligned} & \frac{|\beta-3|+2\beta-2}{|5-2\beta|-2} \geq 1 \\ \iff & \frac{3\beta-5}{2\beta-7} \geq 1 \\ \iff & 3\beta - 5 \leq 2\beta - 7 \\ \iff & \beta \leq -2. \end{aligned}$$

Also sind alle $\beta \in \mathbb{R}$ mit $3 \leq \beta < \frac{7}{2}$ und $\beta \leq -2$ Lösungen der Ungleichung.

Solche $\beta \in \mathbb{R}$ gibt es nicht.

Fall 3 ($\frac{5}{2} \leq \beta < 3$): Für alle $\beta \in \mathbb{R}$ mit $\frac{5}{2} \leq \beta < 3$, gilt $\beta - 3 < 0$ und $5 - 2\beta < 0$, also

$$\begin{aligned} & \frac{|\beta-3|+2\beta-2}{|5-2\beta|-2} \geq 1 \\ \iff & \frac{-(\beta-3)+2\beta-2}{-(5-2\beta)-2} \geq 1 \\ \iff & \frac{\beta+1}{2\beta-7} \geq 1. \end{aligned}$$

Da $\beta < \frac{7}{2}$ ist, dreht sich das Ungleichungszeichen beim Multiplizieren mit $(2\beta - 7)$ um und es folgt

$$\begin{aligned} & \frac{|\beta-3|+2\beta-2}{|5-2\beta|-2} \geq 1 \\ \iff & \frac{\beta+1}{2\beta-7} \geq 1 \\ \iff & \beta + 1 \leq 2\beta - 7 \\ \iff & 8 \leq \beta. \end{aligned}$$

Also sind alle $\beta \in \mathbb{R}$ mit $\frac{5}{2} \leq \beta < 3$ und $\beta \geq 8$ Lösungen der Ungleichung.

Solche $\beta \in \mathbb{R}$ gibt es nicht.

Fall 4 ($\frac{3}{2} < \beta < \frac{5}{2}$): Für alle $\beta \in \mathbb{R}$ mit $\frac{3}{2} < \beta < \frac{5}{2}$, gilt $\beta - 3 < 0$ und $5 - 2\beta > 0$, also

$$\begin{aligned} & \frac{|\beta-3|+2\beta-2}{|5-2\beta|-2} \geq 1 \\ \iff & \frac{-(\beta-3)+2\beta-2}{5-2\beta-2} \geq 1 \\ \iff & \frac{\beta+1}{3-2\beta} \geq 1. \end{aligned}$$

Da $\beta > \frac{3}{2}$ ist, dreht sich das Ungleichungszeichen beim Multiplizieren mit $(3 - 2\beta)$ um und es folgt

$$\begin{aligned} & \frac{|\beta-3|+2\beta-2}{|5-2\beta|-2} \geq 1 \\ \iff & \frac{\beta+1}{3-2\beta} \geq 1 \\ \iff & \beta + 1 \leq 3 - 2\beta \\ \iff & 3\beta \leq 2 \\ \iff & \beta \leq \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Also sind alle $\beta \in \mathbb{R}$ mit $\frac{3}{2} < \beta < \frac{5}{2}$ und $\beta \leq \frac{2}{3}$ Lösungen der Ungleichung.

Solche $\beta \in \mathbb{R}$ gibt es nicht.

Fall 5 ($\beta < \frac{3}{2}$): Für alle $\beta \in \mathbb{R}$ mit $\beta < \frac{3}{2}$, gilt $\beta - 3 < 0$ und $5 - 2\beta > 0$, also

$$\begin{aligned} & \frac{|\beta-3|+2\beta-2}{|5-2\beta|-2} \geq 1 \\ \iff & \frac{-(\beta-3)+2\beta-2}{5-2\beta-2} \geq 1 \\ \iff & \frac{\beta+1}{3-2\beta} \geq 1. \end{aligned}$$

Da $\beta < \frac{3}{2}$ ist, bleibt das Ungleichungszeichen beim Multiplizieren mit $(3 - 2\beta)$ erhalten und es folgt

$$\begin{aligned} & \frac{|\beta-3|+2\beta-2}{|5-2\beta|-2} \geq 1 \\ \iff & \frac{\beta+1}{3-2\beta} \geq 1 \\ \iff & \beta + 1 \geq 3 - 2\beta \\ \iff & 3\beta \geq 2 \\ \iff & \beta \geq \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Also sind alle $\beta \in \mathbb{R}$ mit $\beta < \frac{3}{2}$ und $\beta \geq \frac{2}{3}$ Lösungen der Ungleichung.

Die Gesamtlösungsmenge ist

$$\begin{aligned} & \left((-\infty; \frac{3}{2}) \cap [\frac{2}{3}; \infty) \right) \\ & \cup \left((\frac{3}{2}; \frac{5}{2}) \cap (-\infty; \frac{2}{3}] \right) \\ & \cup \left([\frac{5}{2}; 3) \cap [8; \infty) \right) \\ & \cup \left([3; \frac{7}{2}) \cap (-\infty; -2] \right) \\ & \cup \left((\frac{7}{2}; \infty) \cap [-2; \infty) \right) \\ & = [\frac{2}{3}; \frac{3}{2}) \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup (\frac{7}{2}; \infty) \\ & = [\frac{2}{3}; \frac{3}{2}) \cup (\frac{7}{2}; \infty). \end{aligned}$$

ArithLogik/BinKoeff



ArithLogik/BinKoeff/Ag_BinKoeff_AlleAchtUeberKMitFormelUndPascalBerechnen.tex

Aufgabe 2.4 (Binomialkoeffizienten — Berechnungsformel und Pascal'sches-Dreieck)

5.2.2

Ermitteln Sie für alle $k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ die Binomialkoeffizienten $\binom{8}{k}$

$$\binom{8}{0} = 1, \binom{8}{1} = 8, \binom{8}{2} = 28, \binom{8}{3} = 56, \binom{8}{4} = 70, \binom{8}{5} = 56, \binom{8}{6} = 28, \binom{8}{7} = 8, \binom{8}{8} = 1$$

a) mittels der Berechnungsformel!

Lösung:

Es gilt

$$\begin{aligned} \binom{8}{0} &= \frac{8!}{0! \cdot (8-0)!} = \frac{8!}{1 \cdot 8!} = 1, & \binom{8}{8} &= \frac{8!}{8! \cdot (8-8)!} = \frac{8!}{(8-0)! \cdot 0!} = 1, \\ \binom{8}{1} &= \frac{8!}{1! \cdot (8-1)!} = \frac{8 \cdot 7!}{1 \cdot 7!} = 8, & \binom{8}{7} &= \frac{8!}{7! \cdot (8-7)!} = \frac{8!}{(8-1)! \cdot 1!} = 8, \\ \binom{8}{2} &= \frac{8!}{2! \cdot (8-2)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{2 \cdot 1 \cdot 6!} = 4 \cdot 7 = 28, & \binom{8}{6} &= \frac{8!}{6! \cdot (8-6)!} = \frac{8!}{(8-2)! \cdot 2!} = 28, \\ \binom{8}{3} &= \frac{8!}{3! \cdot (8-3)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5!} = 8 \cdot 7 \cdot 1 = 56, & \binom{8}{5} &= \frac{8!}{5! \cdot (8-5)!} = \frac{8!}{(8-3)! \cdot 3!} = 56 \end{aligned}$$

und $\binom{8}{4} = \frac{8!}{4! \cdot (8-4)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!} = 2 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 5 = 70.$

b) mit Hilfe des Pascal'schen Dreiecks!

Lösung:

[illegible]

ArithLogik/BinKoeff/Ag_BinKoeff_FakUndBinKoeffKennenlernen.tex

Aufgabe 2.5 (Fakultät und Binomialkoeffizient)

SPF

Seien $\ell \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}$.

a) Berechnen Sie $5!$ und $(3!)!$!

120 und 720

Lösung: Es gilt

und $(3!)! = (1 \cdot 2 \cdot 3)! = 6! = 5! \cdot 6 = 120 \cdot 6 = 720$.

b) Berechnen Sie $\binom{10}{4}$ und $\binom{12}{5}$!

210 und 792

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}\binom{10}{4} &= \frac{10!}{4! \cdot (10-4)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6!} = 10 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 7 = 30 \cdot 7 = 210 \\ \text{und} \quad \binom{12}{5} &= \frac{12!}{5! \cdot (12-5)!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7!} \\ &= 1 \cdot 11 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 8 = 99 \cdot 8 = (100 - 1) \cdot 8 = 800 - 8 = 792.\end{aligned}$$

c) Ist $(m + \ell)!$ dasselbe wie $(m! + \ell!)$?

nein

Lösung:

Zum Beispiel gilt für $m = 3$ und $\ell = 5$

$$(3 + 5)! = 8! = 40\,320 \neq 126 = 6 + 120 = 3! + 5!.$$

Zum Beweis der Ungleichheit von $(m + \ell)!$ und $m! + \ell!$ — sofern ein solcher verlangt wird — kann man eine Fallunterscheidung und eine vollständige Induktion heranziehen:

Fall 1 ($\ell = 0$): Für $\ell = 0$ gilt $(m + \ell)! = (m + 0)! = m! \neq m! + 1 = m! + 0! = m! + \ell!$.

Fall 2 ($\ell \in \mathbb{N}$): Für $\ell \neq 0$ machen wir eine vollständige Induktion über m :

Behauptung: Es gilt $(m + \ell)! > m! + \ell!$.

Induktionsanfang: ($m = 2$):

Für $\ell \neq 0$ ist wegen $\ell! \geq 1$

$$\begin{aligned}(2 + \ell)! &= (\ell + 2)! = (\ell + 2) \cdot (\ell + 1) \cdot \ell! \geq 3 \cdot 2 \cdot \ell! = 6\ell! = 5\ell! + \ell! \geq 5 + \ell! \\ &> 2 + \ell! = 2! + \ell!.\end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung: ($m = M$):

Sei $M \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ eine Zahl, für die $(M + \ell)! > M! + \ell!$ bereits gezeigt ist.

Induktionsschluss: ($m = M + 1$):

Dann gilt

$$\begin{aligned}(M + 1 + \ell)! &= (M + \ell + 1)! = (M + \ell + 1) \cdot (M + \ell)! \\ &\stackrel{\text{IV}}{>} (M + \ell + 1) \cdot (M! + \ell!) = (M + \ell + 1) \cdot M! + (M + \ell + 1) \cdot \ell! \\ &> (M + 1) \cdot M! + 1 \cdot \ell! = (M + 1)! + \ell!.\end{aligned}$$

d) In welchem Fall ist $(m \cdot \ell)!$ dasselbe wie $(m! \cdot \ell!)$?

nur für $\ell = 1$

Lösung:

Für $\ell = 1$ gilt

$$(m \cdot \ell)! = (m \cdot 1)! = m! = m! \cdot 1 = m! \cdot 1! = m! \cdot \ell!.$$

Zum Beispiel gilt für $m = 4$ und $\ell = 2$

$$(4 + 2)! = 8! = 40\,320 \neq 48 = 24 \cdot 2 = 4! \cdot 2!.$$

Zum Beweis der Ungleichheit von $(m + \ell)!$ und $m! \cdot \ell!$ für $\ell \neq 1$ — sofern ein solcher verlangt wird — kann man eine Fallunterscheidung und eine vollständige Induktion heranziehen:

Fall 1 ($\ell = 0$): Für $\ell = 0$ gilt $(m \cdot \ell)! = (m \cdot 0)! = 0! = 1 < m! = m! \cdot 1 = m! \cdot 0! = m! \cdot \ell!$ wegen $m \geq 2$, also $m! \geq 2$.

Fall 2 ($\ell \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$): Für $0 \neq \ell \neq 1$ machen wir eine vollständige Induktion über m :

Behauptung: Es gilt $(m \cdot \ell)! > m! \cdot \ell!$.

Induktionsanfang: ($m = 2$):

Mit $0 \neq \ell \neq 1$ folgt wegen $\ell! \geq 1$ und $\ell \geq 2$

$$(2 \cdot \ell)! = (2\ell)! = \underbrace{(2\ell) \cdot \dots \cdot (\ell + 1)}_{\ell \text{ Faktoren}} \cdot \ell! \geq 2\ell \cdot \ell! \geq 4 \cdot \ell! > 2 \cdot \ell! = 2! \cdot \ell!.$$

Induktionsvoraussetzung: ($m = M$):

Sei $M \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ eine Zahl, für die $(M \cdot \ell)! > M! \cdot \ell!$ bereits gezeigt ist.

Induktionsschluss: ($m = M + 1$):

Dann gilt wegen $0 \neq \ell \neq 1$, also $\ell \geq 2$

$$\begin{aligned} ((M + 1) \cdot \ell)! &= (M \cdot \ell + \ell)! = \underbrace{(M \cdot \ell + \ell) \cdot \dots \cdot (M \cdot \ell + 1)}_{\ell \text{ Faktoren}} \cdot (M \cdot \ell)! \\ &\geq (M \cdot \ell + 1) \cdot (M \cdot \ell)! \stackrel{\text{IV}}{>} (M \cdot \ell + 1) \cdot (M! \cdot \ell!) \\ &> (M \cdot 1 + 1) \cdot M! \cdot \ell! = (M + 1) \cdot M! \cdot \ell! = (M + 1)! \cdot \ell!. \end{aligned}$$

e) Kürzen Sie $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ so weit wie möglich!

$$(n+1) \cdot n$$

Lösung:

Die rekursive Darstellung der Fakultätsfunktion liefert

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{\ell! \cdot (n+1)}{(n-1)!} = \frac{(n-1)! \cdot n \cdot (n+1)}{(n-1)!} = n \cdot (n+1).$$

f) Bringen Sie den Term $\frac{n^3 - 7n - 6}{(n+2)!} - \frac{1}{(n-1)!}$ auf einen Bruch!

$$\frac{-3}{n!}$$

Lösung:

Die rekursive Darstellung der Fakultätsfunktion liefert

$$\begin{aligned} \frac{n^3 - 7n - 6}{(n+2)!} - \frac{1}{(n-1)!} &= \frac{n^3 - 7n - 6}{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1)!} - \frac{1}{(n-1)!} \\ &= \frac{n^3 - 7n - 6 - (n+2) \cdot (n+1) \cdot n}{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1)!} = \frac{n^3 - 7n - 6 - (n^2 + 2n + n + 2) \cdot n}{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n!} \\ &= \frac{n^3 - 7n - 6 - n^3 - 3n^2 - 2n}{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n!} = \frac{-3n^2 - 9n - 6}{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n!} \\ &= \frac{-3 \cdot (n^2 + 3n + 2)}{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n!} = \frac{-3 \cdot (n^2 + 2n + n + 2)}{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n!} \\ &= \frac{-3 \cdot (n+2) \cdot (n+1)}{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n!} = \frac{-3}{n!}. \end{aligned}$$

g) Wollen Sie wissen, warum Binomialkoeffizienten mit dem Pascal'schen Dreieck berechnet werden können? Rechnen Sie $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ nach!

Lösung:

Für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gilt

$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n - (k-1))!} + \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k+1)!} + \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \\ &= \frac{n! \cdot k + n! \cdot (n-k+1)}{k! \cdot (n-k+1)!} = \frac{n! \cdot (k+n-k+1)}{k! \cdot (n+1-k)!} \\ &= \frac{n! \cdot (n+1)}{k! \cdot (n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k! \cdot ((n+1)-k)!} = \binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$

Aufgabenblatt 3

ArithLogik/Geometrie



ArithLogik/Geometrie/Ag_PythagorasUndLGS_BoxFalten.tex

Aufgabe 3.6 (Falten einer Box aus Papier)

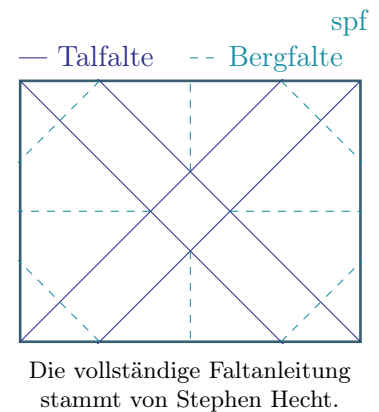
Mit der rechts stehenden Falthanleitung kann man aus einem rechteckigen Papier der Breite $b \in \mathbb{R}$ und der Länge $\ell \in \mathbb{R}$ mit $0 < b < \ell < 2b$ eine quaderförmige oben offene Box falten.

- a) Welche Voraussetzungen muss man an b und ℓ stellen, damit die Box breiter wird als hoch?

$$0 < \frac{3}{2} \cdot b < \ell < 2b$$

- b) Welche Seitenlängen muss das Papier haben, damit die fertige Box die Maße $e \times e \times \pi$ bekommt, wobei $e \approx 2.71828$ die Euler'sche Zahl und $\pi \approx 3.14159$ die Kreiszahl bezeichnen?

$$b = \sqrt{2} \cdot (\pi + e), \ell = \sqrt{2} \cdot (\pi + 2e)$$



Lösung:

Das mittlere Quadrat aus der Falthanleitung wird zur Bodenfläche, die vier strahlenförmig abgehenden Rechteckflächen bilden die „Wände“ der fertigen Box (siehe die Zeichnung rechts). Die Seitenlänge des Grundquadrats bezeichnen wir mit G , die Höhe der Box mit H .

Da die von der Ecke ausgehenden durchgezogenen Linien den Eckwinkel jeweils halbieren, befindet sich die Markierung „P“ genau b weit von der linken oberen Ecke entfernt, weshalb die rechts von P liegende Strecke noch $\ell - b$ lang ist.

Diese Strecke bildet die Hypotenuse eines rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreiecks mit Kathetenlänge G . Der Satz des Pythagoras liefert

$$G^2 + G^2 = (\ell - b)^2 \iff 2G^2 = (\ell - b)^2 \iff G = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\ell - b).$$

Das mittlere Dreieck ist ebenfalls rechtwinklig und gleichschenkl. Es hat die Kathetenlänge H und die Hypotenusenlänge $\ell - 2 \cdot (\ell - b)$. Mit dem Satz des Pythagoras folgt wegen $\ell < 2b$ und $H > 0$

$$H^2 + H^2 = (\ell - 2\ell + 2b)^2 \iff 2H^2 = (2b - \ell)^2 \iff H = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (2b - \ell).$$

Damit die Box breiter als hoch wird, muss also gelten

$$\begin{aligned} G > H &\iff \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\ell - b) > \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (2b - \ell) && \xLeftrightarrow{\cdot \sqrt{2}} \ell - b > 2b - \ell \\ &\xLeftrightarrow{+b+\ell} 2\ell > 3b && \xLeftrightarrow{\cdot \frac{1}{2}} \ell > \frac{3b}{2}. \end{aligned}$$

Werden G und H vorgegeben, so können b und ℓ also aus dem folgenden linearen Gleichungssystem berechnet werden:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & G \\ \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & H \end{array} \right) &\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ + \end{pmatrix} \cdot \sqrt{2} &\iff \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & \sqrt{2} \cdot G \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & H + G \end{array} \right) &\cdot \begin{pmatrix} + \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &&&\iff \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \sqrt{2} \cdot (H + 2G) \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \cdot (H + G) \end{array} \right) \end{aligned}$$

Damit folgt

$$b = \sqrt{2} \cdot (H + G) \quad \text{und} \quad \ell = \sqrt{2} \cdot (H + 2G).$$



ArithLogik/Geometrie/Ag_Pythagoras_DINPapierEckenAufeinanderfalten.tex

Aufgabe 3.7 (DIN-A-Papier knicken)

spf

a) Die A-Serie der DIN-Papiere basiert auf vier Vorgaben ($n \in \mathbb{N}_0$):

- Ein DIN-A0-Papier ist 1 m^2 groß.
- Ein DIN-A n - und ein DIN-A($n + 1$)-Papier haben eine gleichlange Seite.
- Ein DIN-A n -Papier ist doppelt so groß wie ein DIN-A($n + 1$)-Papier.
- Alle Papiere sind rechteckig und haben das gleiche Seitenverhältnis.



Berechnen Sie das Seitenverhältnis der Papiere der DIN-A-Serie!

$$1 : \sqrt{2}$$

Lösung:

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ der Faktor, mit dem man die Länge der kleineren Seite multiplizieren muss, um die Länge der größeren Seite zu erhalten.

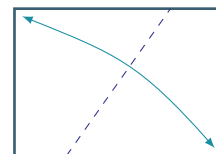
Sei $\ell \in \mathbb{R}$ mit $\ell > 0$ die Länge der kurzen Seite eines DIN-A-Papiers. Dann ist die lange Seite $x\ell$ lang, während die kurze Seite des nächstkleineren DIN-A-Papiers $\frac{\ell}{x}$ lang ist. Da das nächstkleinere Papier den halben Flächeninhalt hat, muss also $\frac{1}{2} \cdot \ell \cdot x\ell = \ell \cdot \frac{\ell}{x}$ gelten.

Das liefert $x^2 = 2$, bzw. $x = \sqrt{2}$.

b) Wenn Sie zwei gegenüberliegende Ecken eines Papiers der DIN-A-Serie aufeinander falten, werden die langen Seiten des Papiers in zwei Teile geteilt.

Geben Sie eine Vermutung an, in welchem Längen-Verhältnis die beiden Teile zueinander stehen!

Können Sie Ihre Vermutung beweisen?



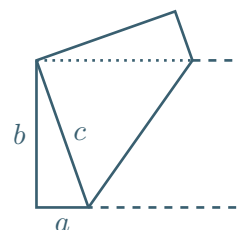
$$3 : 1$$

Lösung:

Nennen wir im beim Falten entstehenden rechtwinkligen Dreieck die kurze Kathete a , die lange Kathete b und die Hypothetense c , so gilt $a^2 + b^2 = c^2$.

$a + c$ ist dann die lange Seite des (ungefalteten) Papiers. Wegen des Seitenverhältnisses bei DIN-A-Papieren muss also $\frac{a+c}{b} = \sqrt{2}$ sein.

Wir wollen c als Vielfaches von a darstellen.



Aus der Seitenverhältnis-Gleichung ergibt sich $c = \sqrt{2} \cdot b - a$, was quadriert zu $c^2 = 2b^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot ab + a^2$ wird. Gleichgesetzt mit $a^2 + b^2 = c^2$ ergibt sich $a^2 + b^2 = 2b^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot ab + a^2$ bzw. $2 \cdot \sqrt{2} \cdot ab = b^2$, also $b = 2 \cdot \sqrt{2}a$.

Eingesetzt in die Seitenverhältnis-Gleichung bekommen wir $\frac{a+c}{2 \cdot \sqrt{2}a} = \sqrt{2}$, also $a + c = 4a$ bzw. $c = 3a$.



ArithLogik/Geometrie/Ag_Winkel_GradUndBogenmassIneinanderUmrechnen.tex

Aufgabe 3.8 (Grad- und Bogenmaß)

Rechnen Sie die folgenden Winkel vom Grad- ins Bogenmaß bzw. vom Bogen- ins Gradmaß um!

Gradmaß	20°		-96°	118.6°			297°	371.5°	
Bogenmaß		$\frac{\pi}{3}$			$-\frac{2}{7} \cdot \pi$	5.621			$-\frac{2}{37} \cdot \pi$

Hinweis: Sie können dazu einen Taschenrechner oder eine Mathe-App benutzen.

$$\begin{array}{lllll}
 20^\circ \triangleq \frac{\pi}{9} & 60^\circ \triangleq \frac{\pi}{3} & -96^\circ \triangleq -\frac{8\pi}{15} & 118.6^\circ \triangleq \frac{593\pi}{900} & -51.43^\circ \approx -\frac{2\pi}{7} \\
 322.06^\circ \approx 5.621 & & 297^\circ \triangleq \frac{33\pi}{20} & 371.5^\circ \triangleq \frac{743\pi}{360} & -9.729^\circ \approx -\frac{2\pi}{37}
 \end{array}$$

Lösung:

Zur Umrechnung der Winkelmaße wird die Beziehung $\frac{x}{2\pi} = \frac{\alpha}{360^\circ}$ verwendet, in der x das Bogenmaß und α das Gradmaß des betrachteten Winkels bezeichnet.

Durch Umstellen obiger Gleichung erhält man die benötigten Umrechnungsformeln

$$x = 2\pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot \pi \quad \text{bzw.} \quad \alpha = \frac{x}{2\pi} \cdot 360^\circ = \frac{x}{\pi} \cdot 180^\circ.$$

Gradmaß	20°	60°	−96°	118.6°	−51.4°	322.06°	297°	371.5°	−9.73°
Bogenmaß	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{8\pi}{15}$	$\frac{593\pi}{900}$	$-\frac{2}{7} \cdot \pi$	5.621	$\frac{33\pi}{20}$	$\frac{743\pi}{360}$	$-\frac{2}{37} \cdot \pi$

↓ ArithLogik/Geometrie/Text_LinUnabh_PapierseiteDritteln.txt

Aufgabe 3.9 ()

Die Aufgabe
VektorraumRn/LinearUnabhaengigBasis/Ag_LinUnabh_PapierseiteDritteln
aus der Aufgabensammlung zur Linearen Algebra kann auch mit Hilfe der
Strahlensätze bearbeitet werden.



ArithLogik/Logik/Ag_Logik_AussagenNegieren.tex

Aufgabe 4.10 (Negation von Aussagen)

jgl

Verneinen Sie die folgenden Aussagen:

- a) A : Weiß ist keine Farbe und jedes Bild ist von Hand gemalt. $\neg A$: Weiß ist eine Farbe oder es gibt ein Bild, das nicht von Hand gemalt ist.

Lösung: $\neg A$: Weiß ist eine Farbe oder es gibt ein Bild, das nicht von Hand gemalt ist.

- b) B : Alle Fische leben im Wasser. $\neg B$: Es gibt Fische, die nicht im Wasser leben.

Lösung: $\neg B$: Es gibt Fische, die nicht im Wasser leben.

- c) C : Es gibt eine ganzzahlige Quadratzahl, die gerade ist. $\neg C$: Alle ganzzahligen Quadratzahlen sind ungerade.

Lösung: $\neg C$: Alle ganzzahligen Quadratzahlen sind ungerade.

- d) D : Jede natürliche Zahl ist größer als 1. $\neg D$: Es gibt eine natürliche Zahl, die kleiner oder gleich 1 ist.

Lösung: $\neg D$: Es gibt eine natürliche Zahl, die nicht größer als 1 ist.

Oder: Es gibt eine natürliche Zahl, die kleiner oder gleich 1 ist.



ArithLogik/Logik/Ag_Logik_Beweismethoden.tex

Aufgabe 4.11 (Beweismethoden)

Zeigen Sie die Gültigkeit der nachstehenden Aussagen:

- a) mit Fallunterscheidung: $\forall n \in \mathbb{N} : 3 \text{ teilt } n \cdot \text{ggT}(n^2 - 3n - 1, 3)$.

Lösung:

Grundbereich sind die natürlichen Zahlen. Somit ist zu zeigen, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl 3 ein Teiler von $n \cdot \text{ggT}(n^2 - 3n - 1, 3)$ ist. Dazu wird eine Fallunterscheidung gemäß der Teilbarkeit durch 3 vorgenommen. Sei also n eine natürliche Zahl. Dann gilt:

1. Fall: 3 teilt n :

Dann ist 3 auch ein Teiler von $n \cdot \text{ggT}(n^2 - 3n - 1, 3)$.

2. Fall: 3 teilt n nicht:

Hier ist $n = 3q + r$ mit $r = 1$ oder $r = 2$. Folglich ist

$$\begin{aligned} n^2 - 3n - 1 &= n(n - 3) - 1 = (3q + r)(3q + r - 3) - 1 \\ &= (3(q - 1) + r)(3q + r) - 1 \\ &= 3(q - 1)(3q + r) + 3qr + r^2 - 1 \\ &= 3[(q - 1)(3q + r) + qr] + r^2 - 1. \end{aligned}$$

Wenn $r = 1$ ist, dann ist $r^2 - 1 = 1 - 1 = 0$, sodass 3 ein Teiler von $n^2 - 3n - 1$ ist.

Wenn $r = 2$ ist, dann ist $r^2 - 1 = 4 - 1 = 3$, sodass 3 auch hier ein Teiler von $n^2 - 3n - 1$ ist.

Somit ist für alle Fälle von r dann 3 ein Teiler von $n^2 - 3n - 1$ und deshalb gilt $\text{ggT}(n^2 - 3n - 1, 3) = 3$.

Folglich ist 3 ein Teiler von $n \cdot 3 = n \cdot (n^2 - 3n - 1)$.

Aus der Fallunterscheidung ergibt sich, dass die zu zeigende Aussage gilt.

- b) direkt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -23$: $\sqrt{2x+46} - 2x = 4 \implies x \in \{\frac{3}{2}, -5\}$.

Frage: Was ist noch zu zeigen, um die Lösungsmenge der Gleichung anzugeben? Bestimmen Sie diese.

Lösung:

Sei $x \in \mathbb{R}$. Aus $\sqrt{2x+46} - 2x = 4$ wird direkt $x \in \{\frac{3}{2}, -5\}$ gezeigt:

$$\begin{array}{lll}
 & \sqrt{2x+46} - 2x = 4 & | + 2x \\
 \iff & \sqrt{2x+46} = 2x + 4 & | (\cdot)^2 \\
 \implies & 2x + 46 = (2x + 4)^2 & \\
 \iff & 2x + 46 = 4x^2 + 16x + 16 & | - 2x - 46 \\
 \iff & 0 = 4x^2 + 14x - 30 & | : 2 \\
 \iff & 0 = 2x^2 + 7x - 15 &
 \end{array}$$

Man beachte, dass das Quadrieren im zweiten Schritt *keine* Äquivalenzumformung auf $\mathbb{R}$ ist. Die quadratische Gleichung $0 = 2x^2 + 7x - 15$ kann man mit der Mitternachtsformel, der pq -Formel oder quadratischem Ergänzen lösen:

$$\begin{aligned}
 2x^2 + 7x - 15 &= 2 \left(x^2 + 2 \cdot \frac{7}{4}x + \frac{7^2}{4^2} - \frac{49}{16} \right) - 15 = 2 \left(x + \frac{7}{4} \right)^2 - \frac{49}{8} - 15 \\
 &= 2 \left(x + \frac{7}{4} \right)^2 - \frac{169}{8} \\
 &= 2 \left(\left(x + \frac{7}{4} \right)^2 - \frac{169}{16} \right) \\
 &= 2 \left(x + \frac{7+13}{4} \right) \cdot \left(x - \frac{7-13}{4} \right) \\
 &= 2 (x + 5) \cdot \left(x - \frac{3}{2} \right)
 \end{aligned}$$

Wir erkennen, dass $\frac{3}{2}$ und -5 die beiden Nullstellen sind. Es folgt somit $x \in \{\frac{3}{2}, -5\}$.

Wir bezeichnen jetzt mit L die Lösungsmenge der ursprünglichen Gleichung, das heißt, die Menge aller reellen Zahlen x , für die die Gleichung

$$A(x) : \sqrt{2x+46} - 2x = 4$$

wahr ist. Nach obigem Ergebnis ist $L \subseteq \{\frac{3}{2}, -5\}$. Um L zu bestimmen, muss somit noch überprüft werden, ob $A(-5)$ bzw. $A(\frac{3}{2})$ wahr sind. Da $A(-5) : \sqrt{2(-5)+46} - 2(-5) = 4$ bzw. $A(-5) : 6 + 10 = 4$ falsch und $A(\frac{3}{2}) : \sqrt{2 \cdot \frac{3}{2} + 46} - 2 \cdot \frac{3}{2} = 4$ bzw. $A(\frac{3}{2}) : 7 - 3 = 4$ wahr ist, ist somit $L = \{\frac{3}{2}\}$ die Lösungsmenge von $A(x)$.

- c) indirekt für alle $n \in \mathbb{Z}$: $3 \text{ teilt } n^2 \implies 3 \text{ teilt } n$.

Lösung:

Grundbereich sind die ganzen Zahlen. Eine Zahl n ist durch 3 teilbar, wenn es eine ganze Zahl q mit $n = 3q$ gibt.

Es ist 3 kein Teiler von n , wenn $n \neq 3p$ für *alle* p gilt, also $n \neq 3, 6, 9, \dots$. Daher gibt es eine Zahl q mit $n = 3q + 1$ oder $n = 3q + 2$.

Beweis der Behauptung: Es soll mittels Kontraposition gezeigt werden, dass die Aussage

$$A : 3 \text{ teilt } n^2$$

die Aussage

$$B : 3 \text{ teilt } n.$$

impliziert. Dazu wird $\neg B \Rightarrow \neg A$ gezeigt:

- Es gelte $\neg B$: Es ist 3 kein Teiler von n .
- Folglich gibt ein q mit $n = 3q + 1$ oder $n = 3q + 2$, wie vorab nachgewiesen wurde.
 - (i) Fall: $n = 3q + 1$
Dann ist $n^2 = (3q + 1)^2 = 9q^2 + 6q + 1 = 3(3q^2 + 2q) + 1$. Somit ist 3 kein Teiler von n^2 . In *diesem* Fall gilt also $\neg A$.
 - (ii) Fall: $n = 3q + 2$
Dann ist $n^2 = (3q + 2)^2 = 9q^2 + 12q + 4 = (9q^2 + 12q + 3) + 1 = 3(3q^2 + 4q + 1) + 1$.
Somit ist 3 auch hier kein Teiler von n^2 . Daher gilt in *diesem* Fall ebenfalls $\neg A$.
- Somit gilt in *allen* Fällen $\neg A$.
- Damit ist gezeigt, dass aus $\neg B$ die Aussage $\neg A$ folgt. Kontraposition ergibt, dass $A \Rightarrow B$ gilt, womit die Behauptung gezeigt ist.

d) mittels Widerspruch, dass $\sqrt{3}$ irrational ist.

Lösung:

Es wird mittels Widerspruch gezeigt, dass es keine ganzen Zahlen p und q mit $\frac{p}{q} = \sqrt{3}$ gibt. Dazu wird angenommen, dass die Aussage falsch sei, und es somit ganze Zahlen p und q mit $\frac{p}{q} = \sqrt{3}$ gäbe. Es kann davon ausgegangen werden, dass $\text{ggT}(p, q) = 1$ gilt; anderenfalls wird der Bruch mit dem gemeinsamen Teiler gekürzt.

Dann ist $p^2 = q^2 \cdot 3$ (§). Das heißt, 3 ist ein Teiler von p^2 . Folglich ist 3 auch ein Teiler von p , wie oben gezeigt wurde. Somit gibt es eine ganze Zahl z mit $p = 3z$. Einsetzen in (§) ergibt $3 \cdot 3z^2 = q^2 \cdot 3$, woraus

$$q^2 = 3 \cdot z^2$$

folgt. Wie eben folgt, dass 3 ein Teiler von q ist. Somit ist 3 ein gemeinsamer Teiler von p und q , das heißt, es ist $\text{ggT}(p, q) \geq 3$; dies ist ein Widerspruch zu $\text{ggT}(p, q) = 1$.

Folglich muss die Annahme falsch gewesen sein und somit die Negation davon richtig: Es gibt also keine ganzen Zahlen p und q mit $\frac{p}{q} = \sqrt{3}$.



ArithLogik/Logik/Ag_Logik_Beweismethoden2.tex

Aufgabe 4.12 (Beweismethoden)

vr

Zeigen Sie die Gültigkeit der nachstehenden Aussagen.

a) Mit einer Kontraposition:

Seien $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Es gilt: $\left(\sum_{k=1}^n |x_k| = 0 \right) \implies (x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0)$.

Lösung:

Die Aussagen sind hier:

$$A: \left(\sum_{k=1}^n |x_k| = 0 \right)$$

$$B: (x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0)$$

$$\neg A: \left(\sum_{k=1}^n |x_k| \neq 0 \right)$$

$$\neg B: (\exists i \in \{1, \dots, n\} : x_i \neq 0)$$

Kontraposition: zeige, dass $\neg B \implies \neg A$.

Angenommen, die Aussage B ist nicht wahr. Dann existiert ein $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ so dass $x_i = \alpha \neq 0$.
Für die Summe gilt dann

$$\sum_{k=1}^n |x_k| = \underbrace{\sum_{k=1}^{i-1} |x_k|}_{\geq 0} + |x_i| + \underbrace{\sum_{k=i+1}^n |x_k|}_{\geq 0} \stackrel{|\cdot| \geq 0}{\geq} 0 + |x_i| + 0 = |\alpha| \stackrel{\alpha \neq 0}{>} 0$$

Daraus folgt $\sum_{k=1}^n |x_k| > 0$ insbesondere $\sum_{k=1}^n |x_k| \neq 0$ was genau die Aussage $\neg A$ ist.

Also gilt $\neg B \implies \neg A$ und damit $A \implies B$ ist wahr.

b) Mit einem Widerspruch:

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 + ax$.

Es gilt: $(\forall x \in \mathbb{R}: f'(x) > 0) \implies (\forall x \in \mathbb{R}: (f(x) = 0) \implies (x = 0))$.

(D.h., falls die Ableitung von f überall positiv ist, ist Null die einzige mögliche Nullstelle.)

Lösung:

Aussagen:

$$A: (\forall x \in \mathbb{R}: f'(x) > 0) \quad , \quad B: (\forall x \in \mathbb{R}: (f(x) = 0) \implies (x = 0))$$

Zu zeigen ist dass $A \implies B$ wahr ist. Mit einem Widerspruchsbeweis gilt

$$(A \implies B) \iff \neg(A \wedge \neg B).$$

Verneine zuerst die Aussage $B: \forall x \in \mathbb{R}: (B_1 \implies B_2)$ mit

$$B_1: f(x) = 0 \quad , \quad B_2: x = 0.$$

Verneinung des Allquantors:

$$\neg B \iff \neg(\forall x \in \mathbb{R}: (B_1 \implies B_2)) \iff \exists x_* \in \mathbb{R}: \neg(B_1 \implies B_2)$$

Verneinung der Implikation:

$$\neg(B_1 \implies B_2) \iff B_1 \wedge \neg(B_2) \iff (f(x_*) = 0) \wedge (x_* \neq 0).$$

Verneinung der gesamten Aussage B :

$$\neg B \iff \exists x_* \in \mathbb{R}: \neg(B_1 \implies B_2) \iff \exists x_* \in \mathbb{R}: ((f(x_*) = 0) \wedge (x_* \neq 0))$$

$\stackrel{\text{umgeschrieben}}{\iff} \exists x_* \neq 0: f(x_*) = 0.$

Damit ist

$$\begin{aligned} A \wedge \neg B &\iff (\forall x \in \mathbb{R}: f'(x) > 0) \wedge (\exists x_* \neq 0: f(x_*) = 0) \\ &\iff (\forall x \in \mathbb{R}: (x^3 + ax)' > 0) \wedge (\exists x_* \neq 0: x_*^3 + ax_* = 0) \\ &\iff (\forall x \in \mathbb{R}: 3x^2 + a > 0) \wedge (\exists x_* \neq 0: x_*(x_*^2 + a) = 0) \\ &\stackrel{x_* \neq 0}{\iff} (\forall x \in \mathbb{R}: 3x^2 + a > 0) \wedge (\exists x_* \neq 0: x_*^2 + a = 0) \\ &\iff (\exists x_* \neq 0: x_*^2 + a = 0) \wedge (\forall x \in \mathbb{R}: 3x^2 + a > 0) \\ &\iff (\exists x_* \neq 0: a = -x_*^2) \wedge (\forall x \in \mathbb{R}: 3x^2 + a > 0) \\ &\iff \exists x_* \neq 0: \underbrace{(\forall x \in \mathbb{R}: 3x^2 - x_*^2 > 0)}_{\text{falsch, nehme } x=0} \\ &\iff \text{falsch} \end{aligned}$$

Also ist

$$(A \implies B) \iff \neg(A \wedge \neg B) \iff (\text{falsch}) \iff \text{wahr}.$$

c) Mit einem direkten Beweis:

Seien $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$. Es gilt: $((x \in \mathbb{Z}) \wedge (x^3 + a_2x^2 + a_1x + 3 = 0)) \implies (x \in \{1, -1, 3, -3\})$.

Lösung:

$$\begin{aligned}
 & ((x \in \mathbb{Z}) \wedge (x^3 + a_2x^2 + a_1x + 3 = 0)) \\
 \iff & ((x \in \mathbb{Z}) \wedge (x \cdot (x^2 + a_2x + a_1) + 3 = 0)) \\
 \iff & ((x \in \mathbb{Z}) \wedge (\underbrace{x}_{\in \mathbb{Z}} \cdot \underbrace{(x^2 + a_2x + a_1)}_{\in \mathbb{Z}} = -3)) \\
 \xrightarrow{x, a_1, a_2 \in \mathbb{Z}} & ((x \text{ teilt } 3) \wedge ((x^2 + a_2x + a_1) \text{ teilt } 3)) \\
 \implies & (x \text{ teilt } 3) \\
 \iff & (x \in \{1, -1, 3, -3\})
 \end{aligned}$$

d) Mit einem direkten Beweis:

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ und $n_\varepsilon = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$. Es gilt: $((n \in \mathbb{N}) \wedge (n > n_\varepsilon)) \implies \left(\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon \right)$.

Lösung:

Diese Art von Aussagen sind oft einfacher „vom Ende angefangen“ zu beweisen; zum Schluss kann der Beweis noch umgeschrieben werden.

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{n - (n+1)}{n+1} \right| = \left| \frac{-1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \stackrel{n > n_\varepsilon}{<} \frac{1}{n_\varepsilon} \stackrel{n_\varepsilon = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil}{=} \frac{1}{\lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil} \leq \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

Umgeschrieben:

$$\begin{aligned}
 (n \in \mathbb{N}) \wedge (n > n_\varepsilon) & \implies \frac{1}{n} < \frac{1}{n_\varepsilon} \stackrel{\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}}{\implies} \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_\varepsilon} \\
 & \implies \frac{1}{n+1} < \frac{1}{\lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil} \stackrel{\lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil \geq \frac{1}{\varepsilon}}{\leq} \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon \implies \frac{1}{n+1} < \varepsilon \\
 & \implies \left| \frac{-1}{n+1} \right| < \varepsilon \implies \left| \frac{n - (n+1)}{n+1} \right| < \varepsilon \\
 & \implies \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon.
 \end{aligned}$$



ArithLogik/Logik/Ag_Logik_Minibeweise1.tex

Aufgabe 4.13 (Aussagen beweisen bzw. widerlegen)

Folgende Aussagen sind *wahr*. Weisen Sie dies mithilfe einer kurzen Beweiskette nach.

a) $\forall x \in \mathbb{R} : x^3 > 1 \implies x^6 > 1$.

Lösung:

Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig mit $x^3 > 1$. Dann ist insbesondere $x^3 > 0$. Multiplikation beider Seite von $x^3 > 1$ mit x^3 liefert $x^6 = x^{3+3} = x^3 \cdot x^3 > 1 \cdot x^3 = x^3$. Wegen $x^3 > 1$ folgt somit $x^6 > x^3$.

b) $\forall a, b \in \mathbb{N} : a \text{ und } b \text{ gerade} \implies 3a - 2b \text{ gerade.}$

Lösung:

Seien $a, b \in \mathbb{N}$ gerade. Dann gibt es $k, \ell \in \mathbb{Z}$ mit $a = 2k$ und $b = 2\ell$. Es folgt

$$3a - 2b = 6k - 4\ell = 2 \cdot \underbrace{(3k - 2\ell)}_{\in \mathbb{Z}}.$$

Somit ist $3a - 2b$ gerade.

c) $\forall x, y \in \mathbb{R} : 3x < 2y - 6 \iff y > 1.5x + 3.$

Lösung:

Folgt, indem man zu beiden Seiten der linken Ungleichung 6 addiert und dann mit $\frac{1}{2}$ multipliziert.

d) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}_{>0} : x < y \iff x^2 < y^2.$

Lösung:

Wählt man $x := 0$, dann ist für jedes $y \in \mathbb{R}_{>0}$ die linke Seite der Äquivalenz $0 < y$ stets erfüllt. Multiplikation dieser Ungleichung mit $y > 0$ liefert $0 < y^2$. Also gilt auch die rechte Seite der Äquivalenz $0 < y^2$ immer. Somit ist die Aussage wahr.

Folgende Aussagen sind *falsch*. Geben Sie zum Nachweis jeweils *ein* Gegenbeispiel an.

e) $\forall x \in \mathbb{R} : x^3 > 1 \iff x^6 > 1.$

Lösung:

Gegenbeispiel: Mit der Wahl $x = -2$ folgt $x^6 = (-2)^6 = 64 > 1$, aber $x^3 = (-2)^3 = -8 \not> 1$.

f) $\forall a, b \in \mathbb{N} : a \text{ gerade und } b \text{ gerade} \iff 3a - 2b \text{ gerade.}$

Lösung:

Gegenbeispiel: Wählt man $a = 2$ und $b = 1$, so ist $3a - 2b = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 6 - 2 = 4$ gerade, aber die Aussage „ a gerade und b gerade“ gilt nicht, da b ungerade ist.

g) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : x < y \iff x^2 < y^2.$

Lösung:

Gegenbeispiel: Setzt man $x = -2$ und $y = -1$, so gilt zwar $x = -2 < -1 = y$, aber

$$x^2 = (-2)^2 = 4 \not< 1 = (-1)^2 = y^2.$$



ArithLogik/Logik/Ag_Logik_Quantoren.tex

Aufgabe 4.14 (Aussagen entscheiden)

Entscheiden Sie, ob diese quantisierten Aussagen für reelle Zahlen $x, y, z \in \mathbb{R}$ wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils eine kurze Begründung (bei $\exists$ müssen Sie sagen, welcher Wert existiert). Beachten Sie die Reihenfolge der Quantoren:

a) $\forall x \exists y : x^2 + 1 = \sqrt{y + 1}$

wahr

Lösung: Wahr, wenn x gegeben ist kann man $y = (x^2 + 1)^2 - 1$ einsetzen um die Gleichheit zu erfüllen.

b) $\forall y \exists x : x^2 + 1 = \sqrt{y+1}$ falsch

Lösung: Falsch, für $y = -1$ gibt es kein $x \in \mathbb{R}$ so dass die Gleichung wahr ist, weil $x^2 \neq -1$ ist.

c) $\forall x \forall y \exists z : x < y < z$ falsch

Lösung: Falsch, für $x = 1$ und $y = 0$ ist die Aussage falsch, egal was man für z nimmt.

d) $\forall x \exists y \exists z : x < y < z$ wahr

Lösung: Wahr, für jedes beliebige x kann man beispielsweise $y = x + 1$ und $z = x + 2$ einsetzen.

e) $\exists x \forall y \exists z : x < y < z$ falsch

Lösung: Falsch, ist x beliebig, so wird die Aussage für $y = x - 1$ falsch.



ArithLogik/Logik/Ag_Logik_VerknuepfungenPruefen_wiwi.tex

Aufgabe 4.15 (Wahrheitstafeln für verknüpfte Aussagen)

rk

In den Vorlesungsmaterialien sind Rechengesetze für verknüpfte Aussagen formuliert. Bestätigen Sie

- das zweite Assoziativgesetz $(A \vee (B \vee C)) = ((A \vee B) \vee C)$,
- das zweite Distributivgesetz $(A \vee (B \wedge C)) = ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$,
- das zweite Gesetz von De Morgan $\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$,
- die Kontraposition $(A \Rightarrow B) \iff (\neg B \Rightarrow \neg A)$

anhand einer Wahrheitstafel.

Lösung:

Bei der Wahrheitstafel sind Spalten sowohl für die linke wie die rechte Seite der Gleichung auszufüllen:

A	B	C	$A \vee (B \vee C)$	$(A \vee B) \vee C$
f	f	f	f	f
f	f	w	w	w
f	w	f	w	w
f	w	w	w	w
w	f	f	w	w
w	f	w	w	w
w	w	f	w	w
w	w	w	w	w

Assoziativgesetz für die Disjunktion.

Dabei geht man so vor, dass auf der linken Seite zuerst die Klammer $B \vee C$ ausgewertet wird. Danach wird das Ergebnis mit A verknüpft. Auf der rechten Seite wird dagegen $A \vee B$ zuerst ausgewertet und das Ergebnis mit C verknüpft. Beim Ausfüllen der Tabelle fällt auf, dass ein einziges w (egal an welcher Stelle) durch die Disjunktionen „durchgereicht“ wird und die ganze Aussage wahr wird, sobald mindestens eine der Variablen wahr ist. Folglich ergibt nur die Zeile $A = B = C = f$ die Ausgabe falsch. Da auf beiden Seiten der Gleichung stets die gleichen Wahrheitswerte herauskommen, ist das Rechengesetz gültig.

Ebenso füllt man die Tabellen für die anderen Rechengesetze aus:

A	B	C	$A \vee (B \wedge C)$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
f	f	f	f	f
f	f	w	f	f
f	w	f	f	f
f	w	w	w	w
w	f	f	w	w
w	f	w	w	w
w	w	f	w	w
w	w	w	w	w

2. Assoziativgesetz ($\vee$ und $\wedge$ ausmultiplizieren).

A	B	$\neg(A \vee B)$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$
f	f	w	w
f	w	f	f
w	f	f	f
w	w	f	f

2. Gesetz von De Morgan ($\neg$ dreht Operatoren).

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
f	f	w	w
f	w	w	w
w	f	f	f
w	w	w	w

Kontraposition ($\neg$ dreht Implikation).

Aufgabenblatt 5

ArithLogik/PotWurz



ArithLogik/PotWurz/Ag_Potenzen_BuchstabeBasisBuchstabeExponent.tex

Aufgabe 5.16 (Potenzen mit variablen Basen und variablen Exponenten vereinfachen) 5.2.4

Seien $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{R}$ mit $\min(\{a; b; c; x; y; z\}) > 0$ und $x > y$.

Seien $n \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{R}$. Vereinfachen Sie die folgenden Terme!

Lösung:

Die gegebenen Terme können unter Verwendung der Potenzrechenregeln (und der binomischen Formeln) vereinfacht werden.

a)
$$\frac{3a^{n+1} \cdot 6x^{n+7} \cdot 9b^{x+1}}{3x^n \cdot 2b^{x+1} \cdot 3a}$$

$$9 \cdot a^n \cdot x^7$$

Lösung: Wegen $2 \cdot 3 = 6$ gilt

$$\frac{3a^{n+1} \cdot 6x^{n+7} \cdot 9b^{x+1}}{3x^n \cdot 2b^{x+1} \cdot 3a} = \frac{3 \cdot 6 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{a^n \cdot a \cdot b^{x+1} \cdot x^n \cdot x^7}{a \cdot b^{x+1} \cdot x^n} = 9 \cdot a^n \cdot x^7.$$

b)
$$\frac{a^{n+1} \cdot a^{n+1} \cdot a^n}{a^0 \cdot a^n \cdot a^{n-1}}$$

$$a^{n+3}$$

Lösung: Es gilt

$$\frac{a^{n+1} \cdot a^{n+1} \cdot a^n}{a^0 \cdot a^n \cdot a^{n-1}} = \frac{a^{n+1} \cdot a^2 \cdot a^{n-1} \cdot a^n}{1 \cdot a^n \cdot a^{n-1}} = \frac{a^{n+1} \cdot a^2}{1} = a^{n+3}.$$

c)
$$\frac{a^{3n-x} \cdot b^{2n+x}}{a^{n+2x} \cdot b^{2n-x}} \cdot \frac{x^{3n+2} \cdot y^{2n-1}}{x^{2n-3} \cdot y^{n+1}}$$

$$a^{2n-3x} \cdot b^{2x} \cdot x^{n+5} \cdot y^{n-2}$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{a^{3n-x} \cdot b^{2n+x}}{a^{n+2x} \cdot b^{2n-x}} \cdot \frac{x^{3n+2} \cdot y^{2n-1}}{x^{2n-3} \cdot y^{n+1}} &= \frac{a^{3n-x}}{a^{n+2x}} \cdot \frac{b^{2n+x}}{b^{2n-x}} \cdot \frac{x^{3n+2}}{x^{2n-3}} \cdot \frac{y^{2n-1}}{y^{n+1}} \\ &= a^{3n-x-(n+2x)} \cdot b^{2n+x-(2n-x)} \cdot x^{3n+2-(2n-3)} \cdot y^{2n-1-(n+1)} = a^{2n-3x} \cdot b^{2x} \cdot x^{n+5} \cdot y^{n-2}. \end{aligned}$$

d)
$$\frac{a^{5x-2y}}{b^{6m-1}} : \frac{a^{4x+y}}{b^{m-2}}$$

$$\frac{a^{x-3y}}{b^{5m+1}}$$

Lösung: Es gilt

$$\frac{a^{5x-2y}}{b^{6m-1}} : \frac{a^{4x+y}}{b^{m-2}} = \frac{a^{5x-2y}}{b^{6m-1}} \cdot \frac{b^{m-2}}{a^{4x+y}} = \frac{a^{5x-2y-(4x+y)}}{b^{6m-1-(m-2)}} = \frac{a^{x-3y}}{b^{5m+1}}.$$

e)
$$\frac{42a^2 \cdot b^3 \cdot x^{n+1}}{36c^3 \cdot y^2 \cdot z^{n-3}} : \frac{70a^3 \cdot b^2 \cdot x^{n+2}}{54c^2 \cdot y^4 \cdot z^{n-2}}$$

$$\frac{9bzy^2}{10acx}$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} & \frac{42a^2 \cdot b^3 \cdot x^{n+1}}{36c^3 \cdot y^2 \cdot z^{n-3}} : \frac{70a^3 \cdot b^2 \cdot x^{n+2}}{54c^2 \cdot y^4 \cdot z^{n-2}} = \frac{42a^2 \cdot b^3 \cdot x^{n+1}}{36c^3 \cdot y^2 \cdot z^{n-3}} \cdot \frac{54c^2 \cdot y^4 \cdot z^{n-2}}{70a^3 \cdot b^2 \cdot x^{n+2}} \\ &= \frac{(2 \cdot 3 \cdot 7) \cdot (2 \cdot 3^3)}{(2^2 \cdot 3^2) \cdot (2 \cdot 5 \cdot 7)} \cdot \frac{a^2 \cdot b^3 \cdot x^{n+1} \cdot c^2 \cdot y^4 \cdot z^{n-2}}{c^3 \cdot y^2 \cdot z^{n-3} \cdot a^3 \cdot b^2 \cdot x^{n+2}} = \frac{3^2}{2 \cdot 5} \cdot \frac{b \cdot y^2 \cdot z}{a \cdot c \cdot x} = \frac{9bzy^2}{10acx}. \end{aligned}$$

f) $\frac{(ax - ay)^m \cdot (3bx + 3by)^n}{(cx^2 - cy^2)^{m+n}}$

$$\frac{3^n \cdot a^m \cdot b^n}{c^{m+n} \cdot (x-y)^n \cdot (x+y)^m}$$

Lösung: Die dritte binomische Formel liefert

$$\begin{aligned} & \frac{(ax - ay)^m \cdot (3bx + 3by)^n}{(cx^2 - cy^2)^{m+n}} = \frac{(a \cdot (x - y))^m \cdot (3 \cdot b \cdot (x + y))^n}{(c \cdot (x - y) \cdot (x + y))^{m+n}} \\ &= \frac{a^m \cdot (x - y)^m \cdot 3^n \cdot b^n \cdot (x + y)^n}{c^{m+n} \cdot (x - y)^{m+n} \cdot (x + y)^{m+n}} \\ &= \frac{3^n \cdot a^m \cdot b^n \cdot (x - y)^m \cdot (x + y)^n}{c^{m+n} \cdot (x - y)^m \cdot (x - y)^n \cdot (x + y)^m \cdot (x + y)^n} = \frac{3^n \cdot a^m \cdot b^n}{c^{m+n} \cdot (x - y)^n \cdot (x + y)^m}. \end{aligned}$$



ArithLogik/PotWurz/Ag_Potenzen_BuchstabeBasisZahlExponent.tex

Aufgabe 5.17 (Potenzen mit variablen Basen und ganzzahligen Exponenten vereinfachen)

5.2.3

Vereinfachen Sie die nachstehenden Terme!

Lösung:

Um die auftretenden Zahlen effizient zu kürzen, empfiehlt es sich, sie in Primfaktoren zu zerlegen.

a) $\frac{18^4 \cdot (a^2 \cdot b)^2}{27^3 \cdot (2a \cdot \sqrt{a} \cdot b)^2}$

$$\frac{4}{3} \cdot a$$

Lösung: Es gilt

$$\frac{18^4 \cdot (a^2 \cdot b)^2}{27^3 \cdot (2a \cdot \sqrt{a} \cdot b)^2} = \frac{(2 \cdot 3^2)^4 \cdot (a^2)^2 \cdot b^2}{(3^3)^3 \cdot 2^2 \cdot a^2 \cdot \sqrt{a}^2 \cdot b^2} = \frac{2^4 \cdot 3^8 \cdot a^4 \cdot b^2}{3^9 \cdot 2^2 \cdot a^3 \cdot b^2} = \frac{2^2 \cdot a^1}{3^1} = \frac{4}{3} \cdot a.$$

b) $\frac{(5ab)^3 \cdot (5ba^2)^4}{s^2 \cdot 3ab^2 \cdot (25a \cdot \sqrt{b})^2}$

$$\frac{125 \cdot a^8 \cdot b^4}{3 \cdot s^2}$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} & \frac{(5ab)^3 \cdot (5ba^2)^4}{s^2 \cdot 3ab^2 \cdot (25a \cdot \sqrt{b})^2} = \frac{5^3 \cdot a^3 \cdot b^3 \cdot 5^4 \cdot b^4 \cdot a^8}{s^2 \cdot 3 \cdot a \cdot b^2 \cdot (5^2)^2 \cdot a^2 \cdot \sqrt{b}^2} \\ &= \frac{5^7 \cdot a^{11} \cdot b^7}{3 \cdot 5^4 \cdot a^3 \cdot b^3 \cdot s^2} = \frac{5^3 \cdot a^8 \cdot b^4}{3 \cdot s^2} = \frac{125}{3} \cdot \frac{a^8 \cdot b^4}{s^2}. \end{aligned}$$

$$c) \left(\frac{4b^2 \cdot y^2}{6a^2 \cdot x^2} \right)^3 \cdot \left(\frac{8a^3 \cdot y^2}{6b^3 \cdot x^3} \right)^4 \cdot \left(\frac{18b^3 \cdot x^6}{16a^3 \cdot y^3} \right)^2$$

$$\frac{32 \cdot y^8}{27 \cdot x^6}$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} & \left(\frac{4b^2 \cdot y^2}{6a^2 \cdot x^2} \right)^3 \cdot \left(\frac{8a^3 \cdot y^2}{6b^3 \cdot x^3} \right)^4 \cdot \left(\frac{18b^3 \cdot x^6}{16a^3 \cdot y^3} \right)^2 \\ &= \left(\frac{2^2 \cdot b^2 \cdot y^2}{2 \cdot 3 \cdot a^2 \cdot x^2} \right)^3 \cdot \left(\frac{2^3 \cdot a^3 \cdot y^2}{2 \cdot 3 \cdot b^3 \cdot x^3} \right)^4 \cdot \left(\frac{2 \cdot 3^2 \cdot b^3 \cdot x^6}{2^4 \cdot a^3 \cdot y^3} \right)^2 \\ &= \frac{2^6 \cdot b^6 \cdot y^6}{2^3 \cdot 3^3 \cdot a^6 \cdot x^6} \cdot \frac{2^{12} \cdot a^{12} \cdot y^8}{2^4 \cdot 3^4 \cdot b^{12} \cdot x^{12}} \cdot \frac{2^2 \cdot 3^4 \cdot b^6 \cdot x^{12}}{2^8 \cdot a^6 \cdot y^6} \\ &= \frac{2^{6+12+2} \cdot 3^4 \cdot a^{12} \cdot b^{6+6} \cdot x^{12} \cdot y^{6+8}}{2^{3+4+8} \cdot 3^{3+4} \cdot a^{6+6} \cdot b^{12} \cdot x^{6+12} \cdot y^6} = \frac{2^{20} \cdot 3^4 \cdot a^{12} \cdot b^{12} \cdot x^{12} \cdot y^{14}}{2^{15} \cdot 3^7 \cdot a^{12} \cdot b^{12} \cdot x^{18} \cdot y^6} = \frac{2^5 \cdot y^8}{3^3 \cdot x^6} = \frac{32 \cdot y^8}{27 \cdot x^6}. \end{aligned}$$

$$d) \left(\frac{45b^2 \cdot y^3}{48a^3 \cdot x} \right)^2 \cdot \left(\frac{6b \cdot x^3}{9a \cdot y^3} \right)^3 \cdot \left(\frac{75b^3 \cdot x^3}{36a^4 \cdot y} \right)^2$$

$$\frac{5^6 \cdot b^{13} \cdot x^{13}}{2^9 \cdot 3^3 \cdot a^{17} \cdot y^5}$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} & \left(\frac{45b^2 \cdot y^3}{48a^3 \cdot x} \right)^2 \cdot \left(\frac{6b \cdot x^3}{9a \cdot y^3} \right)^3 \cdot \left(\frac{75b^3 \cdot x^3}{36a^4 \cdot y} \right)^2 \\ &= \left(\frac{3^2 \cdot 5 \cdot b^2 \cdot y^3}{2^4 \cdot 3 \cdot a^3 \cdot x} \right)^2 \cdot \left(\frac{2 \cdot 3 \cdot b \cdot x^3}{3^2 \cdot a \cdot y^3} \right)^3 \cdot \left(\frac{3 \cdot 5^2 \cdot b^3 \cdot x^3}{2^2 \cdot 3^2 \cdot a^4 \cdot y} \right)^2 \\ &= \frac{3^4 \cdot 5^2 \cdot b^4 \cdot y^6}{2^8 \cdot 3^2 \cdot a^6 \cdot x^2} \cdot \frac{2^3 \cdot 3^3 \cdot b^3 \cdot x^9}{3^6 \cdot a^3 \cdot y^9} \cdot \frac{3^2 \cdot 5^4 \cdot b^6 \cdot x^6}{2^4 \cdot 3^4 \cdot a^8 \cdot y^2} \\ &= \frac{2^3 \cdot 3^{4+3+2} \cdot 5^{2+4} \cdot b^{4+3+6} \cdot x^{9+6} \cdot y^6}{2^{8+4} \cdot 3^{2+6+4} \cdot a^{6+3+8} \cdot x^2 \cdot y^{9+2}} = \frac{2^3 \cdot 3^9 \cdot 5^6 \cdot b^{13} \cdot x^{15} \cdot y^6}{2^{12} \cdot 3^{12} \cdot a^{17} \cdot x^2 \cdot y^{11}} = \frac{5^6 \cdot b^{13} \cdot x^{13}}{2^9 \cdot 3^3 \cdot a^{17} \cdot y^5}. \end{aligned}$$

$$e) \frac{a^{-2} \cdot x^{-4} \cdot y^{-6}}{b^3 \cdot c^{-4} \cdot z^{-5}} : \frac{a^{-3} \cdot b^{-5} \cdot x^{-3}}{c^{-5} \cdot y^6 \cdot z^{-7}}$$

$$\frac{a \cdot b^2}{c \cdot x \cdot z^2}$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} & \frac{a^{-2} \cdot x^{-4} \cdot y^{-6}}{b^3 \cdot c^{-4} \cdot z^{-5}} : \frac{a^{-3} \cdot b^{-5} \cdot x^{-3}}{c^{-5} \cdot y^6 \cdot z^{-7}} = \frac{a^{-2} \cdot x^{-4} \cdot y^{-6}}{b^3 \cdot c^{-4} \cdot z^{-5}} \cdot \frac{c^{-5} \cdot y^6 \cdot z^{-7}}{a^{-3} \cdot b^{-5} \cdot x^{-3}} \\ &= a^{-2+3} \cdot b^{-3+5} \cdot c^{4-5} \cdot x^{-4+3} \cdot y^{-6+6} \cdot z^{5-7} = a^1 \cdot b^2 \cdot c^{-1} \cdot x^{-1} \cdot y^0 \cdot z^{-2} = \frac{a \cdot b^2}{c \cdot x \cdot z^2}. \end{aligned}$$

$$f) \frac{27x^{-5} \cdot y^{-6} \cdot z^{-1}}{45x^{-4} \cdot y^{-5} \cdot z^0} \cdot \frac{49x^{-2} \cdot y^{-3} \cdot z^{-4}}{42x^{-3} \cdot y^{-4} \cdot z^{-3}}$$

$$\frac{7}{10 \cdot z^2}$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} & \frac{27x^{-5} \cdot y^{-6} \cdot z^{-1}}{45x^{-4} \cdot y^{-5} \cdot z^0} \cdot \frac{49x^{-2} \cdot y^{-3} \cdot z^{-4}}{42x^{-3} \cdot y^{-4} \cdot z^{-3}} = \frac{3^3 \cdot x^{-5} \cdot y^{-6} \cdot z^{-1}}{3^2 \cdot 5 \cdot x^{-4} \cdot y^{-5} \cdot z^0} \cdot \frac{7^2 \cdot x^{-2} \cdot y^{-3} \cdot z^{-4}}{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot x^{-3} \cdot y^{-4} \cdot z^{-3}} \\ &= \frac{3^3 \cdot 7^2}{2 \cdot 3^{2+1} \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{x^{-5-2} \cdot y^{-6-3} \cdot z^{-1-4}}{x^{-4-3} \cdot y^{-5-4} \cdot z^{0-3}} = \frac{7}{2 \cdot 5} \cdot \frac{x^{-7} \cdot y^{-9} \cdot z^{-5}}{x^{-7} \cdot y^{-9} \cdot z^{-3}} = \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{z^2} = \frac{7}{10 \cdot z^2}. \end{aligned}$$

**Aufgabe 5.18** (Zahl-Potenzen als gekürzten Bruch schreiben)

4.1.1

Schreiben Sie die folgenden Zahlen als einen vollständig gekürzten Bruch mit positivem Nenner!

Lösung:

Bei der Lösung der Aufgaben werden die Regeln für das Rechnen mit Potenzen und Bruchtermen angewandt.

a) $\left(-\frac{1}{3 \cdot 2^{-4}}\right)^{-3}$

$$\frac{-27}{4096}$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{3 \cdot 2^{-4}}\right)^{-3} &= \left(\frac{-1}{3 \cdot 2^{-4}}\right)^{-3} = \frac{(-1)^{-3}}{(3 \cdot 2^{-4})^{-3}} = \frac{\frac{1}{(-1)^3}}{\frac{1}{3^3} \cdot 2^{(-4) \cdot (-3)}} \\ &= \frac{3^3 \cdot 1}{1 \cdot (-1)^3 \cdot 2^{12}} = \frac{27}{-1 \cdot 4096} = \frac{-27}{4096}. \end{aligned}$$

b) $4^{-2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-4}$

$$\frac{16}{1}$$

Lösung: Es gilt

$$4^{-2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-4} = \frac{1}{4^2} \cdot \frac{1^{-4}}{4^{-4}} = \frac{1}{4^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{4^4}} = 4^{-2} \cdot \frac{1 \cdot 4^4}{1^4 \cdot 1} = \frac{4^{-2} \cdot 4^4}{1^5} = \frac{4^{-2+4}}{1} = \frac{4^2}{1} = \frac{16}{1}.$$

c) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-3}$

$$\frac{3}{4}$$

Lösung: Es gilt

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-3} = \frac{3^{-2}}{4^{-2}} \cdot \frac{4^{-3}}{3^{-3}} = \frac{3^{-2}}{4^{-2}} \cdot \frac{1}{\frac{4^3}{3^3}} = \frac{3^{-2}}{4^{-2}} \cdot \frac{1 \cdot 3^3}{4^3 \cdot 1} = \frac{3^{-2} \cdot 3^3}{4^{-2} \cdot 4^3} = \frac{3^{-2+3}}{4^{-2+3}} = \frac{3^1}{4^1} = \frac{3}{4}.$$

d) $\left(1 + \frac{3}{4}\right)^2 : \left(2 + \frac{1}{3}\right)^3$

$$\frac{27}{112}$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{3}{4}\right)^2 : \left(2 + \frac{1}{3}\right)^3 &= \left(\frac{4+3}{4}\right)^2 : \left(\frac{6+1}{3}\right)^3 = \left(\frac{7}{4}\right)^2 : \left(\frac{7}{3}\right)^3 = \frac{7^2}{4^2} : \frac{7^3}{3^3} = \frac{\frac{1}{7^{-2}}}{4^2} \cdot \frac{3^3}{7^3} \\ &= \frac{1 \cdot 3^3}{7^{-2} \cdot 4^2 \cdot 7^3} = \frac{3^3}{4^2 \cdot 7^{3-2}} = \frac{3^3}{4^2 \cdot 7^1} = \frac{27}{16 \cdot 7} = \frac{27}{70+42} = \frac{27}{112}. \end{aligned}$$

e) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} : \left(\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}\right)^{-2}$

$$\frac{1000}{81}$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{5}\right)^{-3} : \left(\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}\right)^{-2} &= \frac{2^{-3}}{5^{-3}} : \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3^2}{4^2}}\right)^{-2} = \frac{1}{5^3} : \left(\frac{1 \cdot 4^2}{2 \cdot 3^2}\right)^{-2} = \frac{1 \cdot 5^3}{2^3 \cdot 1} : \frac{(1 \cdot (2^2)^2)^{-2}}{(2 \cdot 3^2)^{-2}} \\ &= \frac{5^3}{2^3} : \frac{(2^{2 \cdot 2})^{-2}}{2^{-2} \cdot (3^2)^{-2}} = \frac{5^3}{2^3} : \frac{2^{4 \cdot (-2)}}{2^{-2} \cdot 3^{2 \cdot (-2)}} = \frac{5^3}{2^3} : \frac{2^{-8}}{2^{-2} \cdot 3^{-4}} = \frac{5^3}{2^{-3}} : \frac{1}{2^{-2} \cdot \frac{1}{3^4}} \\ &= \frac{5^3 \cdot 2^{-3}}{1} : \frac{1 \cdot 3^4}{2^8 \cdot 2^{-2} \cdot 1} = \frac{5^3 \cdot 2^{-3}}{1} \cdot \frac{2^8 \cdot 2^{-2}}{3^4} = \frac{5^3 \cdot 2^{-3+8-2} \cdot 2^8 \cdot 2^{-2}}{1 \cdot 3^4} \\ &= \frac{5^3 \cdot 2^{-3+8-2}}{3^4} = \frac{5^3 \cdot 2^3}{3^4} = \frac{(5 \cdot 2)^3}{3^4} = \frac{10^3}{3^4} = \frac{1000}{81}. \end{aligned}$$

f) $\left(\frac{\left(\frac{9}{8}\right)^{-2}}{\left(\frac{16}{6}\right)^2}\right)^{-3}$

$$\frac{729}{1}$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \left(\frac{\left(\frac{9}{8}\right)^{-2}}{\left(\frac{16}{6}\right)^2}\right)^{-3} &= \left(\frac{\frac{1}{\left(\frac{9}{8}\right)^2}}{\left(\frac{8}{3}\right)^2}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{\left(\frac{9}{8}\right)^2 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^2}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{\left(\frac{9}{8} \cdot \frac{8}{3}\right)^2}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{3^2}\right)^{-3} = \frac{1^{-3}}{(3^2)^{-3}} \\ &= \frac{\frac{1}{1^3}}{\frac{1}{(3^2)^3}} = \frac{1 \cdot (3^2)^3}{1^3 \cdot 1} = \frac{3^{2 \cdot 3}}{1^4} = \frac{3^6}{1} = \frac{3^5 \cdot 3}{1} = \frac{243 \cdot 3}{1} = \frac{600 + 120 + 9}{1} = \frac{729}{1}. \end{aligned}$$



ArithLogik/PotWurz/Ag_Wurzeln_GlgnMitWurzelnLoesen.tex

Aufgabe 5.19 (Gleichungen mit Wurzeln lösen)

SPF

Geben Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen an!

a) $x^2 + 12 = 61$

Für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\{-7; 7\}$$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$x^2 + 12 = 61$$

$$\iff x^2 = 49$$

$$\iff x = \sqrt{49} \text{ oder } x = -\sqrt{49}$$

$$\iff x = 7 \text{ oder } x = -7.$$

$$4y^2 = 144$$

$$\iff y^2 = 36$$

$$\iff y = \sqrt{36} \text{ oder } y = -\sqrt{36}$$

$$\iff y = 6 \text{ oder } y = -6.$$

c) $6z^2 - \frac{3}{75} = \frac{1}{15}$

b) $4y^2 = 144$

$$\left\{-\frac{2}{15}; \frac{2}{15}\right\}$$

$$\{-6; 6\}$$

Lösung:

Lösung:

Für alle $z \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} 6z^2 - \frac{3}{75} &= \frac{1}{15} \\ \iff 6z^2 &= \frac{5}{75} + \frac{3}{75} \\ \iff z^2 &= \frac{8}{6 \cdot 75} \\ \iff z^2 &= \frac{4}{225} \\ \iff z &= \sqrt{\frac{4}{225}} \text{ oder } z = -\sqrt{\frac{4}{225}} \\ \iff z &= \frac{2}{15} \text{ oder } z = -\frac{2}{15}. \end{aligned}$$

d) $-\frac{t^2}{3} + \frac{5}{2} = \frac{7}{54}$

$$\left\{-\frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right\}$$

Lösung:

Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt wegen

$$\frac{15}{2} - \frac{7}{18} = \frac{15 \cdot 9 - 7}{18} = \frac{135 - 7}{18} = \frac{128}{18} = \frac{64}{9}$$

$$\begin{aligned} -\frac{t^2}{3} + \frac{5}{2} &= \frac{7}{54} \\ \iff -t^2 + \frac{15}{2} &= \frac{7}{18} \\ \iff \frac{64}{9} &= t^2 \\ \iff t &= \sqrt{\frac{64}{9}} \text{ oder } t = -\sqrt{\frac{64}{9}} \\ \iff t &= \frac{8}{3} \text{ oder } t = -\frac{8}{3}. \end{aligned}$$

e) $u^3 + 190 = 65$

$$\{-5\}$$

Lösung:

Für alle $u \in \mathbb{R}$ gilt wegen $5^3 = 125$

$$\begin{aligned} u^3 + 190 &= 65 \\ \iff u^3 &= -125 \\ \iff u &= -\sqrt[3]{|-125|} \\ \iff u &= -\sqrt[3]{125} \\ \iff u &= -5. \end{aligned}$$

f) $3v^6 - 45 = 83 + v^6$

$$\{-2; 2\}$$

Lösung:

Für alle $v \in \mathbb{R}$ gilt wegen $2^6 = 64$

$$\begin{aligned} 3v^6 - 45 &= 83 + v^6 \\ \iff 2v^6 &= 128 \\ \iff v^6 &= 64 \\ \iff v &= \sqrt[6]{64} \text{ oder } v = -\sqrt[6]{64} \\ \iff v &= 2 \text{ oder } v = -2. \end{aligned}$$

g) $4w^5 - 28 = \frac{19}{8}$

$$\left\{\frac{3}{2}\right\}$$

Lösung:

Für alle $w \in \mathbb{R}$ gilt wegen $\left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{3^5}{2^5} = \frac{243}{32}$

$$\begin{aligned} 4w^5 - 28 &= \frac{19}{8} \iff w^5 - 7 = \frac{19}{32} \\ \iff w^5 &= \frac{19+32 \cdot 7}{32} \iff w^5 = \frac{19+224}{32} \\ \iff w^5 &= \frac{243}{32} \iff w = \sqrt[5]{\frac{243}{32}} \\ \iff w &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

h) $\frac{\varphi^5}{27} + 5^2 = 4^2$

$$\{-3\}$$

Lösung:

Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{\varphi^5}{27} + 5^2 &= 4^2 \iff \frac{\varphi^5}{27} + 25 = 16 \\ \iff \frac{\varphi^5}{27} &= -9 \iff \frac{\varphi^5}{3^3} = -3^2 \\ \iff \varphi^5 &= -3^5 \iff \varphi = -\sqrt[5]{|-3^5|} \\ \iff \varphi &= -\sqrt[5]{3^5} \iff \varphi = -3. \end{aligned}$$



ArithLogik/PotWurz/Ag_Wurzeln_NennerRationalMachenBuchstabenUndZahlen.tex

Aufgabe 5.20 (Rechnen mit Wurzeltermen — Nenner rational machen)

Seien $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R} \setminus \{x\}$ mit $\min(\{x; y\}) > 0$. Formulieren Sie die Brüche durch Erweitern so um, dass schließlich im Nenner keine Wurzelterme mehr stehen!

a) $\frac{x}{\sqrt[3]{x}}$

$$\sqrt[3]{x^2}$$

Lösung: Es gilt $\frac{x}{\sqrt[3]{x}} = x \cdot x^{-\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$.

b) $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x^5}}$

$$\frac{\sqrt[6]{x^5}}{x}$$

Lösung: Es gilt $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x^5}} = \frac{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x^5} \cdot \sqrt[6]{x}} = \frac{x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{6}}}{\sqrt[6]{x^5 \cdot x}} = \frac{x^{\frac{2}{3} + \frac{1}{6}}}{\sqrt[6]{x^6}} = \frac{x^{\frac{5}{6}}}{x} = \frac{\sqrt[6]{x^5}}{x}$.

c) $\frac{x}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

$$\frac{x \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y})}{x - y}$$

Lösung: Es gilt $\frac{x}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{x}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{x \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y})}{x - y}$.

d) $\frac{x}{\sqrt{x - y}}$

$$\frac{x \cdot \sqrt{x - y}}{x - y}$$

Lösung: Es gilt $\frac{x}{\sqrt{x - y}} = \frac{x}{\sqrt{x - y}} \cdot \frac{\sqrt{x - y}}{\sqrt{x - y}} = \frac{x \cdot \sqrt{x - y}}{x - y}$.

e) $\frac{4 + \sqrt{7}}{\sqrt{7} - 2}$

$$5 + 2 \cdot \sqrt{7}$$

Lösung: Es gilt $\frac{4 + \sqrt{7}}{\sqrt{7} - 2} = \frac{4 + \sqrt{7}}{\sqrt{7} - 2} \cdot \frac{\sqrt{7} + 2}{\sqrt{7} + 2} = \frac{4 \cdot \sqrt{7} + 8 + 7 + 2 \cdot \sqrt{7}}{7 - 4} = \frac{15 + 6 \cdot \sqrt{7}}{3} = 5 + 2 \cdot \sqrt{7}$.

f) $\frac{\sqrt{11} - \sqrt{10}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$

$$\sqrt{20} + \sqrt{30} - \sqrt{22} - \sqrt{33}$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{11} - \sqrt{10}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{11} - \sqrt{10}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{11} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{10} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{11} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{10} \cdot \sqrt{3}}{2 - 3} \\ &= - \left(\sqrt{11 \cdot 2} + \sqrt{11 \cdot 3} - \sqrt{10 \cdot 2} - \sqrt{10 \cdot 3} \right) = \sqrt{20} + \sqrt{30} - \sqrt{22} - \sqrt{33}. \end{aligned}$$

g) $\frac{\frac{22}{1 - \sqrt{3}}}{\sqrt{5} - 4}$

$$4 + 4 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{15}$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\frac{22}{1 - \sqrt{3}}}{\sqrt{5} - 4} &= \frac{22}{(1 - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5} - 4)} \cdot \frac{(1 + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5} + 4)}{(1 + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5} + 4)} = \frac{22 \cdot (\sqrt{5} + 4 + \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} + 4 \cdot \sqrt{3})}{(1 - 3) \cdot (5 - 16)} \\ &= \frac{22 \cdot (4 + 4 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{3} \cdot 5)}{(-2) \cdot (-11)} = 4 + 4 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{15}. \end{aligned}$$

**Aufgabe 5.21** (Potenzen von Wurzeln von Potenzen)

7.2.2

Seien $t \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{R}$ mit $\min(\{t; x; y; z\}) > 0$.

Vereinfachen Sie die folgenden Terme und formulieren Sie die Ergebnisse ohne Wurzeln im Nenner!

a) $\frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2}}$

$\sqrt[3]{x^7}$

Lösung: Es gilt $\frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{x^3}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{3-\frac{2}{3}} = x^{\frac{7}{3}}$.

b) $\sqrt[7]{z \cdot \sqrt[5]{z^3} \cdot \sqrt[15]{z^4}}$

$\sqrt[15]{z^4}$

Lösung: Es gilt $\sqrt[7]{z \cdot \sqrt[5]{z^3} \cdot \sqrt[15]{z^4}} = \sqrt[7]{z \cdot z^{\frac{3}{5}} \cdot z^{\frac{4}{15}}} = \sqrt[7]{z^{1+\frac{3}{5}+\frac{4}{15}}} = \sqrt[7]{z^{\frac{28}{15}}} = z^{\frac{28}{15} \cdot \frac{1}{7}} = z^{\frac{4}{15}}$.

c) $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

$\sqrt{x}-\sqrt{y}$

Lösung: Es gilt $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}^2 - \sqrt{y}^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y}) \cdot (\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \sqrt{x}-\sqrt{y}$.

d) $\frac{9-t}{(\sqrt{t}+3) \cdot (2-\sqrt{t})}$

$\frac{(\sqrt{t}-3) \cdot (\sqrt{t}+2)}{t-4}$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{9-t}{(\sqrt{t}+3) \cdot (2-\sqrt{t})} &= \frac{(3+\sqrt{t}) \cdot (3-\sqrt{t}) \cdot (2+\sqrt{t})}{(\sqrt{t}+3) \cdot (2-\sqrt{t}) \cdot (2+\sqrt{t})} = \frac{(\sqrt{t}+3) \cdot (-(\sqrt{t}-3)) \cdot (\sqrt{t}+2)}{(\sqrt{t}+3) \cdot (4-t)} \\ &= \frac{-(t+2 \cdot \sqrt{t}-3 \cdot \sqrt{t}-6)}{(4-t)} = \frac{t-\sqrt{t}-6}{t-4}. \end{aligned}$$

e) $\sqrt[3]{\sqrt{x \cdot y^{-2}} \cdot \sqrt[4]{x^2 \cdot y}} \cdot \sqrt[6]{x^2 \cdot y^{-3}}$

$\frac{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{y}}{y}$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\sqrt{x \cdot y^{-2}} \cdot \sqrt[4]{x^2 \cdot y}} \cdot \sqrt[6]{x^2 \cdot y^{-3}} &= \left(\sqrt{x \cdot y^{-2}} \cdot \sqrt[4]{x^2 \cdot y} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot (x^2 \cdot y^{-3})^{\frac{1}{6}} \\ &= \left((x \cdot y^{-2})^{\frac{1}{2}} \cdot (x^2 \cdot y)^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{-\frac{1}{2}} = \left(x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{-1} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left(x \cdot y^{-\frac{3}{4}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{-\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{-\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{-\frac{1}{2}} = x^{\frac{2}{3}} \cdot y^{-\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{y^3}} = \frac{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{y}}{y}. \end{aligned}$$

f) $\sqrt[4]{x^3 \cdot \sqrt[4]{(-2y)^6} \cdot (-\sqrt{2})^4} : \sqrt[8]{x^5 \cdot y^{-\frac{1}{3}}}$

$$\sqrt[8]{2^7 \cdot x} \cdot \sqrt[12]{y^5}$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{x^3 \cdot \sqrt[4]{(-2y)^6} \cdot (-\sqrt{2})^4} : \sqrt[8]{x^5 \cdot y^{-\frac{1}{3}}} &= \frac{\left(x^3 \cdot \left((-2y)^6\right)^{\frac{1}{4}} \cdot (-2^{\frac{1}{2}})^4\right)^{\frac{1}{4}}}{\left(x^5 \cdot y^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{8}}} \\ &= \frac{\left(x^3 \cdot (2^6 \cdot y^6)^{\frac{1}{4}} \cdot 2^2\right)^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{5}{8}} \cdot y^{-\frac{1}{24}}} = \frac{\left(x^3 \cdot 2^{\frac{3}{2}} \cdot y^{\frac{3}{2}} \cdot 2^2\right)^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{5}{8}} \cdot \frac{1}{y^{\frac{1}{24}}}} = \frac{x^{\frac{3}{4}} \cdot 2^{\frac{3}{8}} \cdot y^{\frac{3}{8}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{24}}}{x^{\frac{5}{8}}} \\ &= 2^{\frac{3}{8} + \frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{3}{4} - \frac{5}{8}} \cdot y^{\frac{3}{8} + \frac{1}{24}} = 2^{\frac{7}{8}} \cdot x^{\frac{1}{8}} \cdot y^{\frac{10}{24}} = (2^7 \cdot x)^{\frac{1}{8}} \cdot y^{\frac{5}{12}} = \sqrt[8]{2^7 \cdot x} \cdot \sqrt[12]{y^5}. \end{aligned}$$

g) $\left(\frac{\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt{y^2} \cdot (z^2 \cdot x^3)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{x^3 \cdot y^6} \cdot \sqrt[3]{z^4}}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{y} \cdot \sqrt[6]{z}}{x}$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt{y^2} \cdot (z^2 \cdot x^3)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{x^3 \cdot y^6} \cdot \sqrt[3]{z^4}}\right)^{-\frac{1}{2}} &= \left(\frac{x^{\frac{1}{4}} \cdot y \cdot z \cdot x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{4}} \cdot y^{\frac{3}{2}} \cdot z^{\frac{4}{3}}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(x^{\frac{1}{4} + \frac{3}{2} - \frac{3}{4}} \cdot y^{1 - \frac{3}{2}} \cdot z^{1 - \frac{4}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left(x^1 \cdot y^{-\frac{1}{2}} \cdot z^{-\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{4}} \cdot z^{\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{y} \cdot \sqrt[6]{z}}{x}. \end{aligned}$$



ArithLogik/PotWurz/Ag_Wurzeln_WurzeltermeMitZahlenVereinfachen.tex

Aufgabe 5.22 (Zahlen mit Wurzeln vereinfachen)

SPF

Geben Sie möglichst einfache Darstellungen der folgenden Zahlen an!

a) $\sqrt{16 \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt[3]{16}}$

$$8 \cdot \sqrt{2}$$

Lösung: Es gilt

$$\sqrt{16 \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt[3]{16}} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{\sqrt{16}} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{16}} = 4 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{\sqrt{4}} = 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 8 \cdot \sqrt{2}.$$

b) $\sqrt[5]{102\,400\,000}$

40

Lösung: Es gilt

$$\sqrt[5]{102\,400\,000} = \sqrt[5]{1\,024 \cdot 100\,000} = \sqrt[5]{1\,024} \cdot \sqrt[5]{100\,000} = (2^{10})^{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[5]{10^5} = 2^2 \cdot 10 = 4 \cdot 10 = 40.$$

c) $\left(\sqrt{3} \cdot \sqrt[5]{3^2}\right)^{10}$

$$3^9 = 19\,683$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3} \cdot \sqrt[5]{3^2}\right)^{10} &= \left(3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{2}{5}}\right)^{10} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{10} \cdot \left(3^{\frac{2}{5}}\right)^{10} = 3^{\frac{1}{2} \cdot 10} \cdot 3^{\frac{2}{5} \cdot 10} = 3^5 \cdot 3^4 \\ &= 243 \cdot 81 = 19\,683.\end{aligned}$$

d) $\left(\sqrt{75} - \sqrt{12}\right)^2$

27

Lösung mit Ausklammern: Es gilt

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{75} - \sqrt{12}\right)^2 &= \left(\sqrt{3 \cdot 25} - \sqrt{3 \cdot 4}\right)^2 = \left(\sqrt{3} \cdot \sqrt{25} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{4}\right)^2 = \left(\sqrt{3} \cdot 5 - \sqrt{3} \cdot 2\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{3} \cdot (5 - 2)\right)^2 = \left(\sqrt{3} \cdot 3\right)^2 = \sqrt{3}^2 \cdot 3^2 = 3 \cdot 9 = 27.\end{aligned}$$

Lösung mit Ausmultiplizieren: Die zweite binomische Formel liefert

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{75} - \sqrt{12}\right)^2 &= \sqrt{75}^2 - 2 \cdot \sqrt{75} \cdot \sqrt{12} + \sqrt{12}^2 = 75 - 2 \cdot \sqrt{75 \cdot 12} + 12 \\ &= 87 - 2 \cdot \sqrt{3 \cdot 25 \cdot 3 \cdot 4} = 87 - 2 \cdot \sqrt{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^2} \\ &= 87 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 = 87 - 6 \cdot 10 = 87 - 60 = 27.\end{aligned}$$

↓ ArithLogik/PotWurz/Text_Glgn_WurzelGlgnFuenfVonSechsZweimalQuadrieren.txt

Aufgabe 5.23 ()

Eine Aufgabe zum Lösen von Wurzelgleichungen findet sich in
ArithLogik/UnGleichungen/Ag_Glgn_WurzelGlgnFuenfVonSechsZweimalQuadrieren

Aufgabenblatt 6

ArithLogik/SumProd



ArithLogik/SumProd/Ag_Grundlagen_Indextransformation_mittel.tex

Aufgabe 6.24 (Indextransformation)

spf

Führen Sie die angegebene Indextransformation durch und vereinfachen Sie die resultierenden Terme!

$$\text{a) } \prod_{\ell=0}^{q-1} \frac{\ell+2}{q+\ell+1} \quad (z = \ell+1) \quad \frac{(q+1)! \cdot q!}{(2q)!}$$

Lösung:

Für alle $q \in \mathbb{N}$ gilt

$$\prod_{\ell=0}^{q-1} \frac{\ell+2}{q+\ell+1} = \prod_{z=0+1}^{q-1+1} \frac{(z-1)+2}{q+(z-1)+1} = \prod_{z=1}^q \frac{z+1}{q+z} = \frac{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot q \cdot (q+1)}{(q+1) \cdot \dots \cdot (2q-1) \cdot (2q)} = \frac{(q+1)! \cdot q!}{(2q)!}.$$

$$\text{b) } \prod_{j=1}^n \left(\frac{n+1}{j} - 1 \right) \quad (k = n-j) \quad 1$$

Lösung:

Das Minuszeichen vor dem alten Index bewirkt, dass die Faktorfolgenfolge umgedreht wird. Deshalb entsteht die neue obere Grenze aus der alten unteren und umgekehrt.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^n \left(\frac{n+1}{j} - 1 \right) &= \prod_{k=n-n}^{n-1} \left(\frac{n+1}{n-k} - 1 \right) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{n+1-(n-k)}{n-k} \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n-k} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = 1. \end{aligned}$$



ArithLogik/SumProd/Ag_Grundlagen_SummenzeichenZahlen_leicht.tex

Aufgabe 6.25 (Summen- und Produktzeichen)

spf

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die folgenden Zahlen!

$$\text{a) } \sum_{j=4}^6 j \quad 15$$

Lösung: Es gilt $\sum_{j=4}^6 j = 4 + 5 + 6 = 15$.

$$\text{b) } \sum_{k=2}^4 \frac{1}{k-1} \quad \frac{11}{6}$$

Lösung: Es gilt $\sum_{k=2}^4 \frac{1}{k-1} = \frac{1}{2-1} + \frac{1}{3-1} + \frac{1}{4-1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{6+3+2}{6} = \frac{11}{6}$.

$$\text{c) } \sum_{\ell=0}^3 \frac{2}{\ell^2 + 1} \quad \frac{18}{5}$$

Lösung: Es gilt

$$\sum_{\ell=0}^3 \frac{2}{\ell^2 + 1} = \frac{2}{0^2 + 1} + \frac{2}{1^2 + 1} + \frac{2}{2^2 + 1} + \frac{2}{3^2 + 1} = \frac{2}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2}{5} + \frac{2}{10} = \frac{10 + 5 + 2 + 1}{5} = \frac{18}{5}.$$

$$\text{d) } \sum_{k=-2}^0 3k \quad -9$$

Lösung: Es gilt $\sum_{k=-2}^0 3k = 3 \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 = -6 - 3 + 0 = -9.$

$$\text{e) } \sum_{\nu=1}^4 4^{4-\nu} \cdot 3^\nu \quad 525$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^4 4^{4-\nu} \cdot 3^\nu &= 4^{4-1} \cdot 3^1 + 4^{4-2} \cdot 3^2 + 4^{4-3} \cdot 3^3 + 4^{4-4} \cdot 3^4 = 4^3 \cdot 3 + 4^2 \cdot 9 + 4 \cdot 27 + 81 \\ &= 64 \cdot 3 + 16 \cdot 9 + 108 + 81 = 192 + 144 + 108 + 81 = 300 + 225 = 525. \end{aligned}$$

$$\text{f) } \sum_{j=-4}^4 3 \quad 27$$

Lösung: Es gilt $\sum_{j=-4}^4 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 27.$

$$\text{g) } \sum_{m=0}^5 (-1)^m \quad 0$$

Lösung:

Es gilt $\sum_{m=0}^5 (-1)^m = (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^5 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 = 0.$

$$\text{h) } \sum_{\lambda=0}^5 \lambda \cdot (\lambda - 1) \quad 40$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=0}^5 \lambda \cdot (\lambda - 1) &= 0 \cdot (0 - 1) + 1 \cdot (1 - 1) + 2 \cdot (2 - 1) + 3 \cdot (3 - 1) + 4 \cdot (4 - 1) + 5 \cdot (5 - 1) \\ &= 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 0 + 0 + 2 + 6 + 12 + 20 = 40. \end{aligned}$$

$$\text{i) } \sum_{c=1}^4 \frac{1}{c^2 + c} \quad \frac{4}{5}$$

Lösung: Es gilt

$$\sum_{c=1}^4 \frac{1}{c^2 + c} = \frac{1}{1^2 + 1} + \frac{1}{2^2 + 2} + \frac{1}{3^2 + 3} + \frac{1}{4^2 + 4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = \frac{30 + 10 + 5 + 3}{60} = \frac{48}{60} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{j) } \prod_{\nu=2}^6 (\nu - 1) \quad 120$$

Lösung: Es gilt $\prod_{\nu=2}^6 (\nu - 1) = (2 - 1) \cdot (3 - 1) \cdot (4 - 1) \cdot (5 - 1) \cdot (6 - 1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$

$$\text{k) } \prod_{p=1}^4 \frac{3-p}{3} \quad 0$$

Lösung: Es gilt $\prod_{p=1}^4 \frac{3-p}{3} = \frac{3-1}{3} \cdot \frac{3-2}{3} \cdot \frac{3-3}{3} \cdot \frac{3-4}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 0 \cdot \frac{-1}{3} = 0.$

$$\text{l) } \prod_{z=-3}^0 \frac{z-1}{2} \quad \frac{3}{2}$$

Lösung: Es gilt $\prod_{z=-3}^0 \frac{z-1}{2} = \frac{-3-1}{2} \cdot \frac{-2-1}{2} \cdot \frac{-1-1}{2} \cdot \frac{0-1}{2} = \frac{-4}{2} \cdot \frac{-3}{2} \cdot \frac{-2}{2} \cdot \frac{-1}{2} = \frac{3}{2}.$

$$\text{m) } \prod_{\mu=0}^4 \frac{\mu+2}{\mu+1} \quad 6$$

Lösung: Es gilt $\prod_{\mu=0}^4 \frac{\mu+2}{\mu+1} = \frac{0+2}{0+1} \cdot \frac{1+2}{1+1} \cdot \frac{2+2}{2+1} \cdot \frac{3+2}{3+1} \cdot \frac{4+2}{4+1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} = 6.$

$$\text{n) } \prod_{q=1}^5 \left(\frac{q+1}{q} \right)^q \quad \frac{324}{5}$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \prod_{q=1}^5 \left(\frac{q+1}{q} \right)^q &= \left(\frac{1+1}{1} \right)^1 \cdot \left(\frac{2+1}{2} \right)^2 \cdot \left(\frac{3+1}{3} \right)^3 \cdot \left(\frac{4+1}{4} \right)^4 \cdot \left(\frac{5+1}{5} \right)^5 \\ &= \frac{2^1}{1^1} \cdot \frac{3^2}{2^2} \cdot \frac{4^3}{3^3} \cdot \frac{5^4}{4^4} \cdot \frac{6^5}{5^5} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 6}{5} = \frac{9 \cdot 36}{5} = \frac{324}{5}. \end{aligned}$$

$$\text{o) } \sum_{k=1}^4 ak \cdot \sum_{j=1}^4 \frac{b}{j} \quad \frac{5^3 ab}{6}$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^4 ak \cdot \sum_{j=1}^4 \frac{b}{j} &= a \cdot 1 \cdot \left(\frac{b}{1} + \frac{b}{2} + \frac{b}{3} + \frac{b}{4} \right) + a \cdot 2 \cdot \left(\frac{b}{1} + \frac{b}{2} + \frac{b}{3} + \frac{b}{4} \right) \\ &\quad + a \cdot 3 \cdot \left(\frac{b}{1} + \frac{b}{2} + \frac{b}{3} + \frac{b}{4} \right) + a \cdot 4 \cdot \left(\frac{b}{1} + \frac{b}{2} + \frac{b}{3} + \frac{b}{4} \right) \\ &= ab \cdot (1 + 2 + 3 + 4) \cdot \frac{12+6+4+3}{12} = ab \cdot 10 \cdot \frac{25}{12} = ab \cdot 5 \cdot \frac{25}{6} = \frac{125ab}{6}.\end{aligned}$$

p) $\sum_{k=1}^4 ak \cdot \sum_{j=k}^4 \frac{b}{j}$

7ab

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^4 ak \cdot \sum_{j=k}^4 \frac{b}{j} &= a \cdot 1 \cdot \left(\frac{b}{1} + \frac{b}{2} + \frac{b}{3} + \frac{b}{4} \right) + a \cdot 2 \cdot \left(\frac{b}{2} + \frac{b}{3} + \frac{b}{4} \right) + a \cdot 3 \cdot \left(\frac{b}{3} + \frac{b}{4} \right) + a \cdot 4 \cdot \frac{b}{4} \\ &= ab \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{4} + 1 \right) = ab \cdot \left(4 + \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \frac{4}{4} \right) = 7ab.\end{aligned}$$



ArithLogik/SumProd/Ag_SumProd_DoppelteIndexverschInTeleskopProd.tex

Aufgabe 6.26 (Eine zweifache Indexverschiebung)

SPF

Das Produkt $\prod_{\ell=2}^{200} \frac{\ell^2 - 1}{\ell^2}$ kann man mit Hilfe von Indexverschiebungen berechnen.

- a) Schreiben Sie das Produkt mit Hilfe von vier Produktzeichen: je zwei im Zähler und im Nenner!
Tipp: Nutzen Sie eine binomische Formel!

Lösung: Es gilt

$$\prod_{\ell=2}^{200} \frac{\ell^2 - 1}{\ell^2} = \prod_{\ell=2}^{200} \frac{(\ell + 1) \cdot (\ell - 1)}{\ell \cdot \ell} = \frac{\prod_{\ell=2}^{200} (\ell + 1) \cdot \prod_{\ell=2}^{200} (\ell - 1)}{\prod_{\ell=2}^{200} \ell \cdot \prod_{\ell=2}^{200} \ell}.$$

- b) Nehmen Sie in insgesamt zwei der vier Produkten eine sinnvolle Indexverschiebung vor!

Lösung mit Indexverschiebungen im Zähler:

Nimmt man zum Beispiel im Zähler beim ersten Produkt die Verschiebung $k = \ell + 1$ und beim zweiten Produkt die Verschiebung $n = \ell - 1$ vor, so ergibt sich

$$\prod_{\ell=2}^{200} \frac{\ell^2 - 1}{\ell^2} = \frac{\prod_{\ell=2}^{200} (\ell + 1) \cdot \prod_{\ell=2}^{200} (\ell - 1)}{\prod_{\ell=2}^{200} \ell \cdot \prod_{\ell=2}^{200} \ell} = \frac{\prod_{k=3}^{201} k \cdot \prod_{n=1}^{199} n}{\prod_{\ell=2}^{200} \ell \cdot \prod_{\ell=2}^{200} \ell}.$$

Lösung mit Indexverschiebungen im Nenner:

Nimmt man zum Beispiel im Nenner beim ersten Produkt die Verschiebung $k = \ell - 1$ und beim zweiten Produkt die Verschiebung $n = \ell + 1$ vor, so ergibt sich

$$\prod_{\ell=2}^{200} \frac{\ell^2 - 1}{\ell^2} = \frac{\prod_{\ell=2}^{200} (\ell + 1) \cdot \prod_{\ell=2}^{200} (\ell - 1)}{\prod_{\ell=2}^{200} \ell \cdot \prod_{\ell=2}^{200} \ell} = \frac{\prod_{\ell=2}^{200} (\ell + 1) \cdot \prod_{\ell=2}^{200} (\ell - 1)}{\prod_{k=1}^{199} (k + 1) \cdot \prod_{n=3}^{201} (n - 1)}.$$

Lösung mit Indexverschiebung im Zähler und im Nenner:

Nimmt man zum Beispiel im ersten Produkt des Zählers und im zweiten Produkt des Nenners die Verschiebung $k = \ell + 1$ vor, so ergibt sich

$$\prod_{\ell=2}^{200} \frac{\ell^2 - 1}{\ell^2} = \frac{\prod_{\ell=2}^{200} (\ell + 1) \cdot \prod_{\ell=2}^{200} (\ell - 1)}{\prod_{\ell=2}^{200} \ell \cdot \prod_{\ell=2}^{200} \ell} = \frac{\prod_{k=3}^{201} k \cdot \prod_{\ell=2}^{200} (\ell - 1)}{\prod_{\ell=2}^{200} \ell \cdot \prod_{k=3}^{201} (k - 1)}.$$

- c) Ziehen Sie aus jedem Produkt je einen Faktor heraus, um im Anschluss kürzen zu können und so leicht das Ergebnis des Ursprungsprodukts zu berechnen!

$$\frac{201}{400}$$

Lösung: Hat man die Indexverschiebungen beide im Zähler vorgenommen (die Rechnungen sehen in den anderen Fällen nahezu identisch aus), so ergibt sich:

$$\prod_{\ell=2}^{200} \frac{\ell^2 - 1}{\ell^2} = \frac{\prod_{k=3}^{201} k \cdot \prod_{n=1}^{199} n}{\prod_{\ell=2}^{200} \ell \cdot \prod_{\ell=2}^{200} \ell} = \frac{\left(201 \cdot \prod_{k=3}^{200} k\right) \cdot \left(1 \cdot \prod_{n=2}^{199} n\right)}{\left(2 \cdot \prod_{\ell=3}^{200} \ell\right) \cdot \left(200 \cdot \prod_{\ell=2}^{199} \ell\right)} = \frac{201}{2 \cdot 200} = \frac{201}{400}.$$



ArithLogik/SumProd/Ag_SumProd_ErsteFormelnNutzenGeomLattenzaunGauss.tex

Aufgabe 6.27 (Rechnen mit Summen)

SPF

Seien $n \in \mathbb{N} \setminus \{1; 2\}$, $p \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{N}_0$ drei vorgegebene Parameter.

Verwenden Sie Ihnen bekannte Summen, um die folgenden Terme zu berechnen!

a) $\sum_{k=-10}^5 2^{-k}$

$$\frac{65\,535}{32}$$

Lösung: Die geometrische Summenformel liefert

$$\begin{aligned} \sum_{k=-10}^5 2^{-k} &= \sum_{k=-10}^0 2^{-k} + \sum_{k=1}^5 2^{-k} = \sum_{\ell=0}^{10} 2^{\ell} + \sum_{k=1}^5 \frac{1}{2^k} = \frac{1 - 2^{10+1}}{1 - 2} + \sum_{k=0}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^k - 1 \\ &= \frac{1 - 2^{11}}{-1} + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{5+1}}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 2^{11} - 1 + 2 - \frac{2}{2^6} - 1 = 2048 - \frac{1}{32} \\ &= \frac{2048 \cdot 32 - 1}{32} = \frac{60\,000 + 1\,440 + 4\,096 - 1}{32} = \frac{65\,535}{32}. \end{aligned}$$

$$\text{b) } \sum_{k=1}^n (n-k)^2 - \sum_{\ell=2}^{n-1} (1+\ell)^2$$

$$5 - n^2$$

Lösung: Die Lattenzaunregel und die „kleine-Gauß-Formel“ liefern

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n (n-k)^2 - \sum_{\ell=2}^{n-1} (1+\ell)^2 = \underbrace{(n-n)^2}_{k=n} + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)^2 - \sum_{\ell=1}^{n-1} (1+\ell)^2 + \underbrace{(1+1)^2}_{\ell=1} \\ &= 0^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (n^2 - 2nk + k^2) - \sum_{k=1}^{n-1} (1 + 2k + k^2) + 2^2 \\ &= 0 + \sum_{k=1}^{n-1} (n^2 - 2nk + k^2 - 1 - 2k - k^2) + 4 = 4 + \sum_{k=1}^{n-1} ((n^2 - 1) - 2 \cdot (n+1) \cdot k) \\ &= 4 + \sum_{k=1}^{n-1} (n^2 - 1) - \sum_{k=1}^{n-1} 2 \cdot (n+1) \cdot k = 4 + (n^2 - 1) \cdot \sum_{k=1}^{n-1} 1 - 2 \cdot (n+1) \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= 4 + (n^2 - 1) \cdot (n - 1 - 1 + 1) - 2 \cdot (n+1) \cdot \frac{1}{2} \cdot (n-1) \cdot (n-1+1) \\ &= 4 + (n^2 - 1) \cdot (n-1) - (n+1) \cdot (n-1) \cdot n \\ &= 4 + (n^2 - 1) \cdot n - (n^2 - 1) \cdot 1 - (n^2 - 1) \cdot n \\ &= 4 - (n^2 - 1) = 4 - n^2 + 1 = 5 - n^2. \end{aligned}$$

$$\text{c) } \sum_{k=1}^p \sum_{\ell=0}^q (k\ell + 2^\ell)$$

$$\frac{1}{4} \cdot pq \cdot (p+1) \cdot (q+1) + p \cdot (2^{q+1} - 1)$$

Lösung: Geometrische Summenformel, „kleine-Gauß-Formel“ und Lattenzaunregel liefern

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^p \sum_{\ell=0}^q (k\ell + 2^\ell) &= \sum_{k=1}^p \left(\sum_{\ell=0}^q k\ell + \sum_{\ell=0}^q 2^\ell \right) = \sum_{k=1}^p \left(k \cdot \sum_{\ell=0}^q \ell + \frac{1 - 2^{q+1}}{1 - 2} \right) \\ &= \sum_{k=1}^p \left(k \cdot \frac{q \cdot (q+1)}{2} + \frac{1 - 2^{q+1}}{-1} \right) = \sum_{k=1}^p k \cdot \frac{q \cdot (q+1)}{2} + \sum_{k=1}^p (2^{q+1} - 1) \\ &= \frac{q \cdot (q+1)}{2} \cdot \sum_{k=1}^p k + (2^{q+1} - 1) \cdot \sum_{k=1}^p 1 \\ &= \frac{q \cdot (q+1)}{2} \cdot \frac{p \cdot (p+1)}{2} + (2^{q+1} - 1) \cdot (p - 1 + 1) \\ &= \frac{1}{4} \cdot pq \cdot (p+1) \cdot (q+1) + p \cdot (2^{q+1} - 1). \end{aligned}$$



ArithLogik/SumProd/Ag_SumProd_ErsteSummenUndProdukte.tex

Aufgabe 6.28 (Summen- und Produktzeichen)

SPF

Berechnen Sie die folgenden Summen und Produkte, indem Sie sie zunächst ausschreiben!

$$\text{a) } \sum_{k=-2}^3 (5k + 1)$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=-2}^3 (5k+1) &= (5 \cdot (-2) + 1) + (5 \cdot (-1) + 1) + (5 \cdot 0 + 1) + (5 \cdot 1 + 1) + (5 \cdot 2 + 1) + (5 \cdot 3 + 1) \\ &= (-10 + 1) + (-5 + 1) + (0 + 1) + (5 + 1) + (10 + 1) + (15 + 1) \\ &= (-9) + (-4) + 1 + 6 + 11 + 16 = -13 + 7 + 27 = -6 + 27 = 21.\end{aligned}$$

b) $\prod_{\ell=2}^6 \frac{\ell^2 - 1}{\ell^2}$

$$\frac{7}{12}$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}\prod_{\ell=2}^6 \frac{\ell^2 - 1}{\ell^2} &= \frac{2^2 - 1}{2^2} \cdot \frac{3^2 - 1}{3^2} \cdot \frac{4^2 - 1}{4^2} \cdot \frac{5^2 - 1}{5^2} \cdot \frac{6^2 - 1}{6^2} = \frac{4-1}{4} \cdot \frac{9-1}{9} \cdot \frac{16-1}{16} \cdot \frac{25-1}{25} \cdot \frac{36-1}{36} \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{35}{36} = \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{35}{36} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{7}{6} = \frac{7}{12}.\end{aligned}$$

c) $\sum_{\ell=2}^6 \frac{\ell^2 - 1}{\ell^2}$

$$\frac{16\,231}{3\,600}$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=2}^6 \frac{\ell^2 - 1}{\ell^2} &= \frac{2^2 - 1}{2^2} + \frac{3^2 - 1}{3^2} + \frac{4^2 - 1}{4^2} + \frac{5^2 - 1}{5^2} + \frac{6^2 - 1}{6^2} \\ &= \frac{4-1}{4} + \frac{9-1}{9} + \frac{16-1}{16} + \frac{25-1}{25} + \frac{36-1}{36} = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \frac{24}{25} + \frac{35}{36} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{15}{16} + \frac{8}{9} + \frac{35}{36} + \frac{24}{25} = \frac{12+15}{16} + \frac{32+35}{36} + \frac{24}{25} = \frac{27}{16} + \frac{67}{36} + \frac{24}{25} \\ &= \frac{9 \cdot 27 + 4 \cdot 67}{4 \cdot 36} + \frac{24}{25} = \frac{180 + 63 + 240 + 28}{4 \cdot 36} + \frac{24}{25} = \frac{243 + 268}{4 \cdot 36} + \frac{24}{25} \\ &= \frac{511}{4 \cdot 36} + \frac{24}{25} = \frac{511 \cdot 25 + 24 \cdot 144}{4 \cdot 36 \cdot 25} = \frac{10\,220 + 2\,555 + 2\,880 + 576}{100 \cdot 36} = \frac{16\,231}{3\,600}.\end{aligned}$$

d) $\sum_{m=2}^6 \frac{m-1}{m}$

$$\frac{71}{20}$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{m=2}^6 \frac{m-1}{m} &= \frac{2-1}{2} + \frac{3-1}{3} + \frac{4-1}{4} + \frac{5-1}{5} + \frac{6-1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} \\ &= \frac{3+4+5}{6} + \frac{15+16}{20} = \frac{12}{6} + \frac{31}{20} = 2 + \frac{31}{20} = \frac{40+31}{20} = \frac{71}{20}\end{aligned}$$

e) $\sum_{n=0}^{11} (-1)^n \cdot n^2$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{11} (-1)^n \cdot n^2 &= (-1)^0 \cdot 0^2 + (-1)^1 \cdot 1^2 + (-1)^2 \cdot 2^2 + (-1)^3 \cdot 3^2 \\ &\quad + (-1)^4 \cdot 4^2 + (-1)^5 \cdot 5^2 + (-1)^6 \cdot 6^2 + (-1)^7 \cdot 7^2 \\ &\quad + (-1)^8 \cdot 8^2 + (-1)^9 \cdot 9^2 + (-1)^{10} \cdot 10^2 + (-1)^{11} \cdot 11^2 \\ &= 0 - 1 + 4 - 9 + 16 - 25 + 36 - 49 + 64 - 81 + 100 - 121 \\ &= -1 - 5 - 9 - 13 - 17 - 21 = -6 - 22 - 38 = -66.\end{aligned}$$

f) $\sum_{\lambda=-5}^6 7$

84

Lösung: Es gilt

$$\sum_{\lambda=-5}^6 7 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 12 \cdot 7 = 70 + 14 = 84.$$

g) $\sum_{k=1}^4 \sum_{\ell=0}^2 (k\ell + 2^\ell)$

58

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^4 \sum_{\ell=0}^2 (k\ell + 2^\ell) &= \sum_{\ell=0}^2 (1 \cdot \ell + 2^\ell) + \sum_{\ell=0}^2 (2 \cdot \ell + 2^\ell) + \sum_{\ell=0}^2 (3 \cdot \ell + 2^\ell) + \sum_{\ell=0}^2 (4 \cdot \ell + 2^\ell) \\ &= (1 \cdot 0 + 2^0) + (1 \cdot 1 + 2^1) + (1 \cdot 2 + 2^2) + (2 \cdot 0 + 2^0) \\ &\quad + (2 \cdot 1 + 2^1) + (2 \cdot 2 + 2^2) + (3 \cdot 0 + 2^0) + (3 \cdot 1 + 2^1) \\ &\quad + (3 \cdot 2 + 2^2) + (4 \cdot 0 + 2^0) + (4 \cdot 1 + 2^1) + (4 \cdot 2 + 2^2) \\ &= (0 + 1) + (1 + 2) + (2 + 4) + (0 + 1) + (2 + 2) + (4 + 4) \\ &\quad + (0 + 1) + (3 + 2) + (6 + 4) + (0 + 1) + (4 + 2) + (8 + 4) \\ &= 1 + 3 + 6 + 1 + 4 + 8 + 1 + 5 + 10 + 1 + 6 + 12 \\ &= 4 + 7 + 12 + 6 + 11 + 18 = 11 + 18 + 29 = 29 + 29 = 58.\end{aligned}$$

h) $\prod_{x=-1}^2 \prod_{y=3}^6 \frac{2x-y}{2x+y}$

0

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}\prod_{x=-1}^2 \prod_{y=3}^6 \frac{2x-y}{2x+y} &= \left(\prod_{y=3}^6 \frac{2 \cdot (-1) - y}{2 \cdot (-1) + y} \right) \cdot \left(\prod_{y=3}^6 \frac{2 \cdot 0 - y}{2 \cdot 0 + y} \right) \cdot \left(\prod_{y=3}^6 \frac{2 \cdot 1 - y}{2 \cdot 1 + y} \right) \cdot \left(\prod_{y=3}^6 \frac{2 \cdot 2 - y}{2 \cdot 2 + y} \right) \\ &= \left(\prod_{y=3}^6 \frac{-2-y}{-2+y} \right) \cdot \left(\prod_{y=3}^6 \frac{-y}{y} \right) \cdot \left(\prod_{y=3}^6 \frac{2-y}{2+y} \right) \cdot \left(\prod_{y=3}^6 \frac{4-y}{4+y} \right) \\ &= \frac{-2-3}{-2+3} \cdot \frac{-2-4}{-2+4} \cdot \frac{-2-5}{-2+5} \cdot \frac{-2-6}{-2+6} \cdot \frac{-3}{3} \cdot \frac{-4}{4} \cdot \frac{-5}{5} \cdot \frac{-6}{6} \\ &\quad \cdot \frac{2-3}{2+3} \cdot \frac{2-4}{2+4} \cdot \frac{2-5}{2+5} \cdot \frac{2-6}{2+6} \cdot \frac{4-3}{4+3} \cdot \frac{4-4}{4+4} \cdot \frac{4-5}{4+5} \cdot \frac{4-6}{4+6} \\ &= \frac{-5}{1} \cdot \frac{-6}{2} \cdot \frac{-7}{3} \cdot \frac{-8}{4} \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot \frac{-1}{5} \cdot \frac{-2}{6} \cdot \frac{-3}{7} \cdot \frac{-4}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{0}{8} \cdot \frac{-1}{9} \cdot \frac{-2}{10} \\ &= 0.\end{aligned}$$

$$\text{i) } \sum_{\alpha=-1}^3 \sum_{\beta=\alpha}^{\max(\{2;\alpha\})} \alpha^{2\beta}$$

752

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=-1}^3 \sum_{\beta=\alpha}^{\max(\{2;\alpha\})} \alpha^{2\beta} &= \sum_{\beta=-1}^2 (-1)^{2\beta} + \sum_{\beta=0}^2 0^{2\beta} + \sum_{\beta=1}^2 1^{2\beta} + \sum_{\beta=2}^2 2^{2\beta} + \sum_{\beta=3}^3 3^{2\beta} \\ &= (-1)^{2 \cdot (-1)} + (-1)^{2 \cdot 0} + (-1)^{2 \cdot 1} + (-1)^{2 \cdot 2} + 0^{2 \cdot 0} + 0^{2 \cdot 1} + 0^{2 \cdot 2} + 1^{2 \cdot 1} + 1^{2 \cdot 2} + 2^{2 \cdot 2} + 3^{2 \cdot 3} \\ &= (-1)^{-2} + (-1)^0 + (-1)^2 + (-1)^4 + 0^0 + 0^2 + 0^4 + 1^2 + 1^4 + 2^4 + 3^6 \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 1 + 1 + 16 + 3 \cdot 243 = 23 + 600 + 120 + 9 = 752. \end{aligned}$$

$$\text{j) } \sum_{p=0}^3 \prod_{q=1}^7 \frac{p}{q}$$

$\frac{193}{420}$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^3 \prod_{q=1}^7 \frac{p}{q} &= \frac{0}{1} \cdot \frac{0}{2} \cdot \frac{0}{3} \cdot \frac{0}{4} \cdot \frac{0}{5} \cdot \frac{0}{6} \cdot \frac{0}{7} + \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{7} \\ &\quad + \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{7} + \frac{3}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{7} \\ &= \frac{0^7 + 1^7 + 2^7 + 3^7}{7!} = \frac{0 + 1 + 128 + 243 \cdot 9}{5040} = \frac{129 + 2430 - 243}{5040} \\ &= \frac{129 + 2187}{5040} = \frac{2316}{5040} = \frac{6 \cdot 386}{6 \cdot 840} = \frac{193}{420}. \end{aligned}$$

$$\text{k) } \sum_{\varphi=0}^3 \prod_{\psi=1+\varphi}^{7-\varphi} \frac{\varphi}{\psi}$$

$\frac{637}{720}$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{\varphi=0}^3 \prod_{\psi=1+\varphi}^{7-\varphi} \frac{\varphi}{\psi} &= \prod_{\psi=1}^7 \frac{0}{\psi} + \prod_{\psi=2}^6 \frac{1}{\psi} + \prod_{\psi=3}^5 \frac{2}{\psi} + \prod_{\psi=4}^4 \frac{3}{\psi} \\ &= \frac{0}{1} \cdot \frac{0}{2} \cdot \frac{0}{3} \cdot \frac{0}{4} \cdot \frac{0}{5} \cdot \frac{0}{6} \cdot \frac{0}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{720} + \frac{8}{60} + \frac{3}{4} = \frac{1 + 8 \cdot 12 + 3 \cdot 180}{720} = \frac{1 + 80 + 16 + 300 + 240}{720} = \frac{637}{720}. \end{aligned}$$

$$\text{l) } \prod_{\lambda=-4}^0 \sum_{\mu=2}^{2-\lambda} \frac{(-1)^\mu \cdot \mu^3}{\lambda + 5}$$

620 160

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}
\prod_{\lambda=-4}^0 \sum_{\mu=2}^{2-\lambda} \frac{(-1)^\mu \cdot \mu^3}{\lambda+5} &= \left(\sum_{\mu=2}^{2-(-4)} \frac{(-1)^\mu \cdot \mu^3}{-4+5} \right) \cdot \left(\sum_{\mu=2}^{2-(-3)} \frac{(-1)^\mu \cdot \mu^3}{-3+5} \right) \\
&\cdot \left(\sum_{\mu=2}^{2-(-2)} \frac{(-1)^\mu \cdot \mu^3}{-2+5} \right) \cdot \left(\sum_{\mu=2}^{2-(-1)} \frac{(-1)^\mu \cdot \mu^3}{-1+5} \right) \cdot \left(\sum_{\mu=2}^{2-0} \frac{(-1)^\mu \cdot \mu^3}{0+5} \right) \\
&= \left(\sum_{\mu=2}^6 \frac{(-1)^\mu \cdot \mu^3}{1} \right) \cdot \left(\sum_{\mu=2}^5 \frac{(-1)^\mu \cdot \mu^3}{2} \right) \\
&\cdot \left(\sum_{\mu=2}^4 \frac{(-1)^\mu \cdot \mu^3}{3} \right) \cdot \left(\sum_{\mu=2}^3 \frac{(-1)^\mu \cdot \mu^3}{4} \right) \cdot \left(\sum_{\mu=2}^2 \frac{(-1)^\mu \cdot \mu^3}{5} \right) \\
&= \left(\frac{(-1)^2 \cdot 2^3}{1} + \frac{(-1)^3 \cdot 3^3}{1} + \frac{(-1)^4 \cdot 4^3}{1} + \frac{(-1)^5 \cdot 5^3}{1} + \frac{(-1)^6 \cdot 6^3}{1} \right) \\
&\cdot \left(\frac{(-1)^2 \cdot 2^3}{2} + \frac{(-1)^3 \cdot 3^3}{2} + \frac{(-1)^4 \cdot 4^3}{2} + \frac{(-1)^5 \cdot 5^3}{2} \right) \\
&\cdot \left(\frac{(-1)^2 \cdot 2^3}{3} + \frac{(-1)^3 \cdot 3^3}{3} + \frac{(-1)^4 \cdot 4^3}{3} \right) \cdot \left(\frac{(-1)^2 \cdot 2^3}{4} + \frac{(-1)^3 \cdot 3^3}{4} \right) \cdot \left(\frac{(-1)^2 \cdot 2^3}{5} \right) \\
&= \left(\frac{8}{1} - \frac{27}{1} + \frac{64}{1} - \frac{125}{1} + \frac{216}{1} \right) \cdot \left(\frac{8}{2} - \frac{27}{2} + \frac{64}{2} - \frac{125}{2} \right) \\
&\cdot \left(\frac{8}{3} - \frac{27}{3} + \frac{64}{3} \right) \cdot \left(\frac{8}{4} - \frac{27}{4} \right) \cdot \left(\frac{8}{5} \right) \\
&= \frac{8+37+91}{1} \cdot \frac{-19-61}{2} \cdot \frac{8+37}{3} \cdot \frac{-19}{4} \cdot \frac{8}{5} \\
&= \frac{136 \cdot (-80) \cdot 45 \cdot (-19) \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 136 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 19 \cdot 8 \\
&= 4080 \cdot 152 = 608\,000 + 12\,160 = 620\,160.
\end{aligned}$$



ArithLogik/SumProd/Ag_SumProd_KleinenGaussNachGaussIdeeBeweisen.tex

Aufgabe 6.29 (Beweis der „kleinen Gauß-Formel“)

SPF

Beweisen Sie die „kleine Gauß-Formel“ $\sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ auf dem folgenden Weg!

a) Teilen Sie die Summe für den Fall, dass $n \in \mathbb{N}$ gerade ist, in der Mitte auf!

Lösung:

Ist $n \in \mathbb{N}$ gerade, so ist $\frac{n}{2} \in \mathbb{N}$ als Summationsgrenze geeignet:

$$\sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} k + \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n k.$$

b) Machen Sie in einer der beiden Summen die Indexverschiebung $\ell = 1 - k$!

Lösung mit Indexverschiebung in der ersten Summe:

Die geforderte Indexverschiebung liefert $k = 1 - \ell$. Außerdem wird die Summationsreihenfolge wegen des Minuszeichens vor dem Index herumgedreht. Sprich, die alte obere Grenze wird zur neuen unteren und umgekehrt:

$$\sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} k + \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n k = \sum_{\ell=1-\frac{n}{2}}^0 (1-\ell) + \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n k.$$

Lösung mit Indexverschiebung in der zweiten Summe:

Die geforderte Indexverschiebung liefert $k = 1 - \ell$. Außerdem wird die Summationsreihenfolge wegen des Minuszeichens vor dem Index herumgedreht. Sprich, die alte obere Grenze wird zur neuen unteren und umgekehrt:

$$\sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} k + \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n k = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} k + \sum_{\ell=1-n}^{1-(\frac{n}{2}+1)} (1-\ell) = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} k + \sum_{\ell=1-n}^{-\frac{n}{2}} (1-\ell).$$

- c) Verschieben Sie den Index der anderen Summe so, dass die Summationsgrenzen beider resultierenden Summen identisch werden!

Lösung mit Indexverschiebung in der zweiten Summe:

Damit die beiden Summen aus Aufgabenteil b) dieselbe obere Grenze bekommen, muss die obere Grenze der zweiten Summe um n nach unten geschoben werden. Dafür ist die Indexverschiebung $\ell = k - n$, sprich $k = \ell + n$ nötig:

$$\sum_{k=1}^n k = \sum_{\ell=1-\frac{n}{2}}^0 (1-\ell) + \sum_{\ell=\frac{n}{2}+1-n}^{n-n} (\ell+n) = \sum_{\ell=1-\frac{n}{2}}^0 (1-\ell) + \sum_{\ell=1-\frac{n}{2}}^0 (\ell+n).$$

Lösung mit Indexverschiebung in der ersten Summe:

Damit die beiden Summen aus Aufgabenteil b) dieselbe obere Grenze bekommen, muss die obere Grenze der ersten Summe um n nach unten geschoben werden. Dafür ist die Indexverschiebung $\ell = k - n$, sprich $k = \ell + n$ nötig:

$$\sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} k + \sum_{\ell=1-n}^{-\frac{n}{2}} (1-\ell) = \sum_{k=1-n}^{-\frac{n}{2}} (\ell+n) + \sum_{\ell=1-n}^{-\frac{n}{2}} (1-\ell).$$

- d) Fassen Sie die beiden Summen zu einer Summe zusammen, vereinfachen Sie die Summanden dieser Summe und berechnen Sie den resultierenden Term!

Lösung bei oberer Grenze 0:

Mit der Darstellung als Aufgabenteil c) ergibt sich für gerades $n \in \mathbb{N}$ aus der Lattenzaunregel

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k &= \sum_{\ell=1-\frac{n}{2}}^0 (1-\ell) + \sum_{\ell=1-\frac{n}{2}}^0 (\ell+n) \\ &= \sum_{\ell=1-\frac{n}{2}}^0 (1-\ell+\ell+n) = \sum_{\ell=1-\frac{n}{2}}^0 (1+n) = (1+n) \cdot \sum_{\ell=1-\frac{n}{2}}^0 1 \\ &= (n+1) \cdot (0 - (1-\frac{n}{2}) + 1) = (n+1) \cdot (0 - 1 + \frac{n}{2} + 1) = (n+1) \cdot \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Lösung bei oberer Grenze $-\frac{n}{2}$:

Mit der Darstellung als Aufgabenteil c) ergibt sich für gerades $n \in \mathbb{N}$ aus der Lattenzaunregel

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k &= \sum_{k=1-n}^{-\frac{n}{2}} (\ell+n) + \sum_{\ell=1-n}^{-\frac{n}{2}} (1-\ell) \\ &= \sum_{k=1-n}^{-\frac{n}{2}} (\ell+n+1-\ell) = \sum_{k=1-n}^{-\frac{n}{2}} (n+1) = (n+1) \cdot \sum_{\ell=1-n}^{-\frac{n}{2}} 1 \\ &= (n+1) \cdot (-\frac{n}{2} - (1-n) + 1) = (n+1) \cdot (-\frac{n}{2} - 1 + n + 1) = (n+1) \cdot \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

- e) Verwenden Sie das bereits gezeigte Resultat zu geraden Zahlen nun beim Beweis für den Fall, in dem $n \in \mathbb{N}$ ungerade ist!

Lösung:

Ist $n \in \mathbb{N}$ eine ungerade Zahl, so ist $n + 1 \in \mathbb{N}$ eine gerade Zahl und es ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k &= -(n+1) + \sum_{k=1}^{n+1} k = -(n+1) + \frac{(n+1) \cdot (n+1+1)}{2} \\ &= \frac{-2 \cdot (n+1)}{2} + \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2} = \frac{(n+1) \cdot (-2+n+2)}{2} = \frac{(n+1) \cdot n}{2}. \end{aligned}$$



ArithLogik/SumProd/Ag_SumProd_TeleskopMitFibonacciBasiertenSummandenOhneFolgennotation.tex

Aufgabe 6.30 (Teleskopsummen mit Fibonacci-basierten Summanden)

SPF

Die Fibonacci-Zahlen $F: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit $n \mapsto F(n)$ werden rekursiv definiert durch

$$F(0) := 0, \quad F(1) := 1 \quad \text{und} \quad F(n+1) := F(n) + F(n-1) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Die Fibonacci-Zahlen erfüllen die folgenden Aussagen (die Sie ohne Beweis verwenden dürfen):

- Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $F(n) \leq F(n+1)$.
- Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $m \in \mathbb{N}_0 \setminus \{n\}$ gilt $F(n) = F(m)$ genau dann, wenn $\{n; m\} = \{1; 2\}$ gilt.
- Für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gilt $\frac{1}{F(n-1) \cdot F(n+1)} = \frac{1}{F(n-1) \cdot F(n)} - \frac{1}{F(n) \cdot F(n+1)}$.

- a) Berechnen Sie alle einstelligen und alle zweistelligen Fibonacci-Zahlen!

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} F(0) &= 0, & F(1) &= 1, & F(2) &= F(1) + F(0) = 1 + 0 = 1, \\ F(3) &= F(2) + F(1) = 1 + 1 = 2, & F(4) &= F(3) + F(2) = 2 + 1 = 3, \\ F(5) &= F(4) + F(3) = 3 + 2 = 5, & F(6) &= F(5) + F(4) = 5 + 3 = 8, \\ F(7) &= F(6) + F(5) = 8 + 5 = 13, & F(8) &= F(7) + F(6) = 13 + 8 = 21, \\ F(9) &= F(8) + F(7) = 21 + 13 = 34, & F(10) &= F(9) + F(8) = 34 + 21 = 55, \\ F(11) &= F(10) + F(9) = 55 + 34 = 89 \quad \text{und} \quad F(12) &= F(11) + F(10) = 89 + 55 = 144. \end{aligned}$$

Da $F(12)$ bereits dreistellig ist und F nach dem ersten Hinweis aus der Aufgabenstellung monoton wächst, sind also damit alle ein- und alle zweistelligen Fibonacci-Zahlen berechnet.

- b) Geben Sie für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ eine Darstellung ohne Summenzeichen für $\sum_{k=2}^n \frac{1}{F(k-1) \cdot F(k+1)}$ an!

$$1 - \frac{1}{F(n) \cdot F(n+1)}$$

Lösung:

Verwendet man die angegebene Formel für den Summanden, so erkennt man die Teleskopstruktur der Summe und die Indexverschiebung $\ell = k + 1$, sprich $k = \ell - 1$ liefert

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=2}^n \frac{1}{F(k-1) \cdot F(k+1)} &= \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{F(k-1) \cdot F(k)} - \frac{1}{F(k) \cdot F(k+1)} \right) \\
 &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{F(k-1) \cdot F(k)} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{F(k) \cdot F(k+1)} \\
 &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{F(k-1) \cdot F(k)} - \sum_{\ell=3}^{n+1} \frac{1}{F(\ell-1) \cdot F(\ell)} \\
 &= \underbrace{\frac{1}{F(1) \cdot F(2)}}_{k=2} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{F(k-1) \cdot F(k)} \\
 &\quad - \underbrace{\frac{1}{F(n) \cdot F(n+1)}}_{\ell=n+1} - \sum_{\ell=3}^n \frac{1}{F(\ell-1) \cdot F(\ell)} \\
 &= \frac{1}{1 \cdot 1} - \frac{1}{F(n) \cdot F(n+1)} \\
 &= 1 - \frac{1}{F(n) \cdot F(n+1)}.
 \end{aligned}$$

- c) Finden Sie auch für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ eine Summenzeichen-freie Darstellung von $\sum_{k=2}^n \frac{F(k)}{F(k-1) \cdot F(k+1)}$?
- $2 - \frac{1}{F(n)} - \frac{1}{F(n+1)}$

Lösung:

Verwendet man die angegebene Formel für den Summanden, so erkennt man die Teleskopstruktur der Summe und die Indexverschiebung $\ell = k + 2$, sprich $k = \ell - 2$ liefert

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=2}^n \frac{F(k)}{F(k-1) \cdot F(k+1)} &= \sum_{k=2}^n F(k) \cdot \frac{1}{F(k-1) \cdot F(k+1)} \\
 &= \sum_{k=2}^n F(k) \cdot \left(\frac{1}{F(k-1) \cdot F(k)} - \frac{1}{F(k) \cdot F(k+1)} \right) \\
 &= \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{F(k-1)} - \frac{1}{F(k+1)} \right) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{F(k-1)} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{F(k+1)} \\
 &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{F(k-1)} - \sum_{\ell=4}^{n+2} \frac{1}{F(\ell-2+1)} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{F(k-1)} - \sum_{\ell=4}^{n+2} \frac{1}{F(\ell-1)} \\
 &= \underbrace{\frac{1}{F(1)}}_{k=2} + \underbrace{\frac{1}{F(2)}}_{k=3} + \sum_{k=4}^n \frac{1}{F(k-1)} - \underbrace{\frac{1}{F(n+1)}}_{\ell=n+2} - \underbrace{\frac{1}{F(n)}}_{\ell=n+1} - \sum_{\ell=3}^n \frac{1}{F(\ell-1)} \\
 &= \frac{1}{1} + \frac{1}{1} - \frac{1}{F(n+1)} - \frac{1}{F(n)} = 2 - \frac{1}{F(n)} - \frac{1}{F(n+1)}.
 \end{aligned}$$

- d) Welcher Grenzwert ergibt sich jeweils für die beiden Summen aus den Aufgabenteilen b) und c) beim Grenzübergang $n \rightarrow \infty$?

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{F(n)} = 0$ liefert die Grenzwerte 1 und 2.

Lösung:

Nach dem ersten Hinweis aus der Aufgabenstellung ist F monoton wachsend.

Nach dem zweiten Hinweis ist $F|_{\mathbb{N}_0 \setminus \{0;1;2\}}$ damit sogar streng monoton wachsend.

Da der Wertebereich von F nur die natürlichen Zahlen umfasst, muss deshalb $\lim_{n \rightarrow \infty} F(n) = \infty$ gelten. Das liefert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \frac{1}{F(k-1) \cdot F(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{F(n) \cdot F(n+1)} \right) = 1 - 0 = 1$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \frac{F(k)}{F(k-1) \cdot F(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{F(n)} - \frac{1}{F(n+1)} \right) = 2 - 0 - 0 = 2.$$



ArithLogik/SumProd/Ag_SumProd_TeleskopSummandVereinfachenUndUmEinsVerschieben.tex

Aufgabe 6.31 (Teleskopsummen)

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$. Schreiben Sie die folgenden Terme ohne Summenzeichen oder Pünktchen!

a) $\sum_{k=1}^n \left(\frac{\sqrt{k}}{(k+1)^2} - \sqrt{\frac{k-1}{k^4}} \right)$

$$\frac{\sqrt{n}}{(n+1)^2}$$

Lösung:

Formt man zunächst den hinteren Term der Summe um, so erkennt man die Teleskopsumme und die Indexverschiebung $\ell = k - 1$, sprich $k = \ell + 1$ liefert

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\sqrt{k}}{(k+1)^2} - \sqrt{\frac{k-1}{k^4}} \right) &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\sqrt{k}}{(k+1)^2} - \frac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{k^{2 \cdot 2}}} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\sqrt{k}}{(k+1)^2} - \frac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{(k^2)^2}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\sqrt{k}}{(k+1)^2} - \frac{\sqrt{k-1}}{|k^2|} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\sqrt{k}}{(k+1)^2} - \frac{\sqrt{k-1}}{k^2} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{(k+1)^2} - \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k-1}}{k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{(k+1)^2} - \sum_{\ell=1-1}^{n-1} \frac{\sqrt{\ell+1-1}}{(\ell+1)^2} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{(k+1)^2} - \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{\sqrt{\ell}}{(\ell+1)^2} = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{(k+1)^2} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{k}}{(k+1)^2} \\ &= \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{(n+1)^2}}_{k=n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sqrt{k}}{(k+1)^2} - \underbrace{\frac{\sqrt{0}}{(0+1)^2}}_{k=0} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sqrt{k}}{(k+1)^2} \\ &= \frac{\sqrt{n}}{(n+1)^2} - \frac{0}{1^2} = \frac{\sqrt{n}}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

b) $\sum_{\ell=1}^m \left(\frac{\sqrt{\ell+1}}{2 \cdot (\ell+1)!} - \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\ell} \cdot (\ell-1)!} \right)$

$$\frac{\sqrt{m+1}}{2 \cdot (m+1)!} - \frac{1}{2}$$

Lösung:

Formt man zunächst den hinteren Term der Summe um, so erkennt man die Teleskopsumme und die Indexverschiebung $k = \ell + 1$ liefert

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^m \left(\frac{\sqrt{\ell+1}}{2 \cdot (\ell+1)!} - \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\ell} \cdot (\ell-1)!} \right) &= \sum_{\ell=1}^m \left(\frac{\sqrt{\ell+1}}{2 \cdot (\ell+1)!} - \frac{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\ell}}{\sqrt{\ell}^2 \cdot (\ell-1)!} \right) \\
&= \sum_{\ell=1}^m \left(\frac{\sqrt{\ell+1}}{2 \cdot (\ell+1)!} - \frac{\sqrt{\ell}}{2 \cdot \ell \cdot (\ell-1)!} \right) \\
&= \sum_{\ell=1}^m \left(\frac{\sqrt{\ell+1}}{2 \cdot (\ell+1)!} - \frac{\sqrt{\ell}}{2 \cdot \ell!} \right) \\
&= \sum_{\ell=1}^m \frac{\sqrt{\ell+1}}{2 \cdot (\ell+1)!} - \sum_{\ell=1}^m \frac{\sqrt{\ell}}{2 \cdot \ell!} \\
&= \sum_{k=2}^{m+1} \frac{\sqrt{k}}{2 \cdot k!} - \sum_{\ell=1}^m \frac{\sqrt{\ell}}{2 \cdot \ell!} \\
&= \underbrace{\frac{\sqrt{m+1}}{2 \cdot (m+1)!}}_{k=m+1} + \sum_{k=2}^{m+1} \frac{\sqrt{k}}{2 \cdot k!} - \underbrace{\frac{\sqrt{1}}{2 \cdot 1!}}_{\ell=1} - \sum_{\ell=2}^m \frac{\sqrt{\ell}}{2 \cdot \ell!} \\
&= \frac{\sqrt{m+1}}{2 \cdot (m+1)!} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$



ArithLogik/SumProd/Ag_SummeFakultaet_HermitePolynome.tex

Aufgabe 6.32 (Hermite-Polynome als Summe)

Die Hermite-Polynome $H_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sind unter anderem in der Physik von Bedeutung. Eine mögliche Darstellung erfolgt über die Summe in der üblichen Schreibweise

$$H_n(x) = (-1)^n \sum_{\substack{k_1+2k_2=n \\ k_1, k_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}}} \frac{n!}{k_1!k_2!} (-1)^{k_1+k_2} (2x)^{k_1}.$$

Werten Sie die Summe für $n \leq 3$ aus, um eine explizite Darstellung der ersten Polynome zu erhalten.

$$H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x, H_2(x) = 4x^2 - 2, H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

Lösung:

Um die Summe auszuwerten, müssen die vorkommenden Indexpaare (k_1, k_2) bestimmt werden, die in der Summe mit gegebenem n vorkommen (Indexmenge). Alternativ kann die Summe auch auf einen Index umgeschrieben werden. Lösungsvorschlag mit einer Anschauung:

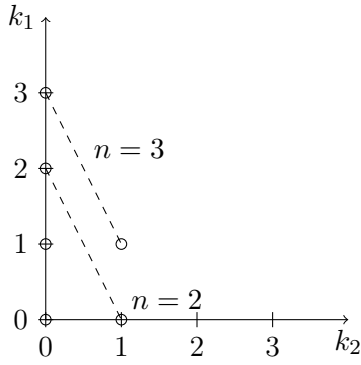
Für gegebenes n kann der Summationsindex k_1 als Funktion von k_2 ausgedrückt werden:

$$k_1 = f_n(k_2) := n - 2k_2$$

mit Definitionsmenge

$$D_n := \{k_2 \in \mathbb{N}_0 \mid n - 2k_2 \geq 0\}.$$

Für kleine n können die Wertepaare für die Summe bequem dem Funktionsgraphen entnommen werden:



Also

$$n = 0 : (k_1, k_2) \in \{(0, 0)\}$$

$$n = 1 : (k_1, k_2) \in \{(1, 0)\}$$

$$n = 2 : (k_1, k_2) \in \{(2, 0), (0, 1)\}$$

$$n = 3 : (k_1, k_2) \in \{(3, 0), (1, 1)\}$$

Beachte: k_1 wird hier vor k_2 aufgeführt!

$$H_0(x) = (-1)^0 \frac{0!}{0!0!} (-1)^{0+0} (2x)^0 = 1$$

$$H_1(x) = (-1)^1 \frac{1!}{1!0!} (-1)^{1+0} (2x)^1 = 2x$$

$$H_2(x) = (-1)^2 \left(\frac{2!}{2!0!} (-1)^{2+0} (2x)^2 + \frac{2!}{0!1!} (-1)^{0+1} (2x)^0 \right) = 4x^2 - \frac{2}{1} \cdot 1 = 4x^2 - 2$$

$$H_3(x) = (-1)^3 \left(\frac{3!}{3!0!} (-1)^{3+0} (2x)^3 + \frac{3!}{1!1!} (-1)^{1+1} (2x)^1 \right) = - \left(-8x^3 + \frac{6}{1} 2x \right) = 8x^3 - 12x$$

$$H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x, H_2(x) = 4x^2 - 2, H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

$n = 2$ mit den Paaren $k_1 = 0, k_2 = 1$ und $k_1 = 2, k_2 = 0$

$$H_2(x) = (-1)^2 \left\{ \frac{2}{0!1!} (-1)^{0+1} (2x)^0 + \frac{2}{2!0!} (-1)^{2+0} (2x)^2 \right\} = 4x^2 - 2.$$



ArithLogik/Terme/Ag_BinomForm_BeweisArithGeomMittelUndPythTripel.tex

Aufgabe 7.33 (Kleine Beweise mit Verwendung der binomischen Formeln)

SPF

Seien $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$, sowie $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$ und $y \geq 0$.

- a) Zeigen Sie, dass $2mn$ und $(m^2 - n^2)$ Seitenlängen von rechtwinkligen Dreiecken mit ganzzahligen Seitenlängen sind! Wie lang ist die dritte Seite?

$$m^2 + n^2$$

Lösung:

Genau die Seitenlängen a , b und c eines rechtwinkligen Dreiecks erfüllen den Satz des Pythagoras

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Mit $a := m^2 - n^2$ und $b := 2mn$ sowie $s := m^2$ und $t := n^2$ ergeben die binomischen Formeln

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2)^2 - 2 \cdot m^2 \cdot n^2 + (n^2)^2 + 4 \cdot m^2 \cdot n^2 \\ &= (m^2)^2 + 2 \cdot m^2 \cdot n^2 + (n^2)^2 = (m^2 + n^2)^2. \end{aligned}$$

Mit $c := m^2 + n^2$ ist also der Satz des Pythagoras erfüllt und das Dreieck mit den Seitenlängen a , b und c ist rechtwinklig.

- b) Zeigen Sie die Ungleichung $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ vom geometrischen und arithmetischen Mittel!

Lösung:

Mit $s := \sqrt{x} \in \mathbb{R}$ und $t := \sqrt{y} \in \mathbb{R}$ liefert die zweite binomische Formel

$$0 \leq (s - t)^2 = s^2 - 2st + t^2 = \sqrt{x}^2 - 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} + \sqrt{y}^2 = x - 2 \cdot \sqrt{xy} + y.$$

Addiert man in der erhaltenen Ungleichung $0 \leq x - 2 \cdot \sqrt{xy} + y$ auf beiden Seiten $2 \cdot \sqrt{xy}$ und dividiert anschließend durch 2, so ergibt sich die behauptete Ungleichung:

$$0 \leq x - 2 \cdot \sqrt{xy} + y \quad \Longleftrightarrow \quad 2 \cdot \sqrt{xy} \leq x + y \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$



ArithLogik/Terme/Ag_BinomForm_HinUndZurueckAnwenden.tex

Aufgabe 7.34 (Binomische Formeln)

1.1.3

Seien $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ mit $ac \geq 0$.

Formulieren Sie die folgenden Terme mit Hilfe der binomischen Formeln um!

Lösung:

Je nach vorgegebenem Term wird die passende binomische Formel vorwärts oder rückwärts angewendet.

a) $169a^2 - 130ab + 25b^2$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} &169a^2 - 130ab + 25b^2 \\ &= (13a)^2 - 2 \cdot 13a \cdot 5b + (5b)^2 \\ &= (13a - 5b)^2. \end{aligned}$$

b) $9a^4b^2 + 12a^2b + 4$

$$(3a^2b + 2)^2 \quad \text{e) } (\sqrt{ac} - 1) \cdot (-1 - \sqrt{ac})$$

Lösung: Es gilt

$$1 - ac$$

$$\begin{aligned} & 9a^4b^2 + 12a^2b + 4 \\ &= (3a^2b)^2 + 2 \cdot 3 \cdot a^2b \cdot 2 + 2^2 \\ &= (3a^2b + 2)^2. \end{aligned}$$

Lösung: Es gilt

c) $(a + b + 1) \cdot (a + b - 1)$

$$a^2 + 2ab + b^2 - 1$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} & (a + b + 1) \cdot (a + b - 1) \\ &= ((a + b) + 1) \cdot ((a + b) - 1) \\ &= (a + b)^2 - 1^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 - 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\sqrt{ac} - 1) \cdot (-1 - \sqrt{ac}) \\ &= (\sqrt{ac} - 1) \cdot (-1) \cdot (\sqrt{ac} + 1) \\ &= -(\sqrt{ac}^2 - 1^2) \\ &= 1 - ac. \end{aligned}$$

f) $(-5a - 3b)^2 + (-5a + 3b)^2$

$$50a^2 + 18b^2$$

d) $a^2 - 2ab + 2b^2 + 2b + 1$

$$(a - b)^2 + (b + 1)^2$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} & a^2 - 2ab + 2b^2 + 2b + 1 \\ &= (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 + 2b + 1) \\ &= (a - b)^2 + (b + 1)^2. \end{aligned}$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} & (-5a - 3b)^2 + (-5a + 3b)^2 \\ &= 25a^2 + 30ab + 9b^2 + 25a^2 - 30ab + 9b^2 \\ &= 50a^2 + 18b^2. \end{aligned}$$



ArithLogik/Terme/Ag_BinomForm_TrinomischeFormelAllgemeinUndKonkret.tex

Aufgabe 7.35 (Die erste „trinomische Formel“)

2.2.2

Seien $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$ und $D \in \mathbb{R}$ mit $D \neq 0$.

a) Rechnen Sie nach, dass

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

für alle reellen Zahlen $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt!

Lösung: Zweimaliges Anwenden der ersten binomische Formel liefert

$$\begin{aligned} (a + b + c)^2 &= ((a + b) + c)^2 &= (a + b)^2 + 2 \cdot (a + b) \cdot c + c^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2ab + c^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \end{aligned}$$

b) Faktorisieren Sie $4x^2 - 16xy + 16y^2 + 25z^4 + 20xz^2 - 40yz^2$ mit Hilfe der obigen Formel!

$$(2x - 4y + 5z^2)^2$$

Lösung: Der gegebene Term wird so umgeformt, dass die Struktur des Terms der rechten Seite der obigen Gleichung mit $a := 2x$, $b := -4y$ und $c := 5z^2$ entspricht:

$$\begin{aligned} & 4x^2 - 16xy + 16y^2 + 25z^4 + 20xz^2 - 40yz^2 \\ &= 4x^2 + 16y^2 + 25z^4 - 16xy + 20xz^2 - 40yz^2 \\ &= (2x)^2 + (4y)^2 + (5z^2)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 4y + 2 \cdot 2x \cdot 5z^2 - 2 \cdot 4y \cdot 5z^2 \\ &= (2x)^2 + (-4y)^2 + (5z^2)^2 + 2 \cdot 2x \cdot (-4y) + 2 \cdot 2x \cdot 5z^2 + 2 \cdot (-4y) \cdot 5z^2 \\ &= (2x - 4y + 5z^2)^2. \end{aligned}$$

c) Faktorisieren Sie $\frac{A^2}{4} + 3AB^2 - \frac{4A}{D} + 9B^4 - \frac{24B^2}{D} + \frac{16}{D^2}$ so weit wie möglich!

$$\left(\frac{A}{2} + 3B^2 - \frac{4}{D}\right)^2$$

Lösung: Mit $a := \frac{A}{2}$, $b := 3B^2$ und $c := \frac{-4}{D}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{A^2}{4} + 3AB^2 - \frac{4A}{D} + 9B^4 - \frac{24B^2}{D} + \frac{16}{D^2} &= \left(\frac{A}{2}\right)^2 + (3B^2)^2 + \left(\frac{4}{D}\right)^2 + 3AB^2 - \frac{4A}{D} - \frac{24B^2}{D} \\ &= \left(\frac{A}{2}\right)^2 + (3B^2)^2 + \left(\frac{-4}{D}\right)^2 + 2 \cdot \frac{A}{2} \cdot 3B^2 + 2 \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{-4}{D} + 2 \cdot 3B^2 \cdot \frac{-4}{D} = \left(\frac{A}{2} + 3B^2 + \frac{-4}{D}\right)^2. \end{aligned}$$



ArithLogik/Terme/Ag_BinomForm_UngewoehnlicheQuadratischeErgaenzung.tex

Aufgabe 7.36 (Ungewöhnliche quadratische Ergänzung)

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $5a^2 \cdot b \neq 4a^4 + 3b^2$.

Führen Sie eine quadratische Ergänzung aus, um im Bruch $\frac{16a^8 - a^4 \cdot b^2 + 9b^4}{4a^4 - 5a^2 \cdot b + 3b^2}$ kürzen zu können!

$$4a^4 + 5a^2 \cdot b + 3b^2$$

Lösung:

Die Potenzen von a und b im Zähler sind doppelt so hoch wie die im Nenner. Deshalb führen wir die quadratische Ergänzung im Zähler durch. Es gilt

$$16a^8 - a^4 \cdot b^2 + 9b^4 = (4a^4)^2 - a^4 \cdot b^2 + (3b^2)^2.$$

Die Terme $4a^4$ und $3b^2$ tauchen auch im Nenner auf. Hier werden sie addiert. Wir arbeiten deshalb auf die erste binomische Formel hin. Es gilt

$$\begin{aligned} 16a^8 - a^4 \cdot b^2 + 9b^4 &= (4a^4)^2 + 2 \cdot 4a^4 \cdot 3b^2 + (3b^2)^2 - 2 \cdot 4a^4 \cdot 3b^2 - a^4 \cdot b^2 \\ &= (4a^4 + 3b^2)^2 - 25 \cdot a^4 \cdot b^2 = (4a^4 + 3b^2)^2 - (5 \cdot a^2 \cdot b)^2 \\ &= (4a^4 + 3b^2 - 5 \cdot a^2 \cdot b) \cdot (4a^4 + 3b^2 + 5 \cdot a^2 \cdot b), \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die dritte binomische Formel zur Anwendung kam.

Vertauscht man die Reihenfolge der Summanden in den beiden Klammern, so erkennt man leicht, wie im zu bearbeitenden Bruch gekürzt werden kann. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{16a^8 - a^4 \cdot b^2 + 9b^4}{4a^4 - 5a^2 \cdot b + 3b^2} &= \frac{(4a^4 - 5a^2 \cdot b + 3b^2) \cdot (4a^4 + 5a^2 \cdot b + 3b^2)}{4a^4 - 5a^2 \cdot b + 3b^2} \\ &= 4a^4 + 5a^2 \cdot b + 3b^2. \end{aligned}$$



ArithLogik/Terme/Ag_BinomSatz_EinfuehrungMitBuchstaben.tex

Aufgabe 7.37 (Binomischer Satz)

5.2.1

Seien $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Schreiben Sie die folgenden Potenzausdrücke ohne Klammern!

Lösung:

Zur Berechnung der benötigten Binomialkoeffizienten kann man das Pascal-Dreieck verwenden.

$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

a) $(2a + b)^3$

$$8 \cdot a^3 + 12 \cdot a^2 \cdot b + 6 \cdot a \cdot b^2 + b^3$$

Lösung: Der binomische Satz liefert

$$\begin{aligned} (2a + b)^3 &= \binom{3}{0} \cdot (2a)^{3-0} \cdot b^0 + \binom{3}{1} \cdot (2a)^{3-1} \cdot b^1 + \binom{3}{2} \cdot (2a)^{3-2} \cdot b^2 + \binom{3}{3} \cdot (2a)^{3-3} \cdot b^3 \\ &= 1 \cdot (2a)^3 \cdot b^0 + 3 \cdot (2a)^2 \cdot b^1 + 3 \cdot (2a)^1 \cdot b^2 + 1 \cdot (2a)^0 \cdot b^3 \\ &= 8a^3 \cdot 1 + 3 \cdot 4a^2 \cdot b + 3 \cdot 2a \cdot b^2 + 1 \cdot b^3 \\ &= 8 \cdot a^3 + 12 \cdot a^2 \cdot b + 6 \cdot a \cdot b^2 + b^3. \end{aligned}$$

b) $\left(3a - \frac{b}{2}\right)^4$

$$81 \cdot a^4 - 54 \cdot a^3 \cdot b + \frac{27}{2} \cdot a^2 \cdot b^2 - \frac{3}{2} \cdot a \cdot b^3 + \frac{1}{16} \cdot b^4$$

Lösung: Der binomische Satz liefert

$$\begin{aligned} \left(3a - \frac{b}{2}\right)^4 &= \binom{4}{0} \cdot (3a)^{4-0} \cdot \left(-\frac{b}{2}\right)^0 + \binom{4}{1} \cdot (3a)^{4-1} \cdot \left(-\frac{b}{2}\right)^1 + \binom{4}{2} \cdot (3a)^{4-2} \cdot \left(-\frac{b}{2}\right)^2 \\ &\quad + \binom{4}{3} \cdot (3a)^{4-3} \cdot \left(-\frac{b}{2}\right)^3 + \binom{4}{4} \cdot (3a)^{4-4} \cdot \left(-\frac{b}{2}\right)^4 \\ &= 1 \cdot 81a^4 \cdot 1 + 4 \cdot 27a^3 \cdot \left(-\frac{b}{2}\right) + 6 \cdot 9a^2 \cdot \frac{b^2}{4} + 4 \cdot 3a \cdot \left(-\frac{b^3}{8}\right) + 1 \cdot 1 \cdot \frac{b^4}{16} \\ &= 81 \cdot a^4 - 54 \cdot a^3 \cdot b + \frac{27}{2} \cdot a^2 \cdot b^2 - \frac{3}{2} \cdot a \cdot b^3 + \frac{1}{16} \cdot b^4. \end{aligned}$$

c) $\left(\frac{1}{c} + c^2\right)^5$

$$c^{-5} + 5c^{-2} + 10c + 10c^4 + 5c^7 + c^{10}$$

Lösung: Der binomische Satz liefert

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{c} + c^2\right)^5 &= \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{c}\right)^{5-0} \cdot (c^2)^0 + \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{c}\right)^{5-1} \cdot (c^2)^1 + \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{c}\right)^{5-2} \cdot (c^2)^2 \\ &\quad + \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{c}\right)^{5-3} \cdot (c^2)^3 + \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{c}\right)^{5-4} \cdot (c^2)^4 + \binom{5}{5} \cdot \left(\frac{1}{c}\right)^{5-5} \cdot (c^2)^5 \\ &= 1 \cdot c^{-5} \cdot 1 + 5 \cdot c^{-4} \cdot c^2 + 10 \cdot c^{-3} \cdot c^4 + 10 \cdot c^{-2} \cdot c^6 + 5 \cdot c^{-1} \cdot c^8 + 1 \cdot c^{-0} \cdot c^{10} \\ &= c^{-5} + 5c^{-2} + 10c + 10c^4 + 5c^7 + c^{10}. \end{aligned}$$

d) $\left(\frac{8a}{3} \cdot \frac{9}{4c}\right)^{11}$

$$\left(\frac{6a}{c}\right)^{11} = 362\,797\,056 \cdot a^{11} \cdot c^{-11}$$

Lösung: Die Potenzgesetze liefern

$$\left(\frac{8a}{3} \cdot \frac{9}{4c}\right)^{11} = \left(\frac{2a \cdot 3}{1 \cdot c}\right)^{11} = 6^{11} \cdot \frac{a^{11}}{c^{11}} = 362\,797\,056 \cdot \frac{a^{11}}{c^{11}}.$$



ArithLogik/Terme/Ag_Logarithmus_Werte_berechnen.tex

Aufgabe 7.38 (Logarithmen zu unterschiedlichen Basen)

10.1.1

Berechnen Sie:

a) $\text{lb}(4)$

2 h) $\log_{17}(1)$

2 e) $\lg(0.001)$

0

b) $\text{lb}\left(\frac{1}{4}\right)$

-3

i) $\log_3\left(\frac{1}{27}\right)$

-2 f) $\lg(\sqrt{10})$

-3

c) $\log_3(81)$

$\frac{1}{2}$

4 g) $\lg(1\,000\,000)$

j) $\log_4(4\,096)$

d) $\log_5(25)$

6

6

Lösung:

Die jeweiligen Logarithmenwerte werden mit Hilfe der Rechengesetze für Logarithmen berechnet:

a) $\lg 4 = \log_2 2^2 = 2$	e) $\lg 0.001 = \lg 10^{-3} = -3$	i) $\log_3 \frac{1}{27} = \log_3 3^{-3} = -3$
b) $\lg \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2$	f) $\lg \sqrt{10} = \lg 10^{1/2} = \frac{1}{2}$	j) $\log_4 (4096) = \log_4 (2^{12}) =$ $\log_4 (\sqrt{4}^{12}) =$ $\log_4 (4^{\frac{1}{2} \cdot 12}) = \log_4 (4^6) =$ 6
c) $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$	g) $\lg 1\,000\,000 = \lg 10^6 = 6$	
d) $\log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$	h) $\log_{17} 1 = \log_{17} 17^0 = 0$	



ArithLogik/Terme/Ag_Terme_AusklammernUndPotenzgesetzeGemischt.tex

Aufgabe 7.39 (Rechnen mit Potenzen)

4.1.3

Seien $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{Z}$.

Faktorisieren Sie die Terme möglichst weit!

a) $12a^2 \cdot b - 6a \cdot b^2 - 15a^2 \cdot b + 6a \cdot b^2 - 7a^2 \cdot b$

$-10 \cdot a^2 \cdot b$

Lösung: Es gilt

$$12a^2 \cdot b - 6a \cdot b^2 - 15a^2 \cdot b + 6a \cdot b^2 - 7a^2 \cdot b = (12 - 15 - 7) \cdot a^2 \cdot b + (-6 + 6) \cdot a \cdot b^2 = -10 \cdot a^2 \cdot b.$$

b) $(3a + 2b) \cdot x^4 - x^4 \cdot (2b - 3a) + x^4 \cdot (3a + 2b)$

$x^4 \cdot (9a + 2b)$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} (3a + 2b) \cdot x^4 - x^4 \cdot (2b - 3a) + x^4 \cdot (3a + 2b) &= x^4 \cdot ((3a + 2b) - (2b - 3a) + (3a + 2b)) \\ &= x^4 \cdot (3a + 2b - 2b + 3a + 3a + 2b) = x^4 \cdot (9a + 2b). \end{aligned}$$

c) $-\left(\frac{-1}{c^{-2}} \cdot \frac{-1}{c^{-2}} \cdot \frac{-1}{c^{-2}}\right)$

c^6

Lösung: Es gilt

$$-\left(\frac{-1}{c^{-2}} \cdot \frac{-1}{c^{-2}} \cdot \frac{-1}{c^{-2}}\right) = -\left(\frac{-1}{c^{-2}}\right)^3 = -\frac{(-1)^3}{(c^{-2})^3} = -\frac{-1}{c^{-2 \cdot 3}} = \frac{-(-1)}{c^{-6}} = \frac{1}{\frac{1}{c^6}} = \frac{1 \cdot c^6}{1} = c^6.$$

d) $\frac{18y^{n+4}}{2z^{5n+7}} : \frac{4y^{7-3n}}{9z^{8+5n}}$

$\frac{81}{4} \cdot y^{4n-3} \cdot z$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{18y^{n+4}}{2z^{5n+7}} : \frac{4y^{7-3n}}{9z^{8+5n}} &= \frac{18y^{n+4}}{2z^{5n+7}} \cdot \frac{9z^{8+5n}}{4y^{7-3n}} = \frac{2 \cdot 3^2 \cdot 3^2}{2 \cdot 2^2} \cdot y^{n+4-(7-3n)} \cdot z^{-(5n+7)+8+5n} \\ &= \frac{9 \cdot 9}{4} \cdot y^{n+4-7+3n} \cdot z^{-5n-7+8+5n} = \frac{81}{4} \cdot y^{4n-3} \cdot z. \end{aligned}$$



ArithLogik/Terme/Ag_Terme_BruchrechnungPlusMinusMalGeteilt.tex

Aufgabe 7.40 (Bruchrechnung)

1.1.1

Fassen Sie die folgenden Terme zu einem Bruch mit je einer Zahl in Zähler und Nenner zusammen!

$$\text{a) } \frac{3}{7} + \frac{7}{3}$$

$\frac{58}{21}$

Lösung: Es gilt

$$\frac{3}{7} + \frac{7}{3} = \frac{3 \cdot 3}{7 \cdot 3} + \frac{7 \cdot 7}{3 \cdot 7} = \frac{9 + 49}{21} = \frac{58}{21}.$$

$$\text{b) } 3 - \frac{8}{3}$$

$\frac{1}{3}$

Lösung: Es gilt

$$3 - \frac{8}{3} = \frac{3 \cdot 3}{3} - \frac{8}{3} = \frac{9 - 8}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{c) } \frac{17}{4} \cdot \frac{4}{11}$$

$\frac{17}{11}$

Lösung: Es gilt

$$\frac{17}{4} \cdot \frac{4}{11} = \frac{17 \cdot 4}{4 \cdot 11} = \frac{17 \cdot 1}{1 \cdot 11} = \frac{17}{11}.$$

$$\text{d) } 10 - \frac{17}{2} + \frac{6}{5}$$

$\frac{27}{10}$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} 10 - \frac{17}{2} + \frac{6}{5} &= \frac{10 \cdot 2 \cdot 5}{2 \cdot 5} - \frac{17 \cdot 5}{2 \cdot 5} + \frac{6 \cdot 2}{5 \cdot 2} \\ &= \frac{100 - 85 + 12}{10} = \frac{27}{10}. \end{aligned}$$

$$\text{e) } \frac{12}{5} + 4 - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}$$

$\frac{92}{15}$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{12}{5} + 4 - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} &= \frac{12 \cdot 3}{5 \cdot 3} + \frac{4 \cdot 5 \cdot 3}{5 \cdot 3} - \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 5} \\ &= \frac{36 + 60 - 4}{15} = \frac{92}{15}. \end{aligned}$$

$$\text{f) } \frac{11}{7} \cdot 2 - \frac{11}{3} : \frac{2}{5}$$

$-\frac{253}{42}$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{11}{7} \cdot 2 - \frac{11}{3} : \frac{2}{5} &= \frac{11 \cdot 2}{7} - \frac{11}{3} \cdot \frac{5}{2} \\ &= 11 \cdot \left(\frac{3 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 7} - \frac{5 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 7} \right) \\ &= 11 \cdot \frac{12 - 35}{6 \cdot 7} = 11 \cdot \frac{-23}{42} \\ &= -\frac{230 + 23}{42} = -\frac{253}{42}. \end{aligned}$$

$$\text{g) } \frac{7}{4} \cdot \frac{14}{3} - \frac{19}{10}$$

$\frac{94}{15}$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{7}{4} \cdot \frac{14}{3} - \frac{19}{10} &= \frac{7 \cdot 7}{2 \cdot 3} - \frac{19}{2 \cdot 5} = \frac{49 \cdot 5 - 19 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 5} \\ &= \frac{245 - 57}{30} = \frac{188}{30} = \frac{94}{15}. \end{aligned}$$

$$\text{h) } -\frac{6}{4} : \frac{3}{7} + \frac{1}{2}$$

-3

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} -\frac{6}{4} : \frac{3}{7} + \frac{1}{2} &= -\frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 2} \cdot \frac{7}{3} + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{3 \cdot 7}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2} = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2} = \frac{-7 + 1}{2} \\ &= \frac{-6}{2} = -\frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = -\frac{3}{1} = -3. \end{aligned}$$

$$\text{i) } \frac{\frac{8}{3} - \frac{9}{4} + \frac{3}{5}}{\frac{2}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{7}{2}}$$

$\frac{61}{59}$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\frac{8}{3} - \frac{9}{4} + \frac{3}{5}}{\frac{2}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{7}{2}} &= \frac{\frac{8 \cdot 4 \cdot 5 - 9 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 3 \cdot 4}{3 \cdot 4 \cdot 5}}{\frac{2 \cdot 6 \cdot 2 + 1 \cdot 7 \cdot 5}{5 \cdot 6 \cdot 2}} \\ &= \frac{160 - 135 + 36}{60} \cdot \frac{60}{24 + 35} = \frac{61}{59}. \end{aligned}$$

$$\text{j) } \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} - \frac{3}{4} : \frac{7}{2}$$

$\frac{3}{35}$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} - \frac{3}{4} : \frac{7}{2} &= \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 5} - \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{7} \\ &= \frac{3}{2 \cdot 5} - \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 7} = \frac{3}{2 \cdot 5} - \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 7} \\ &= \frac{3 \cdot 7}{2 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{3 \cdot 1 \cdot 5}{2 \cdot 7 \cdot 5} \\ &= \frac{21}{70} - \frac{15}{70} = \frac{21 - 15}{70} = \frac{6}{70} = \frac{3}{35}. \end{aligned}$$

$$k) \frac{\frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{6}}{\frac{7}{8} - \frac{10}{9} + \frac{11}{12}}$$

$\frac{83}{57}$

$\frac{192}{49}$

Lösung: Wegen $6 = 2 \cdot 3$, $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, $9 = 3 \cdot 3$ und $12 = 4 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{6}}{\frac{7}{8} - \frac{10}{9} + \frac{11}{12}} &= \frac{\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 4}{2 \cdot 3} + \frac{5}{2 \cdot 3}}{\frac{7 \cdot 9}{8 \cdot 9} - \frac{8 \cdot 10}{8 \cdot 9} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 11}{8 \cdot 9}} \\ &= \frac{\frac{3+8+5}{6}}{\frac{63-80+66}{72}} = \frac{16}{6} \cdot \frac{72}{49} = \frac{8}{3} \cdot \frac{72}{49} \\ &= \frac{8 \cdot 72}{3 \cdot 49} = \frac{8 \cdot 24}{1 \cdot 49} = \frac{160+32}{49} = \frac{192}{49}. \end{aligned}$$

$$l) \frac{\frac{11}{12} - \frac{12}{11} + \frac{11}{9}}{\frac{1}{6} - \frac{4}{11} + \frac{11}{12}}$$

Lösung: Wegen $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, $9 = 3 \cdot 3$ und $6 = 2 \cdot 3$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{\frac{11}{12} - \frac{12}{11} + \frac{11}{9}}{\frac{1}{6} - \frac{4}{11} + \frac{11}{12}} &= \frac{\frac{11 \cdot 11 \cdot 3 - 12 \cdot 12 \cdot 3 + 11 \cdot 4 \cdot 11}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11}}{\frac{1 \cdot 11 \cdot 2 - 4 \cdot 12 + 11 \cdot 11}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11}} \\ &= \frac{(11 \cdot 11 \cdot (3+4) - 144 \cdot 3) \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot (22 - 48 + 121)} \\ &= \frac{121 \cdot 7 - 144 \cdot 3}{3 \cdot (143 - 48)} \\ &= \frac{700 + 140 + 7 - 300 - 120 - 12}{3 \cdot 95} \\ &= \frac{415}{3 \cdot 5 \cdot 19} = \frac{83}{3 \cdot 19} = \frac{83}{57}. \end{aligned}$$



ArithLogik/Terme/Ag_Terme_EinsetzenUndVereinfachen_VKM.tex

Aufgabe 7.41 (Terme ineinander einsetzen und vereinfachen)

2.2.2

Setzen Sie jeweils den Term B in den Term A ein und vereinfachen Sie den dabei entstehenden Term $A(B)$ so weit wie möglich.

a) $A: 2x - 3y$
 $B: x = 2 - y$

$$4 - 5y$$

d) $A: x - xy$
 $B: y = \frac{1}{x} - 1$

$$2x - 1$$

g) $A: \frac{1}{x} - 3b$
 $B: x = 2a + 3b$

$$\frac{1-6ab-9b^2}{2a+3b}$$

b) $A: 2x - 3y$
 $B: y = 2 - x$

$$-6 + 5x$$

e) $A: 2x - 4ax$
 $B: a = x - 1$

$$6x - 4x^2$$

h) $A: \frac{-2(y^2-1)}{x^2}$
 $B: x = \frac{1}{y} - y$

$$\frac{2y^2}{1-y^2}$$

c) $A: x - xy$
 $B: x = y + 1$

$$1 - y^2$$

f) $A: 2x - 4ax$
 $B: x = a^2 - 2a - 1$

$$-4a^3 + 10a^2 - 2$$

i) $A: x + \frac{x}{z}$
 $B: x = z - \frac{1}{z}$

$$\frac{z^4+1}{z \cdot (z^2-1)}$$

Lösung:

Zunächst wird jeweils der Term A notiert, dann Term B in A eingesetzt und der entstehende Term so weit wie möglich vereinfacht bzw. zusammengefasst.

a)

$$\begin{aligned} 2x - 3y &\stackrel{x=2-y}{=} 2(2-y) - 3y \\ &= 4 - 5y \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} x - xy &\stackrel{y=\frac{1}{x}-1}{=} y + 1 - (y+1)y \\ &= y + 1 - (y^2 + y) = 1 - y^2 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} 2x - 4ax &\stackrel{a=x-1}{=} 2x - 4(x-1)x \\ &= 2x - 4x^2 + 4x = 6x - 4x^2 \end{aligned}$$

f)

b)

$$\begin{aligned} 2x - 3y &\stackrel{y=2-x}{=} 2x - 3(2-x) \\ &= -6 + 5x \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} x - xy &\stackrel{y=\frac{1}{x}-1}{=} x - x\left(\frac{1}{x} - 1\right) \\ &= x - (1 - x) = 2x - 1 \end{aligned}$$

$$2x - 4ax$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{x=a^2-2a-1}{=} 2(a^2 - 2a - 1) - 4a(a^2 - 2a - 1) \\ &= 2a^2 - 4a - 2 - (4a^3 - 8a^2 - 4a) \\ &= -4a^3 + 10a^2 - 2 \end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} - 3b & \stackrel{x=2a+3b}{=} \frac{1}{2a+3b} - 3b \\ &= \frac{1 - 3b(2a+3b)}{2a+3b} \\ &= \frac{1 - 6ab - 9b^2}{2a+3b}\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}\frac{-2(y^2-1)}{x^2} & \stackrel{x=\frac{1}{y}-y}{=} \frac{-2(y^2-1)}{\left(\frac{1}{y}-y\right)^2} \\ &= \frac{2(1-y^2) \cdot y^2}{(1-y^2)^2} = \frac{2y^2}{1-y^2}\end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned}x + \frac{2}{x} & \stackrel{x=z-\frac{1}{z}}{=} z - \frac{1}{z} + \frac{2}{z - \frac{1}{z}} \\ &= z - \frac{1}{z} + \frac{2z}{z^2-1} \\ &= \frac{z^2(z^2-1) - (z^2-1) + 2z^2}{z(z^2-1)} \\ &= \frac{z^4+1}{(z-1)z(z+1)}\end{aligned}$$



ArithLogik/Terme/Ag_Terme_Faktorisieren.tex

Aufgabe 7.42 (Produktdarstellung von Termen)

1.1.4

Seien $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$.

Faktorisieren Sie die folgenden Terme so weit wie möglich!

Lösung:

Zum Faktorisieren der gegebenen Terme werden Zahlen oder/und Terme ausgeklammert oder/und die binomischen Formeln verwendet.

a) $-4x - 16$

folgt

$$-4 \cdot (x + 4)$$

Lösung: Ausklammern liefert

$$-4x - 16 = -4 \cdot (x + 4).$$

b) $49y^2 - 64$

$$(7y - 8) \cdot (7y + 8)$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}49y^2 - 64 &= (7y)^2 - 8^2 \\ &= (7y - 8) \cdot (7y + 8).\end{aligned}$$

c) $ax - ay + bx - by$

$$(a + b) \cdot (x - y)$$

Lösung: Ausklammern liefert

$$\begin{aligned}ax - ay + bx - by \\ &= a \cdot (x - y) + b \cdot (x - y) \\ &= (a + b) \cdot (x - y).\end{aligned}$$

d) $192 \cdot x^2 \cdot y^2 + 216 \cdot x^3 \cdot y - 144 \cdot x \cdot y^2$

$$24xy \cdot (9x^2 + 8xy - 6y)$$

Lösung: Mit den Primfaktorzerlegungen

$$\begin{aligned}192 &= 3 \cdot 64 = 3 \cdot 2^6, \\ 216 &= 3 \cdot 72 = 3^2 \cdot 24 = 3^3 \cdot 8 = 3^3 \cdot 2^3, \\ 144 &= 12^2 = (3 \cdot 2^2)^2 = 3^2 \cdot 2^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}192 \cdot x^2 \cdot y^2 + 216 \cdot x^3 \cdot y - 144 \cdot x \cdot y^2 \\ &= 2^6 \cdot 3^1 \cdot x^2 y^2 + 2^3 \cdot 3^3 \cdot x^3 y - 2^4 \cdot 3^2 \cdot x y^2 \\ &= 2^3 \cdot 3^1 \cdot xy \cdot (2^3 \cdot xy + 3^2 \cdot x^2 - 2^1 \cdot 3^1 \cdot y) \\ &= 24xy \cdot (8xy + 9x^2 - 6y).\end{aligned}$$

$$\text{e)} -(u-v) \cdot (u+v) + 2u \cdot (u+v)$$

$$-8mn$$

$$(u+v)^2$$

Lösung durch Ausklammern: Es gilt

$$\begin{aligned} & -(u-v) \cdot (u+v) + 2u \cdot (u+v) \\ &= (- (u-v) + 2u) \cdot (u+v) \\ &= (-u + v + 2u) \cdot (u+v) \\ &= (v+u) \cdot (u+v) \\ &= (u+v)^2. \end{aligned}$$

Lösung mit Ausmultiplizieren: Es gilt

$$\begin{aligned} & (2m-n)^2 - (n+2m)^2 \\ &= \left((2m)^2 - 2 \cdot 2m \cdot n + n^2 \right) \\ & \quad - \left(n^2 + 2 \cdot n \cdot 2m + (2m)^2 \right) \\ &= 4m^2 - 4mn + n^2 - n^2 - 4mn - 4m^2 \\ &= -8mn. \end{aligned}$$

Lösung mit Ausmultiplizieren: Es gilt

$$\begin{aligned} & -(u-v) \cdot (u+v) + 2u \cdot (u+v) \\ &= -(u^2 - v^2) + 2u^2 + 2uv \\ &= -u^2 + v^2 + 2u^2 + 2uv \\ &= u^2 + 2uv + v^2 \\ &= (u+v)^2. \end{aligned}$$

Lösung mit dritter BF: Es gilt

$$\begin{aligned} & (2m-n)^2 - (n+2m)^2 \\ &= ((2m-n) + (n+2m)) \\ & \quad \cdot ((2m-n) - (n+2m)) \\ &= (2m-n+n+2m) \\ & \quad \cdot (2m-n-n-2m) \\ &= 4m \cdot (-2n) \\ &= -8mn. \end{aligned}$$

$$\text{f)} (2m-n)^2 - (n+2m)^2$$



ArithLogik/Terme/Ag_Terme_Logarithmengesetze1.tex

Aufgabe 7.43 (Logarithmenterme umschreiben)

Formen Sie die Terme so um, dass die Logarithmen nur noch auf einzelne Variablen oder auf möglichst einfach gebaute Terme aus einzelnen Variablen angewandt werden:

$$\text{a)} \ln \left(\frac{\sqrt{a} \cdot b^2}{\sqrt[4]{c}} \right) \quad \frac{1}{2} \ln(a) + \quad 2 \ln(b) - \frac{1}{4} \ln(c)$$

$$\text{c)} \ln(e \cdot \sqrt[3]{e}) \quad \frac{4}{3}$$

$$\text{e)} \text{lb} \left(\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2^3} \right) \quad \frac{14}{15}$$

$$\text{b)} \ln \left(\left(\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[4]{b}}{\sqrt[10]{c}} \right)^{10} \right) \quad 10 \ln \left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[4]{b} \right) - \ln(c)$$

$$\text{d)} \ln \left(\frac{\sqrt[5]{x^2} \cdot (\sqrt[6]{y})^2}{\sqrt{u} \cdot \sqrt{v}} \right) \quad \frac{2}{5} \ln(x) + \frac{1}{3} \ln(y) - \frac{1}{2} \ln(u) - \frac{1}{4} \ln(v)$$

$$\text{f)} \ln \left(\left(\frac{a^2 - \sqrt[7]{2-x}}{\sqrt{4f+2s^4}} \right)^4 \right) \quad 4 \ln(a^2 - \sqrt[7]{2-x}) - 4 \ln(2) - 4 \ln(\sqrt{f} + s^4)$$

Lösung:

$$\text{a)} \ln \frac{\sqrt{a} \cdot b^2}{\sqrt[4]{c}} = \frac{1}{2} \ln(a) + 2 \ln(b) - \frac{1}{4} \ln(c)$$

$$\text{b)} \ln \left(\left(\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[4]{b}}{\sqrt[10]{c}} \right)^{10} \right) = 10 \ln \left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[4]{b} \right) - \ln(c)$$

$$\text{c)} \ln(e \cdot \sqrt[3]{e}) = \ln(e^{4/3}) = \frac{4}{3}$$

$$\text{d)} \ln \frac{\sqrt[5]{x^2} \cdot (\sqrt[6]{y})^2}{\sqrt{u} \cdot \sqrt{v}} = \ln(x^{2/5} y^{2/6}) - \ln(u^{1/2} v^{1/4}) = \frac{2}{5} \ln(x) + \frac{1}{3} \ln(y) - \frac{1}{2} \ln(u) - \frac{1}{4} \ln(v)$$

$$\text{e)} \text{lb}(\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2^3}) = \text{lb}(2^{1/3}) + \text{lb}(2^{3/5}) = \frac{14}{15}$$

$$\text{f)} \ln \left(\left(\frac{a^2 - \sqrt[7]{2-x}}{\sqrt{4f+2s^4}} \right)^4 \right) = 4 \ln(a^2 - \sqrt[7]{2-x}) - 4 \ln(2) - 4 \ln(\sqrt{f} + s^4)$$

**Aufgabe 7.44** (Logarithmenterme vereinfachen)

Fassen Sie so zusammen, dass nur noch ein Logarithmus gezogen werden muss!

- a) $2 \ln(u) + 3 \ln(v)$ $\ln(u^2 \cdot v^3)$ c) $\ln(x^2) + \frac{1}{3} \ln(y) - \frac{2}{5} \ln(z)$ $\ln\left(\frac{x^2 \cdot \sqrt[3]{y}}{\sqrt[5]{z^2}}\right)$
- b) $\ln(u+v) + \ln((u+v)^2) - \frac{1}{2} \ln(u) - \frac{1}{3} \ln(v)$ $\ln\left(\frac{(u+v)^3}{\sqrt{u} \cdot \sqrt[3]{v}}\right)$ d) $\ln(11) - 2 \ln(7x) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ $\ln\left(\frac{11 \cdot x^{-1/2}}{(7x)^2}\right)$

Lösung:

- a) $2 \ln u + 3 \ln v = \ln(u^2 \cdot v^3)$
- b) $\ln(u+v) + \ln((u+v)^2) - \frac{1}{2} \ln u - \frac{1}{3} \ln v = \ln\left(\frac{(u+v)^3}{\sqrt{u} \cdot \sqrt[3]{v}}\right)$
- c) $\ln(x^2) + \frac{1}{3} \ln y - \frac{2}{5} \ln z = \ln\left(\frac{x^2 \cdot \sqrt[3]{y}}{\sqrt[5]{z^2}}\right)$
- d) $\ln(11) - 2 \ln(7x) + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{x} = \ln\left(\frac{11 \cdot x^{-1/2}}{(7x)^2}\right)$

**Aufgabe 7.45** (Rechnen mit Termen)

1.1.2

Seien $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$. Formen Sie die folgenden Terme so um, dass keine Klammern mehr auftreten, und fassen Sie im Anschluss so weit wie möglich zusammen ohne Klammern zu verwenden!

Lösung:

Unter Verwendung der elementaren Rechenregeln (Anwendung von Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetzen bzw. den binomischen Formeln) lassen sich die Terme umformen.

- a) $7a - 3b + (-a + 2c) + (3c - 6b) - (6a - 3c)$

$$-9b + 8c$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} & 7a - 3b + (-a + 2c) + (3c - 6b) - (6a - 3c) \\ &= 7a - 3b - a + 2c + 3c - 6b - 6a + 3c \\ &= (7 - 1 - 6) \cdot a + (-3 - 6) \cdot b + (2 + 3 + 3) \cdot c \\ &= -9b + 8c. \end{aligned}$$

- b) $5a + (7c - (2a - 3b)) - (4c - a + b)$

$$4a + 2b + 3c$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} & 5a + (7c - (2a - 3b)) - (4c - a + b) \\ &= 5a + 7c - 2a + 3b - 4c + a - b \\ &= (5 - 2 + 1) \cdot a + (3 - 1) \cdot b + (7 - 4) \cdot c \\ &= 4a + 2b + 3c. \end{aligned}$$

c) $a \cdot (b - 2a) - b \cdot (a + 2b)$

$$-2a^2 - 2b^2$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} & a \cdot (b - 2a) - b \cdot (a + 2b) \\ &= ab - 2a^2 - ba - 2b^2 \\ &= ab - ab - 2a^2 - 2b^2 \\ &= -2a^2 - 2b^2. \end{aligned}$$

d) $(3a + 2b) \cdot (4a - 3b) \cdot (5a - 7b)$

$$60a^3 - 89a^2b - 23ab^2 + 42b^3$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} & (3a + 2b) \cdot (4a - 3b) \cdot (5a - 7b) \\ &= (12a^2 - 9ab + 8ba - 6b^2) \cdot (5a - 7b) \\ &= (12a^2 - ab - 6b^2) \cdot (5a - 7b) \\ &= 60a^3 - 84a^2b - 5a^2b + 7ab^2 - 30ab^2 + 42b^3 \\ &= 60a^3 - 89a^2b - 23ab^2 + 42b^3. \end{aligned}$$

e) $(7a - 5b) \cdot (3a + 4b) - (5a - 9b) \cdot (4a - b)$

$$a^2 + 54ab - 29b^2$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} & (7a - 5b) \cdot (3a + 4b) - (5a - 9b) \cdot (4a - b) \\ &= (21a^2 + 28ab - 15ba - 20b^2) - (20a^2 - 5ab - 36ba + 9b^2) \\ &= 21a^2 + 28ab - 15ab - 20b^2 - 20a^2 + 5ab + 36ab - 9b^2 \\ &= (21 - 20) \cdot a^2 + (28 - 15 + 5 + 36) \cdot ab + (-20 - 9) \cdot b^2 \\ &= a^2 + 54ab - 29b^2. \end{aligned}$$

f) $(3a + 2b - 5c)^2$

$$9a^2 + 4b^2 + 25c^2 + 12ab - 30ac - 20bc$$

Lösung via „jedes mit jedem“: Es gilt

$$\begin{aligned} & (3a + 2b - 5c)^2 \\ &= (3a + 2b - 5c) \cdot (3a + 2b - 5c) \\ &= 9a^2 + 6ab - 15ac + 6ab + 4b^2 - 10bc - 15ac - 10bc + 25c^2 \\ &= 9a^2 + 4b^2 + 25c^2 + 12ab - 30ac - 20bc. \end{aligned}$$

Lösung via binomischen Formeln: Es gilt

$$\begin{aligned} & (3a + 2b - 5c)^2 \\ &= ((3a + 2b) - 5c)^2 \\ &= (3a + 2b)^2 - 2 \cdot (3a + 2b) \cdot 5c + (5c)^2 \\ &= (3a)^2 + 2 \cdot 3a \cdot 2b + (2b)^2 - 6a \cdot 5c - 4b \cdot 5c + 25c^2 \\ &= 9a^2 + 4b^2 + 25c^2 + 12ab - 30ac - 20bc. \end{aligned}$$

g) $(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2$

$$4a^2b^2$$

Lösung via erster und zweiter binomischer Formel: Es gilt

$$\begin{aligned} & (a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 \\ &= (a^4 + 2a^2b^2 + b^4) - (a^4 - 2a^2b^2 + b^4) \\ &= a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^4 + 2a^2b^2 - b^4 \\ &= 4a^2b^2. \end{aligned}$$

Lösung via dritter binomischen Formel: Es gilt

$$\begin{aligned} & (a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 \\ &= ((a^2 + b^2) - (a^2 - b^2)) \cdot ((a^2 + b^2) + (a^2 - b^2)) \\ &= (a^2 + b^2 - a^2 + b^2) \cdot (a^2 + b^2 + a^2 - b^2) \\ &= 2b^2 \cdot 2a^2 \\ &= 4a^2b^2. \end{aligned}$$

h) $(2a - 5b) \cdot (5b - 3a) - (2b - 4a) \cdot (6a + 7b)$

$$18a^2 + 41ab - 39b^2$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} & (2a - 5b) \cdot (5b - 3a) - (2b - 4a) \cdot (6a + 7b) \\ &= (10ab - 6a^2 - 25b^2 + 15ba) - (12ba + 14b^2 - 24a^2 - 28ab) \\ &= 10ab - 6a^2 - 25b^2 + 15ab - 12ab - 14b^2 + 24a^2 + 28ab \\ &= (-6 + 24) \cdot a^2 + (10 + 15 - 12 + 28) \cdot ab + (-25 - 14) \cdot b^2 \\ &= 18a^2 + 41ab - 39b^2. \end{aligned}$$



ArithLogik/Terme/Ag_Terme_Potenzen5_leicht.tex

Aufgabe 7.46 (Potenzen, Fakultäten, Binomialkoeffizienten, binomischer Satz)

4.1.2

a) Vereinfachen Sie den Term $2a^8b^5 - 7a^5b^3 + a^7 \cdot (-b)^4$ durch Ausklammern.

$$a^5b^3 \cdot (2a^3b^2 + a^2b - 7)$$

Lösung:

$$2a^8b^5 - 7a^5b^3 + a^7 \cdot (-b)^4 = 2a^8b^5 - 7a^5b^3 + a^7 \cdot (-1)^4 \cdot b^4 = a^5b^3 \cdot (2a^3b^2 - 7 + a^2b).$$

b) Vereinfachen Sie $\left(-\frac{1}{a^{-4}}\right)^{-5}$. Welche $a \in \mathbb{R}$ müssen ausgeschlossen werden?

$$-a^{-20}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\left(-\frac{1}{a^{-4}}\right)^{-5} &= \left(-\frac{1}{a^{4 \cdot (-1)}}\right)^{5 \cdot (-1)} = \left(\left(-\frac{1}{(a^4)^{-1}}\right)^5\right)^{-1} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{a^4}\right)^5} \\ &= \frac{1}{(-1 \cdot a^4)^5} = \frac{1}{(-1)^5 \cdot (a^4)^5} = \frac{1}{-1 \cdot a^{20}} = -\frac{1}{a^{20}} = -a^{-20}.\end{aligned}$$

Es muss $a = 0$ ausgeschlossen werden, da in gewissen Nennern positive ganzzahlige Potenzen von a auftreten. Die entsprechenden Brüche wären für $a = 0$ *nicht* definiert, da $0^n = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

c) Berechnen Sie die folgenden Fakultäten und Binomialkoeffizienten:

(i) $6!$	(ii) $7!$	(iii) $\binom{11}{5}$	(iv) $\binom{13}{6}$
720	5040	462	1716

Lösung:

Es gilt

$$\begin{aligned}7! &= \underbrace{1}_{=1!} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = \underbrace{2}_{=2!} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = \underbrace{6}_{=3!} \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = \underbrace{24}_{=4!} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \\ &= (100 + 20) \cdot 6 \cdot 7 = \underbrace{120}_{=5!} \cdot 6 \cdot 7 = (600 + 120) \cdot 7 = \underbrace{720}_{=6!} \cdot 7 = 4900 + 140 = \underbrace{5040}_{=7!}, \\ \binom{11}{5} &= \frac{11!}{5! \cdot (11-5)!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6!} = 11 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 7 = 66 \cdot 7 = 420 + 42 = 462 \\ \text{und} \\ \binom{13}{6} &= \frac{13!}{6! \cdot (13-6)!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7!} = 13 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \\ &= 26 \cdot 66 = (20 + 6) \cdot (60 + 6) = 1200 + 120 + 360 + 36 = 1716.\end{aligned}$$

d) Berechnen Sie $(2a - b)^5$ mit dem binomischen Satz.

$$32a^5 - 80a^4b + 80a^3b^2 - 40a^2b^3 + 10ab^4 - b^5$$

Lösung:

Mit dem rechts stehenden Pascal'schen Dreieck ergibt sich

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\ 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\ 1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\ 1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \\ 1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1 \\ 1 \quad 10 \quad 45 \quad 120 \quad 210 \quad 252 \quad 210 \quad 120 \quad 45 \quad 10 \quad 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned}(2a - b)^5 &= \binom{5}{0} \cdot (2a)^{5-0} \cdot (-b)^0 + \binom{5}{1} \cdot (2a)^{5-1} \cdot (-b)^1 \\ &\quad + \binom{5}{2} \cdot (2a)^{5-2} \cdot (-b)^2 + \binom{5}{3} \cdot (2a)^{5-3} \cdot (-b)^3 \\ &\quad + \binom{5}{4} \cdot (2a)^{5-4} \cdot (-b)^4 + \binom{5}{5} \cdot (2a)^{5-5} \cdot (-b)^5 \\ &= 1 \cdot (2a)^5 \cdot 1 + 5 \cdot (2a)^4 \cdot (-b) + 10 \cdot (2a)^3 \cdot b^2 \\ &\quad + 10 \cdot (2a)^2 \cdot (-b^3) + 5 \cdot (2a)^1 \cdot b^4 + 1 \cdot (2a)^0 \cdot (-b^5) \\ &= 32a^5 - 80a^4b + 80a^3b^2 - 40a^2b^3 + 10ab^4 - b^5.\end{aligned}$$

e) Vereinfachen Sie $\frac{18^3 \cdot (ab^2)^2}{6^3 \cdot ((a^2b)^3 \cdot (a^{-1})^2)^3}$.

$$27 \cdot a^{-10} \cdot b^{-5}$$

Lösung:

$$\frac{18^3 \cdot (ab^2)^2}{6^3 \cdot ((a^2b)^3 \cdot (a^{-1})^2)^3} = \frac{(6 \cdot 3)^3 \cdot a^2 \cdot (b^2)^2}{6^3 \cdot ((a^2)^3 \cdot b^3 \cdot a^{-2})^3} = \frac{6^3 \cdot 3^3 \cdot a^2 \cdot b^4}{6^3 \cdot (a^6)^3 \cdot (b^3)^3 \cdot (a^{-2})^3} = \frac{3^3 \cdot a^2 \cdot b^4}{a^{18} \cdot b^9 \cdot a^{-6}} = \frac{27}{a^{10} \cdot b^5}.$$



ArithLogik/Terme/Ag_Terme_VerschiedeneUmformungen.tex

Aufgabe 7.47 (Brüche und Terme mit Variablen umformen)

1.1.5

Seien $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ und $d \in \mathbb{R}$ mit $c \neq \frac{b-a}{2}$ und $d \neq 0$.

a) Fassen Sie $\frac{2}{9} - \frac{1}{2} + \frac{5}{7}$ zu einem Bruch zusammen!

$$\frac{55}{126}$$

Lösung: Es gilt $\frac{2}{9} - \frac{1}{2} + \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 7 - 1 \cdot 9 \cdot 7 + 5 \cdot 9 \cdot 2}{9 \cdot 2 \cdot 7} = \frac{28 - 63 + 90}{9 \cdot 2 \cdot 7} = \frac{118 - 63}{63 \cdot 2} = \frac{55}{126}.$

b) Fassen Sie $\left(\frac{2}{a} - \frac{3}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right)$ im Fall $a \neq 0 \neq b$ zu einem Bruch ohne Klammern zusammen!

$$\frac{4b^2 - 9a^2}{6ab}$$

Lösung: Es gilt $\left(\frac{2}{a} - \frac{3}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right) = 1 + \frac{2b}{3a} - \frac{3a}{2b} - 1 = \frac{2b}{3a} - \frac{3a}{2b} = \frac{4b^2 - 9a^2}{6ab}.$

c) Schreiben Sie $(5a + 4)^2 - (3a - 5)^2 + 4 \cdot (a + 3) \cdot (a - 3) + 5$ einmal als Summe ohne Klammern und einmal als Produkt ohne Brüche!

$$20a^2 + 70a - 40 = 10 \cdot (2a - 1) \cdot (a + 4)$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} & (5a + 4)^2 - (3a - 5)^2 + 4 \cdot (a + 3) \cdot (a - 3) + 5 \\ &= \left((5a)^2 + 2 \cdot 5a \cdot 4 + 4^2\right) - \left((3a)^2 - 2 \cdot 3a \cdot 5 + 5^2\right) + 4 \cdot (a^2 - 3^2) + 5 \\ &= 25a^2 + 40a + 16 - 9a^2 + 30a - 25 + 4a^2 - 36 + 5 \\ &= 20a^2 + 70a - 40 = 5 \cdot \left((2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot \frac{7}{2} + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} - 8\right) \\ &= 5 \cdot \left((2a + \frac{7}{2})^2 - \frac{81}{4}\right) = 5 \cdot \left(2a + \frac{7}{2} - \frac{9}{2}\right) \cdot \left(2a + \frac{7}{2} + \frac{9}{2}\right) \\ &= 5 \cdot (2a - 1) \cdot (2a + 8) = 10 \cdot (2a - 1) \cdot (a + 4). \end{aligned}$$

d) Vereinfachen Sie $\frac{a^2 - b^2}{a^2 - ab}$ durch Kürzen! Was muss für a und b gelten?

$$\frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a} \text{ mit } 0 \neq a \neq b$$

Lösung: Im Fall $0 \neq a \neq b$ gilt $\frac{a^2 - b^2}{a^2 - ab} = \frac{(a + b) \cdot (a - b)}{a \cdot (a - b)} = \frac{a + b}{a} = 1 + \frac{b}{a}.$

e) Schreiben Sie $\left(\frac{a}{4d} - \frac{b}{2d} + \frac{2c}{8d}\right) \cdot \frac{12d}{4a - 4b + 8c}$ als einen Bruch ohne Klammern!

$$\frac{3a-6b+3c}{4a-4b+8c}$$

Lösung: Es gilt

$$\left(\frac{a}{4d} - \frac{b}{2d} + \frac{2c}{8d}\right) \cdot \frac{12d}{4a - 4b + 8c} = \frac{a - 2b + c}{4d} \cdot \frac{12d}{4 \cdot (a - b + 2c)} = \frac{(a - 2b + c) \cdot 3}{4 \cdot (a - b + 2c)} = \frac{3a - 6b + 3c}{4a - 4b + 8c}.$$

f) Wie lautet der vereinfachte Kehrwert von $\frac{\frac{a+b}{a} + \frac{a-b}{b}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$? Was muss hierbei für a und b gelten?

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} \text{ mit } 0 \neq a \neq -b \neq 0$$

Lösung: Damit der gegebene Bruch erklärt ist, muss $a \neq 0$, $b \neq 0$ und $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \neq 0$, also $a \neq -b$ gelten. Dann gilt $\frac{\frac{a+b}{a} + \frac{a-b}{b}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{\frac{ab+b^2+a^2-ab}{a \cdot b}}{\frac{b+a}{a \cdot b}} = \frac{ab + b^2 + a^2 - ab}{a \cdot b} \cdot \frac{a \cdot b}{a + b} = \frac{a^2 + b^2}{a + b}$. Der Kehrwert existiert, wenn $a^2 + b^2 \neq 0$ gilt. Wegen $a^2 + b^2 \geq 0$ und der Voraussetzung $a \neq 0$ ist dies der Fall. Als Kehrwert ergibt sich $\frac{a+b}{a^2+b^2}$, wobei $0 \neq a \neq -b \neq 0$ sein muss.



ArithLogik/Terme/Ag_Terme_Wurzeln1_leicht.tex

Aufgabe 7.48 (Rechnen mit Wurzeln und Potenzen)

7.2.1

Fassen Sie folgende Terme (möglichst geschickt) zusammen:

a) $2^2 \cdot 2^3$

$$2^5 = 32$$

Lösung:

$$2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32.$$

b) $(-x^2)^3$

$$-x^6$$

Lösung:

$$(-x^2)^3 = (-1 \cdot x^2)^3 = (-1)^3 \cdot x^{2 \cdot 3} = -x^6.$$

c) $(\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2^2})^6$

$$2^7 = 128$$

Lösung:

$$(\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2^2})^6 = (2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{2}{3}})^6 = 2^{\frac{1}{2} \cdot 6} \cdot 2^{\frac{2}{3} \cdot 6} = 2^3 \cdot 2^4 = 2^7 = 128.$$

d) $x^5 = \frac{243}{32}$

$$x = \frac{3}{2}$$

Lösung:

Da der Exponent von x^5 ungerade und der Wert der rechten Seite positiv ist, besitzt die Gleichung genau eine Lösung, und zwar

$$x = \sqrt[5]{\frac{243}{32}} = \frac{\sqrt[5]{243}}{\sqrt[5]{32}} = \frac{\sqrt[5]{3^5}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{3}{2}.$$

e) $x^{1.4} = 5$

$$x = \sqrt[7]{5^5} \approx 3.157$$

Lösung:

Es ist $x^{1.4} = x^{\frac{7}{5}}$ in den reellen Zahlen nur für $x \geq 0$ erklärt. Potenzieren mit $\frac{1}{1.4} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$ führt auf

$$x = 5^{\frac{5}{7}} = \sqrt[7]{5^5} \approx 3.157.$$

f) $\sqrt[7]{10\,000\,000}$

$$10$$

Lösung:

$$\sqrt[7]{10\,000\,000} = \sqrt[7]{10^7} = 10^{\frac{7}{7}} = 10^1 = 10.$$

g) $y^2 \cdot z^2 \cdot u^3$

$$(y \cdot z \cdot u)^2 \cdot u$$

Lösung:

$$y^2 \cdot z^2 \cdot u^3 = y^2 \cdot z^2 \cdot u^2 \cdot u = (y \cdot z \cdot u)^2 \cdot u.$$

h) $\sqrt{x \cdot \sqrt[8]{x^3} \cdot \sqrt[16]{x^5}}$

$$\sqrt[32]{x^{27}} = x^{\frac{27}{32}}$$

Lösung:

$$\sqrt{x \cdot \sqrt[8]{x^3} \cdot \sqrt[16]{x^5}} = \sqrt{x \cdot x^{\frac{3}{8}} \cdot x^{\frac{5}{16}}} = \sqrt{x^{1+\frac{3}{8}+\frac{5}{16}}} = \sqrt{x^{\frac{27}{16}}} = x^{\frac{27}{16} \cdot \frac{1}{2}} = x^{\frac{27}{32}}.$$

i) $\frac{(x^{-2} \cdot z^2 \cdot w^{-3})^2}{(x^{-1} \cdot z^{-2} \cdot x^{-3})^3}$

$$\frac{x^8 \cdot z^{10}}{w^6} = x^8 z^{10} w^{-6}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \frac{(x^{-2} \cdot z^2 \cdot w^{-3})^2}{(x^{-1} \cdot z^{-2} \cdot x^{-3})^3} &= \frac{x^{-4} \cdot z^4 \cdot x^{-6}}{x^{-3} \cdot x^{-9} \cdot z^{-6}} = x^{-4} \cdot z^4 \cdot w^{-6} \cdot (x^{-12} \cdot z^{-6})^{-1} \\ &= x^{-4} \cdot z^4 \cdot w^{-6} \cdot x^{12} \cdot z^6 = x^8 \cdot z^{10} \cdot w^{-6} = \frac{x^8 \cdot z^{10}}{w^6}. \end{aligned}$$

j) $\left(\frac{7}{4}x^{2m+3} - \frac{3}{2}x^{2m-3} + \frac{4}{5}x^{m+4}\right) : \left(\frac{3}{4}x^{2m+1}\right)$

$$\frac{7}{3}x^2 - 2x^{-4} + \frac{16}{15}x^{-m+3}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \left(\frac{7}{4}x^{2m+3} - \frac{3}{2}x^{2m-3} + \frac{4}{5}x^{m+4}\right) : \left(\frac{3}{4}x^{2m+1}\right) &= \left(\frac{7}{4}x^{2m+3} - \frac{3}{2}x^{2m-3} + \frac{4}{5}x^{m+4}\right) \cdot \left(\frac{4}{3}x^{2m+1}\right)^{-1} \\ &= \left(\frac{7}{4}x^{2m+3} - \frac{3}{2}x^{2m-3} + \frac{4}{5}x^{m+4}\right) \cdot \left(\frac{4}{3}x^{-(2m+1)}\right) \\ &= \frac{7}{3}x^{2m+3-(2m+1)} - \frac{2}{1}x^{2m-3-(2m+1)} + \frac{16}{15}x^{m+4-(2m+1)} \\ &= \frac{7}{3}x^2 - 2x^{-4} + \frac{16}{15}x^{-m+3}. \end{aligned}$$

k) $\sqrt{a \cdot \sqrt{a \cdot \sqrt{a}}}$

$$\sqrt[8]{a^7} = a^{\frac{7}{8}}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\sqrt{a \cdot \sqrt{a \cdot \sqrt{a}}} &= \sqrt{a} \cdot \sqrt{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}} = a^{\frac{1}{2}} \cdot \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \\ &= a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{8}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = a^{\frac{7}{8}}.\end{aligned}$$



ArithLogik/Terme/Ag_Terme_Wurzeln4_leicht.tex

Aufgabe 7.49 (Rechnen mit Wurzeltermen)

5.1.2

Fassen Sie folgende Wurzelterme zusammen:

a) $\sqrt{1-x} + \frac{x+1}{2 \cdot \sqrt{1-x}}$

$$\frac{3-x}{2\sqrt{1-x}}$$

Lösung:

$$\sqrt{1-x} + \frac{x+1}{2 \cdot \sqrt{1-x}} = \frac{2 \cdot \sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1-x} + x+1}{2 \cdot \sqrt{1-x}} = \frac{2 \cdot (1-x) + x+1}{2 \cdot \sqrt{1-x}} = \frac{3-x}{2\sqrt{1-x}}.$$

b) $\frac{2x \cdot (r^2 - 4x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}} - 8x \cdot \sqrt{r^2 - x^2}$

$$-\frac{6xr^2}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\frac{2x \cdot (r^2 - 4x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}} - 8x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} &= \frac{2x \cdot (r^2 - 4x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}} - \frac{8x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{r^2 - x^2}}{\sqrt{r^2 - x^2}} \\ &= \frac{2x \cdot (r^2 - 4x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}} - \frac{8x \cdot (r^2 - x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2xr^2 - 8x^3 - (8xr^2 - 8x^3)}{\sqrt{r^2 - x^2}} = -\frac{6xr^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}.\end{aligned}$$

c) $\sqrt{\frac{a^2 + 2ab + b^2}{4}} : \sqrt{\frac{a^2 - 2ab + b^2}{4}}$

$$\left| \frac{a+b}{a-b} \right|$$

Lösung:

$$\sqrt{\frac{a^2 + 2ab + b^2}{4}} : \sqrt{\frac{a^2 - 2ab + b^2}{4}} = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{2^2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{a-b}{2^2}}\right)^{-1} = \frac{|a+b|}{2} \cdot \frac{2}{|a-b|} = \left| \frac{a+b}{a-b} \right|.$$

d)
$$\frac{\sqrt{(a-b)^2 + a^2 + b^2 - 2ab}}{\sqrt{2 \cdot (a+b) \cdot (a-b)}}$$

$$\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$$

Lösung:

$$\frac{\sqrt{(a-b)^2 + a^2 + b^2 - 2ab}}{\sqrt{2 \cdot (a+b) \cdot (a-b)}} = \frac{\sqrt{(a-b)^2 + (a-b)^2}}{\sqrt{2 \cdot (a+b) \cdot (a-b)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (a-b)^2}{2 \cdot (a+b) \cdot (a-b)}} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}.$$

 ArithLogik/Terme/Text_Polynome_QuadErgDreiEinfuehrungsBspe.txt

Aufgabe 7.50 ()

Eine Aufgabe zum Trainieren von quadratischer Ergaenzung findet sich in
FktEinDim/Polynome/Ag_Polynome_QuadErgDreiEinfuehrungsBspe



ArithLogik/UnGleichungen/Ag_Gleichungen_QuadGleichungen1_leicht.tex

Aufgabe 8.51 (Quadratische Gleichungen)

5.1.3

Lösen Sie folgende Gleichungen auf verschiedene Arten (etwa durch Termumformungen, mittels quadratischer Ergänzung, mit Hilfe von Lösungsformeln für quadratische Gleichungen).

a) $x^2 + 4 = 8$ $\{-2; 2\}$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt wegen $4 = 2^2$ und der dritten binomischen Formel

$$x^2 + 4 = 8 \iff x^2 - 4 = 0 \iff (x + 2) \cdot (x - 2) = 0 \iff x = -2 \text{ oder } x = 2.$$

b) $16 - x^2 = 7$ $\{-3; 3\}$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt wegen $9 = 3^2$ und der dritten binomischen Formel

$$16 - x^2 = 7 \iff 0 = x^2 - 9 \iff 0 = (x + 3) \cdot (x - 3) \iff x = -3 \text{ oder } x = 3.$$

c) $x^2 - \frac{49}{4} = 0$ $\{-\frac{7}{2}; \frac{7}{2}\}$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt wegen $\frac{49}{4} = (\frac{7}{2})^2$ und der dritten binomischen Formel

$$x^2 - \frac{49}{4} = 0 \iff (x + \frac{7}{2}) \cdot (x - \frac{7}{2}) = 0 \iff x = -\frac{7}{2} \text{ oder } x = \frac{7}{2}.$$

d) $4x^2 - 14 = 11$ $\{-\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\}$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt wegen $25 = 5^2$ und der dritten binomischen Formel

$$\begin{aligned} 4x^2 - 14 = 11 &\iff (2x)^2 - 25 = 0 &\iff (2x + 5) \cdot (2x - 5) \\ &\iff 2x + 5 = 0 \text{ oder } 2x - 5 = 0 &\iff x = -\frac{5}{2} \text{ oder } x = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

e) $2x^2 + \frac{1}{2} = 5$ $\{-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\}$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt wegen $\frac{9}{4} = (\frac{3}{2})^2$ und der dritten binomischen Formel

$$\begin{aligned} 2x^2 + \frac{1}{2} = 5 &\iff 2x^2 - \frac{9}{2} = 0 &\iff x^2 - \frac{9}{4} = 0 \\ &\iff (x + \frac{3}{2}) \cdot (x - \frac{3}{2}) = 0 &\iff x = -\frac{3}{2} \text{ oder } x = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

f) $(2x + 1)^2 - 4x = 2$ $\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\}$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt wegen $1 = 1^2$, der ersten und der dritten binomischen Formel

$$\begin{aligned} (2x + 1)^2 - 4x = 2 &\iff (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 - 4x - 2 = 0 &\iff (2x)^2 - 1 = 0 \\ &\iff (2x + 1) \cdot (2x - 1) = 0 &\iff x = -\frac{1}{2} \text{ oder } x = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

g) $2x^2 + 2x - 4 = 0$

$\{-2; 1\}$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt wegen $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, $\frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$, der ersten und der dritten binomischen Formel

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2x - 4 = 0 &\iff x^2 + x - 2 = 0 &\iff x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2 = 0 \\ &\iff \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = 0 &\iff \left(x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) = 0 \\ &\iff (x + 2) \cdot (x - 1) = 0 &\iff x = -2 \text{ oder } x = 1. \end{aligned}$$

h) $4x^2 - 6x + 2 = 0$

$\{\frac{1}{2}; 1\}$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt wegen $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$, $\frac{1}{16} = \left(\frac{1}{4}\right)^2$, der zweiten und der dritten binomischen Formel

$$\begin{aligned} 4x^2 - 6x + 2 = 0 &\iff x^2 - \frac{3}{2} \cdot x + \frac{1}{2} = 0 &\iff x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{1}{2} = 0 \\ &\iff \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0 &\iff \left(x - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(x - \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) = 0 \\ &\iff \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (x - 1) = 0 &\iff x = \frac{1}{2} \text{ oder } x = 1. \end{aligned}$$

i) $\frac{1}{3} \cdot x^2 - x - 6 = 0$

$\{-3; 6\}$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt wegen $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$, $\frac{9}{4} + 18 = \frac{9+72}{4} = \frac{81}{4} = \left(\frac{9}{2}\right)^2$, der zweiten und der dritten binomischen Formel

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot x^2 - x - 6 = 0 &\iff x^2 - 3x - 18 = 0 &\iff x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 18 = 0 \\ &\iff \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{81}{4} = 0 &\iff \left(x - \frac{3}{2} + \frac{9}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{3}{2} - \frac{9}{2}\right) = 0 \\ &\iff (x + 3) \cdot (x - 6) = 0 &\iff x = -3 \text{ oder } x = 6. \end{aligned}$$

j) $(x - 1) \cdot (x + 2) = 3x + 6$

$\{-2; 4\}$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt wegen $3x + 6 = 3 \cdot (x + 2)$

$$\begin{aligned} (x - 1) \cdot (x + 2) = 3x + 6 &\iff (x - 1) \cdot (x + 2) - (3x + 6) = 0 \\ &\iff (x - 1) \cdot (x + 2) - 3 \cdot (x + 2) = 0 \\ &\iff (x - 1 - 3) \cdot (x + 2) = 0 \\ &\iff (x - 4) \cdot (x + 2) = 0 \\ &\iff x = 4 \text{ oder } x = -2. \end{aligned}$$



ArithLogik/UnGleichungen/Ag_Gleichungen_Umformungsregeln_leicht.tex

Aufgabe 8.52 (Äquivalenzumformungen für Gleichungen)

4.2.1

- a) Stellen Sie alle Ihnen bekannten Äquivalenzumformungen zusammen, die zum Lösen von *Gleichungen* verwendet werden können.

Lösung:

- Addieren von reellen Zahlen oder reellwertigen Termen auf beiden Seiten.

- Multiplizieren mit reellen Zahlen außer 0 oder reellwertigen Termen, die nicht den Wert 0 annehmen.
(Gegebenenfalls ist eine Fallunterscheidung notwendig.)
- Kehrbruch bilden, falls beide Seiten nicht den Wert 0 annehmen.
(Äquivalent: Division der Gleichung durch das Produkt beider Seiten.)
- Das Anwenden einer umkehrbaren Funktion (diese nimmt jeden Wert nur einmal an) auf beide Seiten der Gleichung.
(Der Definitionsbereich der Funktion muss alle möglichen Werte der linken und der rechten Seite der Gleichung enthalten.)

b) Kennen Sie weitere (nicht äquivalente) Umformungen? Notieren Sie diese ebenfalls und erläutern Sie, was zu beachten ist, wenn eine solche Umformung auf eine Gleichung angewandt wird.

Lösung:

- Quadriert man eine Gleichung, so können zusätzliche Lösungen entstehen. Am Ende der Rechnung muss man jede erhaltene (formale) Lösung in die Ausgangsgleichung einsetzen, um zu überprüfen, ob es sich um eine tatsächliche Lösung handelt (und nicht um eine „Pseudolösung“, die durch das Quadrieren hinzugewonnenen worden ist).
- Beim Ziehen von Wurzeln ist zu beachten, dass der Wert des Wurzelterms (per Definition) immer eine nicht-negative Zahl ist. Ist unklar, ob ein durch Wurzelziehen erhaltener Term nicht-negativ ist, so muss man diesen in Betragsstriche setzen.
- Prinzipiell ist bei einer nicht-äquivalenten Umformung stets zu prüfen, ob die Implikation „ $\implies$ “ oder die Implikation „ $\impliedby$ “ gilt.



ArithLogik/UnGleichungen/Ag_Gleichungen_lineareGleichungen_leicht.tex

Aufgabe 8.53 (Lineare Gleichungen)

4.2.2

Lösen Sie folgende Gleichungen:

Lösung:

Die Gleichungen werden mit Hilfe zulässiger Äquivalenzumformungen (siehe Aufgabe 8.52) nach der jeweiligen Variable aufgelöst.

a) $2 - (4 - 2x) = 0$

$x = 1$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$2 - (4 - 2x) = 0 \iff 2 = 4 - 2x \iff 2x = 2 \iff x = 1.$$

b) $x + 2 = 2x - 2$

$x = 4$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$x + 2 = 2x - 2 \iff 4 = x \iff x = 4.$$

c) $4x - \frac{3}{5} = \frac{34}{10}$

$x = 1$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$4x - \frac{3}{5} = \frac{34}{10} \iff 4x = \frac{17}{5} + \frac{3}{5} \iff 4x = \frac{20}{5} \iff x = \frac{20}{20} \iff x = 1.$$

d) $11t = -10t + 21$

$t = 1$

Lösung:

Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$11t = -10t + 21 \iff 21t = 21 \iff t = 1.$$

e) $-\frac{1}{9} \cdot y + 2 = 0$

$y = 18$

Lösung:

Für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt

$$-\frac{1}{9} \cdot y + 2 = 0 \iff 2 = \frac{1}{9} \cdot y \iff 18 = y \iff y = 18.$$

f) $\frac{4}{5} = -\left(2 - \frac{3}{5}\right) + \frac{1}{2} \cdot z$

$z = \frac{22}{5}$

Lösung:

Für alle $z \in \mathbb{R}$ gilt wegen $2 - \frac{3}{5} = \frac{10}{5} - \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$

$$\frac{4}{5} = -\left(2 - \frac{3}{5}\right) + \frac{1}{2} \cdot z \iff \frac{4}{5} + \frac{7}{5} = \frac{1}{2} \cdot z \iff 2 \cdot \frac{11}{5} = z \iff z = \frac{22}{5}.$$

g) $\frac{1}{2} \cdot u + \frac{7}{3} = -\frac{1}{2} \cdot u - \frac{1}{3}$

$u = -\frac{8}{3}$

Lösung:

Für alle $u \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{1}{2} \cdot u + \frac{7}{3} = -\frac{1}{2} \cdot u - \frac{1}{3} \iff u = -\frac{1}{3} - \frac{7}{3} \iff u = -\frac{8}{3}.$$

h) $k + 3 = k + 5$

$\emptyset$

Lösung:

Für alle $k \in \mathbb{R}$ gilt

$$k + 3 = k + 5 \iff 0 = 2.$$

Also gibt es kein $k \in \mathbb{R}$ mit $k + 3 = k + 5$.

i) $-5s + 5 = 5s - 5$

$s = 1$

Lösung:

Für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$-5s + 5 = 5s - 5 \iff 10 = 10s \iff 1 = s \iff s = 1.$$

j) $\frac{11}{9} + \frac{9}{11} \cdot b = \frac{1}{19}$

$b = -\frac{2200}{1539}$

Lösung:

Für alle $b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{11}{9} + \frac{9}{11} \cdot b = \frac{1}{19} \iff \frac{11^2}{9^2} + b = \frac{11}{19 \cdot 9} \iff b = \frac{11}{19 \cdot 9} - \frac{121}{81}$$

Wegen $\frac{11}{19 \cdot 9} - \frac{121}{81} = \frac{11 \cdot 9 - 121 \cdot 19}{19 \cdot 81} = \frac{99 - 2420 + 121}{1620 - 81} = -\frac{2200}{1539}$ folgt

$$\frac{11}{9} + \frac{9}{11} \cdot b = \frac{1}{19} \iff b = -\frac{2200}{1539}.$$

$$\text{k) } \frac{2}{\frac{2}{n} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$n = \frac{4}{9}$$

Lösung:

Für alle $n \in \mathbb{R}$ mit $0 \neq n \neq 4$ gilt wegen $\frac{2}{\frac{2}{n} - \frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{4-n}{2n}} = 2 \cdot \frac{2n}{4-n}$

$$\frac{2}{\frac{2}{n} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \iff 4n = \frac{4-n}{2} \iff \frac{9}{2} \cdot n = 2 \iff n = \frac{4}{9}.$$



ArithLogik/UnGleichungen/Ag_Glgn_DefLsgMengeNachAusmultAblesbar.tex

Aufgabe 8.54 (Definitions- und Lösungsmenge von Gleichungen)

JGL+SPF

Bestimmen Sie jeweils die maximale Definitionsmenge $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ und die Lösungsmenge $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{D}$!

$$\text{a) } (x-1)^2 - (6-x)^2 = 5$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}, \mathbb{L} = \{4\}$$

Lösung über die dritte binomische Formel:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ liefert die dritte binomische Formel

$$\begin{array}{lll} & (x-1)^2 - (6-x)^2 = 5 & | \text{ 3. BF} \\ \iff & ((x-1) + (6-x)) \cdot ((x-1) - (6-x)) = 5 & | \text{ zusammenfassen} \\ \iff & 5 \cdot (2x-7) = 5 & | \cdot \frac{1}{5} \\ \iff & 2x-7 = 1 & | + 7 \\ \iff & 2x = 8 & | \cdot \frac{1}{2} \\ \iff & x = 4. & \end{array}$$

Lösung über die zweite binomische Formel:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ liefert die zweite binomische Formel

$$\begin{array}{lll} & (x-1)^2 - (6-x)^2 = 5 & | \text{ 2. BF} \\ \iff & (x^2 - 2x + 1) - (36 - 12x + x^2) = 5 & | \text{ zusammenfassen} \\ \iff & 10x - 35 = 5 & | + 35 \\ \iff & 10x = 40 & | \cdot \frac{1}{10} \\ \iff & x = 4. & \end{array}$$

$$\text{b) } \frac{z+3}{z-1} + \frac{6-z}{2-z} = 0$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}, \mathbb{L} = \{0; 3\}$$

Lösung:

Für alle $z \in \mathbb{R}$ mit $1 \neq z \neq 2$ gilt

$$\begin{array}{lll} & \frac{z+3}{z-1} + \frac{6-z}{2-z} = 0 & | \cdot (z-1) \cdot (2-z) \\ \iff & (z+3) \cdot (2-z) + (z-1) \cdot (6-z) = 0 & | \text{ ausmultiplizieren} \\ \iff & (2z - z^2 + 6 - 3z) + (6z - z^2 - 6 + z) = 0 & | \text{ zusammenfassen} \\ \iff & 6z - 2z^2 = 0 & | \text{ ausklammern} \\ \iff & 2 \cdot z \cdot (3-z) = 0 & | \text{ Satz vom Nullprodukt} \\ \iff & z = 0 \text{ oder } z = 3. & \end{array}$$

c) $\frac{1}{\varphi-1} + \frac{1}{6-\varphi} = \frac{4}{5}$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1; 6\}, \mathbb{L} = \{\frac{7}{2}\}$$

Lösung:

Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $1 \neq \varphi \neq 6$ gilt

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{\varphi-1} + \frac{1}{6-\varphi} = \frac{4}{5} & | \cdot 5 \cdot (\varphi-1) \cdot (6-\varphi) \\ \iff 5 \cdot (6-\varphi) + 5 \cdot (\varphi-1) = 4 \cdot (\varphi-1) \cdot (6-\varphi) & | \text{ ausmultiplizieren} \\ \iff 30 - 5\varphi + 5\varphi - 5 = 24\varphi - 24 - 4\varphi^2 + 4\varphi & | + 4\varphi^2 - 28\varphi + 24 \\ \iff 4\varphi^2 - 28\varphi + 49 = 0 & | \text{ umschreiben} \\ \iff (2\varphi)^2 - 2 \cdot 2\varphi \cdot 7 + 7^2 = 0 & | 2. \text{ BF} \\ \iff (2\varphi - 7)^2 = 0 & | \text{ Satz vom Nullprodukt} \\ \iff 2\varphi - 7 = 0 & | + 7 \\ \iff 2\varphi = 7 & | \cdot \frac{1}{2} \\ \iff \varphi = \frac{7}{2}. & \end{array}$$

d) $\frac{3}{3\psi^2-12} + \frac{2}{4-\psi^2} = 0$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}, \mathbb{L} = \emptyset$$

Lösung:

Für alle $\psi \in \mathbb{R}$ mit $-2 \neq \psi \neq 2$ gilt

$$\begin{array}{ll} \frac{3}{3\psi^2-12} + \frac{2}{4-\psi^2} = 0 & | \text{ ausklammern} \\ \iff \frac{3}{-3 \cdot (-\psi^2+4)} + \frac{2}{4-\psi^2} = 0 & | \text{ kürzen} \\ \iff -\frac{1}{4-\psi^2} + \frac{2}{4-\psi^2} = 0 & | \text{ zusammenfassen} \\ \iff \frac{1}{4-\psi^2} = 0 & | \cdot (4-\psi^2) \\ \iff 1 = 0. & \not\checkmark \end{array}$$

Also gibt es kein $\psi \in \mathbb{R}$ mit $-2 \neq \psi \neq 2$ und $\frac{3}{3\psi^2-12} + \frac{2}{4-\psi^2} = 0$.

e) $\frac{1}{t^3+8} + \frac{7}{(t^3+8) \cdot (1+t^3)} = \frac{1}{1+t^3}$

$$\mathbb{D} = \mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus \{-2; -1\}$$

Lösung:

Für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $-2 \neq t \neq -1$ gilt

$$\frac{1}{t^3+8} + \frac{7}{(t^3+8) \cdot (1+t^3)} = \frac{1+t^3+7}{(t^3+8) \cdot (1+t^3)} = \frac{t^3+8}{(t^3+8) \cdot (1+t^3)} = \frac{1}{1+t^3}.$$

f) $(u-1)^2 - \frac{27}{6-u} = u-8$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{6\}, \mathbb{L} = \{3\}$$

Lösung:

Für alle $u \in \mathbb{R}$ mit $u \neq 6$ gilt

$$\begin{array}{ll}
 (u-1)^2 - \frac{27}{6-u} = u-8 & | \cdot (6-u), \text{ 2. BF} \\
 \iff (u^2 - 2u + 1) \cdot (6-u) - 27 = (u-8) \cdot (6-u) & | \text{ ausmultiplizieren, } +27 \\
 \iff 6u^2 - 12u + 6 - u^3 + 2u^2 - u = 6u - 48 - u^2 + 8u + 27 & | + u^3 - 8u^2 + 13u - 6 \\
 \iff 0 = u^3 - 9u^2 + 27u - 27 & | \text{ umschreiben} \\
 \iff 0 = u^3 - 3 \cdot u^2 \cdot 3^1 + 3 \cdot u^1 \cdot 3^2 - 3^3 & | \text{ BF für } (s-t)^3 \\
 \iff 0 = (u-3)^3 & | \text{ Satz vom Nullprodukt} \\
 \iff u-3 = 0 & | +3 \\
 \iff u = 3. &
 \end{array}$$



ArithLogik/UnGleichungen/Ag_Glgn_LineareGlgnSechsStueck.tex

Aufgabe 8.55 (Lineare Gleichungen)

SPF

Geben Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen an!

a) $8 - (2 - 3x) = 0$

$\{-2\}$

c) $\frac{z}{4} + \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$

$\{-\frac{6}{7}\}$

e) $2v - 3 = \frac{6v+11}{3}$

$\emptyset$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{array}{l}
 8 - (2 - 3x) = 0 \\
 \iff 8 - 2 + 3x = 0 \\
 \iff 6 + 3x = 0 \\
 \iff \overset{-6}{3x} = -6 \\
 \iff \overset{\cdot \frac{1}{3}}{x} = -2.
 \end{array}$$

Lösung:

Für alle $z \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{array}{l}
 \frac{z}{4} + \frac{4}{7} = \frac{5}{14} \\
 \iff \overset{-\frac{4}{7}}{\frac{z}{4}} = \frac{5}{14} - \frac{4}{7} \\
 \iff \frac{z}{4} = \frac{5-8}{14} \\
 \iff \overset{\cdot 4}{z} = 4 \cdot \frac{-3}{14} \\
 \iff z = -\frac{6}{7}.
 \end{array}$$

Lösung:

Für alle $v \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{array}{l}
 2v - 3 = \frac{6v+11}{3} \\
 \iff \overset{\cdot 3}{6v - 9} = 6v + 11 \\
 \iff \overset{-6v+9}{0} = 20.
 \end{array}$$

f) $\frac{3}{\frac{2}{w} + \frac{1}{4}} = \frac{20}{3}$

$\{10\}$

b) $5y - 3 = 3y + 7$

$\{5\}$

d) $\frac{3u}{2} + 8 = \frac{7}{8} - \frac{2u}{5}$

$\{-\frac{15}{4}\}$

Lösung:

Für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{array}{l}
 5y - 3 = 3y + 7 \\
 \iff \overset{-3y+3}{2y} = 10 \\
 \iff \overset{\cdot \frac{1}{2}}{y} = 5.
 \end{array}$$

Lösung:

Für alle $u \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{array}{l}
 \frac{3u}{2} + 8 = \frac{7}{8} - \frac{2u}{5} \\
 \iff \overset{-8+\frac{2u}{5}}{\frac{15u+4u}{10}} = \frac{7-64}{8} \\
 \iff \frac{19u}{10} = \frac{-57}{8} \\
 \iff \overset{\cdot \frac{10}{19}}{u} = \frac{10}{19} \cdot \frac{-57}{8} \\
 \iff u = -\frac{15}{4}.
 \end{array}$$

Lösung:

Für alle $w \in \mathbb{R} \setminus \{-8; 0\}$ gilt

$$\begin{array}{l}
 \frac{3}{\frac{2}{w} + \frac{1}{4}} = \frac{20}{3} \\
 \iff \frac{3}{\frac{8+w}{4w}} = \frac{20}{3} \\
 \iff \frac{12w}{8+w} = \frac{20}{3} \\
 \iff \overset{\cdot 3 \cdot (8+w)}{36w} = 160 + 20w \\
 \iff \overset{-20w}{16w} = 160 \\
 \iff \overset{\cdot \frac{1}{16}}{w} = 10.
 \end{array}$$



ArithLogik/UnGleichungen/Ag_Glgn_WurzelGlgnFuenfVonSechsZweimalQuadrieren.tex

Aufgabe 8.56 (Gleichungen mit Wurzeln)

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der folgenden Gleichungen!

a) $\sqrt{8x-7}+3=2x$

{4}

Lösung:

Die Gleichung ist nur für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq \frac{7}{8}$ definiert. Für diese gilt

$$\begin{aligned}\sqrt{8x-7}+3=2x &\iff \sqrt{8x-7}=2x-3 &\implies 8x-7=4x^2-12x+9 \\ &\iff 0=4x^2-20x+16 &\iff 0=(2x)^2-2 \cdot 2x \cdot 5+5^2-25+16 \\ &\iff 0=(2x-5)^2-9 &\iff 0=(2x-5+3) \cdot (2x-5-3) \\ &\iff 0=(2x-2) \cdot (2x-8) &\iff 0=4 \cdot (x-1) \cdot (x-4).\end{aligned}$$

Es ergeben sich die beiden möglichen Lösungen $x=1$ und $x=4$. Beide sind mindestens so groß wie $\frac{7}{8}$ und liegen also im Definitionsbereich der Gleichung.

Wegen des Quadrierens muss man die beiden durch Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung prüfen. Dabei stellt sich heraus, dass nur $x=4$ eine Lösung ist:

$$\begin{aligned}\sqrt{8 \cdot 1 - 7} + 3 &= \sqrt{8 - 7} + 3 = \sqrt{1} + 3 = 1 + 3 = 4 \neq 2 = 2 \cdot 1 \\ \text{und} \quad \sqrt{8 \cdot 4 - 7} + 3 &= \sqrt{32 - 7} + 3 = \sqrt{25} + 3 = 5 + 3 = 8 = 2 \cdot 4.\end{aligned}$$

b) $\sqrt{2y+3}+\sqrt{y+1}=1$

{-1}

Lösung:

Die Gleichung ist nur für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $y \geq -\frac{3}{2}$ und $y \geq -1$, also alle $y \in \mathbb{R}$ mit $y \geq -1$ definiert. Für diese gilt wegen $-3y-3=-3 \cdot (y+1)$

$$\begin{aligned}\sqrt{2y+3}+\sqrt{y+1}=1 &\implies (2y+3)+2 \cdot \sqrt{2y+3} \cdot \sqrt{y+1}+(y+1)=1 \\ &\iff 3y+4+2 \cdot \sqrt{2y+3} \cdot \sqrt{y+1}=1 \\ &\iff 2 \cdot \sqrt{2y+3} \cdot \sqrt{y+1}=-3y-3 \\ &\implies 4 \cdot (2y+3) \cdot (y+1)=9 \cdot (y+1)^2 \\ &\iff 0=9 \cdot (y+1) \cdot (y+1)-4 \cdot (2y+3) \cdot (y+1) \\ &\iff 0=(9y+9) \cdot (y+1)-(8y+12) \cdot (y+1) \\ &\iff 0=(9y+9-8y-12) \cdot (y+1) \\ &\iff 0=(y-3) \cdot (y+1).\end{aligned}$$

Die beiden möglichen Lösungen sind also $y=3$ und $y=-1$. Beide sind mindestens so groß wie -1 und liegen also im Definitionsbereich der Gleichung.

Wegen des Quadrierens muss man die beiden durch Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung prüfen. Dabei stellt sich heraus, dass nur $y=-1$ eine Lösung ist:

$$\begin{aligned}\sqrt{2 \cdot (-1) + 3} + \sqrt{-1 + 1} &= \sqrt{-2 + 3} + \sqrt{0} = \sqrt{1} + 0 = 1 + 0 = 1 = 1 \\ \text{und} \quad \sqrt{2 \cdot 3 + 3} + \sqrt{3 + 1} &= \sqrt{6 + 3} + \sqrt{4} = \sqrt{9} + 2 = 3 + 2 = 5 \neq 1.\end{aligned}$$

c) $2 \cdot \sqrt{1+\sqrt{z}}=\sqrt{z+7}$

{1;9}

Lösung:

Die Gleichung ist nur für alle $z \in \mathbb{R}$ mit $z \geq 0$ und $z \geq -7$, also alle $z \in \mathbb{R}$ mit $z \geq 0$ definiert. Für diese gilt

$$\begin{aligned}
 2 \cdot \sqrt{1 + \sqrt{z}} = \sqrt{z + 7} &\implies 4 \cdot (1 + \sqrt{z}) = z + 7 &\iff 4 \cdot \sqrt{z} = z + 3 \\
 &\implies 16z = (z + 3)^2 &\iff 16z = z^2 + 6z + 9 \\
 &\iff 0 = z^2 - 10z + 9 &\iff 0 = z^2 - 2 \cdot z \cdot 5 + 5^2 - 25 + 9 \\
 &\iff 0 = (z - 5)^2 - 16 &\iff 0 = (z - 5 + 4) \cdot (z - 5 - 4) \\
 &\iff 0 = (z - 1) \cdot (z - 9).
 \end{aligned}$$

Die beiden möglichen Lösungen sind also $z = 1$ und $z = 9$. Beide sind mindestens so groß wie 0 und liegen also im Definitionsbereich der Gleichung.

Wegen des Quadrierens muss man die beiden durch Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung prüfen. Dabei stellt sich heraus, dass beides Lösungen sind:

$$\begin{aligned}
 2 \cdot \sqrt{1 + \sqrt{1}} &= 2 \cdot \sqrt{1 + 1} = 2 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{8} = \sqrt{1 + 7} \\
 \text{und} \quad 2 \cdot \sqrt{1 + \sqrt{9}} &= 2 \cdot \sqrt{1 + 3} = 2 \cdot \sqrt{4} = 2 \cdot 2 = 4 = \sqrt{16} = \sqrt{9 + 7}.
 \end{aligned}$$

d) $\sqrt{9 - \sqrt{9 - u^2}} - u = 0$

$$\{\sqrt{8}; 3\}$$

Lösung:

Die Gleichung ist nur für alle $u \in \mathbb{R}$ mit $u^2 \leq 9$, also alle $u \in \mathbb{R}$ mit $-3 \leq u \leq 3$ definiert. Für diese gilt

$$\begin{aligned}
 \sqrt{9 - \sqrt{9 - u^2}} - u &= 0 &\iff \sqrt{9 - \sqrt{9 - u^2}} &= u \\
 \implies 9 - \sqrt{9 - u^2} &= u^2 &\iff 9 - u^2 &= \sqrt{9 - u^2} \\
 \implies 81 - 18u^2 + u^4 &= 9 - u^2 &\iff u^4 - 17u^2 + 72 &= 0 \\
 \iff (u^2)^2 - 2 \cdot u^2 \cdot \frac{17}{2} + \left(\frac{17}{2}\right)^2 - \frac{289}{4} + 72 &= 0 &\iff (u^2 - \frac{17}{2})^2 - \frac{1}{4} &= 0 \\
 \iff (u^2 - \frac{17}{2} + \frac{1}{2}) \cdot (u^2 - \frac{17}{2} - \frac{1}{2}) &= 0 &\iff (u^2 - 8) \cdot (u^2 - 9) &= 0 \\
 \iff (u + \sqrt{8}) \cdot (u - \sqrt{8}) \cdot (u + 3) \cdot (u - 3) &= 0.
 \end{aligned}$$

Die vier möglichen Lösungen sind also $u = -\sqrt{8}$, $u = \sqrt{8}$, $u = -3$ und $u = 3$. Alle vier liegen zwischen -3 und 3 und liegen also im Definitionsbereich der Gleichung.

Wegen des Quadrierens muss man die vier durch Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung prüfen. Dabei stellt sich heraus, dass nur die beiden positiven Lösungen sind:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{9 - \sqrt{9 - (-\sqrt{8})^2}} &= \sqrt{9 - \sqrt{9 - 8}} = \sqrt{9 - \sqrt{1}} = \sqrt{9 - 1} = \sqrt{8} \neq -\sqrt{8}, \\
 \sqrt{9 - \sqrt{9 - \sqrt{8}^2}} &= \sqrt{9 - \sqrt{9 - 8}} = \sqrt{9 - \sqrt{1}} = \sqrt{9 - 1} = \sqrt{8} = \sqrt{8}, \\
 \sqrt{9 - \sqrt{9 - (-3)^2}} &= \sqrt{9 - \sqrt{9 - 9}} = \sqrt{9 - \sqrt{0}} = \sqrt{9 - 0} = \sqrt{9} = 3 \neq -3 \\
 \text{und} \quad \sqrt{9 - \sqrt{9 - 3^2}} &= \sqrt{9 - \sqrt{9 - 9}} = \sqrt{9 - \sqrt{0}} = \sqrt{9 - 0} = \sqrt{9} = 3 = 3.
 \end{aligned}$$

e) $\sqrt[4]{\varphi + 1} - \sqrt{\varphi - 1} = 0$

Lösung:

Die Gleichung ist nur für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $\varphi \geq -1$ und $\varphi \geq 1$, also alle $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $\varphi \geq 1$ definiert. Für diese gilt

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{\varphi+1} - \sqrt{\varphi-1} = 0 &\iff \sqrt[4]{\varphi+1} = \sqrt{\varphi-1} \implies \sqrt{\varphi+1} = \varphi-1 \\ &\implies \varphi+1 = (\varphi-1)^2 \iff \varphi+1 = \varphi^2 - 2\varphi + 1 \\ &\iff 0 = \varphi^2 - 3\varphi \iff 0 = \varphi \cdot (\varphi-3).\end{aligned}$$

Die beiden möglichen Lösungen sind also $\varphi = 0$ und $\varphi = 3$. Wegen $0 < 1$ und $3 \geq 1$ liegt nur $\varphi = 3$ im Definitionsbereich der Gleichung.

Wegen des Quadrierens muss man die mögliche Lösung durch Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung prüfen. Dabei stellt sich heraus, dass nur $\varphi = 4$ eine Lösung ist:

$$\sqrt[4]{3+1} - \sqrt{3-1} = \sqrt[4]{4} - \sqrt{2} = \sqrt{\sqrt{4}} - \sqrt{2} = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0.$$

f) $2 \cdot \sqrt{t-3} - \sqrt{2t+1} = -5$

0

Lösung:

Die Gleichung ist nur für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t \geq -3$ und $t \geq -\frac{1}{2}$, also alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t \geq -\frac{1}{2}$ definiert. Für diese gilt wegen $44^2 = (4 \cdot 11)^2 = 4^2 \cdot 11^2 = 16 \cdot 121 = 1\,210 + 726 = 1\,936$

$$\begin{aligned}2 \cdot \sqrt{t-3} - \sqrt{2t+1} = -5 &\implies 4 \cdot (t-3) - 4 \cdot \sqrt{t-3} \cdot \sqrt{2t+1} + (2t+1) = 25 \\ &\iff 6t - 11 - 4 \cdot \sqrt{t-3} \cdot \sqrt{2t+1} = 25 \\ &\iff 6t - 36 = 4 \cdot \sqrt{t-3} \cdot \sqrt{2t+1} \\ &\iff 3t - 18 = 2 \cdot \sqrt{t-3} \cdot \sqrt{2t+1} \\ &\implies 9t^2 - 6 \cdot 18t + 324 = 4 \cdot (t-3) \cdot (2t+1) \\ &\iff 9t^2 - 108t + 324 = 8t^2 - 24t + 4t - 12 \\ &\iff t^2 - 88t + 336 = 0 \\ &\iff t^2 - 2 \cdot t \cdot 44 + 44^2 - 1\,936 + 336 = 0 \\ &\iff (t-44)^2 - 1\,600 = 0 \\ &\iff 0 = (t-44+40) \cdot (t-44-40) \\ &\iff 0 = (t-4) \cdot (t-84).\end{aligned}$$

Die beiden möglichen Lösungen sind also $t = 4$ und $t = 84$. Beide sind mindestens so groß wie $-\frac{1}{2}$ und liegen also im Definitionsbereich der Gleichung.

Wegen des Quadrierens muss man die beiden durch Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung prüfen. Dabei stellt sich heraus, dass die Gleichung keine Lösung hat:

$$\begin{aligned}2 \cdot \sqrt{4-3} - \sqrt{2 \cdot 4+1} &= 2 \cdot \sqrt{1} - \sqrt{8+1} = 2 \cdot 1 - \sqrt{9} = 2 - 3 = -1 \neq -5 \\ \text{und} \quad 2 \cdot \sqrt{84-3} - \sqrt{2 \cdot 84+1} &= 2 \cdot \sqrt{81} - \sqrt{168+1} = 2 \cdot 9 - \sqrt{169} = 18 - 13 = 5 \neq -5.\end{aligned}$$



ArithLogik/UnGleichungen/Ag_Glgn_quadratischInBruechenVersteckt.tex

Aufgabe 8.57 (Gleichungen mit Brüchen)

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen mit $-a \neq b \neq a$. Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmengen der folgenden reellen Gleichungen!

$$\text{a) } \frac{11}{x-1} - \frac{21}{1+x} = 4$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}, \mathbb{L} = \left\{-\frac{9}{2}; 2\right\}$$

Lösung:

Die Gleichung ist für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $-1 \neq x \neq 1$ definiert.

Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ gilt wegen $(x-1) \cdot (1+x) = (x-1) \cdot (x+1) = x^2 - 1^2 = x^2 - 1$

$$\begin{aligned} \frac{11}{x-1} - \frac{21}{1+x} = 4 &\iff 11 \cdot (1+x) - 21 \cdot (x-1) = 4 \cdot (x^2 - 1) \\ &\iff 11 + 11x - 21x + 21 = 4x^2 - 4 \\ &\iff 0 = 4x^2 + 10x - 36 \\ &\iff 0 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - 36 \\ &\stackrel{4 \cdot 36 = 144}{\iff} 0 = \left(2x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{169}{4} \\ &\iff 0 = \left(2x + \frac{5}{2} + \frac{13}{2}\right) \cdot \left(2x + \frac{5}{2} - \frac{13}{2}\right) \\ &\iff 0 = (2x + 9) \cdot (2x - 4) \\ &\iff x \in \left\{-\frac{9}{2}; 2\right\}. \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{2}{1-y} - \frac{2}{1+y} = 4$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}, \mathbb{L} = \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

Lösung:

Die Gleichung ist für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $-1 \neq y \neq 1$ definiert.

Für alle $y \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ gilt wegen $(1-y) \cdot (1+y) = 1^2 - y^2 = 1 - y^2$

$$\begin{aligned} \frac{2}{1-y} - \frac{2}{1+y} = 4 &\iff (1+y) - (1-y) = 2 \cdot (1-y^2) &\iff 1+y-1+y = 2-2y^2 \\ &\iff 2y^2 + 2y - 2 = 0 &\iff 2 \cdot (y^2 + y - 1) = 0 \\ &\iff 2 \cdot \left(y^2 + 2 \cdot y \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1\right) = 0 &\iff 2 \cdot \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0 \\ &\iff 2 \cdot \left(y + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(y + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = 0 &\iff y \in \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}. \end{aligned}$$

$$\text{c) } \frac{2}{1-z} + \frac{4}{1+z} = 4$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}, \mathbb{L} = \emptyset$$

Lösung:

Die Gleichung ist für alle $z \in \mathbb{R}$ mit $-1 \neq z \neq 1$ definiert.

Für alle $z \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ gilt wegen $(1-z) \cdot (1+z) = 1^2 - z^2 = 1 - z^2$

$$\begin{aligned} \frac{2}{1-z} + \frac{4}{1+z} = 4 &\iff (1+z) + 2 \cdot (1-z) = 2 \cdot (1-z^2) &\iff 1+z+2-2z = 2-2z^2 \\ &\iff 2z^2 - z + 1 = 0 &\iff z^2 - \frac{1}{2} \cdot z + \frac{1}{2} = 0 \\ &\iff z^2 - 2 \cdot z \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} + \frac{1}{2} = 0 &\iff \left(z - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16} = 0. \end{aligned}$$

Wegen $\left(z - \frac{1}{4}\right)^2 \geq 0$ ist $\left(z - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16} \geq \frac{7}{16}$ für alle $z \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$. Also hat die Gleichung keine reelle Lösung.

$$\text{d)} \quad \frac{2}{1-t} - \frac{2}{1+t} = \frac{4}{1-t^2}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}, \mathbb{L} = \emptyset$$

Lösung:

Die Gleichung ist für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $-1 \neq t \neq 1$ definiert.

Für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ gilt wegen $1 - t^2 = 1^2 - t^2 = (1-t) \cdot (1+t)$

$$\begin{aligned} \frac{2}{1-t} - \frac{2}{1+t} = \frac{4}{1-t^2} &\iff (1+t) - (1-t) = 2 &\iff 1+t-1+t = 2 \\ &\iff 2t = 2 &\iff t = 1. \end{aligned}$$

Die Zahl 1 liegt nicht im Definitionsbereich und ist daher keine Lösung.

$$\text{e)} \quad \frac{\varphi^2 - 5\varphi - 6}{\varphi + 1} = 1$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \mathbb{L} = \{7\}$$

Lösung:

Die Gleichung ist für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $\varphi \neq -1$ definiert.

Für alle $\varphi \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{\varphi^2 - 5\varphi - 6}{\varphi + 1} = 1 &\iff \varphi^2 - 5\varphi - 6 = \varphi + 1 &\iff \varphi^2 - 6\varphi - 7 = 0 \\ &\iff \varphi^2 - 2 \cdot \varphi \cdot 3 + 3^2 - 9 - 7 = 0 &\iff (\varphi - 3)^2 - 16 = 0 \\ &\iff (\varphi - 3 + 4) \cdot (\varphi - 3 - 4) = 0 &\iff (\varphi + 1) \cdot (\varphi - 7) = 0 \\ &\iff \varphi = -1 \text{ oder } \varphi = 7 &\stackrel{\varphi \neq -1}{\iff} \varphi = 7. \end{aligned}$$

$$\text{f)} \quad \frac{u^2 - 1}{(u+1) \cdot (u+2)} = 1$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2; -1\}, \mathbb{L} = \emptyset$$

Lösung:

Die Gleichung ist für alle $u \in \mathbb{R}$ mit $-2 \neq u \neq -1$ definiert.

Für alle $u \in \mathbb{R}$ gilt $u^2 - 1 = u^2 - 1^2 = (u-1) \cdot (u+1)$.

Für alle $u \in \mathbb{R} \setminus \{-2; -1\}$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{u^2 - 1}{(u+1) \cdot (u+2)} = 1 &\iff \frac{(u-1) \cdot (u+1)}{(u+1) \cdot (u+2)} = 1 &\iff \frac{u-1}{u+2} = 1 \\ &\iff u-1 = u+2 &\iff -1 = 2. \end{aligned}$$

Also gibt es kein $u \in \mathbb{R}$ mit $\frac{u^2-1}{(u+1) \cdot (u+2)} = 1$.

$$\text{g)} \quad \frac{a^2 - 1}{x - a} + \frac{a^2 + 1}{x + a} = a + \frac{a^3}{x^2 - a^2}$$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-a; a\}, \mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ für $a = 0, \mathbb{L} = \emptyset$ für $a \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \setminus \{0\},$

$\mathbb{L} = \{a - \sqrt{a^2 - 2}; a + \sqrt{a^2 - 2}\}$ für $a \in \mathbb{R} \setminus [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 - a^2 = (x-a) \cdot (x+a)$.

Die Gleichung ist für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $-a \neq x \neq a$ definiert.

Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-a; a\}$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{a^2-1}{x-a} + \frac{a^2+1}{x+a} = a + \frac{a^3}{x^2-a^2} &\iff (a^2-1) \cdot (x+a) + (a^2+1) \cdot (x-a) = a \cdot (x^2-a^2) + a^3 \\ &\iff a^2 \cdot x - x + a^3 - a + a^2 \cdot x + x - a^3 - a = ax^2 - a^3 + a^3 \\ &\iff 2a^2 \cdot x - 2a = ax^2. \end{aligned}$$

Fall 1 ($a = 0$): Ist $a = 0$, so ist diese Gleichung äquivalent zur Gleichung $0 = 0$, also für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ erfüllt.

Fall 2 ($a \neq 0$): Für $a \neq 0$ und alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-a; a\}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{a^2-1}{x-a} + \frac{a^2+1}{x+a} = a + \frac{a^3}{x^2-a^2} &\iff 2ax - 2 = x^2 \\ &\iff 0 = x^2 - 2 \cdot x \cdot a + a^2 - a^2 + 2 \\ &\iff 0 = (x-a)^2 - (a^2-2). \end{aligned}$$

Fall 2a ($|a| < \sqrt{2}$ und $a \neq 0$): Ist $a^2 - 2 < 0$, also $(a + \sqrt{2}) \cdot (a - \sqrt{2}) < 0$, sprich $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$, so gilt im Falle $a \neq 0$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \{-a; a\}$ stets $(x-a)^2 - (a^2-2) \geq 0 + 2 - a^2 > 0$ und die Gleichung hat in diesem Fall also keine Lösung.

Fall 2b ($|a| = \sqrt{2}$): Ist $a^2 - 2 = 0$, so wäre a die einzige Lösung der Gleichung. Da $x = a$ aber in der Definitionsmenge der Gleichung ausgeschlossen ist, lösen $-\sqrt{2}$ und $\sqrt{2}$ die Gleichung für $a \in \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$ nicht.

Fall 2c ($|a| > \sqrt{2}$): Für $a \in \mathbb{R} \setminus [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ und alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-a; a\}$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{a^2-1}{x-a} + \frac{a^2+1}{x+a} = a + \frac{a^3}{x^2-a^2} &\iff 0 = (x-a)^2 - (a^2-2) \\ &\iff 0 = (x-a+\sqrt{a^2-2}) \cdot (x-a-\sqrt{a^2-2}) \\ &\iff x = a - \sqrt{a^2-2} \text{ oder } x = a + \sqrt{a^2-2}. \end{aligned}$$

h) $\frac{2t-a}{a-b} + \frac{t+b}{a+b} = \frac{2ab}{a^2-b^2}$

$$D = \mathbb{R}, \mathbb{L} = \left\{ \frac{(a+b)^2}{3a+b} \right\} \text{ für } b \neq -3a, \mathbb{L} = \emptyset \text{ für } b = -3a$$

Lösung:

In der Gleichung sind a und b reelle Zahlen mit $a+b \neq 0$ und $a-b \neq 0$ (gleichwertig: $a \neq b \neq -a$). Die Gleichung ist für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert.

Es gilt $a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b)$ und für alle $t \in \mathbb{R}$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{2t-a}{a-b} + \frac{t+b}{a+b} = \frac{2ab}{a^2-b^2} &\iff (2t-a) \cdot (a+b) + (t+b) \cdot (a-b) = 2ab \\ &\iff 2at - a^2 + 2bt - ab + at + ba - bt - b^2 = 2ab \\ &\iff t \cdot (3a+b) = a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

Dabei ist $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$. Die Lösungen werden mittels einer Fallunterscheidung bestimmt:

Fall 1 ($3a + b \neq 0$): Für $b \neq -3a$ ergibt sich nach Division durch $3a + b$ dann $t = \frac{(a+b)^2}{3a+b}$ als einzige reelle Lösung. Die Lösungsmenge ist damit $\left\{ \frac{(a+b)^2}{3a+b} \right\}$.

Fall 2 ($3a + b = 0$): Im Fall $3a + b = 0$ ergibt sich $0 \cdot t = (3a+b) \cdot t = (a+b)^2$. Gemäß Voraussetzung der Aufgabe ist $a+b \neq 0$. Deshalb gilt dann auch $(a+b)^2 \neq 0$. Folglich gibt es hier keine Lösung. Die Lösungsmenge ist damit die leere Menge.



ArithLogik/UnGleichungen/Ag_Logarithmus_Gleichungen.tex

Aufgabe 8.58 (Gleichungen mit Logarithmen)

Sei $b \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ mit $b > 0$. Lösen Sie folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{llll}
\text{a)} \ln(x^3) + 2 = 0 & x = e^{-\frac{2}{3}} & \text{d)} \ln(x) + \ln(\sqrt{x}) = 2 \ln(x) & \text{g)} 4^{x-1} + \frac{5}{2} \cdot 2^x - \frac{11}{4} = 0 \\
& & x = 1 & x = 0 \\
\text{b)} 3^{x-2} = 5^3 & x = \frac{3 \cdot \ln(5)}{\ln(3)} + 2 & \text{e)} 4^{3x-5} = 32 & x = \frac{5}{2} \\
\text{c)} e^{2x} + e^x - 1 = 0 & x = \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) & \text{f)} b^7 \cdot b^{3(x+2)} = b \cdot b^{x(x-1)} & \text{h)} 2^{2x-1} + 5 \cdot 2^x + \frac{9}{2} = 0 \quad \text{keine} \\
& & x \in \{-2; 6\} & \text{Lösung}
\end{array}$$

Lösung:

- a) Der logarithmische Term ist nur für $x > 0$ definiert. Die gesuchten Lösungen der gegebenen Gleichung müssen diese Bedingung erfüllen.

$$\begin{aligned}
\ln(x^3) + 2 = 0 & \iff \ln(x^3) = -2 \\
& \iff x^3 = e^{-2} \\
& \iff x = e^{-2/3}.
\end{aligned}$$

- b) Die gegebene Gleichung $3^{x-2} = 5^3$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert.

$$\begin{aligned}
3^{x-2} = 5^3 & \iff (x-2) \cdot \ln(3) = 3 \cdot \ln(5) \\
& \iff x = \frac{3 \cdot \ln(5)}{\ln(3)} + 2.
\end{aligned}$$

- c) Die gegebene Gleichung $e^{2x} + e^x - 1 = 0$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. Wegen

$$e^{2x} + e^x - 1 = 0 \iff (e^x)^2 + e^x - 1 = 0$$

folgt mit der Substitution $z = e^x$ (insbesondere ist $z > 0$) dann:

$$\begin{aligned}
e^{2x} + e^x - 1 = 0 & \iff z^2 + z - 1 = 0, \quad z > 0 \\
& \iff z_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} > 0 \quad \text{oder} \quad z_2 = \frac{-\sqrt{5}-1}{2} < 0.
\end{aligned}$$

z_2 erfüllt die Bedingung $z > 0$ *nicht* und entfällt deshalb. Die Rücksubstitution liefert somit die einzige Lösung $x = \ln(z_1) = \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

- d) Die gegebene Gleichung $\ln(x) + \ln(\sqrt{x}) = 2 \ln(x)$ ist für $x > 0$ definiert.

$$\begin{aligned}
\ln(x) + \ln(\sqrt{x}) = 2 \ln(x) & \iff \ln(\sqrt{x}) = \ln(x) \\
& \iff \sqrt{x} = x \\
& \implies x = x^2 \\
& \iff x_1 = 0 \quad \text{oder} \quad x_2 = 1.
\end{aligned}$$

Nur $x_2 = 1$ erfüllt die Bedingung $x > 0$ und ist somit einzige Lösung.

- e) Wegen

$$4^{3x-5} = 32 \iff (2^2)^{3x-5} = 2^5 \iff 2^{6x-10} = 2^5$$

müssen bei idenscher Basis 2 auch die Exponenten übereinstimmen, d. h.

$$6x - 10 = 5 \iff x = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}.$$

f) Die gegebene Gleichung $b^7 \cdot b^{3(x+2)} = b \cdot b^{x(x-1)}$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert.

$$\begin{aligned}
 b^7 \cdot b^{3(x+2)} = b \cdot b^{x(x-1)} &\iff b^{7+3(x+2)} = b^{1+x(x-1)} \\
 &\iff 7 + 3(x+2) = 1 + x(x-1) \\
 &\iff 3x + 13 = x^2 - x + 1 \\
 &\iff x^2 - 4x - 12 = 0 \\
 &\iff (x+2) \cdot (x-6) = 0 \\
 &\iff x_1 = -2 \text{ oder } x_2 = 6.
 \end{aligned}$$

g) Auch hier kann man zunächst Potenzen mit gleicher Basis herstellen

$$4^{x-1} + \frac{5}{2} \cdot 2^x - \frac{11}{4} = 0 \iff 4^{-1} \cdot (2^2)^x + \frac{5}{2} \cdot 2^x - \frac{11}{4} = 0 \iff \frac{1}{4} \cdot (2^x)^2 + \frac{5}{2} \cdot 2^x - \frac{11}{4} = 0,$$

um anschließend mit Hilfe der Substitution $z = 2^x$ (also $z > 0$) eine quadratische Gleichung herzustellen

$$\dots \iff \frac{1}{4} \cdot z^2 + \frac{5}{2} \cdot z - \frac{11}{4} = 0 \iff z^2 + 10 \cdot z - 11 = 0$$

eine quadratische Gleichung zu erhalten, die sich (z. B. mit dem Satz von Vieta) in die Produktform

$$(z + 11) \cdot (z - 1) = 0$$

überführen lässt, an der man die (Pseudo)Lösungen $z_1 = -11$ bzw. $z_2 = 1$ abliest. z_1 erfüllt die Bedingung $z > 0$ *nicht* und entfällt deshalb. Die Rücksubstitution liefert somit die einzige Lösung $x = \ln(z_2) = \ln(1) = 0$.

h) Die gegebene Gleichung $2^{2x-1} + 5 \cdot 2^x + \frac{9}{2} = 0$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. Es ist

$$2^{2x-1} + 5 \cdot 2^x + \frac{9}{2} = 0 \iff \frac{1}{2} (2^x)^2 + 5 \cdot 2^x + \frac{9}{2} = 0.$$

Substituiere $z = 2^x$ (d. h. $z > 0$):

$$\begin{aligned}
 \dots \iff \frac{1}{2} z^2 + 5 \cdot z + \frac{9}{2} = 0 &\iff z^2 + 10 \cdot z + 9 = 0 \iff (z+9) \cdot (z+1) = 0 \\
 &\iff (z_1 = -9 \text{ oder } z_2 = -1).
 \end{aligned}$$

Weder z_1 noch z_2 erfüllt die Bedingung $z > 0$. Die gegebene Gleichung besitzt daher *keine* Lösung.



ArithLogik/UnGleichungen/Ag_Potenzen_QuadGleichungen_leicht.tex

Aufgabe 8.59 (Gleichung lösen)

4.1.4

Lösen Sie die Gleichung $\frac{3 \cdot (x+2)^2 - (-2) \cdot 2^{2^2-2}}{3x+6} = \frac{-2^{3^2} + (2^3)^2 \cdot x}{(2^2)^3}$ in den reellen Zahlen.

Lösung:

Für $3x + 6 \neq 0$, d. h. $x \neq -2$ gilt:

$$\begin{aligned}
 & \frac{3 \cdot (x+2)^2 - (-2) \cdot 2^{2^2-2}}{3x+6} = \frac{-2^{3^2} + (2^3)^2 \cdot x}{(2^2)^3} \\
 \Leftrightarrow & \frac{3(x^2 + 4x + 4) - (-2) \cdot 4}{3(x+2)} = \frac{-2^9 + 2^6 x}{2^6} \\
 \Leftrightarrow & \frac{3x^2 + 12x + 12 + 8}{3(x+2)} = \frac{2^6(-2^3 + x)}{2^6} \\
 \Leftrightarrow & \frac{3x^2 + 12x + 20}{3(x+2)} = x - 8 \\
 \Leftrightarrow & 3x^2 + 12x + 20 = 3(x+2)(x-8) \\
 \Leftrightarrow & 3x^2 + 12x + 20 = 3x^2 - 18x - 48 \\
 \Leftrightarrow & 12x + 20 = -18x - 48 \\
 \Leftrightarrow & 30x = -68 \\
 \Leftrightarrow & x = -\frac{34}{15}.
 \end{aligned}$$

Zur Probe wird $x = -\frac{34}{15}$ in die linke und in die rechte Seite der Gleichung eingesetzt:
Die Werte von linker Seite

$$\begin{aligned}
 \frac{3 \cdot \left(-\frac{34}{15} + 2\right)^2 - (-2) \cdot 2^{2^2-2}}{3 \cdot \left(-\frac{34}{15}\right) + 6} &= \frac{3 \cdot \left(\left(-\frac{34}{15}\right)^2 - 4 \cdot \frac{34}{15} + 4\right) + 8}{-\frac{3 \cdot 34}{15} + \frac{90}{15}} \\
 &= \frac{\frac{3 \cdot 34^2}{15^2} - \frac{3 \cdot 4 \cdot 34}{15} + 3 \cdot 4 + 8}{-\frac{12}{15}} \\
 &= \frac{\frac{3 \cdot 34^2}{15^2} - \frac{12 \cdot 34}{15} + 20}{-\frac{12}{15}} \\
 &= \frac{\frac{3 \cdot (2 \cdot 17)^2}{15} - 12 \cdot 34 + 15 \cdot 20}{-12} \\
 &= -\frac{17^2}{15} + 34 - \frac{(3 \cdot 5) \cdot (4 \cdot 5)}{12} \\
 &= -\frac{(15+2) \cdot 17}{15} + 34 - 5 \cdot 5 \\
 &= -\frac{15 \cdot 17 + 2 \cdot 17}{15} + 34 - 25 \\
 &= -17 - \frac{30+4}{15} + 9 \\
 &= -17 - 2 - \frac{4}{15} + 9 \\
 &= -10 - \frac{4}{15} \\
 &= -\frac{154}{15}
 \end{aligned}$$

und rechter Seite

$$\begin{aligned}
 \frac{-2^{3^2} + (2^3)^2 \cdot \left(-\frac{34}{15}\right)}{(2^2)^3} &= \frac{-2^9 + 2^6 \cdot \left(-\frac{34}{15}\right)}{2^6} \\
 &= -2^3 - \frac{34}{15} \\
 &= -\frac{154}{15}
 \end{aligned}$$

sind in der Tat gleich.



ArithLogik/UnGleichungen/Ag_UnGlg_n_AequivalentOderNicht.tex

Aufgabe 8.60 (Gleichungen und Ungleichungen umformen)

SPF

Überlegen Sie für die folgenden Umformungen jeweils für Gleichungen und für Ungleichungen, ob zwischen die ursprüngliche (Un-)Gleichung und die umgeformte (Un-)Gleichung ein Äquivalenzpfeil ($\iff$) geschrieben werden kann oder ob nur einer der beiden Folgepfeile ($\impliedby$ oder $\implies$) dort stehen darf. Oder sind die drei Pfeile alle fehl am Platz und die entsprechende Umformung ist nicht erlaubt? Ist die Umformung einer Ungleichung nur erlaubt, wenn gleichzeitig das Ungleichheitszeichen umgedreht wird, so markieren Sie das Umformungszeichen entsprechend ($\overset{>}{\iff}$, $\overset{>}{\impliedby}$ bzw. $\overset{>}{\implies}$).

a) Addieren einer Zahl auf beiden Seiten

$\iff$, $\iff$

e) Kehrbruch bilden, wenn beide Seiten $\neq 0$ sind

$\iff$, n.e.

i) Quadrieren, wenn beide Seiten positiv sind

$\implies$, $\implies$

b) Auf beiden Seiten mit einer Zahl $\neq 0$ multiplizieren

$\iff$, n.e.

f) Kehrbruch bilden, wenn beide Seiten positiv sind

$\iff$, $\iff$

j) Quadrieren, wenn beide Seiten negativ sind

$\implies$, $\overset{>}{\iff}$

c) Auf beiden Seiten mit einer Zahl > 0 multiplizieren

$\iff$, $\iff$

g) Kehrbruch bilden, wenn beide Seiten negativ sind

$\iff$, $\overset{>}{\iff}$

k) Beide Seiten in die Exponentialfunktion einsetzen

$\iff$, $\iff$

d) Auf beiden Seiten mit einer Zahl < 0 multiplizieren

$\iff$, $\overset{>}{\iff}$

h) Quadrieren

$\implies$, n.e.

l) Beide Seiten in den Sinus einsetzen

$\implies$, n.e.



ArithLogik/UnGleichungen/Ag_UnGlg_n_QuadrOhneBetrag.tex

Aufgabe 8.61 (quadratische Ungleichungen)

spf

Welche reellen Zahlen erfüllen die folgenden Ungleichungen?

a) $x^2 - 3x + 3 < 7 \cdot (x + 2)$

$(-1; 11)$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 3 < 7 \cdot (x + 2) &\iff x^2 - 3x + 3 < 7x + 14 && \overset{-7x-14}{\iff} x^2 - 10x - 11 < 0 \\ &\iff x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 - 25 - 11 < 0 && \overset{2, \text{BF}}{\iff} (x - 5)^2 - 36 < 0 \\ &\overset{3, \text{BF}}{\iff} (x - 5 + 6) \cdot (x - 5 - 6) < 0 && \iff (x + 1) \cdot (x - 11) < 0. \end{aligned}$$

Damit folgt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 3 < 7x + 14 &\iff (x + 1 < 0 \text{ und } x - 11 > 0) \quad \text{oder} \quad (x + 1 > 0 \text{ und } x - 11 < 0) \\ &\iff (x < -1 \text{ und } x > 11)^{\frac{1}{2}} \quad \text{oder} \quad (x > -1 \text{ und } x < 11) \\ &\iff -1 < x < 11. \end{aligned}$$

b) $(t + 2) \cdot (2t + 1) \geq t + 18$

$(-\infty; -4] \cup [2; \infty)$

Lösung:

Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
 (t+2) \cdot (2t+1) \geq t+18 &\iff 2t^2 + 4t + t + 2 \geq t + 18 && \stackrel{-t-18}{\iff} 2t^2 + 4t - 16 \geq 0 \\
 &\iff 2 \cdot (t^2 + 2 \cdot t \cdot 1 + 1^2 - 1 - 8) \geq 0 && \stackrel{1. \text{BF}}{\iff} 2 \cdot ((t+1)^2 - 9) \geq 0 \\
 &\stackrel{3. \text{BF}}{\iff} 2 \cdot (t+1+3) \cdot (t+1-3) \geq 0 && \iff 2 \cdot (t+4) \cdot (t-2) \geq 0.
 \end{aligned}$$

Wegen $2 > 0$ folgt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 (t+2) \cdot (2t+1) \geq t+18 &\iff (t+4 \leq 0 \text{ und } t-2 \leq 0) \quad \text{oder} \quad (t+4 \geq 0 \text{ und } t-2 \geq 0) \\
 &\iff (t \leq -4 \text{ und } t \leq 2) \quad \text{oder} \quad (t \geq -4 \text{ und } t \geq 2) \\
 &\iff t \leq -4 \text{ oder } t \geq 2.
 \end{aligned}$$

c) $\frac{\varphi+36}{4\varphi-3} \leq \varphi - 4$

$$[-1; \frac{3}{4}) \cup [6; \infty)$$

Lösung:

Die Ungleichung ist nur für $4\varphi - 3 \neq 0 \iff \varphi \neq \frac{3}{4}$ definiert. Für alle $\varphi \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{4}\}$ gilt

$$\frac{\varphi+36}{4\varphi-3} \leq \varphi - 4 \iff 0 \leq \varphi - 4 - \frac{\varphi+36}{4\varphi-3} \iff 0 \leq \frac{(\varphi-4) \cdot (4\varphi-3) - (\varphi+36)}{4\varphi-3}.$$

Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
 (\varphi-4) \cdot (4\varphi-3) - (\varphi+36) &= 4\varphi^2 - 16\varphi - 3\varphi + 12 - \varphi - 36 = 4\varphi^2 - 20\varphi - 24 \\
 &= (2\varphi)^2 - 2 \cdot 2\varphi \cdot 5 + 5^2 - 25 - 24 \stackrel{2. \text{BF}}{=} (2\varphi-5)^2 - 49 \\
 &\stackrel{3. \text{BF}}{=} (2\varphi-5+7) \cdot (2\varphi-5-7) = (2\varphi+2) \cdot (2\varphi-12).
 \end{aligned}$$

Klammert man in beiden Zählerfaktoren jeweils eine 2 und im Nenner eine 4 aus, so folgt also für alle $\varphi \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{4}\}$

$$\begin{aligned}
 \frac{\varphi+36}{4\varphi-3} \leq \varphi - 4 &\iff 0 \leq \frac{(2\varphi+2) \cdot (2\varphi-12)}{4\varphi-3} \iff 0 \leq \frac{(\varphi+1) \cdot (\varphi-6)}{\varphi - \frac{3}{4}} \\
 \iff &(\varphi+1 \geq 0 \text{ und } \varphi-6 \geq 0 \text{ und } \varphi - \frac{3}{4} > 0) \\
 &\text{oder } (\varphi+1 \geq 0 \text{ und } \varphi-6 \leq 0 \text{ und } \varphi - \frac{3}{4} < 0) \\
 &\text{oder } (\varphi+1 \leq 0 \text{ und } \varphi-6 \geq 0 \text{ und } \varphi - \frac{3}{4} < 0) \\
 &\text{oder } (\varphi+1 \leq 0 \text{ und } \varphi-6 \leq 0 \text{ und } \varphi - \frac{3}{4} > 0) \\
 \iff &(\varphi \geq -1 \text{ und } \varphi \geq 6 \text{ und } \varphi > \frac{3}{4}) \quad \text{oder} \quad (\varphi \geq -1 \text{ und } \varphi \leq 6 \text{ und } \varphi < \frac{3}{4}) \\
 &\text{oder } (\varphi \leq -1 \text{ und } \varphi \geq 6 \text{ und } \varphi < \frac{3}{4}) \quad \text{oder} \quad (\varphi \leq -1 \text{ und } \varphi \leq 6 \text{ und } \varphi > \frac{3}{4}) \\
 \iff &\varphi \geq 6 \quad \text{oder} \quad -1 \leq \varphi < \frac{3}{4}.
 \end{aligned}$$



ArithLogik/UnGleichungen/Ag_Ungleichungen_Gleichungen_mit_Betrag_mittel.tex

Aufgabe 8.62 (Gleichungen und Ungleichungen mit Beträgen)

Lösen Sie die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen. Wenn Sie verschiedene Fälle unterscheiden (müssen), schreiben Sie stets auf, welchen Fall Sie gerade behandeln. Überprüfen Sie unbedingt, ob Ihre Lösungen die entsprechenden Fallvoraussetzungen erfüllen!

a) $|2x - 4| > -1$

$\mathbb{R}$

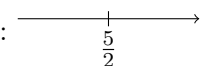
Lösung:

Die Ungleichung ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. Da der Betrag auf der linken Seite stets einen nicht-negativen Wert hat, muss dieser Wert immer über -1 liegen. Also erfüllen alle $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichung.

b) $|5 - 2x| < 1$

$(2; 3)$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $5 - 2x = 0 \iff 5 = 2x \iff x = \frac{5}{2}$. 2 Fälle: 

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq \frac{5}{2}$ ist $5 - 2x \leq 0$ und deshalb $|5 - 2x| = -(5 - 2x) = -5 + 2x$.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq \frac{5}{2}$ folgt also

$$|5 - 2x| < 1 \iff -5 + 2x < 1 \iff 2x < 6 \iff x < 3.$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x < \frac{5}{2}$ ist $5 - 2x > 0$ und deshalb $|5 - 2x| = 5 - 2x$.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x < \frac{5}{2}$ folgt also

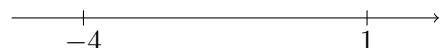
$$|5 - 2x| < 1 \iff 5 - 2x < 1 \iff 4 < 2x \iff x > 2.$$

Insgesamt folgt $\{x \in \mathbb{R} : |5 - 2x| < 1\} = [\frac{5}{2}; 3) \cup (2; \frac{5}{2}) = (2; 3)$.

c) $|x + 4| = 2 \cdot |x - 1|$

$\{-\frac{2}{3}; 6\}$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ sind $x + 4 = 0 \iff x = -4$ und $x - 1 = 0 \iff x = 1$.
3 Fälle: 

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 1$ sind $x + 4 \geq 0$ und $x - 1 \geq 0$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 1$ folgt also

$$|x + 4| = 2 \cdot |x - 1| \iff x + 4 = 2 \cdot (x - 1) \iff x + 4 = 2x - 2 \iff 6 = x.$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $-4 \leq x < 1$ sind $x + 4 \geq 0$ und $x - 1 < 0$. Für alle $x \in [-4; 1)$ folgt also

$$\begin{aligned} |x + 4| = 2 \cdot |x - 1| &\iff x + 4 = 2 \cdot (-(x - 1)) &\iff x + 4 = -2x + 2 \\ &\iff 3x = -2 &\iff x = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x < -4$ sind $x + 4 < 0$ und $x - 1 < 0$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x < -4$ folgt also

$$|x + 4| = 2 \cdot |x - 1| \iff -(x + 4) = 2 \cdot (-(x - 1)) \iff -x - 4 = -2x + 2.$$

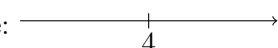
Die Lösung $x = 6$ dieser Gleichung erfüllt die Fallvoraussetzung $x < -4$ nicht.

Insgesamt folgt $\{x \in \mathbb{R} : |x + 4| = 2 \cdot |x - 1|\} = \{6\} \cup \{-\frac{2}{3}\} \cup \emptyset = \{-\frac{2}{3}; 6\}$.

d) $|x - 4| = 3x + 5$

$\{-\frac{1}{4}\}$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $x - 4 = 0 \iff x = 4$. 2 Fälle: 

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 4$ ist $x - 4 \geq 0$ und deshalb $|x - 4| = x - 4$.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 4$ folgt also

$$|x - 4| = 3x + 5 \iff x - 4 = 3x + 5 \iff -9 = 2x \iff x = -\frac{9}{2}.$$

Da $-\frac{9}{2} < 4$ ist, ist $-\frac{9}{2}$ keine Lösung der Gleichung.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x < 4$ ist $x - 4 < 0$ und deshalb $|x - 4| = -(x - 4) = -x + 4$.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x < 4$ folgt also

$$|x - 4| = 3x + 5 \iff -x + 4 = 3x + 5 \iff -1 = 4x \iff x = -\frac{1}{4}.$$

Insgesamt folgt $\{x \in \mathbb{R} : |x - 4| = 3x + 5\} = \emptyset \cup \{-\frac{1}{4}\} = \{-\frac{1}{4}\}$.

e) $\frac{|1+x|}{|3-x|} = 5$ $\{\frac{7}{3}; 4\}$

Lösung:

Die Gleichung ist für $x = 3$ nicht definiert.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ sind $1 + x = 0 \iff x = -1$ und $3 - x = 0 \iff 3 = x$.

3 Fälle: $\xrightarrow{\quad \quad \quad}$
 $\quad \quad \quad -1 \quad \quad \quad 3$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 3$ sind $1 + x > 0$ und $3 - x < 0$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 3$ folgt also

$$\begin{aligned} \frac{|1+x|}{|3-x|} = 5 &\iff \frac{1+x}{-(3-x)} = 5 &\iff -(1+x) = 5 \cdot (3-x) \\ &\iff -1 - x = 15 - 5x &\iff 4x = 16 &\iff x = 4. \end{aligned}$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $-1 \leq x < 3$ sind $1 + x \geq 0$ und $3 - x > 0$. Für alle $x \in [-1; 3)$ folgt also

$$\begin{aligned} \frac{|1+x|}{|3-x|} = 5 &\iff \frac{1+x}{3-x} = 5 &\iff 1+x = 5 \cdot (3-x) \\ &\iff 1+x = 15 - 5x &\iff 6x = 14 &\iff x = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x < -1$ sind $1 + x < 0$ und $3 - x > 0$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x < -1$ folgt also

$$\begin{aligned} \frac{|1+x|}{|3-x|} = 5 &\iff \frac{-(1+x)}{3-x} = 5 &\iff -(1+x) = 5 \cdot (3-x) \\ &\iff -1 - x = 15 - 5x &\iff 4x = 16 &\iff x = 4. \end{aligned}$$

Diese Lösung entspricht nicht der Fallvoraussetzung $x < -1$.

Insgesamt folgt $\{x \in \mathbb{R} : |x - 4| = 3x + 5\} = \{4\} \cup \{\frac{7}{3}\} \cup \emptyset = \{\frac{7}{3}; 4\}$.

f) $\left| \frac{2x+4}{x-3} \right| = 1$ $\{-7; -\frac{1}{3}\}$

Lösung:

Die Gleichung ist für $x = 3$ nicht definiert.

Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ gilt $\left| \frac{2x+4}{x-3} \right| = 1 \iff \frac{|2x+4|}{|x-3|} = 1 \iff |2x+4| = |x-3|$.

(Dieses Vorgehen ist insbesondere auch bei Ungleichungen zu empfehlen, da $|x-3|$ in jedem Fall positiv ist und so nicht überlegt werden muss, ob bei der Multiplikation das Ungleichheitszeichen herumgedreht werden muss.)

Für alle $x \in \mathbb{R}$ sind $2x + 4 = 0 \iff x = -2$ und $x - 3 = 0 \iff 3 = x$.
 3 Fälle: $\xrightarrow{\quad \quad \quad}$
 $\quad \quad \quad -2 \quad \quad \quad 3$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 3$ sind $2x + 4 > 0$ und $x - 3 > 0$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 3$ folgt also

$$\left| \frac{2x+4}{x-3} \right| = 1 \iff 2x+4 = x-3 \iff x = -7.$$

Diese Lösung entspricht nicht der Fallvoraussetzung $x > 3$.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $-2 \leq x < 3$ sind $2x + 4 \geq 0$ und $x - 3 < 0$. Für alle $x \in [-2; 3)$ folgt also

$$\begin{aligned} \left| \frac{2x+4}{x-3} \right| = 1 &\iff 2x+4 = -(x-3) &\iff 2x+4 = -x+3 \\ &\iff 3x = -1 &\iff x = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x < -2$ sind $2x + 4 < 0$ und $x - 3 > 0$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x < -2$ folgt also

$$\left| \frac{2x+4}{x-3} \right| = 1 \iff -(2x+4) = -(x-3) \iff 2x+4 = x-3 \iff x = -7.$$

Insgesamt folgt $\{x \in \mathbb{R} : |x-4| = 3x+5\} = \emptyset \cup \{-\frac{1}{3}\} \cup \{-7\} = \{-7; -\frac{1}{3}\}$.

g) $|2x-4| \geq x+1$ $\mathbb{R} \setminus (1; 5)$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $2x-4=0 \iff 2x=4 \iff x=2$. 2 Fälle: $\xrightarrow{\quad\quad\quad\frac{1}{2}\quad\quad\quad}$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 2$ ist $2x-4 \geq 0$ und deshalb $|2x-4| = 2x-4$.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 2$ folgt also

$$|2x-4| \geq x+1 \iff 2x-4 \geq x+1 \iff x \geq 5.$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x < 2$ ist $2x-4 < 0$ und deshalb $|2x-4| = -(2x-4) = -2x+4$.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x < 2$ folgt also

$$|2x-4| \geq x+1 \iff -2x+4 \geq x+1 \iff 3 \geq 3x \iff x \leq 1.$$

Insgesamt folgt $\{x \in \mathbb{R} : |2x-4| \geq x+1\} = [5; \infty) \cup (-\infty; 1] = \mathbb{R} \setminus (1; 5)$.

h) $|x+2| + |x+4| - 12 = 0$ $\{-9; 3\}$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ sind $x+2=0 \iff x=-2$ und $x+4=0 \iff x=-4$.
3 Fälle: $\xrightarrow{\quad\quad\quad\frac{1}{-4}\quad\quad\quad\frac{1}{-2}\quad\quad\quad}$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -2$ sind $x+4 > 0$ und $x+2 \geq 0$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -2$ folgt also

$$\begin{aligned} |x+2| + |x+4| - 12 = 0 &\iff x+2 + x+4 = 12 &\iff 2x+6 = 12 \\ &\iff 2x = 6 &\iff x = 3. \end{aligned}$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $-4 \leq x < -2$ sind $x+4 \geq 0$ und $x+2 < 0$. Für alle $x \in [-4; -2)$ folgt also

$$|x+2| + |x+4| - 12 = 0 \iff -(x+2) + x+4 = 12 \iff -x+2 + x+4 = 12.$$

Da die letzte Gleichung $6 = 12$ fordert, gibt es kein $x \in [-4; -2)$ mit $|x+2| + |x+4| - 12 = 0$.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x < -4$ sind $x+4 \leq 0$ und $x+2 < 0$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x < -4$ folgt also

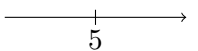
$$\begin{aligned} |x+2| + |x+4| - 12 = 0 &\iff -(x+2) - (x+4) = 12 &\iff -x-2 - x-4 = 12 \\ &\iff -2x = 18 &\iff x = -9. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt $\{x \in \mathbb{R} : |x-4| = 3x+5\} = \{3\} \cup \emptyset \cup \{-9\} = \{-9; 3\}$.

i) $|5 - x| \leq 11$

$[-6; 16]$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $5 - x = 0 \iff 5 = x \iff x = 5$. 2 Fälle: 

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 5$ ist $5 - x \leq 0$ und deshalb $|5 - x| = -(5 - x) = -5 + x$.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 5$ folgt also

$$|5 - x| \leq 11 \iff -5 + x \leq 11 \iff x \leq 16.$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x < 5$ ist $5 - x > 0$ und deshalb $|5 - x| = 5 - x$.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x < 5$ folgt also

$$|5 - x| \leq 11 \iff 5 - x \leq 11 \iff -6 \leq x.$$

Insgesamt folgt $\{x \in \mathbb{R} : |5 - x| \leq 11\} = [5; 16] \cup [-6; 5) = [-6; 16]$.

j) $|x + 1| + |2x + 3| = |x - 4|$

$\{-4; 0\}$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ sind $x + 1 = 0 \iff x = -1$, $x - 4 = 0 \iff x = 4$ und $2x + 3 = 0 \iff 2x = -3 \iff x = -\frac{3}{2}$. 4 Fälle: 

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 4$ sind $2x + 3 > 0$, $x + 1 > 0$ und $x - 4 \geq 0$.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 4$ folgt also

$$\begin{aligned} |x + 1| + |2x + 3| = |x - 4| &\iff x + 1 + 2x + 3 = x - 4 &\iff 3x + 4 = x - 4 \\ &\iff 2x = -8 &\iff x = -4. \end{aligned}$$

Diese Lösung erfüllt die Fallvoraussetzung $x \geq 4$ nicht.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $-1 \leq x < 4$ sind $2x + 3 > 0$, $x + 1 \geq 0$ und $x - 4 < 0$.

Für alle $x \in [-1; 4)$ folgt also

$$\begin{aligned} |x + 1| + |2x + 3| = |x - 4| &\iff x + 1 + 2x + 3 = -(x - 4) \\ \iff 3x + 4 = -x + 4 &\iff 4x = 0 \iff x = 0. \end{aligned}$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $-\frac{3}{2} \leq x < -1$ sind $2x + 3 \geq 0$, $x + 1 < 0$ und $x - 4 < 0$.

Für alle $x \in [-\frac{3}{2}; -1)$ folgt also

$$\begin{aligned} |x + 1| + |2x + 3| = |x - 4| &\iff -(x + 1) + 2x + 3 = -(x - 4) \\ \iff -x - 1 + 2x + 3 = -x + 4 &\iff 2x = 2 \iff x = 1. \end{aligned}$$

Diese Lösung erfüllt die Fallvoraussetzung $-\frac{3}{2} \leq x < -1$ nicht.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x < -\frac{3}{2}$ sind $2x + 3 < 0$, $x + 1 < 0$ und $x - 4 < 0$.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x < -\frac{3}{2}$ folgt also

$$\begin{aligned} |x + 1| + |2x + 3| = |x - 4| &\iff -(x + 1) - (2x + 3) = -(x - 4) \\ \iff -x - 1 - 2x - 3 = -x + 4 &\iff -8 = 2x \iff x = -4. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt $\{x \in \mathbb{R} : |x - 4| = 3x + 5\} = \emptyset \cup \{0\} \cup \emptyset \cup \{-4\} = \{-4; 0\}$.

**Aufgabe 8.63** (Ungleichungen)

3.1.4, letzte Teilaufgabe: 3.1.2

Lösen Sie folgende Ungleichungen (a sei eine gegebene reelle Zahl).

a) $2x - 5 < 7$ $(-\infty; 6)$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $2x - 5 < 7 \iff 2x < 12 \iff x < 6$.

b) $-3x - 4 \geq \frac{1}{2}$ $(-\infty; -\frac{3}{2}]$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $-3x - 4 \geq \frac{1}{2} \iff -\frac{9}{2} \geq 3x \iff x \leq -\frac{3}{2}$.

c) $\frac{1}{2} \cdot (x - \frac{4}{3}) \geq x - 1$ $(-\infty; \frac{2}{3}]$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\frac{1}{2} \cdot (x - \frac{4}{3}) \geq x - 1 \iff x - \frac{4}{3} \geq 2x - 2 \iff \frac{2}{3} \geq x$.

d) $|x - 22| < 5$ $(17; 27)$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x - 22 \geq 0$, also $x \geq 22$ gilt

$$|x - 22| < 5 \stackrel{x-22 \geq 0}{\iff} x - 22 < 5 \iff x < 27.$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x - 22 < 0$, also $x < 22$ gilt

$$|x - 22| < 5 \stackrel{x-22 < 0}{\iff} -(x - 22) < 5 \iff x - 22 > -5 \iff x > 17.$$

Insgesamt folgt $\{x \in \mathbb{R} : |x - 22| < 5\} = [22; 27) \cup (17; 22) = (17; 27)$.

e) $\left|11 - \frac{x}{2}\right| \leq 5$ $[12; 32]$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $11 - \frac{x}{2} \geq 0$, also $x \leq 22$ gilt

$$\left|11 - \frac{x}{2}\right| \leq 5 \stackrel{11-\frac{x}{2} \geq 0}{\iff} 11 - \frac{x}{2} \leq 5 \iff 6 \leq \frac{x}{2} \iff x \geq 12.$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $11 - \frac{x}{2} < 0$, also $x > 22$ gilt wegen $\left|11 - \frac{x}{2}\right| \stackrel{11-\frac{x}{2} < 0}{=} -(11 - \frac{x}{2}) = -11 + \frac{x}{2}$

$$\left|11 - \frac{x}{2}\right| \leq 5 \iff -11 + \frac{x}{2} \leq 5 \iff \frac{x}{2} \leq 16 \iff x \leq 32.$$

Insgesamt folgt $\{x \in \mathbb{R} : \left|11 - \frac{x}{2}\right| \leq 5\} = [12; 22] \cup (22; 32] = [12; 32]$.

f) $\frac{2}{2-x} \geq 7$ $[\frac{12}{7}; 2)$

Lösung:

Die Gleichung ist für $x = 2$ nicht definiert.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $2 - x > 0$, also $x < 2$ gilt

$$\frac{2}{2-x} \geq 7 \quad \stackrel{2-x>0, \frac{1}{7}>0}{\iff} \quad \frac{2}{7} \geq 2-x \quad \iff \quad x \geq \frac{12}{7}.$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $2 - x > 0$, also $x > 2$ gilt

$$\frac{2}{2-x} \geq 7 \quad \stackrel{2-x<0, \frac{1}{7}>0}{\iff} \quad \frac{2}{7} \leq 2-x \quad \iff \quad x \leq \frac{12}{7}.$$

Da es kein $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 2$ und $x \leq \frac{12}{7}$ gibt, folgt insgesamt $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{2}{2-x} \geq 7\right\} = \left[\frac{12}{7}; 2\right)$.

g) $\frac{x-4}{5} > 3 \quad (19; \infty)$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\frac{x-4}{5} > 3 \quad \iff \quad x-4 > 15 \quad \iff \quad x > 19.$

h) $ax < x+a \quad \mathbb{R} \text{ für } a=1, \left(-\infty; \frac{a}{a-1}\right) \text{ für } a>1, \left(\frac{a}{a-1}; \infty\right) \text{ für } a<1$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $ax < x+a \quad \iff \quad ax-x < a \quad \iff \quad (a-1) \cdot x < a.$

Ist $a=1$, so ist die letzte Ungleichung äquivalent zu $0 < 1$, was für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt ist.

Ist $a>1$, so ist $a-1>0$ und die letzte Ungleichung ist äquivalent zu $x < \frac{a}{a-1}.$

Ist $a<1$, so ist $a-1<0$ und die letzte Ungleichung ist äquivalent zu $x > \frac{a}{a-1}.$

i) $\frac{x}{a+1} - \frac{1}{a-1} > \frac{1}{a^2-1} \quad \left(-\infty; \frac{a+2}{a-1}\right) \text{ für } a<-1, \left(\frac{a+2}{a-1}; \infty\right) \text{ für } 1 \neq a > -1.$

Lösung:

Die Ungleichung ist nur für $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ definiert.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\frac{x}{a+1} - \frac{1}{a-1} > \frac{1}{a^2-1} \quad \iff \quad \frac{x}{a+1} > \frac{1}{(a-1) \cdot (a+1)} + \frac{1}{a-1}.$

Ferner ist $\frac{1}{(a-1) \cdot (a+1)} + \frac{1}{a-1} = \frac{1+1 \cdot (a+1)}{(a-1) \cdot (a+1)} = \frac{a+2}{(a-1) \cdot (a+1)}.$

Ist $a>-1$ und $a \neq 1$, so ist $a+1>0$ und es folgt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{x}{a+1} - \frac{1}{a-1} > \frac{1}{a^2-1} \quad \iff \quad \frac{x}{a+1} > \frac{a+2}{(a-1) \cdot (a+1)} \quad \stackrel{a+1>0}{\iff} \quad x > \frac{a+2}{a-1}.$$

Ist $a<-1$, so ist $a+1<0$ und es folgt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{x}{a+1} - \frac{1}{a-1} > \frac{1}{a^2-1} \quad \iff \quad \frac{x}{a+1} > \frac{a+2}{(a-1) \cdot (a+1)} \quad \stackrel{a+1>0}{\iff} \quad x < \frac{a+2}{a-1}.$$

Alternative Lösungsmöglichkeit: (drei Fallunterscheidungen)

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\frac{x}{a+1} - \frac{1}{a-1} = \frac{x \cdot (a-1) - 1 \cdot (a+1)}{(a+1) \cdot (a-1)} = \frac{x \cdot (a-1) - a - 1}{a^2-1}.$

Ist $a<-1$, so sind $a^2-1>0$ und $a-1<0$. Dann folgt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{x}{a+1} - \frac{1}{a-1} > \frac{1}{a^2-1} &\iff \frac{x \cdot (a-1) - a - 1}{a^2-1} > \frac{1}{a^2-1} &\stackrel{a^2-1>0}{\iff} &x \cdot (a-1) - a - 1 > 1 \\ &\iff x \cdot (a-1) > a+2 &\stackrel{a-1<0}{\iff} &x < \frac{a+2}{a-1}. \end{aligned}$$

Ist $-1 < a < 1$, so sind $a^2 - 1 < 0$ und $a - 1 < 0$. Dann folgt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{x}{a+1} - \frac{1}{a-1} > \frac{1}{a^2-1} &\iff \frac{x \cdot (a-1) - a-1}{a^2-1} > \frac{1}{a^2-1} && \begin{matrix} a^2-1 < 0 \\ \iff \end{matrix} && x \cdot (a-1) - a-1 < 1 \\ &\iff x \cdot (a-1) < a+2 && \begin{matrix} a-1 < 0 \\ \iff \end{matrix} && x > \frac{a+2}{a-1}. \end{aligned}$$

Ist $a > 1$, so sind $a^2 - 1 > 0$ und $a - 1 > 0$. Dann folgt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{x}{a+1} - \frac{1}{a-1} > \frac{1}{a^2-1} &\iff \frac{x \cdot (a-1) - a-1}{a^2-1} > \frac{1}{a^2-1} && \begin{matrix} a^2-1 > 0 \\ \iff \end{matrix} && x \cdot (a-1) - a-1 > 1 \\ &\iff x \cdot (a-1) > a+2 && \begin{matrix} a-1 > 0 \\ \iff \end{matrix} && x > \frac{a+2}{a-1}. \end{aligned}$$

j) $|x+2| \leq 5$

$[-7; 3]$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x+2 \geq 0$, also $x \geq -2$ gilt

$$|x+2| \leq 5 \iff x+2 \leq 5 \iff x \leq 3.$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x+2 < 0$, also $x < -2$ gilt

$$|x+2| \leq 5 \iff \begin{matrix} x+2 < 0 \\ \iff \end{matrix} -(x+2) \leq 5 \iff -x-2 \leq 5 \iff -7 \leq x.$$

Insgesamt folgt $\{x \in \mathbb{R} \mid |x+2| \leq 5\} = [-2; 3] \cup [-7; -2) = [-7; 3]$.



ArithLogik/UnGleichungen/Ag_Unglgn_ADurchBUndBDurchAMit1Vergleichen.tex

Aufgabe 8.64 (Größen- und Abstandsvergleich)

3.1.5

Es seien $a \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen mit $0 < a < b$.

a) Ordnen Sie die Zahlen 1, $\frac{a}{b}$ und $\frac{b}{a}$ der Größe nach!

$$\frac{a}{b} < 1 < \frac{b}{a}$$

Lösung:

Da a und b positive Zahlen sind, kann man die Ungleichung $a < b$ durch a bzw. b dividieren und erhält $1 < \frac{b}{a}$ bzw. $\frac{a}{b} < 1$.

b) Welche der beiden Zahlen $\frac{a}{b}$ und $\frac{b}{a}$ liegt näher an 1? Begründen Sie Ihre Antwort!

Hinweis: Beispiele können Ihnen eine Idee liefern, genügen allerdings nicht als Beweis.

$$\frac{a}{b}$$

Lösung:

Wegen $b - a > 0$ gilt $|1 - \frac{a}{b}| = |\frac{b-a}{b}| = \frac{b-a}{b}$ und $|1 - \frac{b}{a}| = |\frac{a-b}{a}| = \frac{b-a}{a}$.

Da $a > 0$, $b > 0$ und $a < b$ gilt, ist $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$. Mit $b - a > 0$ folgt $|1 - \frac{a}{b}| = \frac{b-a}{b} < \frac{b-a}{a} = |1 - \frac{b}{a}|$.



ArithLogik/UnGleichungen/Ag_Unglgn_LinearFuenfOhneZweiMitParameter.tex

Aufgabe 8.65 (lineare Ungleichungen)

3.1.4

Sei $a \in \mathbb{R}$ eine fest vorgegebene reelle Zahl. Lösen Sie die folgenden Ungleichungen!

a) $2x - 5 < 7$

$(-\infty; 6)$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} 2x - 5 < 7 & \quad | + 5 \\ \iff 2x < 12 & \quad | \cdot \frac{1}{2} > 0 \\ \iff x < 6. \end{aligned}$$

b) $-3t - 4 \geq \frac{1}{2}$

$(-\infty; -\frac{3}{2}]$

Lösung:

Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} -3t - 4 \geq \frac{1}{2} & \quad | + 3t - \frac{1}{2} \\ \iff -\frac{9}{2} \geq 3t & \quad | \cdot \frac{1}{3} > 0 \\ \iff -\frac{3}{2} \geq t. \end{aligned}$$

c) $\frac{1}{2} \cdot (\varphi - \frac{4}{3}) \geq \varphi - 1$

$(-\infty; \frac{2}{3}]$

Lösung:

Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot (\varphi - \frac{4}{3}) \geq \varphi - 1 & \quad | \cdot 2 > 0 \\ \iff \varphi - \frac{4}{3} \geq 2\varphi - 2 & \quad | - \varphi + 2 \\ \iff \frac{2}{3} \geq \varphi. \end{aligned}$$

d) $\frac{2}{2-u} \geq 7$

$[\frac{12}{7}; 2)$

Lösung:

Die Gleichung ist für $u = 2$ nicht definiert.

Fall 1 ($u < 2$): Für alle $u \in \mathbb{R}$ mit $u < 2$, gilt $2 - u > 0$ also

$$\begin{aligned} \frac{2}{2-u} \geq 7 & \quad | \cdot \frac{2-u}{7} > 0 \\ \iff \frac{2}{7} \geq 2-u & \quad | + u - \frac{2}{7} \\ \iff u \geq \frac{12}{7}. \end{aligned}$$

Also sind alle $u \in \mathbb{R}$ mit $u < 2$ und $u \geq \frac{12}{7}$ Lösungen der Ungleichung.

Fall 2 ($u > 2$): Für alle $u \in \mathbb{R}$ mit $u > 2$, gilt $2 - u < 0$ also

$$\begin{aligned} \frac{2}{2-u} \geq 7 & \quad | \cdot \frac{2-u}{7} < 0 \\ \iff \frac{2}{7} \leq 2-u & \quad | + u - \frac{2}{7} \\ \iff u \leq \frac{12}{7}. \end{aligned}$$

Also sind alle $u \in \mathbb{R}$ mit $u > 2$ und $u \leq \frac{12}{7}$ Lösungen der Ungleichung. Wegen $\frac{12}{7} < 2$ gibt es kein solches $u \in \mathbb{R}$.

Also ist $\left\{ u \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{2-u} \geq 7 \right\} = [\frac{12}{7}; 2)$.

e) $\frac{\vartheta - 4}{5} > 3$

$(19; \infty)$

Lösung:

Für alle $\vartheta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta - 4}{5} > 3 & \quad | \cdot 5 > 0 \\ \iff \vartheta - 4 > 15 & \quad | + 4 \\ \iff \vartheta > 19. \end{aligned}$$

f) $ar < r + a$

$\mathbb{R}$ für $a = 1$, $(-\infty; \frac{a}{a-1})$ für $a > 1$, $(\frac{a}{a-1}; \infty)$ für $a < 1$

Lösung:

Für alle $r \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} ar < r + a & \quad | - r \\ \iff ar - r < a & \quad | \text{ausklammern} \\ \iff (a - 1) \cdot r < a. \end{aligned}$$

Fall 1 ($a = 1$): Ist $a = 1$, so ist die letzte Ungleichung äquivalent zu $0 < 1$, was für alle $r \in \mathbb{R}$ erfüllt ist.

Fall 2 ($a > 1$): Ist $a > 1$, so ist $a - 1 > 0$ und die letzte Ungleichung ist äquivalent zu $r < \frac{a}{a-1}$.

Fall 3 ($a < 1$): Ist $a < 1$, so ist $a - 1 < 0$ und die letzte Ungleichung ist äquivalent zu $r > \frac{a}{a-1}$.

g) $\frac{z}{a+1} - \frac{1}{a-1} > \frac{1}{a^2-1}$

mit $1 \neq a \neq -1$

$(-\infty; \frac{a+2}{a-1})$ für $a < -1$, $(\frac{a+2}{a-1}; \infty)$ für $1 \neq a > -1$

Lösung:

Addiert man $\frac{1}{a-1}$ auf beiden Seiten der Ungleichung, so ergibt sich mit der dritten binomischen Formel

$$\begin{aligned} \frac{z}{a+1} - \frac{1}{a-1} &> \frac{1}{a^2-1} \\ \iff \frac{z}{a+1} &> \frac{1}{(a+1) \cdot (a-1)} + \frac{1}{a-1} \\ \iff \frac{z}{a+1} &> \frac{1+(a+1)}{(a+1) \cdot (a-1)} \\ \iff \frac{z}{a+1} &> \frac{a+2}{(a+1) \cdot (a-1)}. \end{aligned}$$

Fall 1 ($a > -1$): Ist $a > -1$ und $a \neq 1$, so

ist $a+1 > 0$ und es folgt für alle $z \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{z}{a+1} &> \frac{a+2}{(a+1) \cdot (a-1)} \quad | \cdot (a+1) \\ \iff z &> \frac{a+2}{a-1}. \end{aligned}$$

Fall 2 ($a < -1$): Für $a < -1$ ist $a+1 < 0$ und es folgt für alle $z \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{z}{a+1} &> \frac{a+2}{(a+1) \cdot (a-1)} \quad | \cdot (a+1) \\ \iff z &< \frac{a+2}{a-1}. \end{aligned}$$



ArithLogik/UnGleichungen/Ag_Wurzeln_QuadGleichungen_leicht.tex

Aufgabe 8.66 (Gleichungen mit Wurzeln)

7.2.3

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen x der folgenden Gleichungen:

a) $16x^2 - 81 = 0$

$$x \in \left\{ \frac{9}{4}; -\frac{9}{4} \right\}$$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} 16x^2 - 81 = 0 &\iff (4x)^2 - 9^2 = 0 \iff (4x - 9) \cdot (4x + 9) = 0 \\ &\iff 4x - 9 = 0 \text{ oder } 4x + 9 = 0 \\ &\iff 4x = 9 \text{ oder } 4x = -9 \iff x = \frac{9}{4} \text{ oder } x = -\frac{9}{4}. \end{aligned}$$

b) $\frac{2}{3} \cdot x^2 + \frac{4}{5} \cdot x = 0$

$$x \in \left\{ 0; -\frac{6}{5} \right\}$$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \cdot x^2 + \frac{4}{5} \cdot x = 0 &\iff \left(\frac{2}{3} \cdot x + \frac{4}{5} \right) \cdot x = 0 \iff \frac{2}{3} \cdot x + \frac{4}{5} = 0 \text{ oder } x = 0 \\ \iff \frac{2}{3} \cdot x = -\frac{4}{5} \text{ oder } x = 0 &\iff x = -\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{6}{5} \text{ oder } x = 0. \end{aligned}$$

c) $4x^2 + 12x + 5 = 0$

$$x \in \left\{ -\frac{1}{2}; -\frac{5}{2} \right\}$$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$4x^2 + 12x + 5 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 - 9 + 5 \stackrel{1. \text{ BF}}{=} (2x+3)^2 - 4 \stackrel{3. \text{ BF}}{=} (2x+3+2) \cdot (2x+3-2).$$

Damit folgt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 4x^2 + 12x + 5 = 0 &\iff (2x+5) \cdot (2x+1) = 0 \\ \iff 2x+5 = 0 \text{ oder } 2x+1 = 0 &\iff 2x = -5 \text{ oder } 2x = -1 \\ &\iff x = -\frac{5}{2} \text{ oder } x = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

d) $4^x - 10 \cdot 2^x = -16$

$$x \in \{1; 3\}$$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} 4^x - 10 \cdot 2^x = -16 &\iff (2^2)^x - 10 \cdot 2^x = -16 \xrightarrow{+16} 2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 16 = 0 \\ &\iff (2^x)^2 - 2 \cdot 2^x \cdot 5 + 5^2 - 25 + 16 = 0 \\ &\stackrel{2. \text{ BF}}{\iff} (2^x - 5) - 9 = 0 \quad \stackrel{3. \text{ BF}}{\iff} (2^x - 5 + 3) \cdot (2^x - 5 - 3) = 0 \\ &\iff (2^x - 2) \cdot (2^x - 8) = 0 \iff 2^x - 2 = 0 \text{ oder } 2^x - 8 = 0 \\ &\stackrel{8=2^3}{\iff} 2^x = 2^1 \text{ oder } 2^x = 2^3 \iff x = 1 \text{ oder } x = 3. \end{aligned}$$

e) $\sqrt{8x-7} + 3 = 2x$

$$x = 4$$

Lösung:

Die Gleichung ist nur für die $x \in \mathbb{R}$ definiert, welche $8x - 7 \geq 0 \xrightarrow{+7} 8x \geq 7 \xrightarrow{\cdot \frac{1}{8}} x \geq \frac{7}{8}$ erfüllen. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq \frac{7}{8}$ gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{8x-7} + 3 = 2x &\stackrel{-3}{\iff} \sqrt{8x-7} = 2x - 3 \stackrel{(\cdot)^2}{\iff} \sqrt{8x-7}^2 = (2x-3)^2 \\ &\stackrel{2. \text{ BF}}{\iff} 8x - 7 = 4x^2 - 12x + 9 \stackrel{-8x+7}{\iff} 0 = 4x^2 - 20x + 16. \end{aligned}$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} 4x^2 - 20x + 16 &= (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 - 25 + 16 \stackrel{2. \text{ BF}}{=} (2x - 5)^2 - 9 \\ &\stackrel{3. \text{ BF}}{=} (2x - 5 + 3) \cdot (2x - 5 - 3) = (2x - 2) \cdot (2x - 8) \\ &= 2 \cdot (x - 1) \cdot 2 \cdot (x - 4) = 4 \cdot (x - 1) \cdot (x - 4). \end{aligned}$$

Insgesamt folgt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq \frac{7}{8}$

$$\begin{aligned} \sqrt{8x-7} + 3 = 2x &\implies 0 = 4x^2 - 20x + 16 \iff 0 = 4 \cdot (x - 1) \cdot (x - 4) \\ &\iff x - 1 = 0 \text{ oder } x - 4 = 0 \iff x = 1 \text{ oder } x = 4. \end{aligned}$$

Da oben quadriert wurde, muss eine Probe gemacht werden, ob die berechneten x tatsächlich Lösungen der Ursprungsgleichung sind.

Es gilt

$$\sqrt{8 \cdot 1 - 7} + 3 = \sqrt{8 - 7} + 3 = \sqrt{1} + 3 = 1 + 3 = 4 \neq 2 = 2 \cdot 1$$

und

$$\sqrt{8 \cdot 4 - 7} + 3 = \sqrt{32 - 7} + 3 = \sqrt{25} + 3 = 5 + 3 = 8 = 2 \cdot 4.$$

Also gilt $\sqrt{8x-7} + 3 = 2x \iff x = 4$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq \frac{7}{8}$.

f) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 1$

$$x = -1$$

Lösung:

Die Gleichung ist nur für die $x \in \mathbb{R}$ definiert, welche $2x + 3 \geq 0 \xLeftrightarrow{-3} 2x \geq -3 \xLeftrightarrow{\cdot \frac{1}{2}} x \geq -\frac{3}{2}$ und $x + 1 \geq 0 \xLeftrightarrow{-1} x \geq -1$ erfüllen. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 1 & \xrightarrow{(\cdot)^2} 2x+3 + 2 \cdot \sqrt{2x+3} \cdot \sqrt{x+1} + x+1 = 1 \\ & \iff 3x+4 + 2 \cdot \sqrt{(2x+3) \cdot (x+1)} = 1 \\ & \xLeftrightarrow{-3x-4} 2 \cdot \sqrt{2x^2+2x+3x+3} = -3x-3 \\ & \xrightarrow{(\cdot)^2} 4 \cdot (2x^2+5x+3) = 9x^2+18x+9 \\ & \iff 8x^2+20x+12 = 9x^2+18x+9 \\ & \xLeftrightarrow{-8x^2-20x-12} 0 = x^2-2x-3. \end{aligned}$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 3 &= x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 - 1 - 3 \stackrel{2. \text{BF}}{=} (x-1)^2 - 4 \\ &\stackrel{3. \text{BF}}{=} (x-1+2) \cdot (x-1-2) = (x+1) \cdot (x-3). \end{aligned}$$

Insgesamt folgt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 1 &\implies 0 = x^2 - 2x - 3 \iff 0 = (x+1) \cdot (x-3) \\ &\iff x+1=0 \text{ oder } x-3=0 \iff x=-1 \text{ oder } x=3. \end{aligned}$$

Da oben quadriert wurde, muss eine Probe gemacht werden, ob die berechneten x tatsächlich Lösungen der Ursprungsgleichung sind.

Es gilt

$$\sqrt{2 \cdot (-1) + 3} + \sqrt{-1 + 1} = \sqrt{-2 + 3} + \sqrt{0} = \sqrt{1} + 0 = 1 + 0 = 1$$

und

$$\sqrt{2 \cdot 3 + 3} + \sqrt{3 + 1} = \sqrt{6 + 3} + \sqrt{4} = \sqrt{9} + \sqrt{2} = 3 + 2 = 5 \neq 1.$$

Also gilt $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 1 \iff x = -1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$.

g) $\sqrt{x+7} - \sqrt{8 \cdot (x-3)} = 2 \cdot \sqrt{2}$

$$x = 5$$

Lösung:

Die Gleichung ist nur für die $x \in \mathbb{R}$ definiert, welche $8 \cdot (x-3) \geq 0 \xLeftrightarrow{\cdot \frac{1}{8}} x-3 \geq 0 \xLeftrightarrow{+3} x \geq 3$ erfüllen. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 3$ sind beide Seiten der Ungleichung $x+7 \geq \sqrt{8 \cdot (x-3)}$ nicht-negativ, so dass Quadrieren hier eine Äquivalenzumformung darstellt. Also gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 3$

$$\begin{aligned} x+7 \geq \sqrt{8 \cdot (x-3)} &\xLeftrightarrow{(\cdot)^2} (x+7)^2 \geq 8 \cdot (x-3) \stackrel{1. \text{BF}}{\iff} x^2 + 14x + 49 \geq 8x - 24 \\ &\xLeftrightarrow{-8x+24} x^2 + 6x + 73 \geq 0 \iff x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 9 - 9 + 73 \geq 0 \\ &\stackrel{1. \text{BF}}{\iff} (x+3)^2 + 64 \geq 0. \end{aligned}$$

Dies ist für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 3$ erfüllt. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 3$ gilt

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x+7-\sqrt{8 \cdot (x-3)}} &= 2 \cdot \sqrt{2} & \xrightarrow{(\cdot)^2} & x+7-\sqrt{8 \cdot (x-3)} = 4 \cdot 2 \\
 & & \xLeftrightarrow{-x-7} & -\sqrt{8x-24} = 1-x \\
 & & \xrightarrow{(\cdot)^2} & 8x-24 = 1-2x+x^2 \\
 & & \xLeftrightarrow{-8x+25} & 0 = x^2-10x+25 \\
 & & \iff & 0 = x^2-2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 & \xLeftrightarrow{2. \text{ BF}} & 0 = (x-5)^2 \\
 & & \iff & x-5 = 0 & \xLeftrightarrow{+5} & x = 5.
 \end{aligned}$$

Da oben quadriert wurde, muss eine Probe gemacht werden, ob das berechnete x tatsächlich Lösung der Ursprungsgleichung ist.

Es gilt

$$\sqrt{5+7-\sqrt{8 \cdot (5-3)}} = \sqrt{12-\sqrt{8 \cdot 2}} = \sqrt{12-\sqrt{16}} = \sqrt{12-4} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2}.$$

$$\text{Also gilt } \sqrt{x+7-\sqrt{8 \cdot (x-3)}} = 2 \cdot \sqrt{2} \iff x = 5 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } x \geq 3.$$

$$\text{h) } \frac{x+1}{x-2} + \frac{x-1}{x+2} = \frac{3x^2-5x+10}{x^2-4}$$

$$x = 3$$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^2-4 = (x-2) \cdot (x+2)$, weshalb die Gleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $-2 \neq x \neq 2$ definiert ist. Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ gilt

$$\begin{aligned}
 \frac{x+1}{x-2} + \frac{x-1}{x+2} &= \frac{3x^2-5x+10}{x^2-4} & \xLeftrightarrow{(\cdot(x^2-4))} & (x+1) \cdot (x+2) + (x-1) \cdot (x-2) = 3x^2-5x+10 \\
 & & \iff & x^2+x+2x+2+x^2-x-2x+2 = 3x^2-5x+10 \\
 & & \xLeftrightarrow{-2x^2-4} & 0 = x^2-5x+6.
 \end{aligned}$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
 x^2-5x+6 &= x^2-2 \cdot x \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 6 \stackrel{2. \text{ BF}}{=} \left(x-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \\
 &\stackrel{3. \text{ BF}}{=} \left(x-\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x-\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right) = (x-2) \cdot (x-3).
 \end{aligned}$$

Insgesamt folgt für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$

$$\begin{aligned}
 \frac{x+1}{x-2} + \frac{x-1}{x+2} &= \frac{3x^2-5x+10}{x^2-4} & \iff & 0 = x^2-5x+6 & \iff & 0 = (x-2) \cdot (x-3) \\
 & & \iff & x-2 = 0 \text{ oder } x-3 = 0 \\
 & & \iff & x = 2 \text{ oder } x = 3 & \xLeftrightarrow{x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}} & x = 3.
 \end{aligned}$$

$$\text{i) } \frac{x+1}{x-2} - \frac{2x+4}{x+3} = -2 + \frac{x^2+6x-1}{(x-2) \cdot (x+3)}$$

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}$$

Lösung:

Die Gleichung ist für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x - 2 \neq 0$ und $x + 3 \neq 0$ definiert. Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}$ gilt

$$\begin{aligned}
 & \frac{x+1}{x-2} - \frac{2x+4}{x+3} = -2 + \frac{x^2+6x-1}{(x-2) \cdot (x+3)} \\
 \cdot (x-2) \cdot (x+3) & \iff (x+1) \cdot (x+3) - (2x+4) \cdot (x-2) = -2 \cdot (x-2) \cdot (x+3) + x^2 + 6x - 1 \\
 & \iff x^2 + x + 3x + 3 - (2x^2 - 4x + 4x - 8) = -2 \cdot (x^2 - 2x + 3x - 6) + x^2 + 6x - 1 \\
 & \iff x^2 + 4x + 3 - 2x^2 + 8 = -2x^2 - 2x + 12 + x^2 + 6x - 1 \\
 & \iff -x^2 + 4x + 11 = -x^2 + 4x + 11 \\
 + x^2 - 4x - 11 & \iff 0 = 0.
 \end{aligned}$$

Da die letzte Gleichung immer erfüllt ist, wird $\frac{x+1}{x-2} - \frac{2x+4}{x+3} = -2 + \frac{x^2+6x-1}{(x-2) \cdot (x+3)}$ von allen $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}$ gelöst.



ArithLogik/UnGleichungen/Ag_Wurzeln_Vieta.tex

Aufgabe 8.67 (Satz von Vieta)

5.1.5

Gegeben sind reelle Zahlen p und q . Weiter sind x_1 und x_2 reelle Zahlen mit der Eigenschaft

$$x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Dann sind x_1 und x_2 Lösungen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ (warum?).

Rechnen Sie nach, dass gilt:

$$p = -(x_1 + x_2) \quad \text{und} \quad q = x_1 \cdot x_2.$$

Lösung:

Aufgrund der Voraussetzungen besitzt $x^2 + px + q = 0$ die beiden reellen Lösungen x_1 und x_2 . Bezeichnet x_1 die größere Zahl (ansonsten wird die Nummerierung geändert), so gilt nach der p - q -Formel

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{sowie} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Damit folgt

$$-(x_1 + x_2) = -\left(-\frac{p}{2} - \frac{p}{2}\right) = p \quad \text{und} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = q,$$

womit die Behauptung nachgewiesen ist.



ArithLogik/UnGleichungen/Text_Polynome_QuadErgDreiEinfuehrungsBspe.txt

Aufgabe 8.68 ()

Eine Aufgabe zum Trainieren von quadratischer Ergänzung findet sich in
FktEinDim/Polynome/Ag_Polynome_QuadErgDreiEinfuehrungsBspe



ArithLogik/UnGleichungen/Text_Wurzeln_GlgnMitWurzelnLoesen.txt

Aufgabe 8.69 ()

Eine Aufgabe zum Lösen von Gleichungen durch Wurzelziehen findet sich in
ArithLogik/PotWurz/Ag_Wurzeln_GlgnMitWurzelnLoesen

Aufgabenblatt 9

ArithLogik/VollstInd



ArithLogik/VollstInd/Ag_VollstInd_FormelVonMoivre.tex

Aufgabe 9.70 (Die Formel von Moivre)

spf

Für alle $\varphi \in \mathbb{C}$ und alle $\psi \in \mathbb{C}$ gelten die Additionstheoreme

$$\sin(\varphi + \psi) = \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) + \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi) \quad \text{und} \quad \cos(\varphi + \psi) = \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi).$$

- a) Zeigen Sie die für alle $z \in \mathbb{C}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gültige „Formel von MOIVRE“: ($i^2 = -1$)

$$(\cos(z) + i \cdot \sin(z))^n = \cos(nz) + i \cdot \sin(nz)$$

Lösung:

Induktionsanfang: ($n = 0$): Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$(\cos(z) + i \cdot \sin(z))^0 = 1 = 1 + i \cdot 0 = \cos(0) + i \cdot \sin(0) = \cos(0 \cdot z) + i \cdot \sin(0 \cdot z).$$

Induktionsvoraussetzung: ($n = k$): Sei $k \in \mathbb{N}_0$ eine Zahl, für die bereits für alle $z \in \mathbb{C}$ die Formel $(\cos(z) + i \cdot \sin(z))^k = \cos(kz) + i \cdot \sin(kz)$ gezeigt wurde.

Induktionsschluss: ($n = k + 1$): Mit $i^2 = -1$ und den Additionstheoremen folgt für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} (\cos(z) + i \cdot \sin(z))^{k+1} &= (\cos(z) + i \cdot \sin(z))^k \cdot (\cos(z) + i \cdot \sin(z)) \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} (\cos(kz) + i \cdot \sin(kz)) \cdot (\cos(z) + i \cdot \sin(z)) \\ &= \cos(kz) \cdot \cos(z) + \cos(kz) \cdot i \cdot \sin(z) + i \cdot \sin(kz) \cdot \cos(z) + i \cdot \sin(kz) \cdot i \cdot \sin(z) \\ &= (\cos(kz) \cdot \cos(z) - \sin(kz) \cdot \sin(z)) + i \cdot (\cos(kz) \cdot \sin(z) + \sin(kz) \cdot \cos(z)) \\ &\stackrel{\varphi=kz \text{ und } \psi=z}{=} \cos(kz + z) + i \cdot \sin(kz + z) = \cos((k+1) \cdot z) + i \cdot \sin((k+1) \cdot z). \end{aligned}$$

- b) Zeigen Sie, dass die Formel von Moivre auch für alle $z \in \mathbb{C}$ und alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$ gilt!

Lösung:

Seien $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$. Dann ist $-n \in \mathbb{N}_0$ und mit Aufgabenteil a) folgt

$$\begin{aligned} (\cos(z) + i \cdot \sin(z))^n &= \frac{1}{(\cos(z) + i \cdot \sin(z))^{-n}} = \frac{1}{\cos(-nz) + i \cdot \sin(-nz)} \\ &= \frac{\cos(-nz) - i \cdot \sin(-nz)}{(\cos(-nz) + i \cdot \sin(-nz)) \cdot (\cos(-nz) - i \cdot \sin(-nz))} \\ &= \frac{\cos(nz) - i \cdot (-\sin(nz))}{(\cos(-nz))^2 - (i \cdot \sin(-nz))^2} = \frac{\cos(nz) + i \cdot \sin(nz)}{(\cos(-nz))^2 + (\sin(-nz))^2} \\ &= \frac{\cos(nz) + i \cdot \sin(nz)}{1} = \cos(nz) + i \cdot \sin(nz). \end{aligned}$$



ArithLogik/VollstInd/Ag_VollstInd_UngleichungenKreuzUndQuer.tex

Aufgabe 9.71 (Ungleichungen: kreuz und quer)

RK

- a) Verifizieren Sie die folgenden Ungleichungen für alle $n \in \mathbb{N}$ mittels vollständiger Induktion.

(i) $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$

Lösung:

Behauptung:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$.

Beweis:

Induktionsanfang: $n = 1$.

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^1} = 1 + \frac{1}{2} \geq 1 + \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für ein $N \in \mathbb{N}$, d. h. es gelte

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^N} \geq 1 + \frac{N}{2}$$

Induktionsschluss: $N \leadsto N + 1$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{N+1}} &= \underbrace{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^N}}_{\geq 1 + \frac{N}{2} \text{ nach IV}} + \overbrace{\frac{1}{2^N + 1} + \frac{1}{2^N + 2} + \dots + \frac{1}{2^N + 2^N}}^{2^N \text{ Summanden}} \\ &\geq 1 + \frac{N}{2} + 2^N \cdot \frac{1}{2^{N+1}} \\ &= 1 + \frac{N}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 1 + \frac{N+1}{2} \quad \square \end{aligned}$$

(ii) $\frac{n}{2} < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq n$

Lösung:

Feststellung: Die gegebene Ungleichungskette enthält zwei Ungleichungen.

$$\frac{n}{2} < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < n \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} > \frac{n}{2} & (I) \\ \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < n & (II) \end{cases}$$

Die Ungleichung (I) ergibt sich unmittelbar aus der Ungleichung in a)(i):

$$\begin{aligned} \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} &\stackrel{\text{a)(i)}}{\geq} 1 + \frac{n}{2} = \frac{n}{2} + \frac{2^n}{2^n} > \frac{n}{2} + \frac{1}{2^n} \quad \Bigg| - \frac{1}{2^n} \\ \Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} > \frac{n}{2}} \end{aligned}$$

Behauptung:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\boxed{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq n}$.

Beweis:

Induktionsanfang: $n = 1$.

$$\frac{1}{1} \leq 1 \quad \checkmark$$

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für ein $N \in \mathbb{N}$, d. h. es gelte

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{N-1}} \leq N$$

Induktionsschluss: $N \rightsquigarrow N + 1$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{N+1}-1} &= \underbrace{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^N-1}}_{\substack{\leq N \text{ nach IV} \\ 2^N \text{ Summanden, von denen jeder einzelne } \leq \frac{1}{2^N} \text{ ist}}} \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{2^N+0} + \frac{1}{2^N+1} + \dots + \frac{1}{2^N+(2^N-1)}}_{\leq 2^N \cdot \frac{1}{2^N} = 1} \\ &\leq N + 1 \quad \square \end{aligned}$$

Damit ist der Nachweis für die Gültigkeit der Ungleichung (II) ebenfalls erbracht.

Die Richtigkeit der gegebenen Ungleichungskette ist folglich für alle $n \in \mathbb{N}$ nachgewiesen.

- b) Finden Sie jeweils das kleinstmögliche $n_0 \in \mathbb{N}$, für welches die folgenden Ungleichungen gelten, und weisen Sie mithilfe vollständiger Induktion nach, dass die Ungleichungen für alle $n \geq n_0$ erfüllt sind.

(i) $n \cdot \sqrt{n} > n + \sqrt{n}$

$n_0 = 3$

Lösung:

Wir suchen zunächst das kleinste n , ab dem die gegebene Ungleichung gilt, indem wir systematisch probieren:

$$\begin{aligned} n = 1: \quad 1 \cdot \sqrt{1} &= (0+1)\sqrt{1} \not> \underbrace{(\sqrt{1}+1)}_{>0}\sqrt{1} = 1 + \sqrt{1} \\ n = 2: \quad 2 \cdot \sqrt{2} &= (1+1)\sqrt{2} \not> \underbrace{(\sqrt{2}+1)}_{>1}\sqrt{2} = 2 + \sqrt{2} \\ n = 3: \quad 3 \cdot \sqrt{3} &= (2+1)\sqrt{3} > \underbrace{(\sqrt{3}+1)}_{<2}\sqrt{3} = 3 + \sqrt{3} \quad (*) \end{aligned}$$

Behauptung:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ ist die Ungleichung $n \cdot \sqrt{n} > n + \sqrt{n}$ erfüllt.

Beweis:

Induktionsanfang: $n = 3$.

Wurde bereits in (*) nachgerechnet.

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq 3$, d. h. es gelte

$$N \cdot \sqrt{N} > N + \sqrt{N}$$

Induktionsschluss: $N \rightsquigarrow N + 1$.

$$\begin{aligned} (N+1) \cdot \sqrt{N+1} &= N \cdot \sqrt{N+1} + \sqrt{N+1} \\ &> N \cdot \sqrt{N} + \sqrt{N+1}, & \text{denn } \sqrt{N+1} > \sqrt{N} \\ &> N + \sqrt{N} + \sqrt{N+1} & \text{gemäß IV} \\ &> (N+1) + \sqrt{N+1}, & \text{denn } \sqrt{N} > 1 \quad \square \end{aligned}$$

$$(ii) \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

$$n_0 = 2$$

Lösung:

Wir suchen vorab wieder das kleinste n , ab dem die gegebene Ungleichung gilt:

$$\begin{aligned} n = 1 : \quad & \frac{1}{\sqrt{1}} = 1 \not> \sqrt{1} \\ n = 2 : \quad & \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} = \underbrace{\frac{\overbrace{(\sqrt{2}+1)}^{>1}}{2}}_{>1} \sqrt{2} > \sqrt{2} \quad (**) \end{aligned}$$

Behauptung:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ ist die Ungleichung $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ erfüllt.

Beweis:

Induktionsanfang: $n = 2$.

Wurde bereits in (**) nachgerechnet.

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq 2$, d. h. es gelte

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{N}} > \sqrt{N}$$

Induktionsschluss: $N \leadsto N+1$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{N}} \right) + \frac{1}{\sqrt{N+1}} &> \sqrt{N} + \frac{1}{\sqrt{N+1}}, \quad \text{gemäß IV} \\ &= \frac{\sqrt{N}\sqrt{N+1} + 1}{\sqrt{N+1}} \\ &> \frac{\sqrt{N}\sqrt{N} + 1}{\sqrt{N+1}} \\ &= \frac{N+1}{\sqrt{N+1}} \\ &= \sqrt{N+1} \quad \square \end{aligned}$$



ArithLogik/VollstInd/Ag_VollstInd_VerallgUnglArtihGeomMittel.tex

Aufgabe 9.72 (Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel)

SPF

- a) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a_1 \in \mathbb{R}, \dots, a_{2^n} \in \mathbb{R}$ mit $\min(\{a_k \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{N} \text{ und } k \leq 2^n\}) \geq 0$ die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel:

$$\sqrt[2^n]{\prod_{k=1}^{2^n} a_k} \leq \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{k=1}^{2^n} a_k.$$

Lösung:

Induktionsanfang: ($n = 1$):

Seien $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$ und $y \geq 0$. Dann liefert die zweite binomische Formel

$$0 \leq (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = \sqrt{x}^2 - 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} + \sqrt{y}^2, \quad \text{also} \quad 2 \cdot \sqrt{xy} \leq x + y, \quad \text{sprich} \quad \sqrt[2]{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

Induktionsvoraussetzung: ($n = N$): Sei $N \in \mathbb{N}$ eine Zahl, für die $\sqrt[2^N]{\prod_{k=1}^{2^N} b_k} \leq \frac{1}{2^N} \cdot \sum_{k=1}^{2^N} b_k$ für alle $b_1 \in \mathbb{R}, \dots, b_{2^N} \in \mathbb{R}$ mit $\min(\{b_k \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{N} \text{ und } k \leq 2^N\}) \geq 0$ bereits gezeigt wurde.

Induktionsschluss: ($n = N + 1$):

Seien $a_1 \in \mathbb{R}, \dots, a_{2^{N+1}} \in \mathbb{R}$ mit $\min(\{a_k \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{N} \text{ und } k \leq 2^{N+1}\}) \geq 0$.

Für $p_N := \prod_{k=1}^{2^N} a_k$, $q_N := \prod_{k=2^N+1}^{2^{N+1}} a_k$, $s_N := \sum_{k=1}^{2^N} a_k$ und $t_N := \sum_{k=2^N+1}^{2^{N+1}} a_k$ liefert die Induktionsvoraussetzung die Ungleichungen $\sqrt[2^N]{p_N} \leq \frac{1}{2^N} \cdot s_N$ und $\sqrt[2^N]{q_N} \leq \frac{1}{2^N} \cdot t_N$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \sqrt[2^{N+1}]{\prod_{k=1}^{2^{N+1}} a_k} &= \sqrt[2^N]{\sqrt[2^N]{\prod_{k=1}^{2^N} a_k} \cdot \sqrt[2^N]{\prod_{k=2^N+1}^{2^{N+1}} a_k}} = \sqrt{\sqrt[2^N]{p_N} \cdot \sqrt[2^N]{q_N}} \\ &\stackrel{\text{IV}}{\leq} \sqrt{\frac{1}{2^N} \cdot s_N \cdot \frac{1}{2^N} \cdot t_N} = \frac{1}{2^N} \cdot \sqrt[2]{s_N \cdot t_N} \stackrel{\text{IA}}{\leq} \frac{1}{2^N} \cdot \frac{1}{2} \cdot (s_N + t_N) \\ &= \frac{1}{2^{N+1}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{2^N} a_k + \sum_{k=2^N+1}^{2^{N+1}} a_k \right) = \frac{1}{2^{N+1}} \cdot \sum_{k=1}^{2^{N+1}} a_k. \end{aligned}$$

- b) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a_1 \in \mathbb{R}, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $\min(\{a_k \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{N} \text{ und } k \leq n\}) \geq 0$ die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel:

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k} \leq \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n a_k.$$

Tipp: Definieren Sie $N := \min(\{\ell \in \mathbb{N} \mid n \leq 2^\ell\})$, sowie $a_m := A := \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n a_k$ für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $n < m \leq 2^N$, um Aufgabenteil a) verwenden zu können!

Lösung:

Sei $N := \min(\{\ell \in \mathbb{N} \mid n \leq 2^\ell\})$. Ist $n = 2^N$, so folgt die Behauptung direkt aus Aufgabenteil a). Für den Rest des Beweises gehen wir also von $n < 2^N$ aus.

Seien $a_m := A := \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n a_k$ für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $n < m \leq 2^N$. (Insbesondere gilt $A \geq 0$.)

Dann gilt $\sum_{k=1}^{2^N} a_k = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=n+1}^{2^N} a_k = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=n+1}^{2^N} A = n \cdot A + A \cdot (2^N - n) = 2^N \cdot A$, also

$$A = \frac{1}{2^N} \cdot \sum_{k=1}^{2^N} a_k \stackrel{\text{a)}}{\geq} \sqrt[2^N]{\prod_{k=1}^{2^N} a_k} = \sqrt[2^N]{\prod_{k=1}^n a_k \cdot \prod_{k=n+1}^{2^N} a_k} = \sqrt[2^N]{\prod_{k=1}^n a_k \cdot \prod_{k=n+1}^{2^N} A} = \sqrt[2^N]{A^{2^N-n} \cdot \prod_{k=1}^n a_k}.$$

Potenziert man die äußere Ungleichung mit 2^N , so folgt

$$A^{2^N} \geq A^{2^N-n} \cdot \prod_{k=1}^n a_k \iff A^n \geq \prod_{k=1}^n a_k \iff A \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k} \iff \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n a_k \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k}.$$

**Aufgabe 9.73** (Geschlossene Ausdrücke beweisen)

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass diese rekursiv gegebenen Folgen den zugehörigen geschlossenen Ausdruck haben:

$$\text{a) } a_1 := 5, a_{n+1} := 4a_n + 1, a_n \stackrel{!}{=} 4^n - \frac{1}{3} \cdot (1 - 4^n) \quad \text{b) } b_1 := 2, b_{n+1} := 3b_n - 1, b_n \stackrel{!}{=} 3^n + \frac{1}{2} \cdot (1 - 3^n)$$

Lösung:

Für die erste Folge lautet der Induktionsanfang

$$a_1 = 5 \text{ laut rekursiver Definition} \quad , \quad a_1 = 4^1 - \frac{1}{3}(1 - 4^1) = 5 \text{ laut geschlossener Formel} .$$

Beide Werte stimmen überein, also ist die geschlossene Formel für $n = 1$ richtig. Angenommen sie ist für ein $n \geq 1$ richtig, dann erhalten wir

$$a_{n+1} \stackrel{\text{Rekursion}}{=} 4a_n + 1 \stackrel{\text{Induktion}}{=} 4 \left(4^n - \frac{1}{3}(1 - 4^n) \right) + 1 = 4^{n+1} - \frac{1}{3}(4 - 4^{n+1}) + 1 = 4^{n+1} - \frac{1}{3}(1 - 4^{n+1}).$$

Das ist gerade der vermutete geschlossene Ausdruck für a_{n+1} . Damit ist die Induktion abgeschlossen, und $a_n = 4^n - \frac{1}{3}(1 - 4^n)$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig.

Die Induktion für die zweite Folge verläuft ähnlich:

$$b_1 = 2 \text{ laut rekursiver Definition} \quad , \quad b_1 = 3^1 + \frac{1}{2}(1 - 3^1) = 2 \text{ laut geschlossener Formel} .$$

Beide Werte stimmen überein, also ist die geschlossene Formel für $n = 1$ richtig. Angenommen sie ist für ein $n \geq 1$ richtig, dann erhalten wir

$$b_{n+1} \stackrel{\text{Rekursion}}{=} 3a_n - 1 \stackrel{\text{Induktion}}{=} 3 \left(3^n + \frac{1}{2}(1 - 3^n) \right) - 1 = 3^{n+1} + \frac{1}{2}(3 - 3^{n+1}) - 1 = 3^{n+1} + \frac{1}{2}(1 - 3^{n+1}).$$

Das ist gerade der vermutete geschlossene Ausdruck für b_{n+1} . Damit ist die Induktion abgeschlossen, und $b_n = 3^n + \frac{1}{2}(1 - 3^n)$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig.

**Aufgabe 9.74** (Eine Binomialidentität)

dh

Es seien $\ell, n \in \mathbb{N}_0$. Führen Sie eine vollständige Induktion über $\ell \geq 0$, um die Binomialidentität

$$A(\ell): \sum_{k=0}^{\ell} \binom{n+k}{n} = \binom{n+\ell+1}{n+1}$$

zu beweisen. Behandeln Sie n dabei wie eine unbestimmte Variable.

Lösung:

Induktionsanfang: $\ell = 0$:

$$\text{LS von } A(0) = \sum_{k=0}^0 \binom{n+k}{n} \stackrel{\text{Nur } k=0}{=} \binom{n}{n} = 1 = \binom{n+0+1}{n+1} = \text{RS von } A(0) .$$

Induktionsschluss: von ℓ zu $\ell + 1$ für alle $\ell \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 \text{LS von } A(\ell + 1) &= \sum_{k=0}^{\ell+1} \binom{n+k}{n} \\
 &= \binom{n+\ell+1}{n} + \sum_{k=0}^{\ell} \binom{n+k}{n} \\
 &\stackrel{\text{IH}}{=} \binom{n+\ell+1}{n} + \binom{n+\ell+1}{n+1} \\
 &\stackrel{\text{Summe von BKs}}{=} \binom{n+\ell+2}{n+1} \\
 &= \text{RS von } A(\ell + 1).
 \end{aligned}$$



ArithLogik/VollstInd/Ag_VollstaendigeInduktion_Binomialkoeffizienten2.tex

Aufgabe 9.75 (Verschobene Binomialkoeffizienten)

dh

Es seien ℓ, k, n natürliche Zahlen. Zeigen Sie durch vollständige Induktion über $n \geq \ell$ die Gleichung

$$A(n) : \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} \binom{n-\ell}{k-j} = \binom{n}{k}.$$

Wenden Sie im Induktionsschritt die Zerlegungsregel auf den zweiten Binomialkoeffizienten in der Summe an und zerlegen Sie dann die Summe.

Hinweis: für $n < m$ gilt $\binom{n}{m} = 0$. Desweiteren gilt $\binom{n}{z} = 0$ für negative Zahlen $z \in \mathbb{Z}$ und $\binom{0}{0} = 1$.

Lösung:

Induktionsanfang: $n = \ell$ (und alle $k \in \mathbb{N}$):

$$\text{LS von } A(\ell) = \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} \binom{0}{k-j} \stackrel{j=k}{=} \binom{\ell}{k} = \text{RS von } A(\ell).$$

In der Summe werden dabei alle Terme für $j < k$ zu Null, da im zweiten Binomialkoeffizienten der Nenner größer ist als der Zähler.

Induktionsschluss: von n zu $n + 1$ für alle $n \geq \ell$:

$$\begin{aligned}
 \text{LS von } A(n+1) &= \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} \binom{n+1-\ell}{k-j} \\
 &\stackrel{\text{Zerlegungsregel}}{=} \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} \left(\binom{n-\ell}{k-j} + \binom{n-\ell}{k-j-1} \right) \\
 &\stackrel{\text{Summe zerlegen}}{=} \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} \binom{n-\ell}{k-j} + \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} \binom{n-\ell}{k-j-1} \\
 &\stackrel{\text{Zweimal IH für } n}{=} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \\
 &\stackrel{\text{Zerlegungsregel}}{=} \binom{n+1}{k} = \text{RS von } A(n+1).
 \end{aligned}$$

In dieser Rechnung sind ℓ und k fest aber beliebig. Die Induktion (über n) ist für alle möglichen Werte von ℓ und k richtig, damit gilt $A(n)$ für alle $n \geq \ell$, egal welche Werte ℓ und k haben.



ArithLogik/VollstInd/Ag_VollstaendigeInduktion_InWi_SehrLeicht.tex

Aufgabe 9.76 (Induktion zum Einstieg)

- a) Zeigen Sie die Aussage $n^2 > 2n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1; 2\}$ durch vollständige Induktion. Schreiben Sie sauber Induktionsanfang, Induktionsvoraussetzung und Induktionsschluss auf.

Lösung:

Induktionsanfang: Es gilt $3^2 = 9 > 7 = 2 \cdot 3 + 1$.

Induktionsvoraussetzung: Sei $c \in \mathbb{N} \setminus \{1; 2\}$ eine Zahl, für die $c^2 > 2c + 1$ bereits gezeigt wurde.

Induktionsschluss: Damit gilt

$$(c+1)^2 = c^2 + 2c + 1 \stackrel{\text{IV}}{>} 2c + 1 + 2c + 1 = 2c + 2 + 2c \stackrel{\text{da } c \geq 3}{>} 2c + 2 + 1 = 2 \cdot (c+1) + 1.$$

- b) Zeigen Sie nun die Aussage $2^n > n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5$. Im Induktionsschluss dürfen Sie die Aussage aus Aufgabenteil a) verwenden.

Lösung:

Induktionsanfang: Es gilt $2^5 = 32 > 25 = 5^2$.

Induktionsvoraussetzung: Sei $d \in \mathbb{N}$ mit $d \geq 5$ eine Zahl, für die $2^d > d^2$ bereits gezeigt wurde.

Induktionsschluss: Damit gilt

$$2^{d+1} = 2 \cdot 2^d \stackrel{\text{IV}}{>} 2 \cdot d^2 = d^2 + d^2 \stackrel{\text{nach a)}}{>} d^2 + 2d + 1 = (d+1)^2.$$



ArithLogik/VollstInd/Ag_VollstaendigeInduktion_Summenformeln_leicht.tex

Aufgabe 9.77 (Summen- und Produktformeln)

spf

Beweisen Sie die folgenden für alle $n \in \mathbb{N}$ gültigen Formeln mit Vollständiger Induktion!

a) $\sum_{m=0}^n 2^m = 2^{n+1} - 1$

Lösung:

Induktionsanfang: Es gilt $\sum_{m=0}^1 2^m = 2^0 + 2^1 = 1 + 2 = 3 = 4 - 1 = 2^2 - 1 = 2^{1+1} - 1$.

Induktionsvoraussetzung: Sei $N \in \mathbb{N}$ eine Zahl, für die $\sum_{m=0}^N 2^m = 2^{N+1} - 1$ bereits gezeigt wurde.

Induktionsschluss: Dann gilt

$$\sum_{m=0}^{N+1} 2^m = 2^{N+1} + \sum_{m=0}^N 2^m = 2^{N+1} + 2^{N+1} - 1 = 2 \cdot 2^{N+1} - 1 = 2^{(N+1)+1} - 1.$$

b) $\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$

Lösung:

Induktionsanfang: Es gilt $\sum_{j=1}^1 j^2 = 1^2 = 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6}$.

Induktionsvoraussetzung: Für ein beliebiges aber festes $c \in \mathbb{N}$ gelte $\sum_{j=1}^c j^2 = \frac{c \cdot (c+1) \cdot (2c+1)}{6}$.

Induktionsschluss: Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{c+1} j^2 &= (c+1)^2 + \sum_{j=1}^c j^2 = (c+1)^2 + \frac{c \cdot (c+1) \cdot (2c+1)}{6} \\ &= (c+1) \cdot \left((c+1) + \frac{c \cdot (2c+1)}{6} \right) = (c+1) \cdot \frac{6c+6+2c^2+c}{6} \\ &= (c+1) \cdot \frac{2 \cdot \left(c^2 + 2 \cdot c \cdot \frac{7}{4} + \left(\frac{7}{4} \right)^2 - \frac{49}{16} + 3 \right)}{6} \\ &= (c+1) \cdot \frac{2 \cdot \left(\left(c + \frac{7}{4} \right)^2 - \frac{1}{16} \right)}{6} = (c+1) \cdot \frac{2 \cdot \left(c + \frac{7}{4} - \frac{1}{4} \right) \cdot \left(c + \frac{7}{4} + \frac{1}{4} \right)}{6} \\ &= (c+1) \cdot \frac{2 \cdot \left(c + \frac{3}{2} \right) \cdot (c+2)}{6} = \frac{(c+1) \cdot ((c+1)+1) \cdot (2 \cdot (c+1)+1)}{6}. \end{aligned}$$

c) $\sum_{j=1}^n (-1)^j \cdot j^2 = (-1)^n \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Lösung:

Induktionsanfang: Es gilt $\sum_{j=1}^1 (-1)^j \cdot j^2 = (-1)^1 \cdot 1^2 = -1 = -\frac{1 \cdot 2}{2} = (-1)^1 \cdot \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$.

Induktionsvoraussetzung: Für ein beliebiges aber festes $c \in \mathbb{N}$ gelte $\sum_{j=1}^c (-1)^j \cdot j^2 = (-1)^c \cdot \frac{c \cdot (c+1)}{2}$.

Induktionsschluss: Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{c+1} (-1)^j \cdot j^2 &= (-1)^{c+1} \cdot (c+1)^2 + \sum_{j=1}^c (-1)^j \cdot j^2 = (-1)^{c+1} \cdot (c+1)^2 + (-1)^c \cdot \frac{c \cdot (c+1)}{2} \\ &= (-1)^{c+1} \cdot (c+1) \cdot \left((c+1) + \frac{c}{-2} \right) = (-1)^{c+1} \cdot (c+1) \cdot \left(\frac{c}{2} + 1 \right) \\ &= (-1)^{c+1} \cdot (c+1) \cdot \frac{c+2}{2} = (-1)^{c+1} \cdot \frac{(c+1) \cdot ((c+1)+1)}{2}. \end{aligned}$$

d) $\sum_{\nu=1}^{2n} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu} = \sum_{\mu=n+1}^{2n} \frac{1}{\mu}$

Lösung:

Induktionsanfang: Es gilt $\sum_{\nu=1}^{2 \cdot 1} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu} = \frac{(-1)^{1+1}}{1} + \frac{(-1)^{2+1}}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \sum_{\mu=2}^2 \frac{1}{\mu} = \sum_{\mu=1+1}^{2 \cdot 1} \frac{1}{\mu}$.

Induktionsvoraussetzung: Es gibt ein $c \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{\nu=1}^{2c} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu} = \sum_{\mu=c+1}^{2c} \frac{1}{\mu}$.

Induktionsschluss: Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \sum_{\nu=1}^{2 \cdot (c+1)} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu} &= \sum_{\nu=1}^{2c+2} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu} = \frac{(-1)^{(2c+2)+1}}{2c+2} + \frac{(-1)^{(2c+1)+1}}{2c+1} + \sum_{\nu=1}^{2c} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu} \\
 &= -\frac{1}{2c+2} + \frac{1}{2c+1} + \sum_{\mu=c+1}^{2c} \frac{1}{\mu} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{c+1} + \frac{1}{2c+1} + \frac{1}{c+1} + \sum_{\mu=c+2}^{2c} \frac{1}{\mu} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{c+1} + \frac{1}{2c+1} + \sum_{\mu=c+2}^{2c} \frac{1}{\mu} = \frac{1}{2c+2} + \frac{1}{2c+1} + \sum_{\mu=c+2}^{2c} \frac{1}{\mu} = \sum_{\mu=(c+1)+1}^{2 \cdot (c+1)} \frac{1}{\mu}.
 \end{aligned}$$

e) $\sum_{\ell=1}^n \frac{4}{\ell \cdot (\ell+2)} = \frac{n \cdot (3n+5)}{(n+1) \cdot (n+2)}$

Lösung:

Induktionsanfang: Es gilt $\sum_{\ell=1}^1 \frac{4}{\ell \cdot (\ell+2)} = \frac{4}{1 \cdot (1+2)} = \frac{4}{3} = \frac{8}{6} = \frac{1 \cdot 8}{2 \cdot 3} = \frac{1 \cdot (3 \cdot 1 + 5)}{(1+1) \cdot (1+2)}.$

Induktionsvoraussetzung: Es gibt ein $c \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{\ell=1}^c \frac{4}{\ell \cdot (\ell+2)} = \frac{c \cdot (3c+5)}{(c+1) \cdot (c+2)}.$

Induktionsschluss: Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \sum_{\ell=1}^{c+1} \frac{4}{\ell \cdot (\ell+2)} &= \frac{4}{(c+1) \cdot (c+3)} + \sum_{\ell=1}^c \frac{4}{\ell \cdot (\ell+2)} = \frac{4}{(c+1) \cdot (c+3)} + \frac{c \cdot (3c+5)}{(c+1) \cdot (c+2)} \\
 &= \frac{4 \cdot (c+2) + (3c^2 + 5c) \cdot (c+3)}{(c+1) \cdot (c+3) \cdot (c+2)} = \frac{4c+8+3c^3+5c^2+9c^2+15c}{(c+1) \cdot (c+2) \cdot (c+3)} \\
 &= \frac{3c^3+14c^2+19c+8}{(c+1) \cdot (c+2) \cdot (c+3)} = \frac{3c^3+11c^2+8c+3c^2+11c+8}{(c+1) \cdot (c+2) \cdot (c+3)} \\
 &= \frac{(c+1) \cdot (3c^2+11c+8)}{(c+1) \cdot (c+2) \cdot (c+3)} = \frac{3c^2+8c+3c+8}{(c+2) \cdot (c+3)} \\
 &= \frac{(c+1) \cdot (3c+8)}{(c+2) \cdot (c+3)} = \frac{(c+1) \cdot (3 \cdot (c+1) + 5)}{((c+1)+1) \cdot ((c+1)+2)}.
 \end{aligned}$$

f) $\prod_{m=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{n+1}$

Lösung:

Induktionsanfang: Es gilt $\prod_{m=2}^{1+1} \left(1 - \frac{1}{m}\right) = \prod_{m=2}^2 \left(1 - \frac{1}{m}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}.$

Induktionsvoraussetzung: Es gibt ein $c \in \mathbb{N}$ mit $\prod_{m=2}^{c+1} \left(1 - \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{c+1}.$

Induktionsschluss: Dann gilt

$$\prod_{m=2}^{(c+1)+1} \left(1 - \frac{1}{m}\right) = \left(1 - \frac{1}{c+2}\right) \cdot \prod_{m=2}^{c+1} \left(1 - \frac{1}{m}\right) = \frac{c+2-1}{c+2} \cdot \frac{1}{c+1} = \frac{c+1}{c+2} \cdot \frac{1}{c+1} = \frac{1}{c+2}.$$

g) $\prod_{m=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{m^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}$

Lösung:

Induktionsanfang: Es gilt $\prod_{m=2}^{1+1} \left(1 - \frac{1}{m^2}\right) = \prod_{m=2}^2 \left(1 - \frac{1}{m^2}\right) = 1 - \frac{1}{2^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \frac{1+2}{2 \cdot 1+2}$.

Induktionsvoraussetzung: Es gibt ein $c \in \mathbb{N}$ mit $\prod_{m=2}^{c+1} \left(1 - \frac{1}{m^2}\right) = \frac{c+2}{2c+2}$.

Induktionsschluss: Dann gilt

$$\begin{aligned} \prod_{m=2}^{(c+1)+1} \left(1 - \frac{1}{m^2}\right) &= \left(1 - \frac{1}{(c+2)^2}\right) \cdot \prod_{m=2}^{c+1} \left(1 - \frac{1}{m^2}\right) = \frac{(c+2)^2 - 1^2}{(c+2)^2} \cdot \frac{c+2}{2c+2} \\ &= \frac{(c+2-1) \cdot (c+2+1)}{c+2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{c+1} = \frac{(c+1) \cdot (c+3)}{(2c+4) \cdot (c+1)} = \frac{(c+1)+2}{2 \cdot (c+1)+2}. \end{aligned}$$

h) $\prod_{p=1}^n \left(1 + \frac{1}{n+p}\right) = 2 - \frac{1}{n+1}$

Lösung:

Induktionsanfang: Es gilt $\prod_{p=1}^1 \left(1 + \frac{1}{1+p}\right) = 1 + \frac{1}{1+1} = \frac{3}{2} = 2 - \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{1+1}$.

Induktionsvoraussetzung: Es gibt ein $c \in \mathbb{N}$ mit $\prod_{p=1}^c \left(1 + \frac{1}{c+p}\right) = 2 - \frac{1}{c+1}$.

Induktionsschluss: Dann gilt

$$\begin{aligned} \prod_{p=1}^{c+1} \left(1 + \frac{1}{(c+1)+p}\right) &= \prod_{q=2}^{c+2} \left(1 + \frac{1}{c+q}\right) = \frac{\left(1 + \frac{1}{c+c+2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{c+c+1}\right)}{1 + \frac{1}{c+1}} \cdot \prod_{p=1}^c \left(1 + \frac{1}{c+p}\right) \\ &= \frac{\frac{2c+2+1}{2c+2} \cdot \frac{2c+1+1}{2c+1}}{\frac{c+1+1}{c+1}} \cdot \left(2 - \frac{1}{c+1}\right) = \frac{2c+3}{2c+2} \cdot \frac{2c+2}{2c+1} \cdot \frac{c+1}{c+2} \cdot \frac{2c+1}{c+1} \\ &= \frac{2c+3}{c+2} = \frac{2 \cdot (c+2) - 1}{c+2} = 2 - \frac{1}{(c+1)+1}. \end{aligned}$$



ArithLogik/VollstInd/Ag_VollstaendigeInduktion_Teilbarkeit.tex

Aufgabe 9.78 (Teilbarkeit)

jgl

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die folgenden Teilbarkeitsaussagen für alle natürlichen Zahlen n gelten:

- a) 5 teilt $(7^n - 2^n)$

Lösung:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ wird $A(n)$: „5 teilt $(7^n - 2^n)$ “ mittels vollständiger Induktion gezeigt:

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt $7^1 - 2^1 = 5 = 5 \cdot 1$, das heißt, 5 teilt $7^1 - 2^1$. Somit gilt $A(1)$.

Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $A(n)$; somit gibt es ein $j \in \mathbb{N}$ mit $7^n - 2^n = 5 \cdot j$.

Induktionsschluss: Für $n+1$ folgt dann

$$\begin{aligned} 7^{n+1} - 2^{n+1} &= 7 \cdot 7^n - 2 \cdot 2^n \\ &= (5+2) \cdot 7^n - 2 \cdot 2^n \\ &= 5 \cdot 7^n + 2 \cdot (7^n - 2^n) \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} 5 \cdot 7^n + 2 \cdot 5 \cdot j \\ &= 5 \cdot (7^n + 2j). \end{aligned}$$

Somit gilt 5 teilt $7^{n+1} - 2^{n+1}$. Das heißt, aus $A(n)$ folgt $A(n+1)$.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt somit $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) 7 teilt $(2^{3n} + 13)$

Lösung:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ wird $A(n)$: „7 teilt $(2^{3n} + 13)$ “ mittels vollständiger Induktion gezeigt:

Induktionsanfang:

Für $n = 1$ gilt $2^{3 \cdot 1} + 13 = 8 + 13 = 21 = 7 \cdot 3$, das heißt, 7 teilt $2^{3 \cdot 1} + 13$. Somit gilt $A(1)$.

Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $A(n)$; somit gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $2^{3n} + 13 = 7 \cdot k$.

Induktionsschluss: Für $n + 1$ folgt mit $13 = 7k - 2^{3n}$ nach der *Induktionsvoraussetzung*: dann

$$\begin{aligned} 2^{3 \cdot (n+1)} + 13 &\stackrel{\text{IV}}{=} 2^{3 \cdot (n+1)} + 7k - 2^{3n} \\ &= 2^{3n+3} - 2^{3n} + 7k \\ &= (8 - 1) \cdot 2^{3n} + 7k \\ &= 7 \cdot (2^{3n} + k). \end{aligned}$$

Das heißt, aus $A(n)$ folgt $A(n+1)$.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt somit $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) 6 teilt $(7^n - 1)$

Lösung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ wird $A(n)$: „6 teilt $(7^n - 1)$ “ mittels vollständiger Induktion gezeigt:

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt $7^1 - 1 = 6 = 6 \cdot 1$, das heißt, 6 teilt $7^1 - 1$. Somit gilt $A(1)$.

Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $A(n)$; somit gibt es ein $\ell \in \mathbb{N}$ mit $7^n - 1 = 6 \cdot \ell$.

Induktionsschluss: Für $n + 1$ folgt dann

$$\begin{aligned} 7^{n+1} - 1 &= 7 \cdot 7^n - 1 \\ &= 7 \cdot (7^n - 1 + 1) - 1 \\ &= 7 \cdot (7^n - 1) + 7 - 1 \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} 7 \cdot 6\ell + 6 \\ &= 6 \cdot (7\ell + 1). \end{aligned}$$

Das heißt, aus $A(n)$ folgt $A(n+1)$.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt somit $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

d) 6 teilt $(n^3 + 5n)$

Lösung:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ wird $A(n)$: „6 teilt $(n^3 + 5n)$ “ mittels vollständiger Induktion gezeigt:

Induktionsanfang:

Für $n = 1$ gilt $1^3 + 5 \cdot 1 = 1 + 5 = 6 = 6 \cdot 1$, das heißt, 6 teilt $1^3 + 5 \cdot 1$. Somit gilt $A(1)$.

Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $A(n)$; somit gibt es ein $q \in \mathbb{N}$ mit $n^3 + 5n = 6 \cdot q$.

Induktionsschluss: Für $n + 1$ folgt dann

$$\begin{aligned} (n+1)^3 + 5 \cdot (n+1) &= (n+1) \cdot \left[(n+1)^2 + 5 \right] \\ &= (n+1) \cdot (n^2 + 2n + 6) \\ &= n^3 + 2n^2 + 6n + n^2 + 2n + 6 \\ &= n^3 + 5n + 3n^2 + 3n + 6 \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} 6q + 3n \cdot (n+1) + 6. \end{aligned}$$

Da entweder n oder $n + 1$ gerade ist, gibt es ein $p \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot (n + 1) = 2p$. Somit ist

$$(n + 1)^3 + 5 \cdot (n + 1) = 6q + 3 \cdot 2p + 6 = 6 \cdot (q + p + 1).$$

Das heißt, aus $A(n)$ folgt $A(n + 1)$.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt somit $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Schreiben Sie die Behauptung mittels einer Aussage auf, die eine Gleichung enthält, indem Sie die Definition der Teilbarkeit verwenden.



ArithLogik/VollstInd/Ag_VollstaendigeInduktion_Teilbarkeit_leichtAuswahl.tex

Aufgabe 9.79 (Teilbarkeitsregeln)

spf

Zeigen Sie mit Vollständiger Induktion die folgenden Teilbarkeitsregeln!

- a) $9^n - 1$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 8 teilbar.

Lösung:

Induktionsanfang: $9^1 - 1 = 9 - 1 = 8$ ist durch 8 teilbar.

Induktionsvoraussetzung: Es gibt ein $c \in \mathbb{N}$, für das $9^c - 1$ durch 8 teilbar ist.

Induktionsschluss:

Es gibt ein $a \in \mathbb{Z}$ mit $9^c - 1 = 8a$. Damit folgt

$$9^{c+1} - 1 = 9 \cdot 9^c - 1 = 8 \cdot 9^c + 9^c - 1 = 8 \cdot 9^c + 8a = 8 \cdot (9^c + a)$$

und wegen $9^c + a \in \mathbb{Z}$ ist $9^{c+1} - 1$ also durch 8 teilbar.

- b) $2^{3n} - 1$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 7 teilbar.

Lösung:

Induktionsanfang: $2^{3 \cdot 1} - 1 = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$ ist durch 7 teilbar.

Induktionsvoraussetzung: Es gibt ein $c \in \mathbb{N}$, für das $2^{3c} - 1$ durch 7 teilbar ist.

Induktionsschluss:

Es gibt ein $a \in \mathbb{Z}$ mit $2^{3c} - 1 = 7a$. Damit folgt

$$2^{3 \cdot (c+1)} - 1 = 2^{3c+3} - 1 = 2^3 \cdot 2^{3c} - 1 = 8 \cdot 2^{3c} - 1 = 7 \cdot 2^{3c} + 2^{3c} - 1 = 7 \cdot 2^{3c} + 7a$$

und wegen $2^{3 \cdot (c+1)} - 1 = 7 \cdot 2^{3c} + 7a = 7 \cdot (2^{3c} + a)$ ist $2^{3 \cdot (c+1)} - 1$ also durch 7 teilbar.

Zur Erinnerung: Eine ganze Zahl $a \in \mathbb{Z}$ teilt eine ganze Zahl $b \in \mathbb{Z}$ (bzw. b ist durch a teilbar), falls es eine ganze Zahl $c \in \mathbb{Z}$ mit $b = ca$ gibt.



ArithLogik/VollstInd/Text_VollstInd_FaltungMitMonomDurchFortgesetztesIntegrieren.txt

Aufgabe 9.80 ()

Eine weitere Induktionsaufgabe findet sich in

IntMehrDim/Normalbereiche/Ag_VollstInd_FaltungMitMonomDurchFortgesetztesIntegrieren



ArithLogik/Zahlbereiche/Ag_InfUndSup_unterschiedlicheGrundmengen.tex

Aufgabe 10.81 (Infimum und Supremum hängen von der Grundmenge ab)

SPF

Für alle $K \in D := \{\mathbb{N}; \mathbb{Z}; \mathbb{R}; (0; \infty); \mathbb{Q}\}$ sei $M_K := \{x \in K \mid 3 < x^2 \leq 30\} \subseteq \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie für alle $K \in D$ das Infimum und das Supremum von M_K und prüfen Sie jeweils, ob M_K ein Minimum bzw. ein Maximum hat!

 $\min(M_{\mathbb{N}}) = 2, \max(M_{\mathbb{N}}) = 5, \min(M_{\mathbb{Z}}) = -5, \max(M_{\mathbb{Z}}) = 5, \min(M_{\mathbb{R}}) = -\sqrt{30}, \max(M_{\mathbb{R}}) = \sqrt{30}, \inf(M_{(0;\infty)}) = \sqrt{3},$
 $\max(M_{(0;\infty)}) = \sqrt{30}, \inf(M_{\mathbb{Q}}) = -\sqrt{30}, \sup(M_{\mathbb{Q}}) = \sqrt{30}$
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass zwischen je zwei reellen Zahlen stets eine rationale Zahl liegt, dass die Wurzelfunktion streng monoton wächst, und dass $\sqrt{30} \notin \mathbb{Q}$ ist.

Lösung:

Wegen der strengen Monotonie der Wurzelfunktion lässt sich für alle $K \subseteq \mathbb{R}$ und alle $x \in M_K$ in der Ungleichung $3 < x^2 \leq 30$ die Wurzel ziehen: $\sqrt{3} < \sqrt{x^2} = |x| \leq \sqrt{30}$.

Für alle $K \subseteq \mathbb{R}$ und alle $x \in K$ gilt deshalb

$$x \in M_K \iff -\sqrt{30} \leq x < -\sqrt{3} \quad \text{oder} \quad \sqrt{3} < x \leq \sqrt{30}.$$

Damit sind für alle $K \subseteq \mathbb{R}$ also $-\sqrt{30}$ eine untere und $\sqrt{30}$ eine obere Grenze von M_K .

Da für $x \in (0; \infty)$ und $x \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $-\sqrt{30} \leq x < -\sqrt{3}$ nicht gelten kann, ist außerdem $\sqrt{3}$ eine untere Grenze von $M_{(0;\infty)}$ und $M_{\mathbb{N}}$.

 $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ Die Mengen $M_{\mathbb{N}}$ und $M_{\mathbb{Z}}$ sind endlich: Wegen $1.7 < \sqrt{3} < 1.8$ und $5.4 < \sqrt{30} < 5.5$ gilt

$$M_{\mathbb{N}} = \{2; 3; 4; 5\} \quad \text{und} \quad M_{\mathbb{Z}} = \{-5; -4; -3; -2; 2; 3; 4; 5\}.$$

Jede endliche Menge hat je ein Minimum und ein Maximum, welche natürlich zugleich als Infimum und Supremum fungieren. Diese sind leicht ablesbar:

$$\inf(M_{\mathbb{N}}) = \min(M_{\mathbb{N}}) = 2, \quad \inf(M_{\mathbb{Z}}) = \min(M_{\mathbb{Z}}) = -5$$

und $\sup(M_{\mathbb{N}}) = \max(M_{\mathbb{N}}) = 5, \quad \sup(M_{\mathbb{Z}}) = \max(M_{\mathbb{Z}}) = 5.$

 $\mathbb{R}$ und $(0; \infty)$ Wegen $\sqrt{30} \in (0; \infty) \subseteq \mathbb{R}$ und $\sqrt{30}^2 = 30 \leq 30$ sowie $\sqrt{30}^2 = 30 > 3$ ist $\sqrt{30} \in M_{\mathbb{R}}$ und $\sqrt{30} \in M_{(0;\infty)}$. Damit kann keine Zahl, die kleiner als $\sqrt{30}$ ist, eine obere Schranke von $M_{\mathbb{R}}$ oder $M_{(0;\infty)}$ sein und es folgt

$$\sup(M_{\mathbb{R}}) = \max(M_{\mathbb{R}}) = \sup(M_{(0;\infty)}) = \max(M_{(0;\infty)}) = \sqrt{30}.$$

Mit $-\sqrt{30} \in \mathbb{R}$ und $(-\sqrt{30})^2 = 30 \leq 30$ sowie $(-\sqrt{30})^2 = 30 > 3$ folgt genauso

$$\inf(M_{\mathbb{R}}) = \min(M_{\mathbb{R}}) = -\sqrt{30}.$$

Für jedes $s \in \mathbb{R}$ mit $s > \sqrt{3}$ sei $m_s := \min\left\{\sqrt{30}; \frac{s+\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Wegen $m_s \leq \sqrt{30}$, der strengen Monotonie von Wurzelfunktion und damit auch ihrer Umkehrung gilt $m_s^2 \leq \sqrt{30}^2 = 30$.

Ist $m_s = \sqrt{30}$, so gilt $m_s^2 = \sqrt{30}^2 = 30 > 3$. Andernfalls ergibt sich wegen $s^2 \geq 0$ und $s > \sqrt{3} > 0$

$$m_s^2 = \left(\frac{s+\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{s^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot s+\sqrt{3}^2}{4} > \frac{1}{4} \cdot \left(\sqrt{3}^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + 3\right) = \frac{1}{4} \cdot (3 + 2 \cdot 3 + 3) = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot 3 = 3.$$

Also ist $m_s \in M_{(0;\infty)}$. Wegen $s > \sqrt{3}$ ist $m_s = \frac{s+\sqrt{3}}{2} < \frac{s+s}{2} = \frac{2s}{2} = s$.

Damit kann s also keine untere Schranke von $M_{(0;\infty)}$ sein. Da $\sqrt{3}^2 = 3 \not> 3$ ist, gilt $\sqrt{3} \notin M_{(0;\infty)}$.

Weil $\sqrt{3}$ aber eine untere Schranke von $M_{(0;\infty)}$ ist, folgt also

$$\inf(M_{(0;\infty)}) = \sqrt{3} \quad \text{und} \quad \min(M_{(0;\infty)}) \text{ existiert nicht.}$$

$\mathbb{Q}$ Für jedes $S \in \mathbb{R}$ mit $S < \sqrt{30}$ sei $x_S \in \mathbb{Q}$ mit $\max\left\{2; \frac{S+\sqrt{30}}{2}\right\} \leq x_S < \sqrt{30}$. Wegen $2 = \sqrt{4} < \sqrt{30}$ und $\frac{S+\sqrt{30}}{2} < \frac{\sqrt{30}+\sqrt{30}}{2} = \frac{2\sqrt{30}}{2} = \sqrt{30}$ existiert x_S nach dem Hinweis zur Aufgabe in jedem Fall. Wegen $x_S \geq 2$ gilt $x_S^2 \geq 2^2 = 4 > 3$. Wegen $x_S < \sqrt{30}$ gilt $x_S^2 < \sqrt{30}^2 = 30$. Wegen $x_S \in \mathbb{Q}$ ist also $x_S \in M_{\mathbb{Q}}$. Ferner ist $x_S \geq \frac{S+\sqrt{30}}{2} > \frac{S+S}{2} = \frac{2S}{2} = S$ wegen $S < \sqrt{30}$. Also kann S keine obere Schranke von $M_{\mathbb{Q}}$ sein und es folgt

$$\sup(M_{\mathbb{Q}}) = \sqrt{30}.$$

Da $\sqrt{30} \notin \mathbb{Q}$ ist, existiert $\max(M_{\mathbb{Q}})$ nicht.

Mit einem gespiegelten Argument folgt $\inf(M_{\mathbb{Q}}) = -\sqrt{30}$ sowie die Nicht-Existenz von $\min(M_{\mathbb{Q}})$.



ArithLogik/Zahlbereiche/Ag_Mengen_ParambeschreibungSupInf.tex

Aufgabe 10.82 (Supremum und Infimum)

- a) Zeigen Sie für $M := \left\{ \frac{t+1}{t} \in \mathbb{R} \mid t \in \mathbb{R} \text{ mit } t > 1 \right\}$, dass $\sup(M) = 2$ ist und M kein Maximum besitzt.

Lösung:

Die Aussage $\sup(M) = 2$ enthält zwei Bedingungen:

- (i) 2 ist eine obere Schranke der Menge M und
- (ii) es gibt keine kleinere solche Schranke.

Wir zeigen beide Aussagen getrennt:

- (i) 2 ist eine obere Schranke von M , denn:

Für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 1$ gilt nach Addition der Ungleichung mit t auch $2t > t + 1$, woraus nach Division durch $t > 0$ die behauptete Ungleichung $2 > \frac{t+1}{t}$ entsteht.

- (ii) Es gibt keine obere Schranke von M , die kleiner als 2 ist, denn:

Sei $s \in \mathbb{R}$ mit $s < 2$. Damit konstruieren wir nun eine neue Zahl $x := \frac{s+2}{2}$ als arithmetisches Mittel von s und 2. Nach Konstruktion gilt $s < x < 2$. x liegt aber auch in M , denn wählt man $t := \frac{2}{s}$, so folgt

$$\frac{t+1}{t} = \frac{\frac{2}{s}+1}{\frac{2}{s}} = \frac{2+s}{2} = \frac{s+2}{2} = x$$

und es ist $t = \frac{2}{s} > 1$, da $s < 2$ ist. Da $x > s$ ist und $x \in M$ gilt, kann $s < 2$ keine obere Schranke von M sein.

Folglich ist 2 die kleinstmögliche obere Schranke von M . Also gilt $\sup(M) = 2$.

Die Menge M besitzt kein Maximum, denn $2 = \sup(M) \notin M$, wie folgende Rechnung zeigt:

$$\frac{t+1}{t} = 2 \iff t+1 = 2t \iff t = 1,$$

was jedoch nicht der in M formulierten Bedingung an t genügt.

- b) Weisen Sie für $Q := \left\{ \frac{t-1}{t+t^2} \in \mathbb{R} \mid t \in \mathbb{R} \text{ mit } t > 2 \right\}$ nach, dass $\inf(Q) = 0$ ist und Q kein Minimum hat.

Lösung:

Die Aussage $\inf(Q) = 0$ enthält zwei Bedingungen:

- (i) 0 ist eine untere Schranke der Menge Q und
- (ii) es gibt keine größere solche Schranke.

Wir zeigen beide Aussagen getrennt:

- (i) 0 ist eine untere Schranke von Q , denn:

Für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 2$ gilt $t - 1 > 1 > 0$ und $t + t^2 > 0$, woraus auch $\frac{t-1}{t+t^2} > 0$ folgt.

- (ii) Es gibt keine echt positive untere Schranke von Q , denn:

Für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ ergibt sich für $t := \max \left\{ 3; \frac{1}{\varepsilon} \right\}$ wegen $t^2 + t > 0$

$$\varepsilon \geq \frac{1}{t} = \frac{t+1}{t \cdot (t+1)} = \frac{t+1}{t^2+t} > \frac{t-1}{t+t^2},$$

weshalb also ε keine untere Schranke von Q sein kann (man beachte $t \geq 3 > 2$).

Folglich ist 0 die größtmögliche untere Schranke von Q und damit gilt $\inf(Q) = 0$.

Die Menge Q besitzt kein Minimum, denn $0 = \inf(Q) \notin Q$, wie folgende Rechnung zeigt:

$$\frac{t-1}{t+t^2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t-1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t = 1,$$

was jedoch nicht der in Q formulierten Bedingung an t genügt.



ArithLogik/Zahlbereiche/Ag_Verstaendnisfragen_InfSupMinMax.tex

Aufgabe 10.83 (Wahr oder falsch? — Schranken von Mengen)

spf

Beurteilen Sie die Allgemeingültigkeit der folgenden Aussagen!

- a) Ist $S \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke einer Menge M , so ist jede kleinere Zahl ebenfalls eine obere Schranke von M . ☐ wahr ☒ falsch

Lösung: Diese Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: Sei $M = \{1, 2, 3\}$. Die Zahl $S = 4$ ist eine obere Schranke der Menge M , da für jedes Element $a \in M$ gilt $a \leq S$. Die Zahl $T = 0 < S = 4$ ist aber offensichtlich keine obere Schranke von M .

- b) Ist $S \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke einer Menge M , so ist jede kleinere Zahl eine untere Schranke von M . ☐ wahr ☒ falsch

Lösung: Diese Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: Sei $M = \{1, 2, 3\}$. Die Zahl $S = 4$ ist eine obere Schranke der Menge M , da für jedes Element $a \in M$ gilt $a \leq S$. Die Zahl $T = 3 < S = 4$ ist aber offensichtlich keine untere Schranke von M , da M Elemente enthält (die Zahlen 1 und 2), welche kleiner als T sind.

- c) Ist $S \in \mathbb{R}$ eine untere Schranke einer Menge M , so ist jede kleinere Zahl eine untere Schranke von M . ☒ wahr ☐ falsch

Lösung: Diese Aussage ist wahr. Sei S eine untere Schranke von M und $T < S$. Dann gilt für jedes $a \in M$ dass $a \geq S > T \implies a \geq T$, d.h., T ist eine untere Schranke.

- d) Hat eine nach unten beschränkte Menge M ein Maximum, so ist es größer als ihr Infimum. ☐ wahr ☒ falsch

Lösung: Diese Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: $M = \{3\}$. Hier gilt $\inf(M) = 3 = \sup(M)$, d.h., $\inf(M) \not< \sup(M)$.

- e) Jede beschränkte Menge hat ein Infimum. ☒ wahr ☐ falsch

Lösung: Diese Aussage ist wahr, da die Beschränktheit Existenz einer unteren Schranke voraussetzt und Infimum die größte dieser unteren Schranken ist. Da die Menge auch nach oben beschränkt ist, kann diese Zahl auch nicht Unendlich werden.

- f) Jede beschränkte Menge hat ein Maximum. ☐ wahr ☒ falsch

Lösung: Diese Aussage ist falsch: die Menge $[0, 1)$ ist beschränkt mit z.B., 1 als obere Schranke, besitzt aber kein Maximum.

- g) Keine Teilmenge einer nach oben unbeschränkten Menge hat ein Maximum. ☐ wahr ☒ falsch

Lösung: Diese Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: $M = [0, \infty)$. Die Menge $T = \{2, 3\}$ ist eine Teilmenge von M , besitzt aber auch ein Maximum 3.



DGL/ErsteOrd/Ag_DGL01_Anfangswertaufgaben_HM3.tex

Aufgabe 11.84 (Anfangswertaufgaben)

Lösen Sie die nachstehenden Anfangswertaufgaben (über $\mathbb{R}$):

a) $y'(t) + 3y(t) = 6t, y(0) = 1$

$$y(t) = 2t - \frac{2}{3} + \frac{5}{3} \cdot e^{-3t}$$

1. Bestimmung der homogenen Lösung (z.B. durch Trennung der Veränderlichen):

Wir lösen zunächst die zugehörige homogene Gleichung $y_H'(t) + 3y_H(t) = 0$.

Subtrahieren von $3y_H(t)$ und dividieren durch $y_H(t)$ liefert die separierte Form $\frac{y_H'(t)}{y_H(t)} = -3$.

Integration liefert auf der rechten Seite $\int (-3) dt = -3t + E$ und mit der Substitution $f(x) = \frac{1}{x}$ und $g(t) = y_H(t)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \int \frac{y_H'(t)}{y_H(t)} dt &= \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt = \left[\int f(x) dx \right]_{x=g(t)} = \left[\int \frac{1}{x} dx \right]_{x=y_H(t)} \\ &= [\ln(x)]_{x=y_H(t)} = \ln(y_H(t)) = -3t + E. \end{aligned}$$

Einsetzen dieser Gleichung in die Exponentialfunktion und Umbenennung der Konstanten liefert

$$y_H(t) = A \cdot e^{-3t}.$$

2. Bestimmung einer partikulären Lösung (z.B. durch Variation der Konstanten):

Um eine Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, machen wir den Ansatz

$$y_P(t) = B(t) \cdot e^{-3t} \quad (\implies y_P'(t) = B'(t) \cdot e^{-3t} - 3B(t) \cdot e^{-3t}).$$

Setzt man diesen Ansatz in die inhomogene Differentialgleichung ein, so erhält man

$$6t = y_P'(t) + 3y_P(t) = B'(t) \cdot e^{-3t} - 3B(t) \cdot e^{-3t} + 3B(t) \cdot e^{-3t} = B'(t) \cdot e^{-3t}.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit e^{3t} , so folgt $B'(t) = 6t \cdot e^{3t}$.

Mit $u(t) = 6t$ und $v(t) = \frac{1}{3} \cdot e^{3t}$ folgt $u'(t) = 6$ und $v'(t) = e^{3t}$. Eine partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} B(t) &= \int \underbrace{6t}_{=u(t)} \cdot \underbrace{e^{3t}}_{=v'(t)} dt = \underbrace{6t}_{=u(t)} \cdot \underbrace{\frac{1}{3} \cdot e^{3t}}_{=v(t)} - \int \underbrace{6}_{=u'(t)} \cdot \underbrace{\frac{1}{3} \cdot e^{3t}}_{=v(t)} dt = 2t \cdot e^{3t} - 2 \cdot \int \underbrace{e^{3t}}_{=v'(t)} dt \\ &= 2t \cdot e^{3t} - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot e^{3t} = \left(2t - \frac{2}{3}\right) \cdot e^{3t}. \end{aligned}$$

Einsetzen in den Ansatz für die partikuläre Lösung ergibt

$$y_P(t) = B(t) \cdot e^{-3t} = \left(2t - \frac{2}{3}\right) \cdot e^{3t} \cdot e^{-3t} = 2t - \frac{2}{3}.$$

3. Bestimmung der Gesamtlösung:

Für die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ergibt sich also

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = A \cdot e^{-3t} + 2t - \frac{2}{3} \quad \text{für ein } A \in \mathbb{R}.$$

Zur Erfüllung des Anfangswerts setzen wir 0 in diese Gleichung ein und erhalten

$$1 = y(0) = A \cdot e^{-3 \cdot 0} + 2 \cdot 0 - \frac{2}{3} = A \cdot e^0 + 0 - \frac{2}{3} = A \cdot 1 - \frac{2}{3} = A - \frac{2}{3},$$

woraus sich nach Addition von $\frac{2}{3}$ direkt $A = \frac{5}{3}$ ergibt.

Insgesamt ergibt sich als Lösung für das Anfangswertproblem

$$y(t) = \frac{5}{3} \cdot e^{-3t} + 2t - \frac{2}{3} = 2t - \frac{2}{3} + \frac{5}{3} \cdot e^{-3t}.$$

b) $y'(t) = \frac{1}{y(t)}, y(3) = 7$

$$y(t) = \sqrt{2t + 43}$$

Bestimmung der Lösung durch Trennung der Veränderlichen:

Multipliziert man die Differentialgleichung mit $2y(t)$, so erhält man $y'(t) \cdot 2y(t) = 2$.

Integration liefert auf der rechten Seite $\int 2 dt = 2t + C$.

Mit der Substitution $f(x) = 2x$ und $g(t) = y(t)$ ergibt sich die Integration der linken Seite zu

$$\begin{aligned} \int y'(t) \cdot 2y(t) dt &= \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt = \left[\int f(x) dx \right]_{x=g(t)} = \left[\int 2x dx \right]_{x=y(t)} \\ &= [x^2]_{x=y(t)} = (y(t))^2 = 2t + C. \end{aligned}$$

Also folgt für die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y(t) = \sqrt{2t + C} \quad \text{oder} \quad y(t) = -\sqrt{2t + C} \quad \text{für ein } C \in \mathbb{R}.$$

Der Anfangswert $y(3) = 7$ kann wegen $7 > 0$ nur durch die erste Funktionsvorschrift erfüllt werden. Setzt man 3 in diese Gleichung ein, so ergibt sich

$$7 = y(3) = \sqrt{2 \cdot 3 + C} = \sqrt{6 + C}.$$

Quadrieren und Subtrahieren von 6 liefert als einzige mögliche Lösung $C = 43$. Tatsächlich ist $\sqrt{6 + 43} = \sqrt{49} = 7$. Also hat die Lösung des Anfangswertproblems die Form

$$y(t) = \sqrt{2t + 43}.$$

c) $g'(x) = \frac{2 \cdot e^{2x}}{g(x)+2}$ und $g(0) = 0$

$$g(x) = \pm \sqrt{2 \cdot e^{2x} + C} - 2, C = 2 \text{ und „+“}$$

Lösung:

Durch Trennung der Variablen kann die Differentialgleichung umgeschrieben werden:

$$g'(x) = \frac{2 \cdot e^{2x}}{g(x) + 2} \quad \Longleftrightarrow \quad g'(x) \cdot (g(x) + 2) = 2 \cdot e^{2x}.$$

Mit der Substitution $f(t) := t + 2$ und $h(x) := g(x)$ ergibt sich $h'(x) = g'(x)$, also

$$\int \underbrace{(g(x) + 2)}_{=f(h(x))} \cdot \underbrace{g'(x)}_{=h'(x)} dx = \left[\int (t + 2) dt \right]_{t=g(x)} = \left[\frac{t^2}{2} + 2t \right]_{t=g(x)} = \frac{(g(x))^2}{2} + 2g(x).$$

Also gibt es ein $D \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{(g(x))^2}{2} + 2g(x) = D + \int 2 \cdot e^{2x} dx = D + e^{2x}.$$

Multiplizieren mit 2 ermöglicht eine einfache quadratische Ergänzung:

$$\begin{aligned} & \frac{(g(x))^2}{2} + 2g(x) = D + e^{2x} \\ \iff & (g(x))^2 + 2 \cdot g(x) \cdot 2 + 2^2 - (2 \cdot e^{2x} + 4 + 2D) = 0 \\ \iff & (g(x) + 2)^2 - \sqrt{2 \cdot e^{2x} + 4 + 2D}^2 = 0 \\ \iff & \left(g(x) + 2 - \sqrt{2 \cdot e^{2x} + 4 + 2D}\right) \cdot \left(g(x) + 2 + \sqrt{2 \cdot e^{2x} + 4 + 2D}\right) = 0. \end{aligned}$$

Es gibt also ein $C \in \mathbb{R}$ mit $g(x) = \sqrt{2 \cdot e^{2x} + C} - 2$ oder $g(x) = -\sqrt{2 \cdot e^{2x} + C} - 2$.

Zur Probe kann man dieses Ergebnis mit der Kettenregel ableiten:

$$g'(x) = \frac{1}{2 \cdot \left(\pm \sqrt{2 \cdot e^{2x} + C}\right)} \cdot (2 \cdot e^{2x}) \cdot 2 = \frac{2 \cdot e^{2x}}{g(x) + 2}. \quad \checkmark$$

Gilt $g(x) = -\sqrt{2 \cdot e^{2x} + C} - 2$, so folgt $g(x) \leq -2$ für alle x im Definitionsbereich. Insbesondere kann dann nicht $g(0) = 0$ gelten.

Mit der Anfangsbedingung $g(0) = 0$ ergibt sich also $g(x) = \sqrt{2 \cdot e^{2x} + C} - 2$ und durch Einsetzen von 0 erhält man die Gleichung

$$\sqrt{2 + C} - 2 = 0 \iff \sqrt{2 + C} = 2 \iff C = 2, \text{ also gilt } g(x) = \sqrt{2 \cdot e^{2x} + 2} - 2.$$

d) $f'(y) + e^{3y} \cdot \sin(y) = 3f(y)$ und $f(0) = -1$

$$f(y) = e^{3y} \cdot (\cos(y) + A), A = -2$$

Lösung:

Es handelt sich um eine nicht separable, lineare und inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung. Wir bestimmen zunächst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung.

Sei f_H eine Funktion mit $f'_H(y) = 3 \cdot f_H(y)$. Durch Trennung der Variablen kann diese Differentialgleichung umgeschrieben werden zu $\frac{f'_H(y)}{f_H(y)} = 3$.

Mit der Substitution $g(x) := \frac{1}{x}$ und $h(y) := f_H(y)$ ergibt sich $h'(y) = f'_H(y)$, also

$$\int \underbrace{\frac{1}{f_H(y)}}_{=g(h(y))} \cdot \underbrace{f'_H(y)}_{=h'(y)} dy = \left[\int \frac{1}{x} dx \right]_{x=h(y)} = [\ln(|x|)]_{x=f_H(y)} = \ln(|f_H(y)|).$$

Also gibt es ein $D \in \mathbb{R}$ mit

$$\ln(|f_H(y)|) = D + \int 3 dy = D + 3y.$$

Potenzieren mit der Basis e liefert $|f_H(y)| = e^D \cdot e^{3y}$.

Es gibt also ein $A \in \mathbb{R}$ mit $f_H(y) = A \cdot e^{3y}$.

Sei nun f_P eine Lösung der Differentialgleichung $f'_P(y) + e^{3y} \cdot \sin(y) = 3 \cdot f_P(y)$ mit der Form $f_P(y) = C(y) \cdot e^{3y}$ („Variation der Konstanten“).

Mit Hilfe der Produktregel erhält man

$$f'_P(y) = C'(y) \cdot e^{3y} + C(y) \cdot e^{3y} \cdot 3 = C'(y) \cdot e^{3y} + 3 \cdot f_P(y).$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert die Gleichung $C'(y) \cdot e^{3y} = -e^{3y} \cdot \sin(y)$.

Damit folgt

$$C(y) = \int C'(y) dy = \int \frac{-e^{3y} \cdot \sin(y)}{e^{3y}} dy = \int (-\sin(y)) dy = \cos(y).$$

Die allgemeine Lösung der Ausgangsdifferentialgleichung hat also die Form

$$f(y) = f_H(y) + f_P(y) = A \cdot e^{3y} + \cos(y) \cdot e^{3y} = e^{3y} \cdot (\cos(y) + A).$$

Zur Probe kann man dieses Ergebnis mit der Produkt- und der Kettenregel ableiten:

$$f'(y) + e^{3y} \cdot \sin(y) = e^{3y} \cdot 3 \cdot (\cos(y) + A) + e^{3y} \cdot (-\sin(y)) + e^{3y} \cdot \sin(y) = 3 \cdot f(y). \quad \checkmark$$

Mit dem Anfangswert $f(0) = -1$ ergibt sich die Gleichung $-1 = e^{3 \cdot 0} \cdot (\cos(0) + A) = 1 \cdot (1 + A) = 1 + A$. Also löst $f(y) = e^{3y} \cdot (\cos(y) - 2)$ das Anfangswertproblem.



DGL/ErsteOrd/Ag_DGL01_AufLinearitytaetPruefen.tex

Aufgabe 11.85 (Klassifizierung von Differentialgleichungen)

ehh

Untersuchen Sie, ob folgende Differentialgleichungen linear sind.

a) $y'(t) + 3y(t) = t^2 + t$

ja

d) $y'(x) = xy(x) - x$

ja

g) $t \cdot y'(t) = y(t) - e^t \cdot (y(t))^2$

nein, wegen $(y(t))^2$

b) $y'(t) = \frac{1}{y(t)}$

nein, wegen $(y(t))^{-1}$

e) $x \cdot y'(x) + y'(x) = y(x)$

ja

h) $y'(x) = 2 \cdot \sqrt{y(x)}$

nein, wegen $(y(t))^{1/2}$

c) $y'(t) = 4 \cdot (y(t))^2$

nein, wegen $(y(t))^2$

f) $\frac{y'(x)}{x^2+1} = \frac{1}{y(x)}$

nein, wegen $(y(t))^{-1}$

i) $y'(t) = 1 + \sin(y(t))$

nein, wegen $\sin(y(t))$

Lösung:

ToDo



DGL/ErsteOrd/Ag_DGL01_LinearInhomogen.tex

Aufgabe 11.86 (Differentialgleichungen)

spf

Finden Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen bzw. Anfangswertprobleme!

a) $g'(r) - \cos(r) \cdot e^{r^2} = 2r \cdot g(r)$ und $g(0) = 1$

$$g(r) = e^{r^2} \cdot (\sin(r) + C), C = 1$$

Lösung:

Es handelt sich um eine nicht separable, lineare und inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung. Wir bestimmen zunächst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung.

Sei g_H eine Funktion mit $g'_H(r) = 2r \cdot g_H(r)$. Durch Trennung der Variablen kann diese Differentialgleichung umgeschrieben werden zu $\frac{g'_H(r)}{g_H(r)} = 2r$.

Mit der Substitution $f(x) := \frac{1}{x}$ und $h(r) := g_H(r)$ ergibt sich $h'(r) = g'_H(r)$, also

$$\int \underbrace{\frac{1}{g_H(r)}}_{=f(h(r))} \cdot \underbrace{g'_H(r)}_{=h'(r)} dr = \left[\int \frac{1}{x} dx \right]_{x=g_H(r)} = [\ln(|x|)]_{x=g_H(r)} = \ln(|g_H(r)|).$$

Also gibt es ein $D \in \mathbb{R}$ mit

$$\ln(|g_H(r)|) = D + \int 2r \, dr = D + r^2.$$

Potenzieren mit der Basis e liefert $|g_H(r)| = e^D \cdot e^{r^2}$.

Es gibt also ein $C \in \mathbb{R}$ mit $g_H(r) = C \cdot e^{r^2}$.

Sei nun g_P eine Lösung der Differentialgleichung $g'_P(r) - \cos(r) \cdot e^{r^2} = 2r \cdot g_P(r)$ mit der Form $g_P(r) = A(r) \cdot e^{r^2}$ („Variation der Konstanten“).

Mit Hilfe der Produktregel erhält man

$$g'_P(r) = A'(r) \cdot e^{r^2} + A(r) \cdot e^{r^2} \cdot 2r = A'(r) \cdot e^{r^2} + 2r \cdot g_P(r).$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert die Gleichung $A'(r) \cdot e^{r^2} = \cos(r) \cdot e^{r^2}$.

Damit folgt

$$A(r) = \int A'(r) \, dr = \int \frac{\cos(r) \cdot e^{r^2}}{e^{r^2}} \, dr = \int \cos(r) \, dr = \sin(r).$$

Die allgemeine Lösung der Ausgangsdifferentialgleichung hat also die Form

$$g(r) = g_H(r) + g_P(r) = C \cdot e^{r^2} + \sin(r) \cdot e^{r^2} = e^{r^2} \cdot (\sin(r) + C).$$

Zur Probe kann man dieses Ergebnis mit der Produkt- und der Kettenregel ableiten:

$$g'(r) = e^{r^2} \cdot 2r \cdot (\sin(r) + C) + e^{r^2} \cdot \cos(r) = 2r \cdot g(r) + e^{r^2} \cdot \cos(r). \quad \checkmark$$

Mit dem Anfangswert $g(0) = 1$ ergibt sich die Gleichung $1 = e^{0^2} \cdot (\sin(0) + C) = 1 \cdot (0 + C) = C$.

Also löst $g(r) = e^{r^2} \cdot (\sin(r) + 1)$ das Anfangswertproblem.

b) $v'(y) = \left(\frac{2}{y} + 3\right) \cdot v(y) + y^2 - y^3$

$$v(y) = Cy^2 \cdot e^{3y} + \frac{y^3}{3} - \frac{2}{9} \cdot y^2$$

Lösung:

Es handelt sich um eine nicht separable, lineare und inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung. Wir bestimmen zunächst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung.

Sei v_H eine Funktion mit $v'_H(y) = \left(\frac{2}{y} + 3\right) \cdot v(y)$. Durch Trennung der Variablen kann diese

Differentialgleichung umgeschrieben werden zu $\frac{v'_H(y)}{v_H(y)} = \frac{2}{y} + 3$.

Mit der Substitution $f(x) := \frac{1}{x}$ und $g(y) := v_H(y)$ ergibt sich $g'(y) = v'_H(y)$, also

$$\int \underbrace{\frac{1}{v_H(y)}}_{=f(g(y))} \cdot \underbrace{v'_H(y)}_{=g'(y)} \, dy = \left[\int \frac{1}{x} \, dx \right]_{x=v_H(y)} = [\ln(|x|)]_{x=v_H(y)} = \ln(|v_H(y)|).$$

Also gibt es ein $D \in \mathbb{R}$ mit

$$\ln(|v_H(y)|) = D + \int \left(\frac{2}{y} + 3\right) \, dy = D + 2 \cdot \ln(|y|) + 3y.$$

Potenzieren mit der Basis e liefert $|v_H(y)| = e^D \cdot |y|^2 \cdot e^{3y}$.

Es gibt also ein $C \in \mathbb{R}$ mit $v_H(y) = Cy^2 \cdot e^{3y}$.

Sei nun v_P eine Lösung der Differentialgleichung $v'_P(y) = \left(\frac{2}{y} + 3\right) \cdot v_P(y) + y^2 - y^3$ mit der Form $v_P(y) = A(y) \cdot y^2 \cdot e^{3y}$ („Variation der Konstanten“).

Mit Hilfe der Produkt- und der Kettenregel erhält man

$$v'_P(y) = A'(y) \cdot y^2 \cdot e^{3y} + A(y) \cdot 2y \cdot e^{3y} + A(y) \cdot y^2 \cdot e^{3y} \cdot 3 = A'(y) \cdot y^2 \cdot e^{3y} + \left(\frac{2}{y} + 3\right) \cdot v_P(y).$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert die Gleichung $A'(y) \cdot y^2 \cdot e^{3y} = y^2 - y^3$.

Mit $u(y) := 1 - y$, $w(y) := \frac{e^{-3y}}{-3}$, $u'(y) = -1$, $w'(y) = e^{-3y}$ und partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} A(y) &= \int A'(y) \, dy = \int \frac{y^2 - y^3}{y^2 \cdot e^{3y}} \, dy = \int \underbrace{(1 - y)}_{=u(y)} \cdot \underbrace{\frac{e^{-3y}}{-3}}_{=w'(y)} \, dy = \underbrace{(1 - y)}_{=u(y)} \cdot \underbrace{\frac{e^{-3y}}{-3}}_{=w(y)} - \int \underbrace{(-1)}_{=u'(y)} \cdot \underbrace{\frac{e^{-3y}}{-3}}_{=w(y)} \, dy \\ &= \frac{y-1}{3} \cdot e^{-3y} - \frac{1}{3} \cdot \int \underbrace{e^{-3y}}_{=w'(y)} \, dy = \frac{3y-3}{9} \cdot e^{-3y} - \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\frac{e^{-3y}}{-3}}_{=w(y)} = \frac{3y-2}{9} \cdot e^{-3y}. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der Ausgangsdifferentialgleichung hat also die Form

$$v(y) = v_H(y) + v_P(y) = Cy^2 \cdot e^{3y} + \frac{3y-2}{9} \cdot e^{-3y} \cdot y^2 \cdot e^{3y} = Cy^2 \cdot e^{3y} + \frac{y^3}{3} - \frac{2}{9} \cdot y^2.$$

Zur Probe kann man dieses Ergebnis mit der Produkt- und der Kettenregel ableiten:

$$\begin{aligned} v'(y) &= C \cdot 2y \cdot e^{3y} + Cy^2 \cdot e^{3y} \cdot 3 + y^2 - \frac{4}{9} \cdot y \quad \text{und} \\ \left(\frac{2}{y} + 3\right) \cdot v(y) + y^2 - y^3 &= \left(\frac{2}{y} + 3\right) \cdot \left(Cy^2 \cdot e^{3y} + \frac{y^3}{3} - \frac{2}{9} \cdot y^2\right) + y^2 - y^3 \\ &= C \cdot 2y \cdot e^{3y} + Cy^2 \cdot e^{3y} \cdot 3 + \frac{2}{3} \cdot y^2 + y^3 - \frac{4}{9} \cdot y - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot y^2 + y^2 - y^3 \\ &= C \cdot 2y \cdot e^{3y} + Cy^2 \cdot e^{3y} \cdot 3 - \frac{4}{9} \cdot y + y^2. \quad \checkmark \end{aligned}$$

c) $f'(x) = \tan(x) \cdot f(x) + \sin(x)$ und $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$

$$f(x) = \frac{C}{\cos(x)} - \frac{\cos(x)}{2}, \quad C = \frac{5}{8}$$

Lösung:

Es handelt sich um eine nicht separable, lineare und inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung. Wir bestimmen zunächst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung.

Sei f_H eine Funktion mit $f'_H(x) = \tan(x) \cdot f_H(x)$. Durch Trennung der Variablen kann diese Differentialgleichung umgeschrieben werden zu $\frac{f'_H(x)}{f_H(x)} = \tan(x)$.

Mit der Substitution $g(t) := \frac{1}{t}$ und $h(x) := f_H(x)$ ergibt sich $h'(x) = f'_H(x)$, also

$$\int \underbrace{\frac{1}{f_H(x)}}_{=g(h(x))} \cdot \underbrace{f'_H(x)}_{=h'(x)} \, dx = \left[\int \frac{1}{t} \, dt \right]_{t=f_H(x)} = [\ln(|t|)]_{t=f_H(x)} = \ln(|f_H(x)|).$$

Also gibt es ein $D \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} \ln(|f_H(x)|) &= D + \int \tan(x) \, dx = D + \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \, dx = D - \int \underbrace{\frac{1}{\cos(x)}}_{=g(\cos(x))} \cdot \underbrace{(-\sin(x))}_{=\cos'(x)} \, dx \\ &= D - \left[\int \frac{1}{t} \, dt \right]_{t=\cos(x)} = D - [\ln(|t|)]_{t=\cos(x)} = D - \ln(|\cos(x)|). \end{aligned}$$

Potenzieren mit der Basis e liefert $|f_H(x)| = e^D \cdot e^{-\ln(|\cos(x)|)} = \frac{e^D}{|\cos(x)|}$.

Es gibt also ein $C \in \mathbb{R}$ mit $f_H(x) = \frac{C}{\cos(x)}$.

Sei nun f_P eine Lösung der Differentialgleichung $f'_P(x) = \tan(x) \cdot f_P(x) + \sin(x)$ mit der Form $f_P(x) = \frac{A(x)}{\cos(x)}$ („Variation der Konstanten“).

Mit Hilfe der Quotientenregel erhält man

$$f'_P(x) = \frac{A'(x) \cdot \cos(x) - A(x) \cdot (-\sin(x))}{(\cos(x))^2} = \frac{A'(x)}{\cos(x)} + \frac{A(x)}{\cos(x)} \cdot \tan(x) = \frac{A'(x)}{\cos(x)} + f_P(x) \cdot \tan(x).$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert die Gleichung $\frac{A'(x)}{\cos(x)} = \sin(x)$.

Mit der Substitutionsregel folgt

$$\begin{aligned} A(x) &= \int A'(x) dx = \int \sin(x) \cdot \cos(x) dx \\ &= - \int \underbrace{\cos(x)}_{=\text{id}(\cos(x))} \cdot \underbrace{(-\sin(x))}_{=\cos'(x)} dx = - \left[\int \underbrace{t}_{=\text{id}(t)} dt \right]_{t=\cos(x)} = - \left[\frac{t^2}{2} \right]_{t=\cos(x)} = - \frac{(\cos(x))^2}{2}. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der Ausgangsdifferentialgleichung hat also die Form

$$f(x) = f_H(x) + f_P(x) = \frac{C}{\cos(x)} + \frac{-\frac{1}{2} \cdot (\cos(x))^2}{\cos(x)} = \frac{C}{\cos(x)} - \frac{\cos(x)}{2}.$$

Zur Probe kann man dieses Ergebnis mit der Kettenregel ableiten:

$$\begin{aligned} f'(x) &= C \cdot (-1) \cdot (\cos(x))^2 \cdot (-\sin(x)) - \frac{1}{2} \cdot (-\sin(x)) \\ &= \frac{C}{\cos(x)} \cdot \tan(x) + \frac{\sin(x)}{2} \quad \text{und} \\ \tan(x) \cdot f(x) + \sin(x) &= \tan(x) \cdot \left(\frac{C}{\cos(x)} - \frac{\cos(x)}{2} \right) + \sin(x) \\ &= \tan(x) \cdot \frac{C}{\cos(x)} - \frac{\sin(x)}{2} + \sin(x) = \frac{C}{\cos(x)} \cdot \tan(x) + \frac{\sin(x)}{2}. \quad \checkmark \end{aligned}$$

Mit dem Anfangswert $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$ ergibt sich die Gleichung $1 = \frac{C}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2} = \frac{C}{\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{2}}{2} = 2C - \frac{1}{4}$, sprich $\frac{5}{4} = 2C$, also $C = \frac{5}{8}$.

Deshalb löst $f(x) = \frac{5}{8 \cdot \cos(x)} - \frac{\cos(x)}{2}$ das Anfangswertproblem.

d) $h'(s) = \frac{2}{s} \cdot h(s) - \sqrt{1-s^2} + \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}$

$$h(s) = s^2 \cdot (\arcsin(s) + C)$$

Lösung:

Es handelt sich um eine nicht separable, lineare und inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung. Wir bestimmen zunächst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung.

Sei h_H eine Funktion mit $h'_H(s) = \frac{2}{s} \cdot h_H(s)$. Durch Trennung der Variablen kann diese Differentialgleichung umgeschrieben werden zu $\frac{h'_H(s)}{h_H(s)} = \frac{2}{s}$.

Mit der Substitution $f(x) := \frac{1}{x}$ und $g(s) := h_H(s)$ ergibt sich $g'(s) = h'_H(s)$, also

$$\int \underbrace{\frac{1}{h_H(s)}}_{=f(g(s))} \cdot \underbrace{h'_H(y)}_{=g'(s)} dy = \left[\int \frac{1}{x} dx \right]_{x=h_H(s)} = [\ln(|x|)]_{x=h_H(s)} = \ln(|h_H(s)|).$$

Also gibt es ein $D \in \mathbb{R}$ mit

$$\ln(|h_H(s)|) = D + \int \frac{2}{s} ds = D + 2 \cdot \ln(|s|).$$

Potenzieren mit der Basis e liefert $|h_H(s)| = e^D \cdot |s|^2$.

Es gibt also ein $C \in \mathbb{R}$ mit $h_H(s) = Cs^2$.

Sei nun h_P eine Lösung der Differentialgleichung $h'_P(s) = \frac{2}{s} \cdot h_P(s) - \sqrt{1-s^2} + \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}$ mit der Form $h_P(s) = A(s) \cdot s^2$ („Variation der Konstanten“).

Mit Hilfe der Produkt- und der Kettenregel erhält man

$$h'_P(s) = A'(s) \cdot s^2 + A(s) \cdot 2s = A'(s) \cdot s^2 + \frac{2}{s} \cdot h_P(s).$$

Für alle $s \in \mathbb{R}$ mit $|s| < 1$ gilt $-\sqrt{1-s^2} + \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} = \frac{-(1-s^2)+1}{\sqrt{1-s^2}} = \frac{s^2}{\sqrt{1-s^2}}$.

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert die Gleichung $A'(s) \cdot s^2 = -\sqrt{1-s^2} + \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} = \frac{s^2}{\sqrt{1-s^2}}$.

Damit folgt

$$A(s) = \int A'(s) ds = \int \frac{s^2}{s^2 \cdot \sqrt{1-s^2}} ds = \int \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} ds = \arcsin(s).$$

Die allgemeine Lösung der Ausgangsdifferentialgleichung hat also die Form

$$h(s) = h_H(s) + h_P(s) = Cs^2 + \arcsin(s) \cdot s^2 = s^2 \cdot (\arcsin(s) + C).$$

Zur Probe kann man dieses Ergebnis mit der Produktregel ableiten:

$$h'(s) = 2s \cdot (\arcsin(s) + C) + \frac{s^2}{\sqrt{1-s^2}} = \frac{2}{s} \cdot h(s) - \sqrt{1-s^2} + \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}. \quad \checkmark$$



DGL/ErsteOrd/Ag_DGL01_PotReihenAnsVerallg01Um1.tex

Aufgabe 11.87 (Potenzreihenansatz und verallgemeinerter Potenzreihenansatz)

spf

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit der Differentialgleichung

$$(x-1) \cdot y'(x) + y(x) = \frac{1}{x}.$$

Entwickelt man die rechte Seite mittels der geometrischen Reihe in ihre Potenzreihe $\frac{1}{x} = \frac{1}{1-(1-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (x-1)^n$ um 1, so lässt sich vermuten, dass sich die Differentialgleichung mit einem Potenzreihenansatz bei Entwicklung um 1 lösen lässt.

a) Verwenden Sie den Potenzreihenansatz, um eine Lösung der Differentialgleichung zu ermitteln!

Tipp: Falls Sie die sich ergebende Potenzreihe nicht kennen: Wie können Sie die Potenzreihe von $\frac{1}{x}$ verwenden, um eine geschlossene Darstellung Ihrer Lösung zu erhalten?

$$\frac{\ln(x)}{x-1}$$

Lösung:

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die Koeffizientenfolge der Potenzreihe von y um 1. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die Potenzreihe absolut konvergiert

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-1)^n \quad \text{und} \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (x-1)^{n-1}.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (x-1)^n = (x-1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (x-1)^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-1)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (x-1)^n + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot (x-1)^n \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \cdot a_n \cdot (x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot a_n \cdot (x-1)^n.\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt $(n+1) \cdot a_n = (-1)^n$ bzw. $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Die Lösung $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot (x-1)^n$ sieht der Potenzreihe von $\frac{1}{x}$ nicht unähnlich. Leitet man das $(x-1)$ -fache von y ab, so ergibt sich nämlich

$$((x-1) \cdot y(x))' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot (x-1)^{n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (x-1)^n = \frac{1}{x}.$$

Damit folgt $(x-1) \cdot y(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln(x)$, woraus sich $y(x) = \frac{\ln(x)}{x-1}$ ergibt.

(Alternativ kann man in $(x-1) \cdot y(x)$ auch direkt die Potenzreihe des $\ln$ entdecken.)

- b) Die Lösung aus Aufgabenteil a) enthält keine „Konstanten“, mit deren Hilfe man Anfangsbedingungen erfüllen könnte (falls sie gegeben wären). Es handelt sich bei der Lösung tatsächlich nur um eine partikuläre Lösung.

Vielleicht hilft Ihnen bei der Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung ein verallgemeinerter Potenzreihenansatz, sprich die Suche nach einer Koeffizientenfolge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und einem $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (x-\xi)^{n+\lambda}$ mit einem gewählten $\xi \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung löst...

$$y(x) = \frac{\ln(x)+C}{x-1}$$

Lösung:

Seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die Koeffizientenfolge der Potenzreihe von $(\text{id} - 1)^{-\lambda} \cdot y_H$ um 1.

Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die Potenzreihe absolut konvergiert

$$y_H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (x-1)^{n+\lambda} \quad \text{und} \quad y_H'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) \cdot b_n \cdot (x-1)^{n+\lambda-1}.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned}0 &= (x-1) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) \cdot b_n \cdot (x-1)^{n+\lambda-1} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (x-1)^{n+\lambda} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) \cdot b_n \cdot (x-1)^{n+\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (x-1)^{n+\lambda} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + n + 1) \cdot b_n \cdot (x-1)^{n+\lambda}.\end{aligned}$$

Nach Division durch $(x-1)^\lambda$ liefert ein Koeffizientenvergleich $b_n \cdot (\lambda + n + 1) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Also gilt $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ oder $\lambda = -n_0 - 1$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ und $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{n_0\}$.

Setzt man im ersten Fall $n_0 := 0$ und $\lambda := -n_0 - 1$, so kann man also in jedem Fall $C := b_{n_0}$ setzen, und erhält $y_H(x) = b_{n_0} \cdot (x-1)^{n_0-n_0-1} = \frac{C}{x-1}$ für ein $C \in \mathbb{R}$.

**Aufgabe 11.88** (Differentialgleichungen)

spf

Finden Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen bzw. Anfangswertprobleme!

a) $u'(x) - \frac{u(x)}{x} \cdot (2x^2 + 1) = 0$

$$u(x) = Cx \cdot e^{x^2}$$

Lösung:

Durch Trennung der Variablen kann die Differentialgleichung umgeschrieben werden:

$$u'(x) - \frac{u(x)}{x} \cdot (2x^2 + 1) = 0 \iff u'(x) = \frac{(2x^2 + 1)}{x} \cdot u(x) \iff \frac{u'(x)}{u(x)} = 2x + \frac{1}{x}.$$

Mit der Substitution $f(t) := \frac{1}{t}$ und $g(x) := u(x)$ ergibt sich $g'(x) = u'(x)$, also

$$\int \underbrace{\frac{1}{u(x)}}_{=f(g(x))} \cdot \underbrace{u'(x)}_{=g'(x)} dx = \left[\int \frac{1}{t} dt \right]_{t=u(x)} = [\ln(|t|)]_{t=u(x)} = \ln(|u(x)|).$$

Also gibt es ein $D \in \mathbb{R}$ mit

$$\ln(|u(x)|) = D + \int \left(2x + \frac{1}{x} \right) dx = D + x^2 + \ln(|x|).$$

Potenzieren mit der Basis e liefert $|u(x)| = e^D \cdot e^{x^2} \cdot |x|$.Es gibt also ein $C \in \mathbb{R}$ mit $u(x) = Cx \cdot e^{x^2}$.

Zur Probe kann man dieses Ergebnis mit der Produktregel ableiten:

$$u'(x) = C \cdot e^{x^2} + Cx \cdot e^{x^2} \cdot 2x = Cx \cdot e^{x^2} \cdot \left(\frac{1}{x} + 2x \right) = \frac{u(x)}{x} \cdot (2x^2 + 1). \quad \checkmark$$

b) $y'(t) = 2t \cdot (\cos(y(t)))^2$

$$y(t) = \arctan(t^2 + C)$$

Lösung:

Durch Trennung der Variablen kann die Differentialgleichung umgeschrieben werden:

$$y'(t) = 2t \cdot (\cos(y(t)))^2 \iff \frac{y'(t)}{(\cos(y(t)))^2} = 2t.$$

Mit der Substitution $f(x) := \frac{1}{(\cos(x))^2}$ und $g(t) := y(t)$ ergibt sich $g'(t) = y'(t)$, also

$$\int \underbrace{\frac{1}{(\cos(y(t)))^2}}_{=f(g(t))} \cdot \underbrace{y'(t)}_{=g'(t)} dt = \left[\int \frac{1}{(\cos(x))^2} dx \right]_{x=y(t)} = [\tan(x)]_{x=y(t)} = \tan(y(t)).$$

Also gibt es ein $C \in \mathbb{R}$ mit

$$\tan(y(t)) = C + \int 2t dt = C + t^2.$$

Anwenden des Arcustangens' auf die Gleichung liefert $y(t) = \arctan(t^2 + C)$.

Zur Probe kann man dieses Ergebnis mit der Kettenregel ableiten:

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{1}{1 + (t^2 + C)^2} \cdot 2t = \frac{1}{1 + (\tan(\arctan(t^2 + C)))^2} \cdot 2t = \frac{1}{1 + \frac{(\sin(y(t)))^2}{(\cos(y(t)))^2}} \cdot 2t \\ &= \frac{1}{\frac{(\cos(y(t)))^2 + (\sin(y(t)))^2}{(\cos(y(t)))^2}} \cdot 2t = 2t \cdot (\cos(y(t)))^2. \quad \checkmark \end{aligned}$$

c) $f'(z) = \frac{4z^3}{f(z)+1}, f(1) = 0$

$$f(z) = \pm \sqrt{2z^4 + C} - 1, \text{ „+“ und } C = -1$$

Lösung:

Durch Trennung der Variablen kann die Differentialgleichung umgeschrieben werden:

$$f'(z) = \frac{4z^3}{f(z) + 1} \iff f'(z) \cdot (f(z) + 1) = 4z^3.$$

Mit der Substitution $h(t) := t + 1$ und $g(z) := f(z)$ ergibt sich $g'(z) = f'(z)$, also

$$\int \underbrace{(f(z) + 1)}_{=h(g(z))} \cdot \underbrace{f'(z)}_{=g'(z)} dz = \left[\int (t + 1) dt \right]_{t=f(z)} = \left[\frac{t^2}{2} + t \right]_{t=f(z)} = \frac{(f(z))^2}{2} + f(z).$$

Also gibt es ein $D \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{(f(z))^2}{2} + f(z) = D + \int 4z^3 dz = D + z^4.$$

Multiplizieren mit 2 ermöglicht eine einfache quadratische Ergänzung:

$$\begin{aligned} &\frac{(f(z))^2}{2} + f(z) = D + z^4 \\ \iff &(f(z))^2 + 2 \cdot f(z) \cdot 1 + 1^2 - (2z^4 + 1 + 2D) = 0 \\ \iff &(f(z) + 1)^2 - \sqrt{2z^4 + 1 + 2D}^2 = 0 \\ \iff &\left(f(z) + 1 - \sqrt{2z^4 + 1 + 2D} \right) \cdot \left(f(z) + 1 + \sqrt{2z^4 + 1 + 2D} \right) = 0. \end{aligned}$$

Es gibt also ein $C \in \mathbb{R}$ mit $f(z) = \sqrt{2z^4 + C} - 1$ oder $f(z) = -\sqrt{2z^4 + C} - 1$.

Zur Probe kann man dieses Ergebnis mit der Kettenregel ableiten:

$$f'(z) = \frac{1}{2 \cdot (\pm \sqrt{2z^4 + C})} \cdot 8z^3 = \frac{4z^3}{f(z) + 1}. \quad \checkmark$$

Gilt $f(z) = -\sqrt{2z^4 + C} - 1$, so folgt $f(z) \leq -1$ für alle z im Definitionsbereich. Insbesondere kann dann nicht $f(1) = 0$ gelten.

Mit der Anfangsbedingung $f(1) = 0$ ergibt sich also $f(z) = \sqrt{2z^4 + C} - 1$ und durch Einsetzen von 1 erhält man die Gleichung

$$\sqrt{2 + C} - 1 = 0 \iff \sqrt{2 + C} = 1 \iff C = -1, \text{ also gilt } f(z) = \sqrt{2z^4 - 1} - 1.$$



DGL/ErsteOrd/Ag_DGL01_separabel_HM3.tex

Aufgabe 11.89 (Differentialgleichungen mit nichtkonstanten Koeffizienten)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Anfangswertprobleme auf geeigneten Intervallen:

a) $y'(x) = x \cdot y(x) - x, y(0) = 3$

$y(x) = 1 + 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$ auf $\mathbb{R}$

Lösung:

Die Differentialgleichung ist separabel, denn durch Ausklammern von x lässt sie sich schreiben als $y'(x) = x \cdot (y(x) - 1) = F(x) \cdot G(y(x))$ mit $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) := x$ und $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, G(t) := t - 1$.

Das Verfahren der Trennung der Veränderlichen lässt sich jedoch nur anwenden, wenn die Funktion G auf ihrem Definitionsbereich keine Nullstellen hat. Die einzige Nullstelle von G ist $t = 1$. Wir tauschen deshalb G durch die Funktion $\tilde{G}: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, \tilde{G}(t) := t - 1$ aus und wenden das Verfahren der Trennung der Veränderlichen auf die Differentialgleichung $y'(x) = F(x) \cdot \tilde{G}(y(x))$ an. Auf diese Weise erhalten wir nur die Lösungen, die den Wert 1 nicht annehmen:

$$\begin{aligned} y'(x) = F(x) \cdot \tilde{G}(y(x)) &\iff \frac{y'(x)}{\tilde{G}(y(x))} = F(x) \\ &\iff \int \frac{y'(x)}{\tilde{G}(y(x))} dx = \int F(x) dx + d \\ &\iff \left[\int \frac{1}{\tilde{G}(t)} dt \right]_{t=y(x)} = \int F(x) dx + d \\ &\iff \left[\int \frac{1}{t-1} dt \right]_{t=y(x)} = \int x dx + d \\ &\iff [\log |t-1|]_{t=y(x)} = \frac{1}{2}x^2 + d \\ &\iff \log |y(x) - 1| = \frac{1}{2}x^2 + d \\ &\iff |y(x) - 1| = e^{\frac{1}{2}x^2 + d} \\ &\iff y(x) \in \left\{ 1 + e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot e^d, 1 - e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot e^d \right\}, \end{aligned}$$

mit $d \in \mathbb{R}$ beliebig. Da die Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ mit $t \mapsto e^t$ bijektiv ist, erhalten wir so die Lösungsfunktionen $y(x) := 1 + c \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$, wobei $c = \pm e^d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ beliebig wählbar ist.

Die Konstante c muss noch an die Anfangsbedingung $y(0) = 3$ angepasst werden: $y(0) = 3 \Leftrightarrow 1 + c \cdot e^{\frac{1}{2}0^2} = 3 \Leftrightarrow 1 + c = 3 \Leftrightarrow c = 2$. Die Lösung des Anfangswertproblems lautet somit $y(x) = 1 + 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$ auf ganz $\mathbb{R}$.

b) $x \cdot y'(x) + y'(x) = y(x), y(1) = 1$

$y(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ auf $\mathbb{R}$

Lösung:

Die Differentialgleichung ist separabel, denn durch Teilen durch $x+1$ lässt sie sich schreiben als $y'(x) = \frac{y(x)}{x+1} = F(x) \cdot G(y(x))$ mit $F: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) := \frac{1}{x+1}$ und $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, G(t) := t$.

Das Verfahren der Trennung der Veränderlichen lässt sich jedoch nur anwenden, wenn die Funktion G auf ihrem Definitionsbereich keine Nullstellen hat. Die einzige Nullstelle von G ist $t = 0$. Wir tauschen deshalb G durch die Funktion $\tilde{G}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \tilde{G}(t) := t$ aus und wenden das Verfahren der Trennung der Veränderlichen auf die Differentialgleichung $y'(x) = F(x) \cdot \tilde{G}(y(x))$

an. Auf diese Weise erhalten wir nur die Lösungen, die den Wert 0 nicht annehmen:

$$\begin{aligned}
y'(x) = F(x) \cdot \tilde{G}(y(x)) &\iff \frac{y'(x)}{\tilde{G}(y(x))} = F(x) \\
&\iff \int \frac{y'(x)}{\tilde{G}(y(x))} dx = \int F(x) dx + d \\
&\iff \left[\int \frac{1}{\tilde{G}(t)} dt \right]_{t=y(x)} = \int F(x) dx + d \\
&\iff \left[\int \frac{1}{t} dt \right]_{t=y(x)} = \int \frac{1}{1+x} dx + d \\
&\iff \log |y(x)| = \log |x+1| + d \\
&\iff |y(x)| = |x+1| \cdot e^d \\
&\iff y(x) \in \left\{ (x+1) \cdot e^d, -(x+1) \cdot e^d \right\},
\end{aligned}$$

mit $d \in \mathbb{R}$ beliebig. Da die Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ mit $t \mapsto e^t$ bijektiv ist, erhalten wir so die Lösungsfunktionen $y(x) := (x+1) \cdot c = cx + c$, wobei $c = \pm e^d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ beliebig wählbar ist.

Die Konstante c muss noch an die Anfangsbedingung $y(1) = 1$ angepasst werden: $y(1) = 1 \Leftrightarrow c \cdot 1 + c = 1 \Leftrightarrow 2c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$. Die Lösung des Anfangswertproblems lautet somit $y(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ auf ganz $\mathbb{R}$.

c) $\frac{y'(x)}{3x^2+1} = \sqrt{1 - (y(x))^2}, y(0) = 0$ $y(x) = \sin(x^3 + x)$ um $x = 0$ mit $-\pi/2 \leq x^3 + x \leq \pi/2$

Lösung:

Die Differentialgleichung ist separabel, denn sie kann umgeschrieben werden zu $y'(x) = (3x^2 + 1) \cdot \sqrt{1 - (y(x))^2} = F(x) \cdot G(y(x))$ mit $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) := 3x^2 + 1$ und $G: [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}, G(t) := \sqrt{1 - t^2}$. Trennung der Veränderlichen liefert:

$$\begin{aligned}
y'(x) = F(x) \cdot G(y(x)) &\iff \frac{y'(x)}{G(y(x))} = F(x) \\
&\iff \int \frac{y'(x)}{G(y(x))} dx = \int F(x) dx + d \\
&\iff \left[\int \frac{1}{G(t)} dt \right]_{t=y(x)} = \int F(x) dx + d \\
&\iff \left[\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \right]_{t=y(x)} = \int (3x^2 + 1) dx + c \\
&\iff \arcsin(y(x)) = x^3 + x + c \\
&\iff y(x) = \sin(x^3 + x + c),
\end{aligned}$$

mit $c \in \mathbb{R}$ beliebig. Also ist die Lösung $y(x) = \sin(x^3 + x + c)$ mit $c \in \mathbb{R}$ beliebig.

Die Konstante c muss noch an die Anfangsbedingung $y(0) = 0$ angepasst werden: $y(0) = 0 \Leftrightarrow \sin(0^3 + 0 + c) = 0 \Leftrightarrow \sin(c) = 0$. Wir wählen zunächst die Lösung $c = 0$. Die Lösung des Anfangswertproblems lautet somit $y(x) = \sin(x^3 + x)$. Da wir bei der Integration den Arkussinus verwendet haben, der nur auf $[-\pi/2, \pi/2]$ definiert ist, prüfen wir durch Einsetzen in die DGL in wie weit dadurch das Lösungsintervall eingeschränkt wird. Einsetzen von $y(x)$ und Vereinfachen ergibt die Gleichung $\cos(x^3 + x) = |\cos(x^3 + x)|$. Das x -Intervall muss also so gewählt werden, dass es $x = 0$ enthält (wegen der Anfangsbedingung $y(0) = 0$) und gleichzeitig $\cos(x^3 + x) \geq 0$ gilt. Da der Kosinus auf $[-\pi/2, \pi/2]$ größer gleich null ist, muss gelten $-\pi/2 \leq x^3 + x \leq \pi/2$.

Aus Symmetriegründen ergibt sich ein Intervall der Form $[-a, a]$, wobei a die reelle Lösung der Gleichung $a^3 + a = \pi/2$ ist. Numerisch findet man $a \approx 0,8828$.

Wählen wir stattdessen $c = \pi$, so ergibt sich $y(x) = \sin(x^3 + x + \pi) = -\sin(x^3 + x)$. Einsetzen in die DGL ergibt dann die Bedingung $-\cos(x^3 + x) = |\cos(x^3 + x)|$. Das x -Intervall müsste also so gewählt werden, dass es $x = 0$ enthält (wegen der Anfangsbedingung $y(0) = 0$) und gleichzeitig $\cos(x^3 + x) \leq 0$ gilt. Weil in der Umgebung von $x = 0$ aber $\cos(x^3 + x) > 0$ für $x \neq 0$ gilt, gibt es kein solches Intervall.

d) $y'(x) = 2 \cdot \sqrt{y(x)}$ mit $y(x) \geq 0$, $y(0) = 1$

$$y(x) = (x+1)^2 \text{ auf } [-1; \infty)$$

Lösung:

Die Differentialgleichung ist separabel, denn sie lässt sich schreiben als $y'(x) = F(x) \cdot G(y(x))$ mit $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) := 2$ und $G: [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $G(t) := \sqrt{t}$. Trennung der Veränderlichen liefert

$$\begin{aligned} y'(x) = F(x) \cdot G(y(x)) &\iff \frac{y'(x)}{G(y(x))} = F(x) \\ &\iff \int \frac{y'(x)}{G(y(x))} dx = \int F(x) dx + d \\ &\iff \left[\int \frac{1}{G(t)} dt \right]_{t=y(x)} = \int F(x) dx + d \\ &\iff \left[\int \frac{1}{\sqrt{t}} dt \right]_{t=y(x)} = \int 2 dx + d \\ &\iff \left[2\sqrt{t} \right]_{t=y(x)} = 2x + d \\ &\iff 2\sqrt{y(x)} = 2x + d \\ &\stackrel{y(x) \geq 0}{\iff} y(x) = \left(x + \frac{d}{2} \right)^2, \end{aligned}$$

mit $d \in \mathbb{R}$ beliebig. Also ist die Lösung $y(x) := (x + c)^2$ mit $c \in \mathbb{R}$ beliebig.

Wir setzen diese Lösung zur Probe in die DGL ein und erhalten nach Vereinfachung die Gleichung $2(x + c) = 2|x + c|$. Daraus ergibt sich die Bedingung $x + c \geq 0$ bzw. $x \geq -c$ was auf das Lösungsintervall $[-c, \infty)$ führt.

Die Konstante c muss noch an die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ angepasst werden: $y(0) = 1 \iff (0 + c)^2 = 1 \iff c^2 = 1$. Es gibt also die beiden Möglichkeiten $c_1 = 1$ und $c_2 = -1$, was den beiden Lösungsintervallen $[-1, \infty)$ bzw. $[1, \infty)$ entspricht. Da das zweite Lösungsintervall den Anfangswert $x = 0$ nicht enthält, scheidet der Kandidat $c_2 = -1$ aus. Die Lösung des Anfangswertproblems lautet somit $y(x) = (x + 1)^2$ auf $[-1, \infty)$.

e) $y'(t) = \frac{2t^3}{y(t)}$ mit $y(3) = -10$

$$y(t) = -\sqrt{t^4 + 19} \text{ auf } \mathbb{R}$$

Lösung:

Die Differentialgleichung ist separabel, denn sie lässt sich schreiben als $y'(t) = F(t) \cdot G(y(t))$ mit

$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(t) := 2t^3$ und $G: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $G(s) := \frac{1}{s}$. Trennung der Veränderlichen liefert:

$$\begin{aligned}
 y'(t) = F(t) \cdot G(y(t)) &\iff \frac{y'(t)}{G(y(t))} = F(t) \\
 &\iff \int \frac{y'(t)}{G(y(t))} dt = \int F(t) dt + d \\
 &\iff \left[\int \frac{1}{G(s)} dt \right]_{s=y(t)} = \int F(t) dt + d \\
 &\iff \left[\int s dt \right]_{s=y(t)} = \int 2t^3 dt + d \\
 &\iff \frac{1}{2} \cdot y(t)^2 = \frac{1}{2} \cdot t^4 + d \\
 &\iff y(t) \in \left\{ \sqrt{t^4 + 2d}, -\sqrt{t^4 + 2d} \right\},
 \end{aligned}$$

mit $d \in \mathbb{R}$ beliebig. Mit der Anfangsbedingung ergibt sich $-10 = y(3) = -\sqrt{3^4 + 2d}$, also $2d = 19$. Somit ist die Lösung die Funktion $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $y(t) := -\sqrt{t^4 + 19}$.

f) $y'(t) = 4 \cdot (y(t))^2$ mit $y(0) = 3$

$y(t) = \frac{3}{1-12t}$ auf $(-\infty, \frac{1}{12})$

Lösung:

Die Differentialgleichung ist separabel, denn sie lässt sich schreiben als $y'(t) = F(t) \cdot G(y(t))$ mit $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(t) := 4$ und $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $G(s) := s^2$. Trennung der Veränderlichen liefert:

$$\begin{aligned}
 y'(t) = F(t) \cdot G(y(t)) &\iff \frac{y'(t)}{G(y(t))} = F(t) \\
 &\iff \int \frac{y'(t)}{G(y(t))} dt = \int F(t) dt + d \\
 &\iff \left[\int \frac{1}{G(s)} dt \right]_{s=y(t)} = \int F(t) dt + d \\
 &\iff \left[\int \frac{1}{s^2} dt \right]_{s=y(t)} = \int 4 dt + d \\
 &\iff -\frac{1}{y(t)} = 4t + d \\
 &\iff y(t) = -\frac{1}{4t + d},
 \end{aligned}$$

mit $d \in \mathbb{R}$ beliebig. Mit der Anfangsbedingung $y(0) = 3$ ergibt sich $-\frac{1}{d} = 3$, also $d = -\frac{1}{3}$. Somit ist die Lösung die Funktion $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $y(t) := -\frac{1}{4t - \frac{1}{3}} = \frac{3}{1-12t}$.

Wegen der Nennernullstelle bei $t = \frac{1}{12}$ ist $I = (-\infty, \frac{1}{12})$ ein maximal großes Lösungsintervall, das den Wert $t = 0$ der Anfangsbedingung enthält.



DGL/ErsteOrd/Ag_DGL_mit_FT.tex

Aufgabe 11.90 (DGL mit Fouriertransformation lösen)

kr

Gegeben ist die Differentialgleichung (DGL)

$$y'(t) + 4y(t) = e^{-4t}\sigma(t).$$

Dabei ist $\sigma(t) = 0$ für $t < 0$ und $\sigma(t) = 1$ für $t \geq 0$ (Einheitssprungfunktion bzw. Heavisidefunktion).

a) Geben Sie die homogene Lösung $y_h(t)$ der DGL an.

$y_h(t) = A \cdot e^{-4t}$

Lösung: Die Lösung der homogenen Gleichung $y_h'(t) + 4y_h(t) = 0$ hat einen Parameter $A \in \mathbb{C}$ und ist gegeben durch $y_h(t) = Ae^{-4t}$, was man durch Einsetzen leicht bestätigen kann.

- b) Im Folgenden soll eine partikuläre Lösung $y_p(t)$ der DGL mit Hilfe einer Fouriertransformation berechnet werden. Wenden Sie dazu die Fouriertransformation auf beide Seiten der DGL an, um eine transformierte Gleichung (Gleichung im FFourierraum"bzw. FFrequenzraum") zu erhalten. Verwenden Sie die Notation $\mathcal{F}(y_p(t)) = Y_p(\omega)$ sowie die Korrespondenzen $\mathcal{F}(e^{-bt}\sigma(t)) = \frac{1}{b+i\omega}$ ($b > 0$) und $\mathcal{F}(\frac{d}{dt}g) = i\omega\mathcal{F}(g)$, g : beliebige fouriertransformierbare Funktion. $i\omega Y_p + 4Y_p = \frac{1}{4+i\omega}$

Lösung:Anwendung der Fourertransformation auf die DGL unter Verwendung der angegebenen Korrespondenzen und Notationen ergibt $i\omega Y_p + 4Y_p = \frac{1}{4+i\omega}$.

- c) Lösen Sie die Gleichung nach Y_p auf, um das Ergebnis im Fourierraum (bzw. Frequenzbereich) zu erhalten. $Y_p(\omega) = \frac{1}{(4+i\omega)^2}$

Lösung:Nach Ausklammern von Y_p auf der linbken Seite ergibt sich $Y_p(i\omega+4) = \frac{1}{4+i\omega}$. Dividieren duch den ausgeklammerten Term ergibt $Y_p(\omega) = \frac{1}{(4+i\omega)^2}$.

- d) Wenden Sie zur Vorbereitung der Rücktransformation in den Zeitbereich folgenden Trick an: Schreiben Sie $Y_p(\omega)$ in der Form $Y_p(\omega) = C \cdot \frac{d}{d\omega}G(\omega)$ mit einer geeigneten Konstanten $C \in \mathbb{C}$ und einer geeigneten Funktion $G(\omega)$. Im Idealfall ist dabei die zu $G(\omega)$ zugehörige Zeitbereichsfunktion $g(t)$, $g = \mathcal{F}^{-1}(G)$ bekannt. $Y_p(\omega) = C \cdot \frac{d}{d\omega}G(\omega)$ mit $C = -\frac{1}{i}$, $G(\omega) = \frac{1}{4+i\omega}$

Lösung:Es gilt $Y_p(\omega) = \frac{1}{(4+i\omega)^2} = -\frac{1}{i} \frac{d}{d\omega} \frac{1}{4+i\omega} = C \cdot \frac{d}{d\omega}G(\omega)$ mit $C = -\frac{1}{i}$, $G(\omega) = \frac{1}{4+i\omega}$ wie man mittels Ableitung nach Kettenregel bestätigen kann.

- e) Verwenden Sie jetzt zur Rücktransformation in den Zeitbereich die Korrespondenzen $\mathcal{F}^{-1}(\frac{d}{d\omega}G) = -it\mathcal{F}^{-1}(G)$ und $\mathcal{F}^{-1}(\frac{1}{b+i\omega}) = e^{-bt}\sigma(t)$ ($b > 0$). $y_p(t) = C \cdot (-it)g(t)$ mit $g(t) = \mathcal{F}^{-1}(G) = \mathcal{F}^{-1}(\frac{1}{4+i\omega}) = e^{-4t}\sigma(t)$ also $y_p(t) = t \cdot e^{-4t}\sigma(t)$

Lösung:Mit Hilfe der angegebenen Korrespondenzen und der Linearität der inversen Fouriertransformation ergibt sich $y_p(t) = \mathcal{F}^{-1}(Y_p(\omega)) = -\frac{1}{i}\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{d}{d\omega} \frac{1}{4+i\omega}\right) = -\frac{1}{i}(-it)\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{4+i\omega}\right) = t \cdot e^{-4t}\sigma(t)$.

- f) Prüfen Sie das Ergebnis durch Einsetzen in die DGL.

Lösung:Für $t < 0$ gilt $y_p(t) = 0$, was die DGL $y_p'(t) + 4y_p(t) = 0$ ($t < 0$) löst.

Es gilt für $t \geq 0$: $y_p'(t) + 4y_p(t) = (t \cdot e^{-4t})' + 4te^{-4t} = e^{-4t} - 4te^{-4t} + 4te^{-4t} = e^{-4t} = e^{-4t}\sigma(t)$, also ist die DGL erfüllt.

- g) Berechnen Sie zum Vergleich $y_p(t)$ noch einmal mit einem Ansatz vom Typ der rechten Seite oder mit Variation der Konstanten.

Lösung:Für $t < 0$ wird die die DGL $y_p'(t) + 4y_p(t) = 0$ ($t < 0$) durch gilt $y_p(t) = 0$ gelöst.

Fall $t \geq 0$ mit Ansatz vom Typ der rechten Seite:

Wegen der Resonanz mit der homogenen Lösung (siehe a)) brauchen wir im Ansatz einen zusätzlichen Faktor t . Zusammen mit einer Konstanten $C \in \mathbb{C}$ ergibt sich der Ansatz $y_p(t) = Cte^{-4t}$.

Mit dem Ansatz ergibt sich:

$y_p'(t) + 4y_p(t) = (Cte^{-4t})' + 4Cte^{-4t} = Ce^{-4t} - 4Cte^{-4t} + 4Cte^{-4t} = Ce^{-4t} = e^{-4t}\sigma(t)$ mit der speziellen Wahl $C = 1$. Fasst man beide Fälle zusammen, ist die DGL für $y_p(t) = t \cdot e^{-4t}\sigma(t)$ erfüllt.

Fall $t \geq 0$ mit Variation der Konstanten:

Aus der homogenen Lösung heraus machen wir den Ansatz $y_p(t) = A(t)e^{-4t}$. Eingesetzt in die

DGL ergibt sich:

$e^{-4t} = y_p'(t) + 4y_p(t) = (A(t)e^{-4t})' + 4A(t)e^{-4t} = A'(t)e^{-4t} - 4A(t)e^{-4t} + 4A(t)e^{-4t} = A'(t)e^{-4t}$
 $\Rightarrow 1 = A'(t) \Rightarrow A(t) = t + K$ mit einer Integrationskonstanten $K \in \mathbb{C}$. Mit der speziellen Wahl $K = 0$ ergibt sich $y_p(t) = t \cdot e^{-4t}$. Fasst man beide Fälle zusammen, ist die DGL für $y_p(t) = t \cdot e^{-4t} \sigma(t)$ erfüllt.



DGL/ErsteOrd/Ag_ExakteDGLs.tex

Aufgabe 11.91 (Exakte Differentialgleichungen)

kr

Finden Sie jeweils eine Funktion $F(x, y)$, so dass die allgemeine Lösung der Differentialgleichung in der Form $F(x, y) = c$ mit einer unbestimmten Konstanten $c \in \mathbb{R}$ geschrieben werden kann. Verwenden Sie dazu dass die Differentialgleichung exakt ist oder sich auf eine exakte Differentialgleichung zurückführen lässt.

a) $(-6xe^{-x^2}y^2 + y) dx + (6e^{-x^2}y + x) dy$ $F(x, y) = 3e^{-x^2}y^2 + xy$

Lösung:Falls die DGL exakt ist, also falls es eine Potentialfunktion $F(x, y)$ gibt, so muss gelten:

$\frac{\partial F}{\partial x} = -6xe^{-x^2}y^2 + y \Rightarrow F(x, y) = \int (-6xe^{-x^2}y^2 + y) dx = 3e^{-x^2}y^2 + yx + K_1(y)$ mit einer y -abhängigen Integrationskonstanten K_1 .

Entsprechend muss auch gelten:

$\frac{\partial F}{\partial y} = 6e^{-x^2}y + x \Rightarrow F(x, y) = \int (6e^{-x^2}y + x) dy = 3e^{-x^2}y^2 + yx + K_2(x)$ mit einer x -abhängigen Integrationskonstanten K_2 .

Vergleich der beiden Ausdrücke für $F(x, y)$ ergibt die Potentialfunktion $F(x, y) = 3e^{-x^2}y^2 + xy + K$ mit einer Konstanten K , die wir null setzen können. Man prüft leicht nach, dass die beiden partiellen Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ tatsächlich korrekt herauskommen. Die DGL ist also exakt und ihre implizite allgemeine Lösung ist gegeben durch $3e^{-x^2}y^2 + xy = c$ mit einer reellen Integrationskonstanten c .

b) $(\sin(y) - 2y^2 \sin(2x)) dx + (x \cos(y) + 2y \cos(2x)) dy$ $F(x, y) = x \sin(y) + y^2 \cos(2x)$

Lösung:Falls die DGL exakt ist, also falls es eine Potentialfunktion $F(x, y)$ gibt, so muss gelten:

$\frac{\partial F}{\partial x} = \sin(y) - 2y^2 \sin(2x) \Rightarrow F(x, y) = \int (\sin(y) - 2y^2 \sin(2x)) dx = x \sin(y) - y^2 \cos(2x) + K_1(y)$ mit einer y -abhängigen Integrationskonstanten K_1 .

Entsprechend muss auch gelten:

$\frac{\partial F}{\partial y} = x \cos(y) + 2y \cos(2x) \Rightarrow F(x, y) = \int (x \cos(y) + 2y \cos(2x)) dy = x \sin(y) - y^2 \cos(2x) + K_2(x)$ mit einer x -abhängigen Integrationskonstanten K_2 .

Vergleich der beiden Ausdrücke für $F(x, y)$ ergibt die Potentialfunktion $F(x, y) = x \sin(y) + y^2 \cos(2x) + K$ mit einer Konstanten K , die wir null setzen können. Man prüft leicht nach, dass die beiden partiellen Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ tatsächlich korrekt herauskommen. Die DGL ist also exakt und ihre implizite allgemeine Lösung ist gegeben durch $x \sin(y) + y^2 \cos(2x) = c$ mit einer reellen Integrationskonstanten c .

c) $2y \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 2xy^2}{1 + x^2}$ $F(x, y) = (1 + x^2)y^2 - x^3$

Lösung:Die DGL kann umgeformt werden zu $(2xy^2 - 3x^2)dx + 2y(1 + x^2)dy = 0$. Falls die DGL exakt ist, also falls es eine Potentialfunktion $F(x, y)$ gibt, so muss gelten:

$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy^2 - 3x^2 \Rightarrow F(x, y) = \int (2xy^2 - 3x^2) dx = x^2y^2 - x^3 + K_1(y)$ mit einer y -abhängigen Integrationskonstanten K_1 .

Entsprechend muss auch gelten:

$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y(1 + x^2) \Rightarrow F(x, y) = \int (2y(1 + x^2)) dy = y^2(1 + x^2) + K_2(x)$ mit einer x -abhängigen Integrationskonstanten K_2 .

Vergleich der beiden Ausdrücke für $F(x, y)$ ergibt die Potentialfunktion $F(x, y) = (1 + x^2)y^2 - x^3$

$x^3 + K$ mit einer Konstanten K , die wir null setzen können. Man prüft leicht nach, dass die beiden partiellen Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ tatsächlich korrekt herauskommen. Die DGL ist also exakt und ihre implizite allgemeine Lösung ist gegeben durch $(1+x^2)y^2 - x^3 = c$ mit einer reellen Integrationskonstanten c .



DGL/ErsteOrd/Ag_ExakteDGLs_AWP.tex

Aufgabe 11.92 (Anfangswertprobleme und exakte Differentialgleichungen)

kr

Lösen Sie jeweils das gegebene Anfangswertproblem, indem Sie verwenden, dass die Differentialgleichung exakt ist oder sich auf eine exakte Differentialgleichung zurückführen lässt.

a) $(4x^3y - 6x)dx + (1 + x^4)dy = 0$, $y(0) = 2$

$$y = \frac{3x^2+2}{1+x^4}$$

Lösung:Falls die DGL exakt ist, also falls es eine Potentialfunktion $F(x, y)$ gibt, so muss gelten: $\frac{\partial F}{\partial x} = 4x^3y - 6x \Rightarrow F(x, y) = \int (4x^3y - 6x) dx = x^4y - 3x^2 + K_1(y)$ mit einer y -abhängigen Integrationskonstanten K_1 .

Entsprechend muss auch gelten:

$\frac{\partial F}{\partial y} = 1 + x^4 \Rightarrow F(x, y) = \int (1 + x^4) dy = y(1 + x^4) + K_2(x)$ mit einer x -abhängigen Integrationskonstanten K_2 .

Vergleich der beiden Ausdrücke für $F(x, y)$ ergibt die Potentialfunktion $F(x, y) = y(1 + x^4) - 3x^2 + K$ mit einer Konstanten K , die wir null setzen können. Man prüft leicht nach, dass die beiden partiellen Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ tatsächlich korrekt herauskommen. Die DGL ist also exakt und ihre implizite allgemeine Lösung ist gegeben durch $y(1 + x^4) - 3x^2 = c$ mit einer reellen Integrationskonstanten c . Diese Gleichung lässt sich hier nach y auflösen, so dass wir die allgemeine Lösung in expliziter Form erhalten: $y = \frac{c+3x^2}{1+x^4}$. Einsetzen der Anfangsbedingung $y(0) = 2$ ergibt die Gleichung $2 = \frac{c+3 \cdot 0^2}{1+0^4} \Leftrightarrow c = 2$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist somit $y = \frac{2+3x^2}{1+x^4}$.

b) $\frac{dy}{dx} = -\frac{1+ye^x}{e^x}$, $y(0) = 1$

$$y = (1-x)e^{-x}$$

Lösung:Die DGL kann umgeformt werden zu $(1 + ye^x)dx + e^x dy = 0$. Falls die DGL exakt ist, also falls es eine Potentialfunktion $F(x, y)$ gibt, so muss gelten:

$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + ye^x \Rightarrow F(x, y) = \int (1 + ye^x) dx = x + ye^x + K_1(y)$ mit einer y -abhängigen Integrationskonstanten K_1 .

Entsprechend muss auch gelten:

$\frac{\partial F}{\partial y} = e^x \Rightarrow F(x, y) = \int (e^x) dy = ye^x + K_2(x)$ mit einer x -abhängigen Integrationskonstanten K_2 .

Vergleich der beiden Ausdrücke für $F(x, y)$ ergibt die Potentialfunktion $F(x, y) = x + ye^x + K$ mit einer Konstanten K , die wir null setzen können. Man prüft leicht nach, dass die beiden partiellen Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ tatsächlich korrekt herauskommen. Die DGL ist also exakt und ihre implizite allgemeine Lösung ist gegeben durch $x + ye^x = c$ mit einer reellen Integrationskonstanten c . Diese Gleichung lässt sich hier nach y auflösen, so dass wir die allgemeine Lösung in expliziter Form erhalten: $y = (c - x)e^{-x}$. Einsetzen der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ ergibt die Gleichung $1 = (c - 0)e^{-0} \Leftrightarrow c = 1$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist somit $y = (1 - x)e^{-x}$.



DGL/ErsteOrd/Ag_FT_Gauss.tex

Aufgabe 11.93 (Fouriertransformation einer Gaußglocke)

kr

Im Folgenden soll mit Hilfe von Differentialgleichungen gezeigt werden, dass die Fouriertransformierte der Gaußschen Glockenkurve

$$f(t) = e^{-\frac{1}{2}\Omega^2 t^2}$$

mit der Breite $\frac{1}{\Omega}$, $\Omega > 0$ ebenfalls eine Gaußglocke ist, nämlich

$$F(\omega) = Ce^{-\frac{1}{2}\frac{1}{\Omega^2}\omega^2}$$

mit der Breite Ω und einer Konstanten C . (Dies ist ein Beispiel für die allgemeine Beziehung: „schmales /kurzes Signal im Zeitbereich“ $\rightarrow$ „breites Signal (also viele Frequenzen) im Frequenzbereich“ (und umgekehrt).)

- a) Zeigen Sie, dass $\frac{df}{dt} = -\Omega^2 t f$ gilt.

Lösung: $\frac{df}{dt} + \Omega^2 t f = \frac{d}{dt} e^{-\frac{1}{2}\Omega^2 t^2} + \Omega^2 t e^{-\frac{1}{2}\Omega^2 t^2} = -\Omega^2 t e^{-\frac{1}{2}\Omega^2 t^2} + \Omega^2 t e^{-\frac{1}{2}\Omega^2 t^2} = 0$

- b) Wenden Sie die Fouriertransformation auf beide Seiten der DGL aus a) an, um eine transformierte Gleichung (Gleichung im FFourierraum"bzw. FFrequenzraum") zu erhalten. Verwenden Sie die Korrespondenzen $\mathcal{F}(\frac{d}{dt}f) = i\omega\mathcal{F}(f)$ und $\mathcal{F}^{-1}(\frac{d}{d\omega}F) = -it\mathcal{F}^{-1}(F)$. $\frac{dF}{d\omega} = -\frac{1}{\Omega^2}\omega F$

Lösung:Die zweite angegebene Korrespondenz formen wir noch um : $\mathcal{F}^{-1}(\frac{d}{d\omega}F) = -it\mathcal{F}^{-1}(F)$
 $\Rightarrow \mathcal{F}^{-1}(\frac{d}{d\omega}F) = -itf \Rightarrow \frac{d}{d\omega}F = \mathcal{F}(-itf) \Rightarrow \mathcal{F}(tf) = i\frac{d}{d\omega}F$
 Dabei haben wir $\mathcal{F}^{-1}(F) = f$, die Linearität der Fouriertransformation und $i^2 = -1$ verwendet.
 Anwendung der Korrespondenzen auf die DGL aus a) unter Verwendung der Linearität der Fouriertransformation ergibt die DGL $\frac{dF}{d\omega} = -\frac{1}{\Omega^2}\omega F$.

- c) Geben Sie die allgemeine Lösung der DGL aus b) an und bestimmen Sie damit $F(\omega)$ bis auf eine Integrationskonstante C . (Ein Vergleich mit der DGL aus a) kann dabei helfen, aber es geht auch anders.) $F(\omega) = Ce^{-\frac{1}{2}\frac{1}{\Omega^2}\omega^2}$

Lösung:Die homogene lineare DGL 1. Ordnung aus b) ist bis auf die Bezeichnungen der Variablen und die Ersetzung $\Omega^2 \rightarrow \frac{1}{\Omega^2}$ identisch mit der DGL aus a). Somit ist auch die Lösung identisch bis auf die Bezeichnungen der Variablen und die Ersetzung $\Omega^2 \rightarrow \frac{1}{\Omega^2}$. Zusammen mit einer Integrationskonstanten C ergibt sich somit $F(\omega) = Ce^{-\frac{1}{2}\frac{1}{\Omega^2}\omega^2}$. Alternativ kann die Lösung auch durch Trennung der Variablen bestimmt werden.



DGL/ErsteOrd/Ag_IntegrierenderFaktor.tex

Aufgabe 11.94 (Zusatzaufgabe für Interessierte: Integrierender Faktor)

kr

- a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung $(4x + 3y)dx + xdy = 0$ nicht exakt ist. Erinnern Sie sich dazu an die Bedingung aus HM II für die Existenz von Potentialen.

Lösung:Die DGL ist genau dann exakt, wenn das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$ mit $P(x, y) = 4x + 3y$, $Q(x, y) = x$ ein Potential $F(x, y)$ mit $\vec{v} = \nabla F$ hat. Laut HM II hat ein stetig partiell differenzierbares Vektorfeld $\vec{v} : G \rightarrow \mathbb{R}^2$, $G \subset \mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend (dies ist hier erfüllt) genau dann ein Potential wenn gilt $\partial_y P = \partial_x Q$. Hier gilt $\partial_y P(x, y) = 3, \partial_x Q(x, y) = 1 \neq \partial_y P(x, y)$ also ist $\vec{v}$ kein Potentialfeld und somit die DGL nicht exakt. mit $P(x, y) = 4x + 3y$, $Q(x, y) = x$ folgt $\partial_y P(x, y) = 3, \partial_x Q(x, y) = 1 \neq \partial_y P(x, y)$

- b) Versuchen Sie eine Funktion $f(x)$ zu finden, so dass die modifizierte Differentialgleichung $f(x)(4x + 3y)dx + f(x)xdy = 0$ exakt ist. (So eine Funktion f wird integrierender Faktor genannt. Ein alternativer Ansatz der Form $f(y)$ ist auch zuweilen erfolgreich.) $f(x) = x^2$

Lösung:Mit dem Hinweis aus der Aufgabenstellung und dem Satz aus a) zur Existenz eines Potentials müssen wir also versuchen ein $f(x)$ zu finden mit $\partial_y (f(x)(4x + 3y)) = \partial_x (f(x)x) \Leftrightarrow 3f(x) = \frac{df(x)}{dx}x + f(x) \Leftrightarrow x\frac{df(x)}{dx} = 2f(x)$. Die allgemeine Lösung dieser linearen homogenen DGL 1. Ordnung ist (geraten und durch Einsetzen bestätigt oder mit Trennung der Variablen berechnet): $f(x) = Kx^2$ mit einer Integrationskonstanten K , die wir zu $K = 1$ setzen.

- c) Finden Sie eine Funktion $F(x, y)$, so dass die allgemeine Lösung der modifizierten Differentialgleichung in der Form $F(x, y) = c$ mit einer unbestimmten Konstanten $c \in \mathbb{R}$ geschrieben werden kann.

Lösung: Die modifizierte DGL lautet nun $(4x^3 + 3yx^2)dx + x^3dy = 0$. Für die Potentialfunktion $F(x, y)$ muss gelten:

$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x^3 + 3yx^2 \Rightarrow F(x, y) = \int (4x^3 + 3yx^2) dx = x^4 + yx^3 + K_1(y)$ mit einer y -abhängigen Integrationskonstanten K_1 .

Entsprechend muss auch gelten:

$\frac{\partial F}{\partial y} = x^3 \Rightarrow F(x, y) = \int (x^3) dy = yx^3 + K_2(x)$ mit einer x -abhängigen Integrationskonstanten K_2 .

Vergleich der beiden Ausdrücke für $F(x, y)$ ergibt die Potentialfunktion $F(x, y) = x^4 + yx^3 + K$ mit einer Konstanten K , die wir null setzen können. Man prüft leicht nach, dass die beiden partiellen Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ tatsächlich korrekt herauskommen. Die implizite allgemeine Lösung der DGL ist also gegeben durch $x^4 + yx^3 = c$ mit einer reellen Integrationskonstanten c . Diese Gleichung lässt sich hier im Fall $x \neq 0$ nach y auflösen, so dass für $x \neq 0$ die allgemeine Lösung in expliziter Form erhalten: $y = \frac{c-x^4}{x^3} = \frac{c}{x^3} - x$. $F(x, y) = x^4 + x^3y$

- d) Prüfen Sie ob damit auch die anfänglich gegebene Differentialgleichung gelöst wird.

Lösung: Die Lösung der modifizierten DGL $(4x^3 + 3yx^2)dx + x^3dy = 0 \Leftrightarrow x^2((4x + 3y)dx + xdy) = 0$ löst für $x \neq 0$ auch die ursprünglich gegebene DGL wie man anhand der faktorisierten Form sieht. Alternativ kann man zur Prüfung die explizite Lösung für $x \neq 0$ in die umgeformte DGL $4x + 3y + x \frac{dy}{dx} = 0$ einsetzen.



DGL/ErsteOrd/Ag_Picard.tex

Aufgabe 11.95 (Picard-Iteration)

kr

Begründen Sie jeweils zunächst, warum das gegebene Anfangswertproblem eindeutig lösbar ist. Berechnen Sie anschließend einige Picard-iterationen, um zu einer Vermutung für die Lösung zu kommen. Beginnen Sie die erste Picard-Iteration jeweils mit einer konstanten Funktion als erste Approximation $y_0(x)$. Bestätigen Sie dann Ihre Vermutung durch Einsetzen in die Differentialgleichung.

a) $y' = xy + 2x - x^3, y(0) = 0$

$y(x) = x^2$

Lösung: Mit der Startlösung $y_0(x) = 0$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y(0) + \int_0^x (\tilde{x} \cdot y_0(\tilde{x}) + 2\tilde{x} - \tilde{x}^3) d\tilde{x} = \int_0^x (\tilde{x} \cdot 0 + 2\tilde{x} - \tilde{x}^3) d\tilde{x} = x^2 - \frac{1}{4}x^4 \\ y_2(x) &= y(0) + \int_0^x (\tilde{x} \cdot y_1(\tilde{x}) + 2\tilde{x} - \tilde{x}^3) d\tilde{x} = \int_0^x (\tilde{x} \cdot (\tilde{x}^2 - \frac{1}{4}\tilde{x}^4) + 2\tilde{x} - \tilde{x}^3) d\tilde{x} = \int_0^x (\tilde{x}^3 - \frac{1}{4}\tilde{x}^5 + 2\tilde{x} - \tilde{x}^3) d\tilde{x} = \\ &= x^2 - \frac{1}{24}x^6 \\ y_3(x) &= y(0) + \int_0^x (\tilde{x} \cdot y_2(\tilde{x}) + 2\tilde{x} - \tilde{x}^3) d\tilde{x} = \int_0^x (\tilde{x} \cdot (\tilde{x}^2 - \frac{1}{24}\tilde{x}^6) + 2\tilde{x} - \tilde{x}^3) d\tilde{x} = x^2 - \frac{1}{24 \cdot 8}x^8 \end{aligned}$$

Vermutung: $y(x) = x^2$ ist die exakte Lösung.

Beweis: $y' = (x^2)' = 2x; x \cdot y + 2x - x^3 = x \cdot x^2 - x^3 = 2x = y'$

b) $y'(x) = 2x(y + 1), y(0) = 0$

$y(x) = e^{x^2} - 1$

Lösung: Mit der Startlösung $y_0(x) = 0$ und $y'(x) = 2x(y + 1) = 2xy + 2x$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y(0) + \int_0^x (2\tilde{x} \cdot y_0(\tilde{x}) + 2\tilde{x}) d\tilde{x} = \int_0^x (2\tilde{x} \cdot 0 + 2\tilde{x}) d\tilde{x} = x^2 \\ y_2(x) &= y(0) + \int_0^x (2\tilde{x} \cdot y_1(\tilde{x}) + 2\tilde{x}) d\tilde{x} = \int_0^x (2\tilde{x} \cdot (\tilde{x}^2) + 2\tilde{x}) d\tilde{x} = \frac{1}{2}x^4 + x^2 \\ y_3(x) &= y(0) + \int_0^x (2\tilde{x} \cdot y_2(\tilde{x}) + 2\tilde{x}) d\tilde{x} = \int_0^x (2\tilde{x} \cdot (\tilde{x}^2 + \frac{1}{2}\tilde{x}^4) + 2\tilde{x}) d\tilde{x} = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^4 + x^2 \end{aligned}$$

$$y_4(x) = y(0) + \int_0^x (2\tilde{x} \cdot y_3(\tilde{x}) + 2\tilde{x}) d\tilde{x} = \int_0^x (2\tilde{x} \cdot (\tilde{x}^2 + \frac{1}{2}\tilde{x}^4 + \frac{1}{6}\tilde{x}^6) + 2\tilde{x}) d\tilde{x} = \frac{1}{24}x^8 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^4 + x^2 = \sum_{k=1}^n \frac{(x^2)^k}{k!}$$

Vermutung: $y(x) = e^{x^2} - 1$ ist die exakte Lösung (denn $y_4(x)$ entspricht den ersten Termen der Taylorreihe von $y(x) = e^{x^2} - 1$).

$$\text{Beweis: } y' = (e^{x^2} - 1)' = 2xe^{x^2}; \quad 2x \cdot (e^{x^2} - 1) + 2x = 2x \cdot e^{x^2} - 2x + 2x = 2xe^{x^2} = y'$$

Bemerkung: Diese beiden linearen inhomogenen Differenzialgleichungen lassen sich alternativ auch mit Variation der Konstanten lösen.



DGL/ErsteOrdSubst/Ag_DGL01_RiccatiMitVorgegebenerLoesung.tex

Aufgabe 12.96 (Riccati'sche Differentialgleichung)

SPF

Gesucht werden alle Lösungen der Differentialgleichung

$$(x^2 + 1) \cdot y'(x) + 8x + 4x \cdot y(x) = (y(x))^2 + 4 \cdot y(x) + 6x^2 + 7.$$

- a) Prüfen Sie, für welche $m \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ die Funktion $y_{m,b}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto y_{m,b}(x) := mx + b$ eine Lösung der Differentialgleichung darstellt!

$$m = 3, b = -2$$

Lösung:

Setzt man $y_{m,b}$ in die Differentialgleichung ein, so ergibt sich wegen $y'_{m,b} = m$ die Bedingung

$$\begin{aligned} (x^2 + 1) \cdot m + 8x + 4x \cdot (mx + b) &= (mx + b)^2 + 4 \cdot (mx + b) + 6x^2 + 7 \\ \iff mx^2 + m + 8x + 4mx^2 + 4bx &= m^2 \cdot x^2 + 2mbx + b^2 + 4mx + 4b + 6x^2 + 7 \\ \iff 5m \cdot x^2 + (4b + 8) \cdot x + m &= (m^2 + 6) \cdot x^2 + (2mb + 4m) \cdot x + (b^2 + 4b + 7). \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert das nicht-lineare Gleichungssystem

$$5m = m^2 + 6, \quad 4b + 8 = 2mb + 4m \quad \text{und} \quad b^2 + 4b + 7 = m.$$

In der ersten Gleichung tritt nur die Variable m auf. Eine quadratische Ergänzung liefert

$$\begin{aligned} 0 &= m^2 - 5m + 6 = m^2 - 2 \cdot m \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 6 \\ &= \left(m - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \left(m - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(m - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right) = (m - 2) \cdot (m - 3), \end{aligned}$$

also $m = 2$ oder $m = 3$. Setzt man das in die zweite Gleichung ein, so ergibt sich für $m = 2$

$$4b + 8 = 2 \cdot 2 \cdot b + 4 \cdot 2 \iff 4b + 8 = 4b + 8 \iff 0 = 0$$

und für $m = 3$

$$4b + 8 = 2 \cdot 3 \cdot b + 4 \cdot 3 \iff 4b + 8 = 6b + 12 \iff -4 = 2b \iff b = -2.$$

Die dritte Gleichung liefert für $m = 2$ die in $\mathbb{R}$ unlösbare Gleichung

$$b^2 + 4 \cdot b + 7 = 2 \iff b^2 + 2 \cdot b \cdot 2 + 2^2 - 4 + 7 - 2 = 0 \iff (b + 2)^2 + 1 = 0$$

und für $m = 3$ und $b = -2$ die wahre Aussage

$$(-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 7 = 3 \iff 4 - 8 + 7 = 3 \iff 3 = 3.$$

Also ist $y_{3,-2}$ eine Lösung der Differentialgleichung und für $m \neq 3$ oder $b \neq -2$ ist $y_{m,b}$ keine Lösung der Differentialgleichung.

- b) Verwenden Sie die in Aufgabenteil a) berechneten Parameter, um die Differentialgleichung für y mit Hilfe der Substitution $g := y - y_{m,b}$ in eine Bernoulli'sche Differentialgleichung der Form $u(x) \cdot g'(x) = v(x) \cdot g(x) + w(x) \cdot (g(x))^\alpha$ für g mit einem $\alpha \in \mathbb{R}$ zu transformieren!

$$(x^2 + 1) \cdot g'(x) = (g(x))^2 + 2x \cdot g(x)$$

Lösung:

Der Ansatz $g(x) = y(x) - 3x + 2$ liefert

$$\begin{aligned}(x^2 + 1) \cdot g'(x) &= (x^2 + 1) \cdot (y'(x) - 3) = (x^2 + 1) \cdot y'(x) - 3x^2 - 3 \\&= (g(x) + 3x - 2)^2 + (4 - 4x) \cdot (g(x) + 3x - 2) + 6x^2 - 8x + 7 - 3x^2 - 3 \\&= (g(x))^2 + 9x^2 + 4 + 6x \cdot g(x) - 4 \cdot g(x) - 12x \\&\quad + 4 \cdot g(x) - 4x \cdot g(x) + 12x - 12x^2 - 8 + 8x + 3x^2 - 8x + 4 \\&= (g(x))^2 + 2x \cdot g(x).\end{aligned}$$

- c) Mittels der Substitution $f := g^{1-\alpha}$ lässt sich die in Aufgabenteil b) gefundene Differentialgleichung für g in eine lineare inhomogene Differentialgleichung für f verwandeln.

$$(x^2 + 1) \cdot f'(x) + 2x \cdot f(x) + 1 = 0$$

Lösung:

Der Ansatz $f(x) = \frac{1}{g(x)}$ liefert

$$(x^2 + 1) \cdot f'(x) = (x^2 + 1) \cdot \frac{-g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{-((g(x))^2 + 2x \cdot g(x))}{(g(x))^2} = -1 - \frac{2x}{g(x)} = -1 - 2x \cdot f(x).$$

- d) Geben Sie alle Lösungen der Differentialgleichungen für f , g und y an!

$$f(x) = \frac{C-x}{x^2+1} \quad g(x) = 0 \text{ oder } g(x) = \frac{x^2+1}{C-x} \quad y(x) = 3x - 2 \text{ oder } y(x) = \frac{x^2+1}{C-x} + 3x - 2$$

Lösung:

Die Differentialgleichung für f ist linear, inhomogen und erster Ordnung. Demzufolge kann sie mit dem Verfahren der Variation der Konstanten gelöst werden. Zunächst wird die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung mittels einer Trennung der Veränderlichen bestimmt:

$$\begin{aligned}(x^2 + 1) \cdot f'_H(x) &= -2x \cdot f_H(x) &\iff & \frac{f'_H(x)}{f_H(x)} = \frac{-2x}{x^2 + 1} \\ \iff \int \frac{f'_H(x)}{f_H(x)} dx &= \int \frac{-2x}{x^2 + 1} dx &\iff & \left[\int \frac{1}{t} dt \right]_{t=f_H(x)} = \left[\int \left(-\frac{1}{s} \right) ds \right]_{s=x^2+1} \\ \iff [\ln(t)]_{t=f_H(x)} + A &= [-\ln(s)]_{s=x^2+1} &\iff & \ln(f_H(x)) + A = \ln((x^2 + 1)^{-1}) \\ & &\implies & f_H(x) = \frac{C}{x^2 + 1}.\end{aligned}$$

Für die partikuläre Lösung empfiehlt sich also der Ansatz $f_P(x) = \frac{D(x)}{x^2+1}$: Damit folgt

$$(x^2 + 1) \cdot f'_P(x) = (x^2 + 1) \cdot \left(\frac{D'(x)}{x^2+1} + D(x) \cdot \frac{(-2x)}{(x^2+1)^2} \right) = D'(x) - 2x \cdot \frac{D(x)}{x^2+1}.$$

Die Differentialgleichung für f fordert

$$(x^2 + 1) \cdot f'_P(x) = -1 - 2x \cdot f_P(x) = -1 - 2x \cdot \frac{D(x)}{x^2+1}.$$

Gleichsetzen der rechten Seiten der beiden Gleichungsketten liefert nach Addition von $\frac{2x \cdot D(x)}{x^2+1}$

$$D'(x) = -1, \quad \text{sprich} \quad D(x) = \int (-1) dx = -x.$$

Eine partikuläre Lösung ergibt sich damit zu $f_P(x) = \frac{D(x)}{x^2+1} = \frac{-x}{x^2+1}$.

Für die Gesamtlösung der Differentialgleichung für f folgt also

$$f(x) = f_H(x) + f_P(x) = \frac{C}{x^2+1} + \frac{-x}{x^2+1} = \frac{C-x}{x^2+1}.$$

Die Bernoulli'sche Differentialgleichung für g wird trivialerweise von der Nullfunktion gelöst. Alle anderen Lösungen ergeben sich aus den Lösungen der Differentialgleichung für f aus $g = f^{-1}$ zu

$$g(x) = 0 \quad \text{oder} \quad g(x) = \frac{x^2+1}{C-x}.$$

Damit folgt für die Lösungen der Differentialgleichung für y aus $y = g + y_{3,-2}$ zu

$$y(x) = 3x - 2 \quad \text{oder} \quad y(x) = \frac{x^2+1}{C-x} + 3x - 2.$$



DGL/MitLaplaceTrans/Ag_DGLOnInhom_LaplaceTransMitDiffImBildraumIdDurchExp.tex

Aufgabe 13.97 (DGL mit Laplace-Transformation und Differentiation im Bildraum lösen)
Prüfen Sie, ob das folgende Anfangswertproblem eine Lösung vom exponentiellen Typ hat!

SPF

$$t \cdot f''(t) + 3 \cdot f'(t) + (5 - t) \cdot f(t) = 3 \cdot e^{-t} \quad \text{mit} \quad f(0) = 0$$

$$f(t) = t \cdot e^{-t}$$

Hinweis: Jede Laplace-Transformierte einer Funktion vom exponentiellen Typ geht mit steigendem Argument gegen 0.

Lösung:

Für eine Lösung f vom exponentiellen Typ sei $F := \mathcal{L}f$ die Laplacetransformierte von f . Mit der Linearität der Laplacetransformation und den Sätzen zur Differentiation in Urbildraum und im Bildraum folgt dann aus der Differentialgleichung für f

$$\begin{aligned} \frac{3}{s+1} &= 3 \cdot \left(\mathcal{L}(\exp \circ (-\text{id})) \right)(s) = \left(\mathcal{L}(3 \cdot \exp \circ (-\text{id})) \right)(s) \\ &\stackrel{\text{DGL}}{=} \left(\mathcal{L}(\text{id} \cdot f'' + 3 \cdot f' + (5 - \text{id}) \cdot f) \right)(s) \\ &= \left(\mathcal{L}(\text{id} \cdot f'') \right)(s) + 3 \cdot \left(\mathcal{L}f' \right)(s) + 5 \cdot \left(\mathcal{L}f \right)(s) - \left(\mathcal{L}(\text{id} \cdot f) \right)(s) \\ &= - \left(\mathcal{L}f'' \right)'(s) + 3 \cdot (s \cdot \left(\mathcal{L}f \right)(s) - f(0)) + 5 \cdot F(s) + \left(\mathcal{L}f' \right)'(s) \\ &= - (s^2 \cdot \left(\mathcal{L}f \right)(s) - s \cdot f(0) - f'(0))' + 3 \cdot (s \cdot F(s) - 0) + 5 \cdot F(s) + F'(s) \\ &= - (2s \cdot \left(\mathcal{L}f \right)(s) + s^2 \cdot \left(\mathcal{L}f' \right)'(s) - f(0)) + 3s \cdot F(s) + 5 \cdot F(s) + F'(s) \\ &= -2s \cdot F(s) - s^2 \cdot F'(s) - 0 + 3s \cdot F(s) + 5 \cdot F(s) + F'(s) \\ &= (s + 5) \cdot F(s) - (s^2 - 1) \cdot F'(s) \\ &= (s + 5) \cdot F(s) - (s - 1) \cdot (s + 1) \cdot F'(s). \end{aligned}$$

Diese lineare inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung für F lösen wir mit Hilfe von Variation der Konstanten:

Allgemeine homogene Lösung bestimmen: Die zugehörige homogene Differentialgleichung $(s + 5) \cdot F_H(s) - (s - 1) \cdot (s + 1) \cdot F_H'(s) = 0$ kann mittels einer Trennung der Veränderlichen gelöst werden:

$$(s + 5) \cdot F_H(s) - (s - 1) \cdot (s + 1) \cdot F_H'(s) = 0 \iff \frac{F_H'(s)}{F_H(s)} = \frac{s + 5}{(s - 1) \cdot (s + 1)}$$

Um die rechte Seite dieser Gleichung integrieren zu können, machen wir eine Partialbruchzerlegung: Seien $A \in \mathbb{R}$ und $B \in \mathbb{R}$ mit $\frac{s+5}{(s-1) \cdot (s+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1}$ für alle $s \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$. Multipliziert man mit dem Hauptnenner, so folgt also für alle $s \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

$$s + 5 = A \cdot (s + 1) + B \cdot (s - 1) = As + A + Bs - B = (A + B) \cdot s + (A - B).$$

Mit $s = 0$ und $s = 2$ ergibt sich also das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 5 = A - B \quad \text{und} \quad 7 = 3A + B &\iff B = A - 5 \quad \text{und} \quad 12 = 4A \\ &\iff A = 3 \quad \text{und} \quad B = -2, \end{aligned}$$

wobei im ersten Schritt die erste Gleichung nach B umgestellt und die zweite durch die Summe der beiden Gleichungen ersetzt wurde.

Integriert man in der Gleichung $\frac{F_H'(s)}{F_H(s)} = \frac{3}{s-1} + \frac{-2}{s+1}$ auf beiden Seiten nach s , so erhält man ein $D \in \mathbb{R}$ mit $\ln(|F_H(s)|) = 3 \cdot \ln(|s - 1|) - 2 \cdot \ln(|s + 1|) + D$.

Für die differenzierbare Lösung der homogenen Differentialgleichung $(s+5) \cdot F_H(s) - (s^2-1) \cdot F_H'(s) = 0$ gibt es also ein $C \in \mathbb{R}$ mit

$$F_H(s) = C \cdot \frac{(s-1)^3}{(s+1)^2}.$$

Eine partikuläre Lösung bestimmen: Für die partikuläre Lösung wenden wir das Verfahren der Variation der Konstanten an: Der Ansatz $F_P(s) = G(s) \cdot \frac{(s-1)^3}{(s+1)^2}$ liefert

$$\begin{aligned} F_P'(s) &= G'(s) \cdot \frac{(s-1)^3}{(s+1)^2} + G(s) \cdot \frac{3 \cdot (s-1)^2 \cdot (s+1)^2 - (s-1)^3 \cdot 2 \cdot (s+1)^1}{\left((s+1)^2\right)^2} \\ &= G'(s) \cdot \frac{(s-1)^3}{(s+1)^2} + G(s) \cdot (s-1)^2 \cdot \frac{(3s+3) - (s-1) \cdot 2}{(s+1)^3} \\ &= G'(s) \cdot \frac{(s-1)^3}{(s+1)^2} + G(s) \cdot \frac{(s-1)^2 \cdot (s+5)}{(s+1)^3}. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung für F liefert

$$\begin{aligned} \frac{3}{s+1} &= (s+5) \cdot F_P(s) - (s-1) \cdot (s+1) \cdot F_P'(s) \\ &= (s+5) \cdot G(s) \cdot \frac{(s-1)^3}{(s+1)^2} - (s-1) \cdot (s+1) \cdot \left(G'(s) \cdot \frac{(s-1)^3}{(s+1)^2} + G(s) \cdot \frac{(s-1)^2 \cdot (s+5)}{(s+1)^3} \right) \\ &= G(s) \cdot \frac{(s-1)^3 \cdot (s+5)}{(s+1)^2} - G'(s) \cdot \frac{(s-1)^4}{s+1} - G(s) \cdot \frac{(s-1)^3 \cdot (s+5)}{(s+1)^2} \\ &= -G'(s) \cdot \frac{(s-1)^4}{s+1}, \end{aligned}$$

also

$$G(s) = \int G'(s) \, ds = \int \frac{-3}{(s-1)^4} \, ds = \frac{1}{(s-1)^3}.$$

Setzt man dies in den Ansatz für F_P ein, so ergibt sich $F_P(s) = \frac{1}{(s-1)^3} \cdot \frac{(s-1)^3}{(s+1)^2} = \frac{1}{(s+1)^2}$.

Als Gesamtlösung der Differentialgleichung für F ergibt sich also

$$F(s) = F_H(s) + F_P(s) = C \cdot \frac{(s-1)^3}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^2}.$$

Wegen

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{(s-1)^3}{(s+1)^2} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{s}\right)^3}{s^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{s}\right)^2} = \lim_{s \rightarrow \infty} \underbrace{s}_{\rightarrow \infty} \cdot \frac{\overbrace{\left(1 - \frac{1}{s}\right)^3}^{\rightarrow 1}}{\underbrace{\left(1 + \frac{1}{s}\right)^2}_{\rightarrow 1}} = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{(s+1)^2} = 0$$

gilt $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$ nur für $C = 0$. Da f vom exponentiellen Typ ist, muss also $C = 0$ gelten.

Also ist $F(s) = \frac{1}{(s+1)^2} = \frac{1!}{(s-(-1))^2}$, was rücktransformiert $f(t) = t \cdot e^{-t}$ liefert.



DGL/MitLaplaceTrans/Ag_DGLOnInhom_MitLaplaceTrans03Abschnittsweise.tex

Aufgabe 13.98 (Anfangswertproblem mit verschiedenen Inhomogenitäten: Laplace-Transformation)

spf

Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \alpha < \beta$. Prüfen Sie für das folgende Anfangswertproblem und jede der angegebenen rechten Seiten, ob es sich mit Hilfe von Laplace-Transformation lösen lässt:

$$y'''(x) + 3y''(x) + 7y'(x) + 5y(x) = u(x) \quad \text{mit} \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3 \quad \text{und} \quad y''(0) = 5$$

Lösung:

Seien $Y := \mathcal{L}y$ und $U := \mathcal{L}u$. Dann gilt $(\mathcal{L}y''')(s) = s^3 \cdot (\mathcal{L}y)(s) - y(0) \cdot s^2 - y'(0) \cdot s - y''(0) = s^3 \cdot Y(s) - s^2 - 3s - 5$, $(\mathcal{L}y'')(s) = s^2 \cdot (\mathcal{L}y)(s) - y(0) \cdot s - y'(0) = s^2 \cdot Y(s) - s - 3$ und $(\mathcal{L}y')(s) = s \cdot (\mathcal{L}y)(s) - y(0) = s \cdot Y(s) - 1$.

Mit der Differentialgleichung folgt für alle s

$$\begin{aligned} U(s) &= \mathcal{L}(y''' + 3y'' + 7y' + 5y)(s) \\ &= (s^3 \cdot Y(s) - s^2 - 3s - 5) + 3 \cdot (s^2 \cdot Y(s) - s - 3) + 7 \cdot (s \cdot Y(s) - 1) + 5 \cdot Y(s) \\ &= (s^3 + 3s^2 + 7s + 5) \cdot Y(s) + (-s^2 - 6s - 21). \end{aligned}$$

Es ist $(-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + 7 \cdot (-1) + 5 = -1 + 3 - 7 + 5 = -8 + 8 = 0$.

Für alle $s \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{s^3 + 3s^2 + 7s + 5}{-(s^3 + s^2)} &= (s+1) \cdot (s^2 + 2s + 5) \\ &= (s+1) \cdot (s^2 + 2 \cdot s \cdot 1 + 1^2 - 1 + 5) \\ \frac{2s^2 + 7s + 5}{-(2s^2 + 2s)} &= (s+1) \cdot ((s+1)^2 + 4) \\ &= (s+1) \cdot (s+1+2i) \cdot (s+1-2i). \\ \frac{5s+5}{-(5s+5)} &= 0 \end{aligned}$$

Sei $M := \{-1-2i; -1; -1+2i\}$.

a) $u(x) = 0$

$$e^{-x} \cdot (4 - 3 \cdot \cos(2x) + 2 \cdot \sin(2x))$$

Lösung:

Ist $u(x) = 0$, so ergibt sich auch $U(s) = 0$.

Dann gilt also nach der Differentialgleichung $Y(s) = \frac{s^2 + 6s + 21}{s^3 + 3s^2 + 7s + 5}$.

Seien $A \in \mathbb{C}$, $B \in \mathbb{C}$ und $C \in \mathbb{C}$ mit $\frac{s^2+6s+21}{(s+1) \cdot (s^2+2s+5)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+5}$ für alle $s \in \mathbb{C} \setminus M$.

Multiplizieren mit dem Hauptnenner liefert für alle $s \in \mathbb{C} \setminus M$

$$\begin{aligned} s^2 + 6s + 21 &= A \cdot (s^2 + 2s + 5) + (Bs + C) \cdot (s + 1) \\ &= As^2 + 2As + 5A + Bs^2 + Bs + Cs + C \\ &= (A + B) \cdot s^2 + (2A + B + C) \cdot s + (5A + C). \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ 5 & 0 & 1 & 21 \end{array} \right) &\left\| \begin{array}{l} + \\ \cdot (-1) \end{array} \right. &\Leftrightarrow &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & -15 \\ 5 & 0 & 1 & 21 \end{array} \right) &\left\| \begin{array}{l} + \\ \cdot (-1) \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & 16 \\ -3 & 1 & 0 & -15 \\ 5 & 0 & 1 & 21 \end{array} \right) &\left\| \begin{array}{l} \cdot \frac{3}{4} \\ + \\ \cdot \frac{-5}{4} \end{array} \right. &\cdot \frac{1}{4} &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Also gilt $A = 4$, $B = -3$ und $C = 1$. Damit folgt für alle s

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}y)(s) = Y(s) &= \frac{4}{s+1} + \frac{-3s+1}{s^2+2s+5} = \frac{4}{s+1} + \frac{-3s-3+4}{s^2+2s+5} \\ &= 4 \cdot \frac{1}{s-(-1)} + (-3) \cdot \frac{s-(-1)}{(s-(-1))^2+2^2} + 2 \cdot \frac{2}{(s-(-1))^2+2^2} \end{aligned}$$

Rücktransformiert ergibt sich für alle $x \in \mathbb{R}$

$$y(x) = e^{-x} \cdot (4 - 3 \cdot \cos(2x) + 2 \cdot \sin(2x)).$$

b) $u(x) = 20$

$$4 - e^{-x} - 2 \cdot e^{-x} \cdot \cos(2x)$$

Lösung:

Für $u(x) = 20$ ergibt sich $U(s) = \frac{20}{s}$.

Sei $Y_H(s) := \frac{s^2 + 6s + 21}{s^3 + 3s^2 + 7s + 5}$ der homogene Teil der Laplace-Transformierten von y . Dann gilt mit $Y_P := Y - Y_H$ nach der Differentialgleichung $Y_P(s) = \frac{\frac{20}{s}}{s^3 + 3s^2 + 7s + 5} = \frac{20}{s \cdot (s+1) \cdot (s^2 + 2s + 5)}$. Seien $A \in \mathbb{C}$, $B \in \mathbb{C}$, $C \in \mathbb{C}$ und $D \in \mathbb{C}$ mit $\frac{20}{s \cdot (s+1) \cdot (s^2 + 2s + 5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+2s+5}$ für alle $s \in \mathbb{C} \setminus (M \cup \{0\})$.

Multiplizieren mit dem Hauptnenner liefert für alle $s \in \mathbb{C} \setminus (M \cup \{0\})$

$$\begin{aligned} 20 &= A \cdot (s+1) \cdot (s^2 + 2s + 5) + B \cdot s \cdot (s^2 + 2s + 5) + (Cs + D) \cdot s \cdot (s+1) \\ &= As^3 + 2As^2 + 5As + As^2 + 2As + 5A + Bs^3 + 2Bs^2 + 5Bs + Cs^3 + Cs^2 + Ds^2 + Ds \\ &= (A + B + C) \cdot s^3 + (3A + 2B + C + D) \cdot s^2 + (7A + 5B + D) \cdot s + (5A). \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{array} \right) \left\| \cdot \frac{-1}{5} \quad \cdot \frac{-3}{5} \quad \cdot \frac{-7}{5} \quad \cdot \frac{1}{5} \right. + \\ &\quad \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -12 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & -28 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right) \left\| \cdot 1 \quad \cdot 1 \quad \cdot (-1) \right. + \\ &\quad \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -20 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right) \left\| \cdot \frac{-1}{4} \quad \cdot \frac{-1}{4} \quad \cdot \frac{1}{4} \right. \\ &\quad \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right) \left\| \cdot (-1) \right. \end{aligned}$$

Also gilt $A = 4$, $B = -5$, $C = 1$ und $D = -3$.

Damit folgt für alle s

$$\begin{aligned} Y_P(s) &= \frac{4}{s} + \frac{-5}{s+1} + \frac{s-3}{s^2+2s+5} = \frac{4}{s} + \frac{-5}{s+1} + \frac{s+1-4}{s^2+2s+5} \\ &= 4 \cdot \frac{1}{s} + (-5) \cdot \frac{1}{s-(-1)} + 1 \cdot \frac{s-(-1)}{(s-(-1))^2+2^2} - 2 \cdot \frac{2}{(s-(-1))^2+2^2} \end{aligned}$$

In Aufgabenteil a) wurde $Y_H = 4 \cdot \frac{1}{s-(-1)} + (-3) \cdot \frac{s-(-1)}{(s-(-1))^2+2^2} + 2 \cdot \frac{2}{(s-(-1))^2+2^2}$ berechnet.

Damit folgt

$$Y(s) = Y_H(s) + Y_P(s) = 4 \cdot \frac{1}{s} + (-1) \cdot \frac{1}{s-(-1)} + (-2) \cdot \frac{s-(-1)}{(s-(-1))^2+2^2}.$$

Rücktransformiert ergibt sich für alle $x \in \mathbb{R}$

$$y(x) = 4 - e^{-x} - 2 \cdot e^{-x} \cdot \cos(2x).$$

$$\text{c) } u(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } 0 \leq x < \alpha \\ p, & \text{für } \alpha \leq x < \beta \\ q, & \text{für } x \geq \beta \end{cases}$$

$$\frac{u(x)}{5} + e^{-x} \cdot \left(4 - \frac{u(x)}{4} - \left(3 - \frac{u(x)}{20} \right) \cdot \cos(2x) + \left(2 - \frac{u(x)}{10} \right) \cdot \sin(2x) \right)$$

Lösung:

Wegen $u(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } 0 \leq x < \alpha \\ p, & \text{für } \alpha \leq x < \beta \\ q, & \text{für } x \geq \beta \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{für } 0 \leq x < \alpha \\ p, & \text{für } \alpha \leq x \end{cases} + \begin{cases} 0, & \text{für } 0 \leq x < \beta \\ q-p, & \text{für } x \geq \beta \end{cases}$ folgt mit dem Verschiebungssatz

$$U(s) = e^{-\alpha s} \cdot \frac{p}{s} + e^{-\beta s} \cdot \frac{q-p}{s}.$$

Sei $Y_H(s) := \frac{s^2 + 6s + 21}{s^3 + 3s^2 + 7s + 5}$ der homogene Teil der Laplace-Transformierten von y .

Dann gilt mit $Y_P := Y - Y_H$ nach der Differentialgleichung

$$Y_P(s) = \frac{e^{-\alpha s} \cdot \frac{p}{s} + e^{-\beta s} \cdot \frac{q-p}{s}}{s^3 + 3s^2 + 7s + 5} = e^{-\alpha s} \cdot \frac{p}{s \cdot (s+1) \cdot (s^2 + 2s + 5)} + e^{-\beta s} \cdot \frac{q-p}{s \cdot (s+1) \cdot (s^2 + 2s + 5)}.$$

Seien $A_t \in \mathbb{C}$, $B_t \in \mathbb{C}$, $C_t \in \mathbb{C}$ und $D_t \in \mathbb{C}$ mit $\frac{t}{s \cdot (s+1) \cdot (s^2 + 2s + 5)} = \frac{A_t}{s} + \frac{B_t}{s+1} + \frac{C_t s + D_t}{s^2 + 2s + 5}$ für alle $s \in \mathbb{C} \setminus (M \cup \{0\})$ und alle $t \in \mathbb{C}$.

Multiplizieren mit dem Hauptnenner liefert für alle $s \in \mathbb{C} \setminus (M \cup \{0\})$

$$\begin{aligned} t &= A_t \cdot (s+1) \cdot (s^2 + 2s + 5) + B_t \cdot s \cdot (s^2 + 2s + 5) + (C_t s + D_t) \cdot s \cdot (s+1) \\ &= A_t s^3 + 2A_t s^2 + 5A_t s + A_t s^2 + 2A_t s + 5A_t + B_t s^3 + 2B_t s^2 + 5B_t s + C_t s^3 + C_t s^2 + D_t s^2 + D_t s \\ &= (A_t + B_t + C_t) \cdot s^3 + (3A_t + 2B_t + C_t + D_t) \cdot s^2 + (7A_t + 5B_t + D_t) \cdot s + (5A_t). \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert das lineare Gleichungssystem
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & t \end{array} \right)$$

Das entspricht dem Gleichungssystem aus Aufgabenteil b), mit dem Unterschied, dass die rechte Seite mit $\frac{t}{20}$ multipliziert wurde. Die Lösung dieses Gleichungssystems entspricht der Lösung von oben, wenn sie noch mit $\frac{t}{20}$ multipliziert wird.

Also gilt $A_t = \frac{t}{5}$, $B_t = -\frac{t}{4}$, $C_t = \frac{t}{20}$ und $D_t = -\frac{3t}{20}$.

Damit folgt für alle s

$$\begin{aligned} Y_P(s) &= e^{-\alpha s} \cdot \left(\frac{\frac{p}{5}}{s} + \frac{-\frac{p}{4}}{s+1} + \frac{\frac{p}{20} \cdot s - \frac{3p}{20}}{s^2 + 2s + 5} \right) + e^{-\beta s} \cdot \left(\frac{\frac{q-p}{5}}{s} + \frac{-\frac{q-p}{4}}{s+1} + \frac{\frac{q-p}{20} \cdot s - \frac{3(q-p)}{20}}{s^2 + 2s + 5} \right) \\ &= \left(e^{-\alpha s} \cdot p + e^{-\beta s} \cdot (q-p) \right) \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{s} + \frac{-1}{4} \cdot \frac{1}{s-(-1)} + \frac{1}{20} \cdot \frac{s-(-1)}{(s-(-1))^2 + 2^2} + \frac{-1}{10} \cdot \frac{2}{(s-(-1))^2 + 2^2} \right). \end{aligned}$$

In Aufgabenteil a) wurde $Y_H = 4 \cdot \frac{1}{s-(-1)} + (-3) \cdot \frac{s-(-1)}{(s-(-1))^2 + 2^2} + 2 \cdot \frac{2}{(s-(-1))^2 + 2^2}$ berechnet.

Rücktransformiert folgt mit $Y(s) = Y_H(s) + Y_P(s)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ aus dem Verschiebungssatz

$$y(x) = \frac{u(x)}{5} + e^{-x} \cdot \left(4 - \frac{u(x)}{4} - \left(3 - \frac{u(x)}{20} \right) \cdot \cos(2x) + \left(2 - \frac{u(x)}{10} \right) \cdot \sin(2x) \right).$$

**Aufgabe 13.99** (Anfangswertprobleme lösen)

Lösen Sie die folgenden Anfangswert-Probleme!

a) $u''(x) + u(x) = \cos(2x)$ mit $u(0) = 1$ und $u'(0) = 0$

$$A \cos(x) + B \sin(x) - \frac{1}{3} \cos(2x), A = \frac{4}{3}, B = 0$$

Lösung mit Hilfe von Laplace-Transformation:Sei $U := \mathcal{L}u$. Dann gilt $(\mathcal{L}u'')(s) = s^2 \cdot (\mathcal{L}u)(s) - u(0) \cdot s - u'(0) = s^2 \cdot U(s) - s$.Mit der Differentialgleichung folgt für alle s

$$\mathcal{L}(u'' + u)(s) = (s^2 \cdot U(s) - s) + U(s) = (s^2 + 1) \cdot U(s) + (-s) = \frac{s}{s^2 + 4} = \mathcal{L}(\cos(2 \operatorname{id}))(s).$$

Damit folgt
$$U(s) = \frac{\frac{s}{s^2+4} + s}{s^2+1} = \frac{s^3+5s}{(s^2+4) \cdot (s^2+1)}.$$
 Sei $M := \{-2i; -i; i; 2i\}$.

Seien $A \in \mathbb{C}$, $B \in \mathbb{C}$, $C \in \mathbb{C}$ und $D \in \mathbb{C}$ mit $\frac{s^3+5s}{(s^2+4) \cdot (s^2+1)} = \frac{As+B}{s^2+4} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$ für alle $s \in \mathbb{C} \setminus M$. Multiplizieren mit dem Hauptnenner liefert für alle $s \in \mathbb{C} \setminus M$

$$\begin{aligned} s^3 + 5s &= (As + B) \cdot (s^2 + 1) + (Cs + D) \cdot (s^2 + 4) \\ &= As^3 + As + Bs^2 + B + Cs^3 + 4Cs + Ds^2 + 4D \\ &= (A + C) \cdot s^3 + (B + D) \cdot s^2 + (A + 4C) \cdot s + (B + 4D). \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right) \left\| \begin{array}{l} \cdot (-1) \\ \cdot (-1) \\ + \\ + \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow &\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right) \left\| \begin{array}{l} + \\ + \\ \cdot \frac{-1}{3} \\ \cdot \frac{-1}{3} \end{array} \right. + \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \left\| \begin{array}{l} \cdot \frac{1}{3} \\ \cdot \frac{1}{3} \\ \cdot \frac{1}{3} \\ \cdot \frac{1}{3} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Also gilt $A = -\frac{1}{3}$, $B = 0$, $C = \frac{4}{3}$ und $D = 0$.

Damit folgt
$$(\mathcal{L}u)(s) = U(s) = \frac{-\frac{1}{3} \cdot s + 0}{s^2 + 4} + \frac{\frac{4}{3} \cdot s + 0}{s^2 + 1} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{s}{s^2 + 2^2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{s}{s^2 + 1^2} \quad \text{für alle } s.$$

Rücktransformiert ergibt sich
$$u(x) = -\frac{1}{3} \cdot \cos(2x) + \frac{4}{3} \cdot \cos(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Lösung mit Hilfe eines Ansatzes vom Typ der rechten Seite:Die zugehörige homogene Gleichung lässt sich mit Hilfe des Ansatzes $u_H(x) = e^{\lambda x}$ mit $u'_H(x) = \lambda \cdot e^{\lambda x}$ und $u''_H(x) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}$ lösen. Eingesetzt in die homogene Differentialgleichung ergibt sich

$$0 = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} + e^{\lambda x} = (\lambda^2 + 1) \cdot e^{\lambda x} = (\lambda - i) \cdot (\lambda + i) \cdot e^{\lambda x}.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist also mit $\alpha \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{C}$, $A \in \mathbb{C}$ und $B \in \mathbb{C}$

$$u_H(x) = \alpha \cdot e^{ix} + \beta \cdot e^{-ix} = A \cdot \cos(x) + B \cdot \sin(x).$$

Die Frequenz $0 + 2i = 2i$ der rechten Seite ist keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms. In der partikulären Lösung erhalten wir also keine Resonanz, sprich $u_P(x) := C \cdot \cos(2x) + D \cdot \sin(2x)$.

Es folgt $u'_p(x) = -2C \cdot \sin(2x) + 2D \cdot \cos(2x)$ und $u''_p(x) = -4C \cdot \cos(2x) - 4D \cdot \sin(2x)$.

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= u''_p(x) + u_p(x) = -4C \cdot \cos(2x) - 4D \cdot \sin(2x) + C \cdot \cos(2x) + D \cdot \sin(2x) \\ &= -3C \cdot \cos(2x) - 3D \cdot \sin(2x).\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert $-3C = 1$ und $-3D = 0$, sprich $C = -\frac{1}{3}$ und $D = 0$.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist also

$$u(x) = u_H(x) + u_p(x) = A \cdot \cos(x) + B \cdot \sin(x) - \frac{1}{3} \cdot \cos(2x).$$

Damit folgt $u'(x) = -A \cdot \sin(x) + B \cdot \cos(x) + \frac{2}{3} \cdot \sin(2x)$.

Mit $u(0) = 1$ und $u'(0) = 0$ ergibt sich das lineare Gleichungssystem $A - \frac{1}{3} = 1$ und $B = 0$, welches durch $A = \frac{4}{3}$ und $B = 0$ gelöst wird. Also gilt

$$u(x) = \frac{4}{3} \cdot \cos(x) - \frac{1}{3} \cdot \cos(2x).$$

b) $g''(t) + 2g'(t) + g(t) = 12e^t + 2$ mit $g(0) = 5$ und $g'(0) = 7$

$$A \cdot e^{-t} + B \cdot t \cdot e^{-t} + 3 \cdot e^t + 2, A = 0, B = 4$$

Lösung mit Hilfe von Laplace-Transformation:

Sei $G := \mathcal{L}g$. Dann gilt $(\mathcal{L}g'')(s) = s^2 \cdot (\mathcal{L}g)(s) - g(0) \cdot s - g'(0) = s^2 \cdot G(s) - 5s - 7$ und $(\mathcal{L}g')(s) = s \cdot \mathcal{L}g(s) - g(0) = s \cdot G(s) - 5$.

Mit der Differentialgleichung folgt für alle s

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(g'' + 2g' + g)(s) &= (s^2 \cdot G(s) - 5s - 7) + 2 \cdot (s \cdot G(s) - 5) + G(s) \\ &= (s^2 + 2s + 1) \cdot G(s) + (-5s - 17) \\ &= \frac{2}{s} + \frac{12}{s-1} = \mathcal{L}(2 + 12 \cdot \exp)(s).\end{aligned}$$

Damit folgt

$$G(s) = \frac{\frac{2}{s} + \frac{12}{s-1} + 5s + 17}{s^2 + 2s + 1} = \frac{2s - 2 + 12s + 5s^3 + 17s^2 - 5s^2 - 17s}{s \cdot (s-1) \cdot (s+1)^2} = \frac{5s^3 + 12s^2 - 3s - 2}{s \cdot (s-1) \cdot (s+1)^2}.$$

Seien $A \in \mathbb{C}$, $B \in \mathbb{C}$, $C \in \mathbb{C}$ und $D \in \mathbb{C}$ mit $\frac{5s^3+12s^2-3s-2}{s \cdot (s-1) \cdot (s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{(s+1)^2}$ für alle $s \in \mathbb{C} \setminus \{-1; 0; 1\}$. Multiplizieren mit dem Hauptnenner liefert für alle $s \in \mathbb{C} \setminus \{-1; 0; 1\}$

$$\begin{aligned}5s^3 + 12s^2 - 3s - 2 &= A \cdot (s^3 + 2s^2 + s - s^2 - 2s - 1) + B \cdot (s^3 + 2s^2 + s) + C \cdot (s^3 - s) + D \cdot (s^2 - s) \\ &= (A + B + C) \cdot s^3 + (A + 2B + D) \cdot s^2 + (-A + B - C - D) \cdot s + (-A).\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}&\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 12 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -2\end{array}\right) \begin{array}{l} \parallel + \quad \cdot 1 \\ + \quad \cdot 1 \\ + \quad \cdot 1 \\ \cdot (-1) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c}0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2\end{array}\right) \begin{array}{l} \parallel \cdot 1 \\ + \end{array} \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c}0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 12 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2\end{array}\right) \begin{array}{l} \parallel + \\ + \quad \cdot \frac{-1}{4} \\ + \quad \cdot \frac{-1}{2} \\ \cdot \frac{1}{4} \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c}0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2\end{array}\right)\end{aligned}$$

Also gilt $A = 2$, $B = 3$, $C = 0$ und $D = 4$.

Damit folgt $(\mathcal{L}g)(s) = G(s) = \frac{2}{s} + \frac{3}{s-1} + \frac{0}{s+1} + \frac{4}{(s+1)^2} = 2 \cdot \frac{1}{s} + 3 \cdot \frac{1}{s-1} + 4 \cdot \frac{1!}{(s-(-1))^2}$
für alle s . Rücktransformiert ergibt sich $g(t) = 2 + 3e^t + 4t \cdot e^{-t}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Lösung mit Hilfe eines Ansatzes vom Typ der rechten Seite:

Die zugehörige homogene Gleichung lässt sich mit Hilfe des Ansatzes $g_H(t) = e^{\lambda t}$ mit $g'_H(t) = \lambda \cdot e^{\lambda t}$ und $g''_H(t) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda t}$ lösen. Eingesetzt in die homogene Differentialgleichung ergibt sich

$$0 = \lambda^2 \cdot e^{\lambda t} + 2\lambda \cdot e^{\lambda t} + e^{\lambda t} = (\lambda^2 + 2\lambda + 1) \cdot e^{\lambda t} = (\lambda + 1)^2 \cdot e^{\lambda t}.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist also mit $A \in \mathbb{C}$ und $B \in \mathbb{C}$

$$g_H(t) = A \cdot e^{-t} + B \cdot t \cdot e^{-t}.$$

Die Frequenzen $1 + 0 \cdot i = 1$ und $0 + 0 \cdot i = 0$ der rechten Seite sind keine Nullstellen des charakteristischen Polynoms. In der partikulären Lösung erhalten wir also keine Resonanz, sprich $g_P(t) := C \cdot e^t + D$ mit $g'_P(t) = C \cdot e^t$ und $g''_P(t) = C \cdot e^t$.

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$12e^t + 2 = C \cdot e^t + 2 \cdot C \cdot e^t + (C \cdot e^t + D) = 4C \cdot e^t + D.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert $4C = 12$ und $D = 2$, sprich $C = 3$ und $D = 2$.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist also

$$g(t) = g_H(t) + g_P(t) = A \cdot e^{-t} + B \cdot t \cdot e^{-t} + 3 \cdot e^t + 2.$$

Damit folgt $g'(t) = -A \cdot e^{-t} + B \cdot e^{-t} - B \cdot t \cdot e^{-t} + 3 \cdot e^t$.

Mit $g(0) = 5$ und $g'(0) = 7$ ergibt sich das lineare Gleichungssystem $A + 0 + 3 + 2 = 5$ und $-A + B - 0 + 3 = 7$, welches durch $A = 0$ und $B = 4$ gelöst wird. Also gilt

$$g(t) = 4t \cdot e^{-t} + 3 \cdot e^t + 2.$$

c) $v''(t) - 5v'(t) + 4v(t) = 16t$ mit $v(0) = 2$ und $v'(0) = 4$

$$5 + 4t + A \cdot e^t + B \cdot e^{4t}, A = -4, B = 1$$

Lösung mit Hilfe von Laplace-Transformation:

Sei $V := \mathcal{L}v$. Dann gilt $(\mathcal{L}v'')(s) = s^2 \cdot (\mathcal{L}v)(s) - v(0) \cdot s - v'(0) = s^2 \cdot V(s) - 2s - 4$ und $(\mathcal{L}v')(s) = s \cdot (\mathcal{L}v)(s) - v(0) = s \cdot V(s) - 2$.

Mit der Differentialgleichung folgt für alle s

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(v'' - 5v' + 4v)(s) &= (s^2 \cdot V(s) - 2s - 4) - 5 \cdot (s \cdot V(s) - 2) + 4 \cdot V(s) \\ &= (s^2 - 5s + 4) \cdot V(s) + (-2s + 6) = \frac{16}{s^2} = \mathcal{L}(16 \cdot \text{id})(s). \end{aligned}$$

Für alle $s \in \mathbb{C}$ ist

$$\begin{aligned} s^2 - 5s + 4 &= s^2 - 2 \cdot s \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 4 = \left(s - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \\ &= \left(s - \frac{5}{2} + \frac{3}{2}\right) \cdot \left(s - \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\right) = (s - 1) \cdot (s - 4). \end{aligned}$$

Damit folgt $V(s) = \frac{\frac{16}{s^2} + 2s - 6}{s^2 - 5s + 4} = \frac{2s^3 - 6s^2 + 16}{s^2 \cdot (s - 1) \cdot (s - 4)}.$

Seien $A \in \mathbb{C}$, $B \in \mathbb{C}$, $C \in \mathbb{C}$ und $D \in \mathbb{C}$ mit $\frac{s^3-4s^2+1}{s^2 \cdot (s-1) \cdot (s-4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{s-4}$ für alle $s \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1; 4\}$. Multiplizieren mit dem Hauptnenner liefert für alle $s \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1; 4\}$

$$\begin{aligned} 2s^3 - 6s^2 + 16 &= A \cdot (s^3 - 5s^2 + 4s) + B \cdot (s^2 - 5s + 4) + C \cdot (s^3 - s^2) + D \cdot (s^3 - 4s^2) \\ &= (A + C + D) \cdot s^3 + (-5A + B - 4C - D) \cdot s^2 + (4A - 5B) \cdot s + (4B). \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert das lineare Gleichungssystem

$$4B = 16, \quad 4A - 5B = 0, \quad -5A + B - 4C - D = -6 \quad \text{und} \quad A + C + D = 2.$$

Addiert man die dritte und die vierte Gleichung zu $-4A + B - 3C = -4$, so folgt

$$\begin{aligned} B &= 4, \quad A = \frac{5}{4} \cdot B = 5, \quad C = \frac{-4-B+4A}{-3} = \frac{-4-4+20}{-3} = -4 \\ \text{und} \quad D &= 2 - A - C = 2 - 5 + 4 = 1. \end{aligned}$$

Damit folgt $(\mathcal{L}v)(s) = V(s) = \frac{5}{s} + \frac{4}{s^2} + \frac{-4}{s-1} + \frac{1}{s-4} = 5 \cdot \frac{0!}{s} + 4 \cdot \frac{1!}{s^2} - 4 \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-4}$ für alle s . Rücktransformiert ergibt sich $v(t) = 5 + 4t - 4e^t + e^{4t}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Lösung mit Hilfe eines Ansatzes vom Typ der rechten Seite:

Die zugehörige homogene Gleichung lässt sich mit Hilfe des Ansatzes $v_H(t) = e^{\lambda t}$ mit $v'_H(t) = \lambda \cdot e^{\lambda t}$ und $v''_H(t) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda t}$ lösen. Eingesetzt in die homogene Differentialgleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda^2 \cdot e^{\lambda t} - 5\lambda \cdot e^{\lambda t} + 4e^{\lambda t} = (\lambda^2 - 5\lambda + 4) \cdot e^{\lambda t} = \left(\lambda^2 - 2 \cdot \lambda \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 4\right) \cdot e^{\lambda t} \\ &= \left(\left(\lambda - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right) \cdot e^{\lambda t} = \left(\lambda - \frac{5}{2} + \frac{3}{2}\right) \cdot \left(\lambda - \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\right) \cdot e^{\lambda t} = (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 4) \cdot e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist also mit $A \in \mathbb{C}$ und $B \in \mathbb{C}$

$$v_H(t) = A \cdot e^t + B \cdot e^{4t}.$$

Die Frequenz $0+0 \cdot i = 0$ der rechten Seite ist keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms. In der partikulären Lösung erhalten wir also keine Resonanz, sprich $v_P(t) := C \cdot t + D$ mit $v'_P(t) = C$ und $v''_P(t) = 0$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$16t = 0 - 5 \cdot C + 4 \cdot (Ct + D) = 4C \cdot e^t + (-5C + 4D).$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert $4C = 16$ und $-5C + 4D = 0$, sprich $C = 4$ und $D = \frac{5}{4} \cdot C = 5$.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist also

$$v(t) = v_H(t) + v_P(t) = A \cdot e^t + B \cdot e^{4t} + 4t + 5.$$

Damit folgt $v'(t) = A \cdot e^t + 4B \cdot e^{4t} + 4$.

Mit $v(0) = 2$ und $v'(0) = 4$ ergibt sich das lineare Gleichungssystem $A + B + 5 = 2$ und $A + 4B + 4 = 4$, sprich $A + B = -3$ und $A = -4B$, welches durch Einsetzen der zweiten Gleichung in die erste zu $-3B = -3$ und $A = -4B$, also von $B = 1$ und $A = -4$ gelöst wird.

Also gilt

$$v(t) = -4e^t + e^{4t} + 4t + 5.$$

$$A \cdot e^{-x} + B \cdot e^{-9x} + 2 \cdot \sin(3x), A = 1, B = 0$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist also mit $A \in \mathbb{C}$ und $B \in \mathbb{C}$

$$f_H(x) = A \cdot e^{-x} + B \cdot e^{-9x}.$$

Die Frequenz $0+3 \cdot i = 3i$ der rechten Seite ist keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms. In der partikulären Lösung erhalten wir also keine Resonanz, sprich $f_P(x) := C \cdot \cos(3x) + D \cdot \sin(3x)$.

Es folgt $f'_P(x) = -3C \cdot \sin(3x) + 3D \cdot \cos(3x)$ und $f''_P(x) = -9C \cdot \cos(3x) - 9D \cdot \sin(3x)$.

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} 60 \cdot \cos(3x) &= f''_P(x) + 10f'_P(x) + 9f_P(x) \\ &= -9C \cdot \cos(3x) - 9D \cdot \sin(3x) - 30C \cdot \sin(3x) + 30D \cdot \cos(3x) + 9C \cdot \cos(3x) + 9D \cdot \sin(3x) \\ &= -30C \cdot \sin(3x) + 30D \cdot \cos(3x). \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert $-30C = 0$ und $30D = 60$, sprich $C = 0$ und $D = 2$.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist also

$$f(x) = f_H(x) + f_P(x) = A \cdot e^{-x} + B \cdot e^{-9x} + 2 \cdot \sin(3x).$$

Damit folgt $f'(x) = -A \cdot e^{-x} - 9B \cdot e^{-9x} + 6 \cdot \cos(3x)$.

Mit $f(0) = 1$ und $f'(0) = 5$ ergibt sich das lineare Gleichungssystem $A + B + 0 = 1$ und $-A - 9B + 6 = 5$, was durch Addition der Gleichungen $A + B = 1$ und $-8B = 0$, also $B = 0$ und $A = 1$ liefert. Also gilt

$$f(x) = e^{-x} + 2 \cdot \sin(3x).$$

Hinweis: Die Anfangswertprobleme lassen sich unter anderem mit Hilfe von Laplace-Transformation oder mit einem Ansatz vom Typ der rechten Seite lösen. Für beide Methoden handelt es sich eher um Einstiegsaufgaben — dies gilt für den Ansatz vom Typ der rechten Seite noch mehr als für die Laplace-Transformation. Vielleicht wollen Sie beide Methoden versuchen?



DGL/MitLaplaceTrans/Ag_LaplaceTrans_FaltungsGlnAlsFormel.tex

Aufgabe 13.100 (Integralgleichungen)

spf

Finden Sie die Lösungen vom exponentiellen Typ der folgenden Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen!

$$\text{a) } f(t) - \int_0^t (t - \tau) \cdot f(\tau) d\tau = 2 \cdot \cos(t)$$

$$\cos(t) + \cosh(t)$$

Lösung:

Bezeichnen wir mit $F := \mathcal{L}f$ die Laplace-Transformierte von f , so liefert Laplace-transformieren der beiden Seiten der Gleichung

$$(\mathcal{L}f)(s) - (\mathcal{L} \text{id})(s) \cdot (\mathcal{L}f)(s) = 2 \cdot (\mathcal{L} \cos)(s) \quad \text{bzw.} \quad F(s) \cdot \left(1 - \frac{1}{s^2}\right) = \frac{2s}{s^2+1}.$$

Seien $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$ und $D \in \mathbb{R}$ mit $\frac{As+B}{s^2+1} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{s+1} = F(s) = \frac{2s^3}{(s^2+1) \cdot (s-1) \cdot (s+1)}$.

Multipliziert mit $(s^4 - 1)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} 2s^3 &= (As + B) \cdot (s^2 - 1) + C \cdot (s^3 + s^2 + s + 1) + D \cdot (s^3 - s^2 + s - 1) \\ &= s^3 \cdot (A + C + D) + s^2 \cdot (B + C - D) + s \cdot (-A + C + D) + (-B + C - D). \end{aligned}$$

Nach Koeffizientenvergleich lösen wir das entstehende lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \cdot (-1) + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & | & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \cdot (-1) + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & | & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Also gilt $F(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-(-1)}$.

Rücktransformiert ergibt sich $f(t) = \cos(t) + \frac{1}{2} \cdot e^t + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} = \cos(t) + \cosh(t)$.

b) $\int_0^y g(x) \cdot g(y-x) dx - 2g(y) = \frac{y^3}{6} - 2y$

y

Lösung:

Bezeichnen wir mit $G := \mathcal{L}g$ die Laplace-Transformierte von g , so liefert Laplace-transformieren der beiden Seiten der Gleichung

$$(\mathcal{L}g)(s) \cdot (\mathcal{L}g)(s) - 2 \cdot (\mathcal{L}g)(s) = \frac{1}{6} \cdot (\mathcal{L} \text{id}^3)(s) - 2 \cdot (\mathcal{L} \text{id})(s) \quad \text{bzw.} \quad (G(s))^2 - 2 \cdot G(s) = \frac{1}{s^4} - \frac{2}{s^2}.$$

Addition von 1 auf beiden Seiten liefert $(G(s) - 1)^2 = \frac{1}{s^4} - \frac{2}{s^2} + 1 = \frac{s^4 - 2s^2 + 1}{s^4} = \left(\frac{s^2 - 1}{s^2}\right)^2$, also

$$G(s) - 1 = \frac{s^2 - 1}{s^2} \quad \text{oder} \quad G(s) - 1 = -\frac{s^2 - 1}{s^2} \quad \text{bzw.} \quad G(s) = 2 - \frac{1}{s^2} \quad \text{oder} \quad G(s) = \frac{1}{s^2}.$$

Da wir für g nur Funktionen vom exponentiellen Typ suchen, muss $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = 0$ gelten. Mit $\lim_{s \rightarrow \infty} (2 - \frac{1}{s^2}) = 2 \neq 0$ und $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s^2} = 0$ folgt $G(s) = \frac{1}{s^2}$, was rücktransformiert $g(y) = y$ liefert.

c) $u(x) - u'(x) - \int_0^x u'(x-t) \cdot u''(t) dt = 0$ mit $u(0) = 0$ und $u'(0) = 4$

keine Lsg

Lösung:

Bezeichnen wir mit $U := \mathcal{L}u$ die Laplace-Transformierte von u , so gilt $(\mathcal{L}u')(s) = s \cdot U(s) - u(0) = s \cdot U(s)$ und $(\mathcal{L}u'')(s) = s^2 \cdot U(s) - s \cdot u(0) - u'(0) = s^2 \cdot U(s) - 4$.

Das Integral auf der linken Seite beschreibt die Faltung von u' mit u'' . Laplace-transformieren der beiden Seiten der Gleichung liefert

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}u)(s) - (\mathcal{L}u')(s) - (\mathcal{L}u')(s) \cdot (\mathcal{L}u'')(s) &= (\mathcal{L}0)(s) \\ \text{bzw.} \quad U(s) - s \cdot U(s) - s \cdot U(s) \cdot (s^2 \cdot U(s) - 4) &= 0. \end{aligned}$$

Die erste Lösung dieser Gleichung ist $U(s) = 0$ für alle $s \in [0; \infty)$.

Gibt es ein s mit $U(s) \neq 0$, so gilt dort

$$1 + 3s - s^3 \cdot U(s) = 0 \quad \text{bzw.} \quad U(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{s^3} + 3 \cdot \frac{1}{s^2}.$$

Rücktransformiert ergibt sich $u(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ oder $u(x) = \frac{x^2}{2} + 3x$ für alle $x \in [0; \infty)$.

Die erste Lösung erfüllt wegen $u'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ die Anfangsbedingung $u'(0) = 4$ nicht.

Für die zweite Lösung gilt $u'(x) = x + 3$. Wegen $u'(0) = 3$ erfüllt also auch diese Lösung die Anfangsbedingung nicht.

d) $z \cdot v(z) - 2 \int_0^z \sinh(2p) \cdot v(z-p) dp = \sinh(2z)$

$$2e^{2z}$$

Lösung:

Mit $f(z) := \sinh(2z)$ lässt sich die Gleichung schreiben als $z \cdot v(z) - 2 \cdot (f * v)(z) = f(z)$.

Bezeichnen wir mit $V := \mathcal{L}v$ die Laplace-Transformierte von v , so ergibt Laplace-transformieren der beiden Seiten der Gleichung wegen $(\mathcal{L}f)(s) = \frac{2}{s^2-4}$

$$(-1)^1 \cdot (\mathcal{L}v)'(s) - 2 \cdot (\mathcal{L}f)(s) \cdot (\mathcal{L}v)(s) = (\mathcal{L}f)(s) \quad \text{bzw.} \quad -V'(s) - 2 \cdot \frac{2}{s^2-4} \cdot V(s) = \frac{2}{s^2-4}.$$

Das ist eine lineare inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung für V .

Mit der Partialbruchzerlegung $\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s-2} = \frac{(s-2)-(s+2)}{(s+2) \cdot (s-2)} = \frac{-4}{s^2-4}$ ergibt sich für die Lösung V_H der homogenen Gleichung

$$\ln(s+2) - \ln(s-2) + D = \int \frac{-4}{s^2-4} ds = \int \frac{V_H'(s)}{V_H(s)} ds = \ln(V_H(s)) \quad \text{bzw.} \quad V_H(s) = C \cdot \frac{s+2}{s-2}.$$

Für eine partikuläre Lösung machen wir den Ansatz $V_P(s) = h(s) \cdot \frac{s+2}{s-2}$.

Das liefert $V_P'(s) = h'(s) \cdot \frac{s+2}{s-2} + h(s) \cdot \frac{s-2-s-2}{(s-2)^2}$. Durch Einsetzen ergibt sich

$$\frac{2}{s^2-4} = -h'(s) \cdot \frac{s+2}{s-2} + 4 \cdot \frac{h(s)}{(s-2)^2} - h(s) \cdot \frac{s+2}{s-2} \cdot \frac{4}{s^2-4} = -h'(s) \cdot \frac{s+2}{s-2}.$$

Integration liefert

$$V_P(s) = \frac{s+2}{s-2} \cdot h(s) = \frac{s+2}{s-2} \cdot \int h'(s) ds = \frac{s+2}{s-2} \cdot \int \frac{-2}{(s+2)^2} ds = \frac{s+2}{s-2} \cdot \frac{2}{s+2} = \frac{2}{s-2}.$$

Damit ergibt sich $V(s) = C \cdot \frac{s+2}{s-2} + \frac{2}{s-2}$ als allgemeine Lösung der Differentialgleichung für V .

Da wir für v nur Funktionen vom exponentiellen Typ suchen, muss $\lim_{s \rightarrow \infty} V(s) = 0$ gelten. Mit

$\lim_{s \rightarrow \infty} V(s) = C \cdot 1 + 0 = C$ ergibt sich also $C = 0$, sprich $V(s) = \frac{2}{s-2}$, was rücktransformiert $v(z) = 2e^{2z}$ liefert.

Hinweis: Für die Laplace-Transformierte einer Funktion f vom exponentiellen Typ gilt $\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}f(s) = 0$.



DGL/MitLaplaceTrans/Ag_LaplaceTrans_FaltungsGlnAlsText.tex

Aufgabe 13.101 („Einfach“ zu berechnende Faltungen)

spf

Verwenden Sie Laplace-Transformation, um die folgenden Fragen zu beantworten!

a) Für welche Funktion $f: [0; \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ stimmt die Faltung $f * \sin$ überein mit $f + \sin$?

-x

Lösung:

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $[0; \infty) \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$ und $x \mapsto f(x)$ die gesuchte Funktion.

Zu lösen ist dann die Gleichung $(f * \sin)(x) = f(x) + \sin(x)$.

Bezeichnet man mit F die Laplace-Transformierte von f , so ergibt sich nach Laplace-Transformation der beiden Seiten die Gleichung

$$(\mathcal{L}f)(s) \cdot (\mathcal{L}\sin)(s) = (\mathcal{L}f)(s) + (\mathcal{L}\sin)(s) \quad \text{bzw.} \quad F(s) \cdot \frac{1}{s^2+1} = F(s) + \frac{1}{s^2+1}.$$

Mit $F(s) \cdot \frac{1}{s^2+1} - F(s) = F(s) \cdot \frac{-s^2}{s^2+1}$ ergibt sich also $F(s) = -\frac{1}{s^2}$ als Laplace-Transformierte von f . Rücktransformiert ergibt sich $f(x) = -x$.

- b) Welche Funktion muss man zu ihrer Faltung mit dem Sinus addieren, um 1 zu erhalten?

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos(\sqrt{2} \cdot x)$$

Lösung:

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $[0; \infty) \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$ und $x \mapsto f(x)$ die gesuchte Funktion.

Zu lösen ist dann die Gleichung $(f * \sin)(x) + f(x) = 1$.

Bezeichnet man mit F die Laplace-Transformierte von f , so ergibt sich nach Laplace-Transformation der beiden Seiten die Gleichung

$$(\mathcal{L}f)(s) \cdot (\mathcal{L}\sin)(s) + (\mathcal{L}f)(s) = (\mathcal{L}1)(s) \quad \text{bzw.} \quad F(s) \cdot \frac{1}{s^2+1} + F(s) = \frac{1}{s}.$$

Mit $F(s) \cdot \frac{1}{s^2+1} + F(s) = F(s) \cdot \frac{s^2+2}{s^2+1}$ ergibt sich also $F(s) = \frac{s^2+1}{s \cdot (s^2+2)}$ als Laplace-Transformierte von f . Wir nehmen eine Partialbruchzerlegung vor:

Seien $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$ und $C \in \mathbb{R}$ mit $\frac{s^2+1}{s \cdot (s^2+2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+2}$ für alle $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Multiplizieren mit dem Nenner der linken Seite liefert

$$s^2 + 1 = A \cdot (s^2 + 2) + (Bs + C) \cdot s = (A + B) \cdot s^2 + Cs + 2A.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert $A + B = 1$, $C = 0$ und $2A = 1$, sprich $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$ und $C = 0$.

Damit folgt $F(s) = \frac{1}{2s} + \frac{s}{2s^2+4}$, was rücktransformiert $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos(\sqrt{2} \cdot x)$ liefert.

- c) Die Funktionen welcher Funktionenklasse kann man, um ihre Faltung mit sich selbst zu berechnen, einfach mit der Identität id multiplizieren?

$$(\text{id} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ mit } t \mapsto \text{id}(t) := t) \\ e^{Cx}$$

Lösung:

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $[0; \infty) \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$ und $x \mapsto f(x)$ eine der gesuchten Funktionen.

Zu lösen ist dann die Gleichung $(f * f)(x) = xf(x)$.

Bezeichnet man mit F die Laplace-Transformierte von f , so ergibt sich nach Laplace-Transformation der beiden Seiten die Gleichung

$$(\mathcal{L}f)(s) \cdot (\mathcal{L}f)(s) = (-1)^1 \cdot (\mathcal{L}f)'(s) \quad \text{bzw.} \quad (F(s))^2 = -F'(s).$$

Das ist eine separable Differentialgleichung erster Ordnung, welche durch Trennung der Variablen gelöst werden kann: Es folgt für ein $C \in \mathbb{R}$

$$s - C = \int 1 \, ds = - \int \frac{F'(s)}{(F(s))^2} \, ds = \frac{1}{F(s)} \quad \text{also} \quad F(s) = \frac{1}{s - C}.$$

Rücktransformiert ergibt sich $f(x) = e^{Cx}$.

- d) Die Funktionen welcher Funktionenklasse kann man, um das Doppelte ihrer Faltung mit dem Kosinus zu berechnen, einfach mit id multiplizieren?

$$(\text{id} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ mit } t \mapsto \text{id}(t) := t) \\ C \cdot \sin(x)$$

Lösung:

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $[0; \infty) \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$ und $x \mapsto f(x)$ eine der gesuchten Funktionen.

Zu lösen ist dann die Gleichung $2 \cdot (f * \cos)(x) = xf(x)$.

Bezeichnet man mit F die Laplace-Transformierte von f , so ergibt sich nach Laplace-Transformation der beiden Seiten die Gleichung

$$2 \cdot (\mathcal{L}f)(s) \cdot (\mathcal{L} \cos)(s) = (-1)^1 \cdot (\mathcal{L}f)'(s) \quad \text{bzw.} \quad F(s) \cdot \frac{2s}{s^2 + 1} = -F'(s).$$

Das ist eine separable Differentialgleichung erster Ordnung, welche durch Trennung der Variablen gelöst werden kann: Es folgt für ein $D \in \mathbb{R}$

$$\ln(s^2 + 1) + D = \int \frac{2s}{s^2 + 1} ds = - \int \frac{F'(s)}{F(s)} ds = -\ln(F(s)) \quad \text{also} \quad F(s) = \frac{1}{e^D} \cdot \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Mit $C := e^{-D}$ ergibt sich rücktransformiert $f(x) = C \cdot \sin(x)$.



DGL/NteOrdHom/Ag_DGLOnHom_EulerDglRwpAwpAlleKombis.tex

Aufgabe 14.102 (Euler'sche Differentialgleichungen)

spf

Lösen Sie die folgenden linearen Differentialgleichungen zunächst allgemein!

Geben Sie außerdem alle reellen Lösungen an!

Sind zusätzlich Bedingungen angegeben, so suchen Sie die Lösung der Differentialgleichung, die sämtliche Bedingungen erfüllt!

a) $y'''(x) + \frac{12}{x^3} \cdot y(x) = \frac{6}{x^2} \cdot y'(x)$ mit $y(-1) = -1, y(1) = 1$ und $y(2) = -7$
 $Ax^2 + Bx^3 + \frac{C}{x^2}, A = -4, B = 1, C = 4$

Lösung:

Multipliziert man die Differentialgleichung mit x^3 , ergibt sich die Euler'sche Differentialgleichung $x^3 \cdot y'''(x) + 12y(x) = 6x \cdot y'(x)$.

Zur Lösung Euler'scher Differentialgleichungen empfiehlt sich der Ansatz $y(x) = x^\lambda$. Dann gilt $y'(x) = \lambda \cdot x^{\lambda-1}$, $y''(x) = \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot x^{\lambda-2}$ und $y'''(x) = \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 2) \cdot x^{\lambda-3}$.

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

$$x^3 \cdot (\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda^2 + 2\lambda) \cdot x^{\lambda-3} + 12 \cdot x^\lambda = 6x \cdot \lambda \cdot x^{\lambda-1}.$$

Teilt man für $x \neq 0$ durch x^λ , so ergibt sich

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda + 12 - 6\lambda = 0 \quad \text{bzw.} \quad \lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 12 = 0$$

Mögliche rationale Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind die Elemente der Menge

$$\{-12; -6; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 6; 12\}.$$

Es gilt $1^3 - 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 12 = 1 - 3 - 4 + 12 = 13 - 7 = 6 \neq 0$, $(-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 12 = -1 - 3 + 4 + 12 = -4 + 16 = -12 \neq 0$ und $2^3 - 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 12 = 8 - 12 - 8 + 12 = 0$.

Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} \lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 12 &= (\lambda - 2) \cdot (\lambda^2 - \lambda - 6) \\ \frac{-(\lambda^3 - 2\lambda^2)}{-(\lambda^2 - 4\lambda + 12)} &= (\lambda - 2) \cdot \left(\lambda^2 - 2 \cdot \lambda \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 6 \right) \\ &= (\lambda - 2) \cdot \left(\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} \right) \\ \frac{-(-\lambda^2 + 2\lambda)}{-6\lambda + 12} &= (\lambda - 2) \cdot \left(\lambda - \frac{1}{2} - \frac{5}{2} \right) \cdot \left(\lambda - \frac{1}{2} + \frac{5}{2} \right) \\ &= (\lambda - 2) \cdot (\lambda - 3) \cdot (\lambda + 2). \\ \frac{-(-6\lambda + 12)}{0} & \end{aligned}$$

Damit $x \mapsto x^\lambda$ die Zuordnungsvorschrift einer Lösung der Differentialgleichung ist, muss also $\lambda = 2$, $\lambda = 3$ oder $\lambda = -2$ gelten. Das liefert drei linear unabhängige Lösungen, die also ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung bilden. Damit ergibt sich die allgemeine Lösung der Differentialgleichung zu

$$y(x) = Ax^2 + Bx^3 + Cx^{-2} \quad \text{mit } A \in \mathbb{C}, B \in \mathbb{C} \text{ und } C \in \mathbb{C}.$$

Aus dem Anfangswertproblem ergibt sich also das Gleichungssystem

$$A - B + C = -1, \quad A + B + C = 1 \quad \text{und} \quad 4A + 8B + \frac{C}{4} = -7.$$

Wir lösen das LGS nach Vervielfachen der dritten Gleichung mit dem Gauß-Algorithmus

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 16 & 32 & 1 & -28 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot (-1) \\ + \\ \cdot (-1) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 15 & 33 & 0 & -27 \end{array} \right) \begin{array}{l} + \\ \cdot \frac{1}{2} \\ + \end{array} \cdot \frac{-33}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ & \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 15 & 0 & 0 & -60 \end{array} \right) \begin{array}{l} + \\ \\ \cdot \frac{-1}{15} \end{array} \cdot \frac{1}{15} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Also gilt $A = -4$, $B = 1$ und $C = 4$. Das liefert $y(x) = -4x^2 + x^3 + \frac{4}{x^2}$.

b) $4t^3 \cdot u'''(t) + 4t^2 \cdot u''(t) + 45u(t) = 31t \cdot u'(t)$ mit $u(1) = 2$, $u'(1) = 0$ und $u''(1) = -9$
 $At^3 + B\sqrt{t^3} + \frac{C}{\sqrt{t^5}}$, $A = -2$, $B = 4$, $C = 0$

Lösung:

Zur Lösung Euler'scher Differentialgleichungen empfiehlt sich der Ansatz $u(t) = t^\lambda$. Dann gilt $u'(t) = \lambda \cdot t^{\lambda-1}$, $u''(t) = \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot t^{\lambda-2}$ und $u'''(t) = \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 2) \cdot t^{\lambda-3}$.

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

$$4t^3 \cdot (\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda^2 + 2\lambda) \cdot t^{\lambda-3} + 4t^2 \cdot (\lambda^2 - \lambda) \cdot t^{\lambda-2} + 45 \cdot t^\lambda = 31t \cdot \lambda \cdot t^{\lambda-1}.$$

Teilt man für $t \neq 0$ durch t^λ , so ergibt sich

$$4\lambda^3 - 12\lambda^2 + 8\lambda + 4\lambda^2 - 4\lambda + 45 = 31\lambda \quad \text{bzw.} \quad 4\lambda^3 - 8\lambda^2 - 27\lambda + 45 = 0.$$

Mögliche rationale Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind die Elemente der Menge

$$\left\{ \pm 45; \pm \frac{45}{2}; \pm 15; \pm \frac{45}{4}; \pm 9; \pm \frac{15}{2}; \pm 5; \pm \frac{15}{4}; \pm \frac{9}{2}; \pm 3; \pm \frac{9}{4}; \pm \frac{3}{2}; \pm 1; \pm \frac{3}{4}; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{1}{4} \right\}.$$

Es gilt $4 \cdot 1^3 - 8 \cdot 1^2 - 27 \cdot 1 + 45 = 4 - 8 - 27 + 45 = 14 \neq 0$, $4 \cdot (-1)^3 - 8 \cdot (-1)^2 - 27 \cdot (-1) + 45 = -4 - 8 + 27 + 45 = 60 \neq 0$ und $4 \cdot 3^3 - 8 \cdot 3^2 - 27 \cdot 3 + 45 = 4 \cdot 27 - 72 - 81 + 45 = 0$.

Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} 4\lambda^3 - 8\lambda^2 - 27\lambda + 45 &= (\lambda - 3) \cdot (4\lambda^2 + 4\lambda - 15) \\ \frac{-(4\lambda^3 - 12\lambda^2)}{4\lambda^2 - 27\lambda + 45} &= (\lambda - 3) \cdot \left((2\lambda)^2 + 2 \cdot 2\lambda \cdot 1 + 1^2 - 1 - 15 \right) \\ &= (\lambda - 3) \cdot \left((2\lambda + 1)^2 - 16 \right) \\ \frac{-(4\lambda^2 - 12\lambda)}{-15\lambda + 45} &= (\lambda - 3) \cdot (2\lambda + 1 - 4) \cdot (2\lambda + 1 + 4) \\ &= 4 \cdot (\lambda - 3) \cdot \left(\lambda - \frac{3}{2} \right) \cdot \left(\lambda + \frac{5}{2} \right) \\ \frac{-(-15\lambda + 45)}{0} & \end{aligned}$$

Damit $t \mapsto t^\lambda$ die Zuordnungsvorschrift einer Lösung der Differentialgleichung ist, muss also $\lambda = 3$, $\lambda = \frac{3}{2}$ oder $\lambda = -\frac{5}{2}$ gelten. Das liefert drei linear unabhängige Lösungen, die also ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung bilden. Damit ergibt sich die allgemeine Lösung der Differentialgleichung zu

$$u(t) = At^3 + Bt^{\frac{3}{2}} + Ct^{-\frac{5}{2}} \quad \text{mit } A \in \mathbb{C}, B \in \mathbb{C} \text{ und } C \in \mathbb{C}.$$

Dann folgt $u'(t) = 3At^2 + \frac{3B}{2} \cdot t^{\frac{1}{2}} - \frac{5C}{2} \cdot t^{-\frac{7}{2}}$ und $u''(t) = 6At + \frac{3B}{4} \cdot t^{-\frac{1}{2}} + \frac{35C}{4} \cdot t^{-\frac{9}{2}}$.

Aus dem Anfangswertproblem ergibt sich also das Gleichungssystem

$$A + B + C = 2, \quad 3A + \frac{3B}{2} - \frac{5C}{2} = 0 \quad \text{und} \quad 6A + \frac{3B}{4} + \frac{35C}{4} = -9.$$

Wir lösen das Gleichungssystem nach Verdoppeln der zweiten und Vervielfachen der dritten Gleichung mit dem Gauß-Algorithmus

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 6 & 3 & -5 & | & 0 \\ 24 & 3 & 35 & | & -36 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot (-3) \\ + \\ \end{array} \begin{array}{l} \cdot (-3) \\ + \\ \end{array} \downarrow \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -8 & | & -6 \\ 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 21 & 0 & 32 & | & -42 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot \frac{-1}{3} \\ + \\ \end{array} \begin{array}{l} \cdot (-7) \\ + \\ \end{array} \cdot \frac{1}{3} \\ \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{8}{3} & | & -2 \\ 0 & 1 & \frac{11}{3} & | & 4 \\ 0 & 0 & 88 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ + \\ \cdot \frac{1}{33} \end{array} \begin{array}{l} + \\ + \\ \cdot \frac{-1}{24} \end{array} \cdot \frac{1}{88} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Also gilt $A = -2$, $B = 4$ und $C = 0$. Das liefert $u(t) = -2t^3 + 4\sqrt{t^3}$.

c) $8x^2 \cdot v^{(4)}(x) + 58v''(x) - \frac{9}{x^2} \cdot v(x) = -\frac{9}{x} \cdot v'(x) - 44x \cdot v'''(x)$

$$ax + \frac{b}{\sqrt{x}} + cx^{-\frac{3}{2}i} + dx^{\frac{3}{2}i}, Ax + \frac{B}{\sqrt{x}} + C \cos\left(\frac{3}{2} \cdot \ln(x)\right) + D \sin\left(\frac{3}{2} \cdot \ln(x)\right)$$

Lösung:

Multipliziert man die Differentialgleichungen mit x^2 , ergibt sich die Euler'sche Differentialgleichung $8x^4 \cdot v^{(4)}(x) + 58x^2 \cdot v''(x) - 9v(x) = -9x \cdot v'(x) - 44x^3 \cdot v'''(x)$.

Zur Lösung Euler'scher Differentialgleichungen empfiehlt sich der Ansatz $v(x) = x^\lambda$. Dann gilt $v'(x) = \lambda \cdot x^{\lambda-1}$, $v''(x) = \lambda \cdot (\lambda-1) \cdot x^{\lambda-2}$, $v'''(x) = \lambda \cdot (\lambda-1) \cdot (\lambda-2) \cdot x^{\lambda-3}$ und $v^{(4)}(x) = \lambda \cdot (\lambda-1) \cdot (\lambda-2) \cdot (\lambda-3) \cdot x^{\lambda-4}$.

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} 8x^4 \cdot (\lambda^2 - \lambda) \cdot (\lambda^2 - 2\lambda - 3\lambda + 6) \cdot x^{\lambda-4} + 58x^2 \cdot (\lambda^2 - \lambda) \cdot x^{\lambda-2} - 9 \cdot x^\lambda \\ = -9x \cdot \lambda \cdot x^{\lambda-1} - 44x^3 \cdot (\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda^2 + 2\lambda) \cdot x^{\lambda-3}. \end{aligned}$$

Teilt man für $x \neq 0$ durch x^λ , so ergibt sich

$$8\lambda^4 - 40\lambda^3 + 48\lambda^2 - 8\lambda^3 + 40\lambda^2 - 48\lambda + 58\lambda^2 - 58\lambda - 9 + 9\lambda + 44\lambda^3 - 132\lambda^2 + 88\lambda = 0$$

bzw.

$$8\lambda^4 - 4\lambda^3 + 14\lambda^2 - 9\lambda - 9 = 0.$$

Mögliche rationale Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind die Elemente der Menge

$$\left\{-9; -\frac{9}{2}; -3; -\frac{9}{4}; -\frac{3}{2}; -\frac{9}{8}; -1; -\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}; -\frac{3}{8}; -\frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; \frac{1}{8}; \frac{1}{4}; \frac{3}{8}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; 1; \frac{9}{8}; \frac{3}{2}; \frac{9}{4}; 3; \frac{9}{2}; 9\right\}.$$

Es gilt $8 \cdot 1^4 - 4 \cdot 1^3 + 14 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 - 9 = 8 - 4 + 14 - 9 - 9 = 22 - 22 = 0$.

Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{array}{r} 8\lambda^4 - 4\lambda^3 + 14\lambda^2 - 9\lambda - 9 = (\lambda - 1) \cdot (8\lambda^3 + 4\lambda^2 + 18\lambda + 9) \\ \hline -(8\lambda^4 - 8\lambda^3) \\ 4\lambda^3 + 14\lambda^2 - 9\lambda - 9 \\ \hline -(4\lambda^3 - 4\lambda^2) \\ 18\lambda^2 - 9\lambda - 9 \\ \hline -(18\lambda^2 - 18\lambda) \\ 9\lambda - 9 \\ \hline -(9\lambda - 9) \\ 0 \end{array}$$

Da alle Koeffizienten des Restpolynoms positiv sind, kann keine positive Zahl eine Nullstelle des Restpolynoms sein. Da nur das Absolutglied ungerade und alle anderen Koeffizienten gerade sind, kann keine ganze Zahl Nullstelle des Restpolynoms sein.

$$\text{Es gilt } 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 18 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 9 = -1 + 1 - 9 + 9 = 0.$$

$$\text{Für alle } \lambda \in \mathbb{C} \text{ gilt } 8\lambda^4 - 4\lambda^3 + 14\lambda^2 - 9\lambda - 9 =$$

$$\begin{aligned} (\lambda - 1) \cdot (8\lambda^3 + 4\lambda^2 + 18\lambda + 9) &= (\lambda - 1) \cdot \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \cdot (8\lambda^2 + 18) \\ \frac{-(8\lambda^3 + 4\lambda^2)}{18\lambda + 9} &= (\lambda - 1) \cdot \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \cdot 8 \cdot \left(\lambda^2 - \frac{9}{4} \cdot i^2\right) \\ &= 8 \cdot (\lambda - 1) \cdot \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\lambda - \frac{3}{2} \cdot i\right) \cdot \left(\lambda + \frac{3}{2} \cdot i\right). \\ \frac{-(18\lambda + 9)}{0} & \end{aligned}$$

Damit $x \mapsto x^\lambda$ die Zuordnungsvorschrift einer Lösung der Differentialgleichung ist, muss also $\lambda = 1$, $\lambda = -\frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{3}{2} \cdot i$ oder $\lambda = -\frac{3}{2} \cdot i$ gelten. Das liefert vier linear unabhängige Lösungen, die also ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung bilden. Damit ergibt sich die allgemeine Lösung der Differentialgleichung zu

$$v(x) = ax + bx^{-\frac{1}{2}} + cx^{\frac{3}{2} \cdot i} + dx^{-\frac{3}{2} \cdot i} \quad \text{mit } a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{C}, d \in \mathbb{C}.$$

Setzt man $A := a$, $B := b$, $C := c + d$ und $D := (c - d) \cdot i$, so folgt

$$\begin{aligned} v(x) &= ax + bx^{-\frac{1}{2}} + cx^{\frac{3}{2} \cdot i} + dx^{-\frac{3}{2} \cdot i} \\ &= ax + bx^{-\frac{1}{2}} + ce^{\frac{3}{2} \cdot i \cdot \ln(x)} + de^{-\frac{3}{2} \cdot i \cdot \ln(x)} \\ &= ax + bx^{-\frac{1}{2}} + c \cdot \left(\cos\left(\frac{3 \cdot \ln(x)}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \ln(x)}{2}\right)\right) + d \cdot \left(\cos\left(-\frac{3 \cdot \ln(x)}{2}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{3 \cdot \ln(x)}{2}\right)\right) \\ &= ax + bx^{-\frac{1}{2}} + \cos\left(\frac{3}{2} \cdot \ln(x)\right) \cdot (c + d) + \sin\left(\frac{3}{2} \cdot \ln(x)\right) \cdot i \cdot (c - d) \\ &= Ax + \frac{B}{\sqrt{x}} + C \cos\left(\frac{3}{2} \cdot \ln(x)\right) + D \sin\left(\frac{3}{2} \cdot \ln(x)\right) \quad \text{mit } A \in \mathbb{C}, B \in \mathbb{C}, C \in \mathbb{C}, D \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

$$\text{d) } t^3 \cdot w'''(t) + 4w(t) = 2t \cdot w'(t) \quad \text{mit} \quad w(1) = 1, w'(1) = -1 \text{ und } w''(1) = 11$$

$$At^2 + Bt^2 \cdot \ln(t) + \frac{C}{t}, A = -1, B = 3, C = 2$$

Lösung:

Zur Lösung Euler'scher Differentialgleichungen empfiehlt sich der Ansatz $w(t) = t^\lambda$. Dann gilt $w'(t) = \lambda \cdot t^{\lambda-1}$, $w''(t) = \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot t^{\lambda-2}$ und $w'''(t) = \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 2) \cdot t^{\lambda-3}$.

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

$$t^3 \cdot (\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda^2 + 2\lambda) \cdot t^{\lambda-3} + 4 \cdot t^\lambda = 2t \cdot \lambda \cdot t^{\lambda-1}.$$

Teilt man für $t \neq 0$ durch t^λ , so ergibt sich

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda + 4 - 2\lambda = 0 \quad \text{bzw.} \quad \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0$$

Mögliche rationale Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind die Elemente der Menge

$$\{-4; -2; -1; 1; 2; 4\}.$$

$$\text{Es gilt } 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 4 = 1 - 3 + 4 = 2 \neq 0 \text{ und } (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 4 = -1 - 3 + 4 = 0.$$

Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned}
 \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 &= (\lambda + 1) \cdot (\lambda^2 - 4\lambda + 4) \\
 \frac{-(\lambda^3 + \lambda^2)}{-4\lambda^2 + 4} &= (\lambda + 1) \cdot (\lambda^2 - 2 \cdot \lambda \cdot 2 + 2^2) \\
 &= (\lambda + 1) \cdot (\lambda - 2)^2. \\
 \frac{-(-4\lambda^2 - 4\lambda)}{4\lambda + 4} & \\
 \frac{-(4\lambda + 4)}{0} &
 \end{aligned}$$

Damit $t \mapsto t^\lambda$ die Zuordnungsvorschrift einer Lösung der Differentialgleichung ist, muss also $\lambda = 2$ oder $\lambda = -1$ gelten. Da 2 eine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, ergibt sich auch $t \mapsto \ln(t) \cdot t^2$ als Zuordnungsvorschrift einer Lösung. Das liefert drei linear unabhängige Lösungen, die also ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung bilden. Damit ergibt sich die allgemeine Lösung der Differentialgleichung zu

$$w(t) = At^2 + Bt^2 \cdot \ln(t) + \frac{C}{t} \quad \text{mit } A \in \mathbb{C}, B \in \mathbb{C}, C \in \mathbb{C}.$$

Dann folgt $w'(t) = 2At + 2Bt \cdot \ln(t) + Bt - \frac{C}{t^2}$ und $w''(t) = 2A + 2B \cdot \ln(t) + 2B + B + \frac{2C}{t^3}$.

Aus dem Anfangswertproblem ergibt sich also das Gleichungssystem

$$A + C = 1, \quad 2A + B - C = -1 \quad \text{und} \quad 2A + 3B + 2C = 11.$$

Wir lösen das Gleichungssystem mit dem Gauß-Algorithmus

$$\begin{aligned}
 &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 11 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot (-2) \\ + \\ \end{array} \quad \cdot (-2) \\
 &\quad \quad \quad + \quad \quad \quad \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 9 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ + \\ \cdot \frac{-1}{3} \end{array} \quad \cdot \frac{1}{3} \uparrow \\
 &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array} \right) \begin{array}{l} + \\ \\ \cdot \frac{1}{3} \end{array} \quad \cdot \frac{-1}{3} \\
 &\quad \quad \quad \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Also gilt $A = -1$, $B = 3$ und $C = 2$. Das liefert $w(t) = t^2 \cdot (3 \cdot \ln(t) - 1) + \frac{2}{t}$.

e) $x^4 \cdot f^{(4)}(x) + 4x^3 \cdot f'''(x) - x^2 \cdot f''(x) + 3x \cdot f'(x) + 5f(x) = 0$

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x} \cdot \ln(x) + cx^{2-i} + dx^{2+i}, \frac{A}{x} + \frac{B}{x} \cdot \ln(x) + x^2 \cdot (C \cos(\ln(x)) + D \sin(\ln(x)))$$

Lösung:

Zur Lösung Euler'scher Differentialgleichungen empfiehlt sich der Ansatz $f(x) = x^\lambda$. Dann gilt $f'(x) = \lambda \cdot x^{\lambda-1}$, $f''(x) = \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot x^{\lambda-2}$, $f'''(x) = \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 2) \cdot x^{\lambda-3}$ und $f^{(4)}(x) = \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 2) \cdot (\lambda - 3) \cdot x^{\lambda-4}$.

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

$$\begin{aligned}
 x^4 \cdot (\lambda^2 - \lambda) \cdot (\lambda^2 - 2\lambda - 3\lambda + 6) \cdot x^{\lambda-4} &+ 4x^3 \cdot (\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda^2 + 2\lambda) \cdot x^{\lambda-3} \\
 &- x^2 \cdot (\lambda^2 - \lambda) \cdot x^{\lambda-2} + 3x \cdot \lambda \cdot x^{\lambda-1} + 5 \cdot x^\lambda = 0.
 \end{aligned}$$

Teilt man für $x \neq 0$ durch x^λ , so ergibt sich

$$\lambda^4 - 5\lambda^3 + 6\lambda^2 - \lambda^3 + 5\lambda^2 - 6\lambda + 4\lambda^3 - 12\lambda^2 + 8\lambda - \lambda^2 + \lambda + 3\lambda + 5 = 0$$

bzw.

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 - 2\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0.$$

Mögliche rationale Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind die Elemente der Menge

$$\{-5; -1; 1; 5\}.$$

Es gilt $1^4 - 2 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 + 5 = 1 - 2 - 2 + 6 + 5 = 12 - 4 = 8 \neq 0$
und $(-1)^4 - 2 \cdot (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) + 5 = 1 + 2 - 2 - 6 + 5 = 8 - 8 = 0$.

Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{array}{r} \lambda^4 - 2\lambda^3 - 2\lambda^2 + 6\lambda + 5 = (\lambda + 1) \cdot (\lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda + 5) \\ \hline -(\lambda^4 + \lambda^3) \\ \hline -3\lambda^3 - 2\lambda^2 + 6\lambda + 5 \\ \hline -(-3\lambda^3 - 3\lambda^2) \\ \hline \lambda^2 + 6\lambda + 5 \\ \hline -(\lambda^2 + \lambda) \\ \hline 5\lambda + 5 \\ \hline -(5\lambda + 5) \\ \hline 0 \end{array}$$

Es gilt $(-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + (-1) + 5 = -1 - 3 - 1 + 5 = -5 + 5 = 0$.

Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt $\lambda^4 - 2\lambda^3 - 2\lambda^2 + 6\lambda + 5 =$

$$\begin{array}{rcl} (\lambda + 1) \cdot (\lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda + 5) & = & (\lambda + 1)^2 \cdot (\lambda^2 - 4\lambda + 5) \\ \hline -(\lambda^3 + \lambda^2) & = & (\lambda + 1)^2 \cdot (\lambda^2 - 2 \cdot \lambda \cdot 2 + 2^2 - 4 + 5) \\ \hline -4\lambda^2 + \lambda + 5 & = & (\lambda + 1)^2 \cdot ((\lambda - 2)^2 - i^2) \\ \hline -(-4\lambda^2 - 4\lambda) & = & (\lambda + 1)^2 \cdot (\lambda - 2 - i) \cdot (\lambda - 2 + i) \\ \hline 5\lambda + 5 \\ \hline -(5\lambda + 5) \\ \hline 0 \end{array}$$

Damit $x \mapsto x^\lambda$ die Zuordnungsvorschrift einer Lösung der Differentialgleichung ist, muss also $\lambda = -1$, $\lambda = 2+i$ oder $\lambda = 2-i$ gelten. Da -1 eine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, ergibt sich auch $x \mapsto \ln(x) \cdot x^{-1}$ als Zuordnungsvorschrift einer Lösung. Das liefert vier linear unabhängige Lösungen, die also ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung bilden. Damit ergibt sich die allgemeine Lösung der Differentialgleichung zu

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b \cdot \ln(x)}{x} + cx^{2+i} + dx^{2-i} \quad \text{mit } a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{C} \text{ und } d \in \mathbb{C}.$$

Setzt man $A := a$, $B := b$, $C := c + d$ und $D := (c - d) \cdot i$, so folgt

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a}{x} + \frac{b \cdot \ln(x)}{x} + cx^{2+i} + dx^{2-i} \\ &= \frac{a}{x} + \frac{b \cdot \ln(x)}{x} + cx^2 \cdot e^{i \cdot \ln(x)} + dx^2 \cdot e^{-i \cdot \ln(x)} \\ &= \frac{a}{x} + \frac{b \cdot \ln(x)}{x} + cx^2 \cdot (\cos(\ln(x)) + i \cdot \sin(\ln(x))) + dx^2 \cdot (\cos(-\ln(x)) + i \cdot \sin(-\ln(x))) \\ &= \frac{a}{x} + \frac{b \cdot \ln(x)}{x} + x^2 \cdot \cos(\ln(x)) \cdot (c + d) + x^2 \cdot \sin(\ln(x)) \cdot i \cdot (c - d) \\ &= \frac{A}{x} + \frac{B \cdot \ln(x)}{x} + Cx^2 \cdot \cos(\ln(x)) + Dx^2 \cdot \sin(\ln(x)) \quad \text{mit } A \in \mathbb{C}, B \in \mathbb{C}, C \in \mathbb{C}, D \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$



Aufgabe 14.103 (Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten) [kr, nach Weltner 1, A9.2A](#)

Geben Sie jeweils die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung an.

a) $2y''(x) - 12y'(x) + 10y(x) = 0$ $Ce^x + De^{5x}$

Lösung:

Der Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ liefert $y'(x) = \lambda \cdot e^{\lambda x}$ und $y''(x) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}$.

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} 0 &= 2\lambda^2 \cdot e^{\lambda x} - 12\lambda \cdot e^{\lambda x} + 10 \cdot e^{\lambda x} = 2e^{\lambda x} \cdot (\lambda^2 - 2 \cdot \lambda \cdot 3 + 3^2 - 9 + 5) \\ &= 2e^{\lambda x} \cdot ((\lambda - 3)^2 - 4) = 2e^{\lambda x} \cdot (\lambda - 3 + 2) \cdot (\lambda - 3 - 2) = 2e^{\lambda x} \cdot (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 5), \end{aligned}$$

was nur für $\lambda = 1$ oder für $\lambda = 5$ erfüllt werden kann.

Also bildet $\{e^x; e^{5x}\}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung und es gibt ein $C \in \mathbb{R}$ und ein $D \in \mathbb{R}$ mit $y(x) = Ce^x + De^{5x}$.

b) $4y''(x) - 12y'(x) + 9y(x) = 0$ $Ce^{\frac{3}{2}x} + Dxe^{\frac{3}{2}x}$

Lösung:

Der Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ liefert $y'(x) = \lambda \cdot e^{\lambda x}$ und $y''(x) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}$.

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$0 = 4\lambda^2 \cdot e^{\lambda x} - 12\lambda \cdot e^{\lambda x} + 9 \cdot e^{\lambda x} = e^{\lambda x} \cdot ((2\lambda)^2 - 2 \cdot 2\lambda \cdot 3 + 3^2) = e^{\lambda x} \cdot (2\lambda - 3)^2,$$

was nur für $\lambda = \frac{3}{2}$ erfüllt werden kann. Es handelt sich um eine doppelte Nullstelle.

Also bildet $\{e^{\frac{3}{2}x}; x \cdot e^{\frac{3}{2}x}\}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung und es gibt ein $C \in \mathbb{R}$ und ein $D \in \mathbb{R}$ mit $y(x) = Ce^{\frac{3}{2}x} + Dxe^{\frac{3}{2}x}$.

c) $y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 0$ $e^{-t} \cdot (C \cos(2t) + D \sin(2t))$

Lösung:

Der Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}$ liefert $y'(t) = \lambda \cdot e^{\lambda t}$ und $y''(t) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda t}$.

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda^2 \cdot e^{\lambda t} + 2\lambda \cdot e^{\lambda t} + 5 \cdot e^{\lambda t} = e^{\lambda t} \cdot (\lambda^2 + 2 \cdot \lambda \cdot 1 + 1^2 - 1 + 5) \\ &= e^{\lambda t} \cdot ((\lambda + 1)^2 - (-4)) = e^{\lambda t} \cdot (\lambda + 1 + 2i) \cdot (\lambda + 1 - 2i), \end{aligned}$$

was nur für $\lambda = -1 - 2i$ oder für $\lambda = -1 + 2i$ erfüllt werden kann.

Also bildet $\{e^{(-1-2i)t}; e^{(-1+2i)t}\}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung und es gibt ein $A \in \mathbb{C}$ und ein $B \in \mathbb{C}$ mit $y(t) = Ae^{(-1-2i)t} + Be^{(-1+2i)t}$.

Die beiden Lösungen aus dem Fundamentalsystem sind konjugiert komplex zueinander. Deshalb bildet auch $\{\operatorname{Re}(e^{(-1+2i)t}); \operatorname{Im}(e^{(-1+2i)t})\}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung.

Mit $e^{(-1+2i)t} = e^{-t+i \cdot 2t} = e^{-t} \cdot e^{i \cdot 2t} = e^{-t} \cdot (\cos(2t) + i \cdot \sin(2t)) = e^{-t} \cdot \cos(2t) + i \cdot e^{-t} \cdot \sin(2t)$ ergibt sich also $\{e^{-t} \cdot \cos(2t); e^{-t} \cdot \sin(2t)\}$ als Fundamentalsystem der Differentialgleichung und es gibt ein $C \in \mathbb{R}$ und ein $D \in \mathbb{R}$ mit $y(t) = C \cdot e^{-t} \cdot \cos(2t) + D \cdot e^{-t} \cdot \sin(2t)$.

d) $y''(t) - \frac{1}{2} \cdot y'(t) + \frac{5}{8} \cdot y(t) = 0$

$$e^{\frac{1}{4} \cdot t} \cdot (C \cos(\frac{3}{4} \cdot t) + D \sin(\frac{3}{4} \cdot t))$$

Lösung:

Der Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}$ liefert $y'(t) = \lambda \cdot e^{\lambda t}$ und $y''(t) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda t}$.

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda^2 \cdot e^{\lambda t} - \frac{\lambda}{2} \cdot e^{\lambda t} + \frac{5}{8} \cdot e^{\lambda t} = e^{\lambda t} \cdot \left(\lambda^2 - 2 \cdot \lambda \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} + \frac{5}{8} \right) \\ &= e^{\lambda t} \cdot \left(\left(\lambda - \frac{1}{4}\right)^2 - \left(-\frac{9}{16}\right) \right) = e^{\lambda t} \cdot \left(\lambda - \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot i \right) \cdot \left(\lambda - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cdot i \right), \end{aligned}$$

was nur für $\lambda = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cdot i$ oder für $\lambda = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot i$ erfüllt werden kann.

Also bildet $\left\{ e^{\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cdot i\right) \cdot t}; e^{\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot i\right) \cdot t} \right\}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung und es gibt ein $A \in \mathbb{C}$ und ein $B \in \mathbb{C}$ mit $y(t) = A e^{\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cdot i\right) \cdot t} + B e^{\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot i\right) \cdot t}$.

Die beiden Lösungen aus dem Fundamentalsystem sind konjugiert komplex zueinander. Deshalb bildet auch $\left\{ \operatorname{Re} \left(e^{\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot i\right) \cdot t} \right); \operatorname{Im} \left(e^{\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot i\right) \cdot t} \right) \right\}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung.

Mit $e^{\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot i\right) \cdot t} = e^{\frac{t}{4} + i \cdot \frac{3t}{4}} = e^{\frac{t}{4}} \cdot e^{i \cdot \frac{3t}{4}} = e^{\frac{t}{4}} \cdot \left(\cos\left(\frac{3t}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{3t}{4}\right) \right) = e^{\frac{t}{4}} \cdot \cos\left(\frac{3t}{4}\right) + i \cdot e^{\frac{t}{4}} \cdot \sin\left(\frac{3t}{4}\right)$ ergibt sich also $\left\{ e^{\frac{t}{4}} \cdot \cos\left(\frac{3t}{4}\right); e^{\frac{t}{4}} \cdot \sin\left(\frac{3t}{4}\right) \right\}$ als Fundamentalsystem der Differentialgleichung und es gibt ein $C \in \mathbb{R}$ und ein $D \in \mathbb{R}$ mit $y(t) = C \cdot e^{\frac{t}{4}} \cdot \cos\left(\frac{3t}{4}\right) + D \cdot e^{\frac{t}{4}} \cdot \sin\left(\frac{3t}{4}\right)$.

e) $\frac{1}{4} \cdot y''(z) + \frac{1}{2} \cdot y'(z) - 2y(z) = 0$

$$C e^{2z} + D e^{-4z}$$

Lösung:

Der Ansatz $y(z) = e^{\lambda z}$ liefert $y'(z) = \lambda \cdot e^{\lambda z}$ und $y''(z) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda z}$.

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\lambda^2}{4} \cdot e^{\lambda z} + \frac{\lambda}{2} \cdot e^{\lambda z} - 2 \cdot e^{\lambda z} = \frac{1}{4} \cdot e^{\lambda z} \cdot (\lambda^2 + 2 \cdot \lambda \cdot 1 + 1^2 - 1 - 8) \\ &= \frac{1}{4} \cdot e^{\lambda z} \cdot ((\lambda + 1)^2 - 9) = \frac{1}{4} \cdot e^{\lambda z} \cdot (\lambda + 1 + 3) \cdot (\lambda + 1 - 3) = \frac{1}{4} \cdot e^{\lambda z} \cdot (\lambda + 4) \cdot (\lambda - 2), \end{aligned}$$

was nur für $\lambda = -4$ oder für $\lambda = 2$ erfüllt werden kann.

Also bildet $\{e^{-4z}; e^{2z}\}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung und es gibt ein $C \in \mathbb{R}$ und ein $D \in \mathbb{R}$ mit $y(z) = C e^{-4z} + D e^{2z}$.

f) $5y''(s) - 2y'(s) + y(s) = 0$

$$e^{\frac{1}{5} \cdot s} \cdot (C \cos\left(\frac{2}{5} \cdot s\right) + D \sin\left(\frac{2}{5} \cdot s\right))$$

Lösung:

Der Ansatz $y(s) = e^{\lambda s}$ liefert $y'(s) = \lambda \cdot e^{\lambda s}$ und $y''(s) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda s}$.

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} 0 &= 5\lambda^2 \cdot e^{\lambda s} - 2\lambda \cdot e^{\lambda s} + e^{\lambda s} = 5e^{\lambda s} \cdot \left(\lambda^2 - 2 \cdot \lambda \cdot \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 - \frac{1}{25} + \frac{1}{5} \right) \\ &= 5e^{\lambda s} \cdot \left(\left(\lambda - \frac{1}{5}\right)^2 - \left(-\frac{4}{25}\right) \right) = 5e^{\lambda s} \cdot \left(\lambda - \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \cdot i \right) \cdot \left(\lambda - \frac{1}{5} - \frac{2}{5} \cdot i \right), \end{aligned}$$

was nur für $\lambda = \frac{1}{5} - \frac{2}{5} \cdot i$ oder für $\lambda = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \cdot i$ erfüllt werden kann.

Also bildet $\left\{ e^{\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{5} \cdot i\right) \cdot s}; e^{\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5} \cdot i\right) \cdot s} \right\}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung und es gibt ein $A \in \mathbb{C}$ und ein $B \in \mathbb{C}$ mit $y(s) = A e^{\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{5} \cdot i\right) \cdot s} + B e^{\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5} \cdot i\right) \cdot s}$.

Die beiden Lösungen aus dem Fundamentalsystem sind konjugiert komplex zueinander. Deshalb bildet auch $\left\{ \operatorname{Re} \left(e^{\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5} \cdot i\right) \cdot s} \right); \operatorname{Im} \left(e^{\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5} \cdot i\right) \cdot s} \right) \right\}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung.

Mit $e^{(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i) \cdot s} = e^{\frac{s}{5} + i \cdot \frac{2s}{5}} = e^{\frac{s}{5}} \cdot e^{i \cdot \frac{2s}{5}} = e^{\frac{s}{5}} \cdot (\cos(\frac{2s}{5}) + i \cdot \sin(\frac{2s}{5})) = e^{\frac{s}{5}} \cdot \cos(\frac{2s}{5}) + i \cdot e^{\frac{s}{5}} \cdot \sin(\frac{2s}{5})$ ergibt sich also $\left\{ e^{\frac{s}{5}} \cdot \cos(\frac{2s}{5}); e^{\frac{s}{5}} \cdot \sin(\frac{2s}{5}) \right\}$ als Fundamentalsystem der Differentialgleichung und es gibt ein $C \in \mathbb{R}$ und ein $D \in \mathbb{R}$ mit $y(s) = C \cdot e^{\frac{s}{5}} \cdot \cos(\frac{2s}{5}) + D \cdot e^{\frac{s}{5}} \cdot \sin(\frac{2s}{5})$.

g) $y'''(x) - 6y''(x) + 12y'(x) - 8y(x) = 0$.

$$y(x) = A_3 x^2 e^{(2x)} + A_2 x e^{(2x)} + A_1 e^{(2x)}$$

Lösung:

Einsetzen des Standardansatzes $y(x) = e^{\lambda x}$ für homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten führt auf die charakteristische Gleichung

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0.$$

Die Nullstellen des *charakteristischen* Polynoms sind 2, 2, 2. Damit ergibt sich, unter Berücksichtigung der Vielfachheit der Polynomnullstellen, die allgemeine Lösung

$$y(x) = A_3 x^2 e^{2x} + A_2 x e^{2x} + A_1 e^{2x}, \quad A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{C}.$$



DGL/NteOrdHom/Ag_DGLOnHom_LinKonstKoeffDglAwprWpAlleKombis.tex

Aufgabe 14.104 (lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten)

spf

Lösen Sie die folgenden linearen Differentialgleichungen zunächst allgemein!

Geben Sie außerdem alle reellen Lösungen an!

Sind zusätzlich Bedingungen angegeben, so suchen Sie die Lösung der Differentialgleichung, die sämtliche Bedingungen erfüllt!

a) $2y'''(x) + 48y(x) = 6y''(x) + 20y'(x)$ mit $y(0) = 42, y'(0) = 42$ und $y'''(0) = 0$
 $Ae^{2x} + Be^{-3x} + Ce^{4x}, A = 35, B = 8, C = -1$

Lösung:

Zur Lösung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten empfiehlt sich der Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$. Dann gilt $y'(x) = \lambda \cdot e^{\lambda x}$, $y''(x) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}$ und $y'''(x) = \lambda^3 \cdot e^{\lambda x}$.

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

$$2\lambda^3 \cdot e^{\lambda x} + 48 \cdot e^{\lambda x} = 6\lambda^2 \cdot e^{\lambda x} + 20\lambda \cdot e^{\lambda x} \quad \text{bzw.} \quad \lambda^3 - 3\lambda^2 - 10\lambda + 24 = 0.$$

Es gilt $1^3 - 3 \cdot 1^2 - 10 \cdot 1 + 24 = 1 - 3 - 10 + 24 = 25 - 13 = 12 \neq 0$, $(-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 10 \cdot (-1) + 24 = -1 - 3 + 10 + 24 = -4 + 34 = 30 \neq 0$ und $2^3 - 3 \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 + 24 = 8 - 12 - 20 + 24 = 32 - 32 = 0$.

Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} \lambda^3 - 3\lambda^2 - 10\lambda + 24 &= (\lambda - 2) \cdot (\lambda^2 - \lambda - 12) \\ \frac{-(\lambda^3 - 2\lambda^2)}{-\lambda^2 - 10\lambda + 24} &= (\lambda - 2) \cdot \left(\lambda^2 - 2 \cdot \lambda \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 12 \right) \\ &= (\lambda - 2) \cdot \left(\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} \right) \\ \frac{-(-\lambda^2 + 2\lambda)}{-12\lambda + 24} &= (\lambda - 2) \cdot \left(\lambda - \frac{1}{2} + \frac{7}{2} \right) \cdot \left(\lambda - \frac{1}{2} - \frac{7}{2} \right) \\ &= (\lambda - 2) \cdot (\lambda + 3) \cdot (\lambda - 4). \\ \frac{-(-12\lambda + 24)}{0} & \end{aligned}$$

Damit $x \mapsto e^{\lambda x}$ die Zuordnungsvorschrift einer Lösung der Differentialgleichung ist, muss also $\lambda = 2$, $\lambda = -3$ oder $\lambda = 4$ gelten. Das liefert drei linear unabhängige Lösungen, die also ein

Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt $20\lambda^4 - 36\lambda^3 + 11\lambda^2 + 9\lambda - 4 =$

$$\begin{aligned}
 (\lambda - 1) \cdot (20\lambda^3 - 16\lambda^2 - 5\lambda + 4) &= (\lambda - 1) \cdot \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \cdot (20\lambda^2 - 6\lambda - 8) \\
 \frac{-(20\lambda^3 - 10\lambda^2)}{ } &= 20 \cdot (\lambda - 1) \cdot \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\lambda^2 - 2 \cdot \lambda \cdot \frac{3}{20} + \left(\frac{3}{20}\right)^2 - \frac{9}{400} - \frac{2}{5}\right) \\
 \frac{-6\lambda^2 - 5\lambda + 4}{ } &= 20 \cdot (\lambda - 1) \cdot \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\left(\lambda - \frac{3}{20}\right)^2 - \frac{169}{400}\right) \\
 \frac{-(-6\lambda^2 + 3\lambda)}{ } &= 20 \cdot (\lambda - 1) \cdot \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\lambda - \frac{3}{20} + \frac{13}{20}\right) \cdot \left(\lambda - \frac{3}{20} - \frac{13}{20}\right) \\
 \frac{-8\lambda + 4}{ } &= 20 \cdot (\lambda - 1) \cdot \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\lambda - \frac{4}{5}\right) \cdot \left(\lambda + \frac{4}{5}\right) \\
 \frac{-(-8\lambda + 4)}{ } &= 20 \cdot (\lambda - 1) \cdot \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\lambda - \frac{4}{5}\right) \cdot \left(\lambda + \frac{4}{5}\right) \\
 0 &
 \end{aligned}$$

Damit $t \mapsto e^{\lambda t}$ die Zuordnungsvorschrift einer Lösung der Differentialgleichung ist, muss also $\lambda = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = -\frac{1}{2}$ oder $\lambda = \frac{4}{5}$ gelten. Das liefert vier linear unabhängige Lösungen, die also ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung bilden. Damit ergibt sich die allgemeine Lösung der Differentialgleichung zu

$$f(t) = Ae^t + Be^{\frac{t}{2}} + Ce^{-\frac{t}{2}} + De^{\frac{4t}{5}} \quad \text{mit } A \in \mathbb{C}, B \in \mathbb{C}, C \in \mathbb{C} \text{ und } D \in \mathbb{C}.$$

c) $12g(x) + 16g'(x) + 7g''(x) + g'''(x) = 0$ mit $g(-1) = \frac{e^2}{2}$, $g(0) = 1$ und $g''(-1) = 2e^2$
 $Ae^{-2x} + Bxe^{-2x} + Ce^{-3x}$, $A = \frac{e+2}{e+4}$, $B = \frac{5e}{2e+8}$, $C = \frac{2}{e+4}$

Lösung:

Zur Lösung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten empfiehlt sich der Ansatz $g(x) = e^{\lambda x}$. Dann gilt $g'(x) = \lambda \cdot e^{\lambda x}$, $g''(x) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}$ und $g'''(x) = \lambda^3 \cdot e^{\lambda x}$.

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

$$12 \cdot e^{\lambda x} + 16\lambda \cdot e^{\lambda x} + 7\lambda^2 \cdot e^{\lambda x} + \lambda^3 \cdot e^{\lambda x} \quad \text{bzw.} \quad \lambda^3 + 7\lambda^2 + 16\lambda + 12 = 0.$$

Mögliche rationale Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind die Elemente der Menge

$$\{-12; -6; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 6; 12\}.$$

Da alle Koeffizienten des Polynoms positiv sind, kann keine positive Zahl eine Nullstelle des Polynoms sein. Es gilt $(-1)^3 + 7 \cdot (-1)^2 + 16 \cdot (-1) + 12 = -1 + 7 - 16 + 12 = -17 + 19 = 2 \neq 0$ und $(-2)^3 + 7 \cdot (-2)^2 + 16 \cdot (-2) + 12 = -8 + 28 - 32 + 12 = -40 + 40 = 0$.

Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned}
 \lambda^3 + 7\lambda^2 + 16\lambda + 12 &= (\lambda + 2) \cdot (\lambda^2 + 5\lambda + 6) \\
 \frac{-(\lambda^3 + 2\lambda^2)}{ } &= (\lambda + 2) \cdot \left(\lambda^2 + 2 \cdot \lambda \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 6\right) \\
 \frac{5\lambda^2 + 16\lambda + 12}{ } &= (\lambda + 2) \cdot \left(\left(\lambda + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) \\
 \frac{-(5\lambda^2 + 10\lambda)}{ } &= (\lambda + 2) \cdot \left(\lambda + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\lambda + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right) \\
 \frac{6\lambda + 12}{ } &= (\lambda + 2)^2 \cdot (\lambda + 3) \cdot \left(\lambda + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right) \\
 \frac{-(6\lambda + 12)}{ } &= (\lambda + 2)^2 \cdot (\lambda + 3) \cdot \left(\lambda + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right) \\
 0 &
 \end{aligned}$$

Damit $x \mapsto e^{\lambda x}$ die Zuordnungsvorschrift einer Lösung der Differentialgleichung ist, muss also $\lambda = -2$ oder $\lambda = -3$ gelten. Da -2 eine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, ist auch $x \mapsto x \cdot e^{-2x}$ eine Lösung der Differentialgleichung. Das liefert drei linear unabhängige

Lösungen, die also ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung bilden. Damit ergibt sich die allgemeine Lösung der Differentialgleichung zu

$$g(x) = Ae^{-2x} + Bxe^{-2x} + Ce^{-3x} \quad \text{mit} \quad A \in \mathbb{C}, B \in \mathbb{C} \text{ und } C \in \mathbb{C}.$$

Dann folgt $g'(x) = -2Ae^{-2x} + Be^{-2x} - 2xB e^{-2x} - 3Ce^{-3x}$ und $g''(x) = 4Ae^{-2x} - 2Be^{-2x} - 2Be^{-2x} + 4xB e^{-2x} + 9Ce^{-3x}$.

Aus dem Anfangswertproblem ergibt sich also das Gleichungssystem

$$Ae^2 - Be^2 + Ce^3 = \frac{e^2}{2}, \quad A + C = 1 \quad \text{und} \quad 4Ae^2 - 8Be^2 + 9Ce^3 = 2e^2.$$

Wir teilen die äußeren Gleichungen durch e^2 und lösen das Gleichungssystem mit dem Gauß-Algorithmus

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & e & \left| \frac{1}{2} \right. \\ 1 & 0 & 1 & \left| 1 \right. \\ 4 & -8 & 9e & \left| 2 \right. \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ \cdot (-1) \\ + \end{array} \begin{array}{l} \cdot (-4) \\ \uparrow \\ + \end{array} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \left| 1 \right. \\ 0 & -1 & e-1 & \left| -\frac{1}{2} \right. \\ 0 & -8 & 9e-4 & \left| -2 \right. \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot (-8) \\ \cdot (-1) \\ + \end{array} \\ \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \left| 1 \right. \\ 0 & 1 & 1-e & \left| \frac{1}{2} \right. \\ 0 & 0 & e+4 & \left| 2 \right. \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ + \\ \cdot \frac{-1}{e+4} \end{array} \begin{array}{l} + \\ \cdot \frac{e-1}{e+4} \\ \cdot \frac{1}{e+4} \end{array} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \left| 1 - \frac{2}{e+4} \right. \\ 0 & 1 & 0 & \left| \frac{1}{2} + \frac{2e-2}{e+4} \right. \\ 0 & 0 & 1 & \left| \frac{2}{e+4} \right. \end{pmatrix}$$

Also gilt $A = \frac{e+2}{e+4}$, $B = \frac{5e}{2e+8}$, $C = \frac{2}{e+4}$ und $g(x) = \frac{5ex+2e+4}{2e+8} \cdot e^{-2x} + \frac{2}{e+4} \cdot e^{-3x}$.

d) $2w'''(t) + 6w''(t) + 8w'(t) + 4w(t) = 0$ mit $w(-\pi) = e^\pi$, $w(0) = 1$ und $w(\frac{\pi}{2}) = 0$
 $ae^{-t} + be^{-t+it} + ce^{-t-it}$, $e^{-t} \cdot (A + B \cos(t) + C \sin(t))$, $A = 1$, $B = 0$, $C = -1$

Lösung:

Zur Lösung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten empfiehlt sich der Ansatz $w(t) = e^{\lambda t}$. Dann gilt $w'(t) = \lambda \cdot e^{\lambda t}$, $w''(t) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda t}$ und $w'''(t) = \lambda^3 \cdot e^{\lambda t}$.

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

$$2\lambda^3 \cdot e^{\lambda x} + 6\lambda^2 \cdot e^{\lambda x} + 8\lambda \cdot e^{\lambda x} + 4 \cdot e^{\lambda x} \quad \text{bzw.} \quad \lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda + 2 = 0.$$

Mögliche rationale Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind die Elemente der Menge

$$\{-2; -1; 1; 2\}.$$

Da alle Koeffizienten des Polynoms positiv sind, kann keine positive Zahl eine Nullstelle des Polynoms sein. Es gilt $(-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 2 = -1 + 3 - 4 + 2 = -5 + 5 = 0$.

Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{array}{rcl} \lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda + 2 & = & (\lambda + 1) \cdot (\lambda^2 + 2\lambda + 2) \\ \frac{-(\lambda^3 + \lambda^2)}{2\lambda^2 + 4\lambda + 2} & = & (\lambda + 1) \cdot (\lambda^2 + 2 \cdot \lambda \cdot 1 + 1^2 - 1 + 2) \\ & = & (\lambda + 1) \cdot ((\lambda + 1)^2 - i^2) \\ \frac{-(2\lambda^2 + 2\lambda)}{2\lambda + 2} & = & (\lambda + 1) \cdot (\lambda + 1 + i) \cdot (\lambda + 1 - i). \\ \frac{-(2\lambda + 2)}{0} & & \end{array}$$

Damit $x \mapsto e^{\lambda x}$ die Zuordnungsvorschrift einer Lösung der Differentialgleichung ist, muss also $\lambda = -1$, $\lambda = -1 - i$ oder $\lambda = -1 + i$ gelten. Das liefert drei linear unabhängige Lösungen, die

also ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung bilden. Damit ergibt sich die allgemeine Lösung der Differentialgleichung zu

$$w(t) = ae^{-t} + be^{(-1-i)t} + ce^{(-1+i)t} \quad \text{mit } a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C} \text{ und } c \in \mathbb{C}.$$

Setzt man $A := a$, $B := b + c$ und $C := (-b + c) \cdot i$, so folgt

$$\begin{aligned} w(t) &= ae^{-t} + be^{(-1-i)t} + ce^{(-1+i)t} \\ &= ae^{-t} + be^{-t} \cdot (\cos(-t) + i \cdot \sin(-t)) + ce^{-t} \cdot (\cos(t) + i \cdot \sin(t)) \\ &= e^{-t} \cdot (a + \cos(t) \cdot (b + c) + \sin(t) \cdot i \cdot (-b + c)) \\ &= e^{-t} \cdot (A + B \cos(t) + C \sin(t)) \quad \text{mit } A \in \mathbb{C}, B \in \mathbb{C} \text{ und } C \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Aus dem Anfangswertproblem ergibt sich also das Gleichungssystem

$$e^{\pi} \cdot (A - B) = e^{\pi}, \quad A + B = 1 \quad \text{und} \quad e^{-\frac{\pi}{2}} \cdot (A + C) = 0.$$

Wir teilen die äußeren Gleichungen durch den Exponentialterm und lösen das Gleichungssystem mit dem Gauß-Algorithmus

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \left\| \begin{array}{l} \cdot (-1) \\ + \\ + \end{array} \right\| \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \left\| \begin{array}{l} + \\ \cdot \frac{1}{2} \\ + \end{array} \right\| \cdot \frac{-1}{2} \quad \cdot \frac{1}{2} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Also gilt $A = 1$, $B = 0$ und $C = -1$ bzw. $w(t) = e^{-t} \cdot (1 - \sin(t))$.

e) $h^{(4)}(x) + h''(x) + 52h(x) = 36h'(x)$

$$ae^{2x} + bxe^{2x} + ce^{-2x-3ix} + de^{-2x+3ix}, Ae^{2x} + Bxe^{2x} + e^{-2x} \cdot (C \cos(3x) + D \sin(3x))$$

Lösung:

Zur Lösung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten empfiehlt sich der Ansatz $h(x) = e^{\lambda x}$. Dann gilt $h'(x) = \lambda \cdot e^{\lambda x}$, $h''(x) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}$, $h'''(x) = \lambda^3 \cdot e^{\lambda x}$ und $h^{(4)}(x) = \lambda^4 \cdot e^{\lambda x}$.

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

$$\lambda^4 \cdot e^{\lambda x} + \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} + 52 \cdot e^{\lambda x} = 36\lambda \cdot e^{\lambda x} \quad \text{bzw.} \quad \lambda^4 + \lambda^2 - 36\lambda + 52 = 0.$$

Mögliche rationale Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind die Elemente der Menge

$$\{-52; -26; -13; -4; -2; -1; 1; 2; 4; 13; 26; 52\}.$$

Es gilt $1^4 + 1^2 - 36 \cdot 1 + 52 = 1 + 1 - 36 + 52 = 54 - 36 = 18 \neq 0$, $(-1)^4 + (-1)^2 - 36 \cdot (-1) + 52 = 1 + 1 + 36 + 52 = 90 \neq 0$ und $2^4 + 2^2 - 36 \cdot 2 + 52 = 16 + 4 - 72 + 52 = 20 - 20 = 0$.

Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{array}{r} \lambda^4 \quad \quad + \quad \lambda^2 - 36\lambda + 52 = (\lambda - 2) \cdot (\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 26) \cdot \\ \hline -(\lambda^4 - 2\lambda^3) \\ \hline 2\lambda^3 + \lambda^2 - 36\lambda + 52 \\ \hline -(2\lambda^3 - 4\lambda^2) \\ \hline 5\lambda^2 - 36\lambda + 52 \\ \hline -(5\lambda^2 - 10\lambda) \\ \hline -26\lambda + 52 \\ \hline -(-26\lambda + 52) \\ \hline 0 \end{array}$$

Es gilt $2^3 + 2 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 26 = 8 + 8 + 10 - 26 = 26 - 26 = 0$.

Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt $\lambda^4 + \lambda^2 - 36\lambda + 52 =$

$$\begin{aligned} \frac{(\lambda - 2) \cdot (\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 26)}{-\lambda^3 + 2\lambda^2} &= (\lambda - 2)^2 \cdot (\lambda^2 + 4\lambda + 13) \\ &= (\lambda - 2)^2 \cdot (\lambda^2 + 2 \cdot \lambda \cdot 2 + 2^2 - 4 + 13) \\ &= (\lambda - 2)^2 \cdot ((\lambda + 2)^2 - 9i^2) \\ \frac{-(4\lambda^2 - 8\lambda)}{13\lambda - 26} &= (\lambda - 2)^2 \cdot (\lambda + 2 + 3i) \cdot (\lambda + 2 - 3i). \\ \frac{-(13\lambda - 26)}{0} & \end{aligned}$$

Damit $x \mapsto e^{\lambda x}$ die Zuordnungsvorschrift einer Lösung der Differentialgleichung ist, muss also $\lambda = 2$, $\lambda = -2 - 3i$ oder $\lambda = -2 + 3i$ gelten. Da 2 eine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, ist auch $x \mapsto x \cdot e^{2x}$ eine Lösung der Differentialgleichung. Das liefert vier linear unabhängige Lösungen, die also ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung bilden. Damit ergibt sich die allgemeine Lösung der Differentialgleichung zu

$$h(x) = ae^{2x} + bx \cdot e^{2x} + ce^{(-2-3i)x} + de^{(-2+3i)x} \quad \text{mit } a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{C} \text{ und } d \in \mathbb{C}.$$

Setzt man $A := a$, $B := b$, $C := c + d$ und $D := (-c + b) \cdot i$, so folgt

$$\begin{aligned} h(x) &= ae^{2x} + bx \cdot e^{2x} + ce^{(-2-3i)x} + de^{(-2+3i)x} \\ &= ae^{2x} + bx \cdot e^{2x} + ce^{-2x} \cdot (\cos(-3x) + i \cdot \sin(-3x)) + de^{-2x} \cdot (\cos(3x) + i \cdot \sin(3x)) \\ &= ae^{2x} + bx \cdot e^{2x} + e^{-2x} \cdot \cos(3x) \cdot (c + d) + e^{-2x} \cdot \sin(3x) \cdot i \cdot (-c + d) \\ &= Ae^{2x} + Bx \cdot e^{2x} + e^{-2x} \cdot (C \cos(3x) + D \sin(3x)) \text{ mit } A \in \mathbb{C}, B \in \mathbb{C}, C \in \mathbb{C} \text{ und } D \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$



DGL/NteOrdHom/Ag_DGLOnHom_RedDerOrdBeideFundLsgnRaten.tex

Aufgabe 14.105 (Reduktion der Ordnung mit bekanntem Ziel üben)

SPF

An der Differentialgleichung $(1 - x) \cdot y''(x) + x \cdot y'(x) = y(x)$ soll das Verfahren der Reduktion der Ordnung geübt werden.

$$y(x) = Cx + De^x$$

- a) In dieser Differentialgleichung sind zwei Fundamentallösungen ratbar — ein eher seltenes Phänomen. Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an!

Lösung:

Eine Lösung der Differentialgleichung ist die Identität, denn wegen $\text{id}' = 1$ und $\text{id}'' = 0$ gilt für alle $x \in \mathbb{C}$

$$(1 - x) \cdot \text{id}''(x) + x \cdot \text{id}'(x) = (1 - x) \cdot 0 + x \cdot 1 = x = \text{id}(x).$$

Eine weitere Lösung ist die Exponentialfunktion, denn mit $\exp' = \exp$ und $\exp'' = \exp$ ergibt sich für alle $x \in \mathbb{C}$

$$(1 - x) \cdot \exp''(x) + x \cdot \exp'(x) = (1 - x) \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x - x \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x = \exp(x).$$

Also ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad x \mapsto y(x) := C \cdot \text{id}(x) + D \cdot \exp(x) = Cx + De^x, \quad C \in \mathbb{C} \quad \text{und} \quad D \in \mathbb{C}.$$

- b) Eine Fundamentallösung enthält neben einem Exponentialterm keine weiteren Terme. Reduzieren Sie die Ordnung der Differentialgleichung mit Hilfe dieser Lösung und prüfen Sie, ob sich auf diesem Weg dieselbe allgemeine Lösung der Differentialgleichung ergibt!

Tipp: Gibt es ein $(\zeta, \vartheta)^T \in \mathbb{C}^2$ mit $\frac{-x+2}{x-1} = \zeta + \frac{\vartheta}{x-1}$ für alle $x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$?

Lösung:

Die angesprochene Fundamentallösung ist die Exponentialfunktion. Wir suchen eine weitere Lösung der Differentialgleichung, die die Form $u := g \cdot \exp$ mit einer Funktion g hat. Dann gilt $u'(x) = g'(x) \cdot e^x + g(x) \cdot e^x$ und $u''(x) = g''(x) \cdot e^x + h'(x) \cdot e^x + g'(x) \cdot e^x + g(x) \cdot e^x$ für alle $x \in \mathbb{C}$.

Setzt man u in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$(1-x) \cdot (g''(x) \cdot e^x + 2g'(x) \cdot e^x + g(x) \cdot e^x) + x \cdot (g'(x) \cdot e^x + g(x) \cdot e^x) = g(x) \cdot e^x,$$

was nach Auflösen und Umstellen der Gleichung eine Differentialgleichung für g' liefert:

$$(1-x) \cdot g''(x) + (2-x) \cdot g'(x) = 0$$

Eine Lösung dieser Differentialgleichung wäre $g' = 0$, was aber eine konstante Funktion g liefern würde. In diesem Fall wäre u ein Vielfaches der Identität.

Durch eine Trennung der Variablen erhält man für alle $x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ mit $g'(x) \neq 0$

$$\frac{g''(x)}{g'(x)} = \frac{-x+2}{x-1} = \frac{-x+1+1}{x-1} = -1 + \frac{1}{x-1}.$$

Durch Integration der Gleichung, die aus der Trennung der Variablen hervorgegangen ist, erhalten wir für alle $x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ mit $g'(x) \neq 0$

$$\ln(|g'(x)|) = \int \left(-1 + \frac{1}{x-1}\right) dx = -x + \ln(|x-1|) = \ln(e^{-x} \cdot |x-1|).$$

Damit folgt $g'(x) = e^{-x} \cdot (x-1)$ für alle $x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, also

$$\begin{aligned} g(x) &= \int \underbrace{e^{-x}}_{=s'(x)} \cdot \underbrace{(x-1)}_{=t(x)} dx = \underbrace{(-e^{-x})}_{=s(x)} \cdot \underbrace{(x-1)}_{=t(x)} - \int \underbrace{(-e^{-x})}_{=s(x)} \cdot \underbrace{1}_{=t'(x)} dx \\ &= e^{-x} \cdot (1-x) + \int e^{-x} dx = e^{-x} \cdot (1-x) + (-e^{-x}) = e^{-x} \cdot (1-x-1) = -e^{-x} \cdot x. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich $u(x) = -x$ für alle $x \in \mathbb{C}$ als Funktionsvorschrift einer von der Exponentialfunktion linear unabhängigen Lösung der Differentialgleichung. Damit gibt es für jede Lösung der Differentialgleichung Konstanten $C \in \mathbb{C}$ und $D \in \mathbb{C}$, so dass für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt:

$$y(x) = Cx + De^x.$$

- c) Eine Fundamentallösung enthält neben einem polynomialen Term keine weiteren Terme. Reduzieren Sie die Ordnung der Differentialgleichung mit Hilfe dieser Lösung und prüfen Sie, ob sich auf diesem Weg dieselbe allgemeine Lösung der Differentialgleichung ergibt!

Tipps: Gibt es ein $(\varphi, \psi, \chi)^T \in \mathbb{C}^3$ mit $\frac{x^2-2x+2}{x(x-1)} = \varphi + \frac{\psi}{x} + \frac{\chi}{x-1}$ für alle $x \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1\}$?

$$\text{Es ist } \int e^x \cdot \frac{x-1}{x^2} dx = \int (e^x \cdot (x-1)) \cdot \frac{1}{x^2} dx.$$

Lösung:

Die angesprochene Fundamentallösung ist die Identität. Wir suchen eine weitere Lösung der Differentialgleichung, die die Form $v := h \cdot \text{id}$ mit einer Funktion h hat.

Dann gilt $v'(x) = h'(x) \cdot x + h(x)$ und $v''(x) = h''(x) \cdot x + h'(x) + h'(x)$ für alle $x \in \mathbb{C}$.

Setzt man v in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$(1-x) \cdot (h''(x) \cdot x + 2h'(x)) + x \cdot (h'(x) \cdot x + h(x)) = h(x) \cdot x,$$

was nach Auflösen und Umstellen der Gleichung eine Differentialgleichung für h' liefert:

$$x \cdot (1-x) \cdot h''(x) + (x^2 - 2x + 2) \cdot h'(x) = 0$$

Eine Lösung dieser Differentialgleichung wäre $h' = 0$, was aber eine konstante Funktion h liefern würde. In diesem Fall wäre v ein Vielfaches der Identität.

Durch eine Trennung der Variablen erhält man für alle $x \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1\}$ mit $h'(x) \neq 0$

$$\frac{h''(x)}{h'(x)} = \frac{x^2 - 2x + 2}{x \cdot (x-1)} = \frac{x^2 - x - x + 2}{x^2 - x} = 1 + \frac{-x + 2}{x \cdot (x-1)} = 1 + \frac{\psi}{x} + \frac{\chi}{x-1}$$

mit noch zu bestimmenden $\psi \in \mathbb{C}$ und $\chi \in \mathbb{C}$. Subtraktion von 1 und Multiplikation der rechten Gleichung mit dem Hauptnenner liefert für alle $x \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1\}$

$$-x + 2 = \psi \cdot (x-1) + \chi \cdot x = (\psi + \chi) \cdot x + (-\psi).$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert $\left\{ \begin{array}{l} -\psi = 2 \\ \psi + \chi = -1 \end{array} \right\} \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} \psi = -2 \\ -2 + \chi = -1 \end{array} \right\} \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} \psi = -2 \\ \chi = 1 \end{array} \right\}.$

Durch Integration der Gleichung, die aus der Trennung der Variablen hervorgegangen ist, erhalten wir für alle $x \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1\}$ mit $h'(x) \neq 0$

$$\ln(|h'(x)|) = \int \left(1 + \frac{-2}{x} + \frac{1}{x-1} \right) dx = x - 2 \ln(|x|) + \ln(|x-1|) = \ln \left(e^x \cdot \frac{|x-1|}{x^2} \right).$$

Damit folgt $h'(x) = e^x \cdot \frac{x-1}{x^2}$ für alle $x \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1\}$, also

$$\begin{aligned} h(x) &= \int \underbrace{e^x \cdot (x-1)}_{=p(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{=q'(x)} dx = \underbrace{e^x \cdot (x-1)}_{=p(x)} \cdot \underbrace{\frac{-1}{x}}_{=q(x)} - \int \underbrace{(e^x \cdot (x-1) + e^x \cdot 1)}_{=p'(x)} \cdot \underbrace{\frac{-1}{x}}_{=q(x)} dx \\ &= e^x \cdot \frac{-x+1}{x} + \int e^x \cdot x \cdot \frac{1}{x} dx = e^x \cdot \left(-1 + \frac{1}{x} \right) + \int e^x dx = -e^x + \frac{e^x}{x} + e^x = \frac{e^x}{x}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich $v(x) = e^x$ für alle $x \in \mathbb{C}$ als Funktionsvorschrift einer von der Identität linear unabhängigen Lösung der Differentialgleichung. Damit gibt es für jede Lösung der Differentialgleichung Konstanten $C \in \mathbb{C}$ und $D \in \mathbb{C}$, so dass für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt:

$$y(x) = Cx + De^x.$$



DGL/NteOrdHom/Ag_DGLOnHom_RedDerOrdDreiPartBrueche.tex

Aufgabe 14.106 (Reduktion der Ordnung mit Partialbruchzerlegung)

SPF

Finden Sie eine Lösung der folgenden Differentialgleichung und bestimmen Sie eine zweite mit Hilfe des Verfahrens der Reduktion der Ordnung:

$$(1-t^2) \cdot f''(t) + 2t \cdot f'(t) = 2f(t)$$

$$f(t) = Dt^2 + Ct + D$$

Tipp: Gibt es ein $(\alpha, \beta, \gamma)^T \in \mathbb{C}^3$ mit $\frac{2}{t(t-1)(t+1)} = \frac{\alpha}{t} + \frac{\beta}{t-1} + \frac{\gamma}{t+1}$ für alle $t \in \mathbb{C} \setminus \{-1; 0; 1\}$?

Lösung:

Eine Lösung der Differentialgleichung ist die Identität, denn für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$(1 - t^2) \cdot \text{id}''(t) + 2t \cdot \text{id}'(t) = (1 - t^2) \cdot 0 + 2t \cdot 1 = 2t = 2 \text{id}(t).$$

Wir suchen eine weitere Lösung der Differentialgleichung, die die Form $g := u \cdot \text{id}$ mit einer Funktion u hat. Dann gilt $g'(t) = u'(t) \cdot t + u(t)$ und $g''(t) = u''(t) \cdot t + u'(t) + u'(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Setzt man g in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$(1 - t^2) \cdot (u''(t) \cdot t + 2u'(t)) + 2t \cdot (u'(t) \cdot t + u(t)) = 2u(t) \cdot t,$$

was nach Auflösen und Umstellen der Gleichung eine Differentialgleichung für u' liefert:

$$t \cdot (1 - t^2) \cdot u''(t) + 2u'(t) = 0$$

Eine Lösung dieser Differentialgleichung wäre $u' = 0$, was aber eine konstante Funktion u liefern würde. In diesem Fall wäre g ein Vielfaches der Identität.

Durch eine Trennung der Variablen erhält man für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ mit $u'(t) \neq 0$

$$\frac{u''(t)}{u'(t)} = \frac{2}{t \cdot (t-1) \cdot (t+1)} = \frac{\alpha}{t} + \frac{\beta}{t-1} + \frac{\gamma}{t+1}$$

mit noch zu bestimmenden $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ und $\gamma \in \mathbb{R}$.

Multiplikation der rechten Gleichung mit dem Hauptnenner liefert für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$

$$2 = \alpha \cdot (t-1) \cdot (t+1) + \beta \cdot t \cdot (t+1) + \gamma \cdot (t-1) \cdot t = (\alpha + \beta + \gamma) \cdot t^2 + (\beta - \gamma) \cdot t + (-\alpha).$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert

$$\left. \begin{array}{l} -\alpha = 2 \\ \beta - \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{array} \right\} \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = -2 \\ \beta = \gamma \\ -2 + \gamma + \gamma = 0 \end{array} \right\} \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = -2 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 1 \end{array} \right.$$

Durch Integration der Gleichung, die aus der Trennung der Variablen hervorgegangen ist, erhalten wir für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ mit $u'(t) \neq 0$

$$\ln(|u'(t)|) = \int \left(\frac{-2}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1} \right) dt = -2 \ln(|t|) + \ln(|t-1|) + \ln(|t+1|) = \ln \left(\frac{|t^2 - 1|}{t^2} \right).$$

Damit folgt für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$

$$u'(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2} = 1 - \frac{1}{t^2} \quad \text{bzw.} \quad u(t) = t + \frac{1}{t}.$$

Damit ergibt sich $g(t) = t^2 + 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$ als Funktionsvorschrift einer von der Identität linear unabhängigen Lösung der Differentialgleichung. Damit gibt es für jede Lösung der Differentialgleichung Konstanten $C \in \mathbb{R}$ und $D \in \mathbb{R}$, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(t) = Dt^2 + Ct + D.$$

Die Lösungen der Differentialgleichung sind also die Ursprungsgeraden und alle Parabeln, für die Leitkoeffizient und Absolutglied (bzw. Öffnungsweite und y -Achsenabschnitt) übereinstimmen.



DGL/NteOrdHom/Ag_DGLOnHom_RedDerOrdEinstieg.tex

Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Verwenden Sie das Verfahren der Reduktion der Ordnung, um die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung zu erhalten:

$$x \cdot y''(x) + (a \cdot x + 2) \cdot y'(x) + a \cdot y(x) = 0.$$

$$B \cdot \frac{1}{x} + C \cdot \frac{e^{-ax}}{x}$$

Tipp: Prüfen Sie zunächst, ob eine allgemeine Potenz- oder eine allgemeine Exponentialfunktion die Differentialgleichung löst (sprich $f_k(x) = x^k$ oder $g_k(x) = e^{kx}$)!

Lösung:

Für alle $k \in \mathbb{C}$ ergeben sich für $f_k(x) := x^k$ die Ableitungen $f'_k(x) = k \cdot x^{k-1}$ und $f''_k(x) = k \cdot (k-1) \cdot x^{k-2}$. Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, so folgt

$$\begin{aligned} 0 &= x \cdot f''_k(x) + (a \cdot x + 2) \cdot f'_k(x) + a \cdot f_k(x) \\ &= x \cdot k \cdot (k-1) \cdot x^{k-2} + (ax + 2) \cdot k \cdot x^{k-1} + a \cdot x^k \\ &= k \cdot (k-1) \cdot x^{k-1} + ak \cdot x^k + 2k \cdot x^{k-1} + a \cdot x^k \\ &= k \cdot (k-1+2) \cdot x^{k-1} + (ak + a) \cdot x^k \\ &= k \cdot (k+1) \cdot x^{k-1} + a \cdot (k+1) \cdot x^k \\ &= (k+1) \cdot x^{k-1} \cdot (ax + k). \end{aligned}$$

Diese Gleichung wird für $k = -1$ für alle $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ erfüllt.

Also löst $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $x \mapsto f(x) := \frac{1}{x}$ die Differentialgleichung.

Für eine zweite Fundamentallösung h machen wir den Ansatz $h(x) = u(x) \cdot f(x) = \frac{u(x)}{x}$ und versuchen nun, ein geeignetes u zu finden: Es gilt $h'(x) = \frac{u'(x)}{x} - \frac{u(x)}{x^2}$ und $h''(x) = \frac{u''(x)}{x} - \frac{u'(x)}{x^2} - \frac{u'(x)}{x^2} + 2 \cdot \frac{u(x)}{x^3}$. Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, so folgt

$$\begin{aligned} 0 &= x \cdot h''(x) + (a \cdot x + 2) \cdot h'(x) + a \cdot h(x) \\ &= x \cdot \left(\frac{u''(x)}{x} - 2 \cdot \frac{u'(x)}{x^2} + 2 \cdot \frac{u(x)}{x^3} \right) + (ax + 2) \cdot \left(\frac{u'(x)}{x} - \frac{u(x)}{x^2} \right) + a \cdot \frac{u(x)}{x} \\ &= u''(x) - 2 \cdot \frac{u'(x)}{x} + 2 \cdot \frac{u(x)}{x^2} + a \cdot u'(x) + 2 \cdot \frac{u'(x)}{x} - a \cdot \frac{u(x)}{x} - 2 \cdot \frac{u(x)}{x^2} + a \cdot \frac{u(x)}{x} \\ &= u''(x) + a \cdot u'(x). \end{aligned}$$

Diese Differentialgleichung für u' lässt sich mit Hilfe einer Trennung der Veränderlichen lösen:

$$\begin{aligned} u''(x) + a \cdot u'(x) = 0 &\iff \frac{u''(x)}{u'(x)} = -a \iff \int \frac{u''(x)}{u'(x)} dx = \int (-a) dx \\ &\iff \left[\int \frac{1}{t} dx \right]_{t=u'(x)} = \int (-a) dx \iff [\ln(t)]_{t=u'(x)} = -ax \\ &\iff \ln(u'(x)) = -ax \iff u'(x) = e^{-ax} \iff u(x) = \int e^{-ax} dx \\ &\iff u(x) = \frac{1}{-a} \cdot e^{-ax}. \end{aligned}$$

Da mit jeder Lösung auch das Vielfache der Lösung die Differentialgleichung löst, ist also $g: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $x \mapsto g(x) := -a \cdot h(x) = -a \cdot u(x) \cdot f(x) = -a \cdot \frac{1}{-a} \cdot e^{-ax} \cdot \frac{1}{x} = \frac{e^{-ax}}{x}$ eine zweite Fundamentallösung der Differentialgleichung.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ergibt sich zu

$$y: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad x \mapsto y(x) := B \cdot f(x) + C \cdot g(x) = B \cdot \frac{1}{x} + C \cdot \frac{e^{-ax}}{x}, \quad B \in \mathbb{C} \quad \text{und} \quad C \in \mathbb{C}.$$



DGL/NteOrdHom/Ag_DGLOnHom_RedDerOrdKomplizierteZweiteFundLsg.tex

Aufgabe 14.108 (Reduktion der Ordnung)

SPF

Wir wollen die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung finden:

$$(x^3 - 2x^2) \cdot y''(x) + 3x^2 \cdot y'(x) + 12 \cdot y(x) = 0$$

- a) Prüfen Sie, ob es ein $k \in \mathbb{C}$ und ein $I \subseteq \mathbb{C}$ gibt, so dass die Funktion $m_k: I \rightarrow \mathbb{C}$ mit $x \mapsto m_k(x) := x^k$ die Differentialgleichung löst!

$$k = -2, I = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Lösung:

Für alle $k \in \mathbb{C}$ gilt $m_k(x) = x^k$, $m'_k(x) = k \cdot x^{k-1}$ und $m''_k(x) = k \cdot (k-1) \cdot x^{k-2}$.

Setzt man m_k in die Differentialgleichung ein, so ergibt sich damit die Bestimmungsgleichung

$$\begin{aligned} 0 &= (x^3 - 2x^2) \cdot k \cdot (k-1) \cdot x^{k-2} + 3x^2 \cdot k \cdot x^{k-1} + 12 \cdot x^k \\ &= k \cdot (k-1) \cdot x^{k+1} - 2k \cdot (k-1) \cdot x^k + 3k \cdot x^{k+1} + 12 \cdot x^k \\ &= k \cdot x^{k+1} \cdot (k-1+3) - 2 \cdot x^k \cdot (k^2 - k - 6) \\ &= k \cdot x^{k+1} \cdot (k+2) - 2 \cdot x^k \cdot (k+2) \cdot (k-3) \\ &= (k+2) \cdot x^k \cdot (kx - 2k + 6), \end{aligned}$$

wegen $k^2 - k - 6 = k^2 - 2 \cdot k \cdot \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 6 = (k - \frac{1}{2})^2 - \frac{25}{4} = (k - \frac{1}{2} + \frac{5}{2}) \cdot (k - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}) = (k+2) \cdot (k-3)$.

Also löst $m_{-2}: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $x \mapsto m_{-2}(x) = \frac{1}{x^2}$ die Differentialgleichung.

- b) Reduzieren Sie die Ordnung der gegebenen Differentialgleichung! Sie erhalten eine Differentialgleichung erster Ordnung, deren Lösung in Aufgabenteil d) erarbeitet werden soll.

$$x \cdot (x-2) \cdot g''(x) = (x-8) \cdot g'(x)$$

Lösung:

Wir machen den Ansatz $f(x) = g(x) \cdot m_{-2}(x) = \frac{g(x)}{x^2}$, um eine weitere Lösung f der Differentialgleichung zu finden. Dann gilt $f'(x) = \frac{g'(x)}{x^2} - \frac{2g(x)}{x^3}$ und $f''(x) = \frac{g''(x)}{x^2} - \frac{2g'(x)}{x^3} - \frac{2g'(x)}{x^3} + \frac{6g(x)}{x^4}$.

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} 0 &= (x^3 - 2x^2) \cdot \left(\frac{g''(x)}{x^2} - \frac{4g'(x)}{x^3} + \frac{6g(x)}{x^4} \right) + 3x^2 \cdot \left(\frac{g'(x)}{x^2} - \frac{2g(x)}{x^3} \right) + 12 \cdot \frac{g(x)}{x^2} \\ &= (x-2) \cdot g''(x) - 4 \cdot g'(x) + 8 \cdot \frac{g'(x)}{x} + 6 \cdot \frac{g(x)}{x} - 12 \cdot \frac{g(x)}{x^2} + 3 \cdot g'(x) - 6 \cdot \frac{g(x)}{x} + 12 \cdot \frac{g(x)}{x^2} \\ &= (x-2) \cdot g''(x) - \left(1 - \frac{8}{x}\right) \cdot g'(x). \end{aligned}$$

- c) Gibt es $a \in \mathbb{C}$ und $b \in \mathbb{C}$ mit $\frac{x-8}{x \cdot (x-2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2}$ für alle $x \in \mathbb{C} \setminus \{0; 2\}$?

$$a = 4, b = -3$$

Lösung durch Addieren einer Null:

Für alle $x \in \mathbb{C} \setminus \{0; 2\}$ gilt

$$\frac{x-8}{x \cdot (x-2)} = \frac{x-8+3x-3x}{x \cdot (x-2)} = \frac{4x-8-3x}{x \cdot (x-2)} = \frac{4 \cdot (x-2)}{x \cdot (x-2)} + \frac{-3x}{x \cdot (x-2)} = \frac{4}{x} + \frac{-3}{x-2}.$$

Lösung mit Koeffizientenvergleich:

Multipliziert man den Ansatz zur Partialbruchzerlegung aus der Aufgabenstellung mit dem Hauptnenner, so ergibt sich die für alle $x \in \mathbb{C} \setminus \{0; 2\}$ gültige Bestimmungsgleichung

$$x-8 = a \cdot (x-2) + b \cdot x = ax - 2a + bx = (a+b) \cdot x - 2a.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert das lineare Gleichungssystem $1 = a+b$ und $-8 = -2a$, welches von $a = 4$ und $b = -3$ eindeutig gelöst wird.

Lösung mit Grenzwerten:

Multipliziert man den Ansatz zur Partialbruchzerlegung aus der Aufgabenstellung mit dem Hauptnenner, so ergibt sich die für alle $x \in \mathbb{C} \setminus \{0; 2\}$ gültige Bestimmungsgleichung

$$x - 8 = a \cdot (x - 2) + b \cdot x.$$

Der Grenzübergang $\lim_{x \rightarrow 2}$ auf beiden Seiten liefert $-6 = 2b$. Der Grenzübergang $\lim_{x \rightarrow 0}$ auf beiden Seiten liefert $-8 = -2a$. Damit folgt $a = 4$ und $b = -3$.

- d) Finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung erster Ordnung aus Aufgabenteil b)!

$$g'(x) = \frac{x^4}{(x-2)^3}$$

Lösung:

Es handelt sich um eine separable Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} (x-2) \cdot g''(x) - \left(1 - \frac{8}{x}\right) \cdot g'(x) &= 0 & \iff \frac{g''(x)}{g'(x)} &= \frac{1 - \frac{8}{x}}{x-2} \\ \iff \int \frac{g''(x)}{g'(x)} dx &= \int \frac{x-8}{x \cdot (x-2)} dx & \stackrel{c)}{\iff} \left[\int \frac{1}{z} dz \right]_{z=g'(x)} &= \int \left(\frac{4}{x} + \frac{-3}{x-2} \right) dx \\ \iff [\ln(z)]_{z=g'(x)} &= 4 \cdot \ln(x) - 3 \cdot \ln(x-2) & \iff \ln(g'(x)) &= \ln(x^4) - \ln((x-2)^3) \\ \iff \ln(g'(x)) &= \ln\left(\frac{x^4}{(x-2)^3}\right) & \iff g'(x) &= \frac{x^4}{(x-2)^3}. \end{aligned}$$

- e) Finden Sie $p \in \mathbb{C}$, $q \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{C}$, $s \in \mathbb{C}$ und $t \in \mathbb{C}$ mit $\frac{x^4}{(x-2)^3} = px + q + \frac{r}{x-2} + \frac{s}{(x-2)^2} + \frac{t}{(x-2)^3}$ für alle $x \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$!

$$p = 1, q = 6, r = 24, s = 32, t = 16$$

Lösung:

p und q lassen sich mit Hilfe einer Polynomdivision bestimmen:

Wegen $(x-2)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot (-2) + 3 \cdot x \cdot (-2)^2 + (-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ ergibt sich

$$\begin{array}{r} x^4 \\ -(x^3 - 6x^2 + 12x - 8x) \\ \hline 6x^3 - 12x^2 + 8x \\ -(6x^3 - 36x^2 + 72x - 48) \\ \hline 24x^2 - 64x + 48 \end{array} = (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) \cdot (x + 6) + 24x^2 - 64x + 48$$

Also sind $p = 1$ und $q = 6$. r , s und t werden mit der Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} \frac{24x^2 - 64x + 48}{(x-2)^3} &= \frac{r}{x-2} + \frac{s}{(x-2)^2} + \frac{t}{(x-2)^3} = \frac{r \cdot (x-2)^2 + s \cdot (x-2) + t}{(x-2)^3} \\ &= \frac{r \cdot (x^2 - 4x + 4) + s \cdot (x-2) + t}{(x-2)^3} = \frac{r \cdot x^2 + (-4r + s) \cdot x + (4r - 2s + t)}{(x-2)^3} \end{aligned}$$

bestimmt. Ein Koeffizientenvergleich liefert das lineare Gleichungssystem

$$r = 24, \quad -4r + s = -64 \quad \text{und} \quad 4r - 2s + t = 48.$$

Wegen $4r = 4 \cdot 24 = 96$ ergibt sich $s = -64 + 96 = 32$ und damit $t = 48 - 96 + 64 = 112 - 96 = 16$.

f) Geben Sie die allgemeine Lösung der Ursprungsdifferentialgleichung an!

$$\frac{C}{x^2} + D \cdot \left(\frac{x+12}{2x} + \frac{24}{x^2} \cdot \ln(x-2) - \frac{32x-56}{x^2 \cdot (x-2)^2} \right)$$

Lösung:

Durch Integration der Lösung der Differentialgleichung erster Ordnung

$$\begin{aligned} g(x) &= \int g'(x) dx = \int \frac{x^4}{(x-2)^3} dx \stackrel{e)}{=} \int \left(x+6 + \frac{24}{x-2} + \frac{32}{(x-2)^2} + \frac{16}{(x-2)^3} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} + 6x + 24 \cdot \ln(x-2) - \frac{32}{x-2} - \frac{8}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

erhält man nach Einsetzen in den Ansatz aus Aufgabenteil b) eine zweite Lösung der Ursprungsdifferentialgleichung zu

$$f(x) = \frac{g(x)}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{6}{x} + \frac{24}{x^2} \cdot \ln(x-2) - \frac{32}{x^2 \cdot (x-2)} - \frac{8}{x^2 \cdot (x-2)^2}.$$

Damit ergibt sich die Gesamtlösung der Differentialgleichung zu $y: (2; \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$x \mapsto y(x) := \frac{C}{x^2} + D \cdot \frac{x+12}{2x} + D \cdot \frac{24}{x^2} \cdot \ln(x-2) - D \cdot \frac{32x-56}{x^2 \cdot (x-2)^2}, \quad C \in \mathbb{C} \text{ und } D \in \mathbb{C}.$$



DGL/NteOrdHom/Ag_LsgNachweisen_HermitePolynome.tex

Aufgabe 14.109 (Hermite-Polynome als DGL-Lösung)

Die Hermite-Polynome $H_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sind unter anderem in der Physik von Bedeutung. Sie sind Lösungen der Differentialgleichung

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0.$$

Weisen Sie dies für $n \leq 3$ mit $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$ und $H_3(x) = 8x^3 - 12x$ jeweils durch Ableiten und Einsetzen nach.

Lösung:

Nachrechnen durch Einsetzen und Ableiten:

$$\begin{aligned} H_0''(x) - 2xH_0'(x) + 2 \cdot 0H_0(x) &= (1)'' - 2x(1)' + 2 \cdot 0(1) \\ &= 0 - 0 + 2 \cdot 0 \cdot 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_1''(x) - 2xH_1'(x) + 2 \cdot 1H_1(x) &= (2x)'' - 2x(2x)' + 2 \cdot 1(2x) \\ &= (2)' - 2x(2) + 2(2x) \\ &= 0 - 4x + 4x \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_2''(x) - 2xH_2'(x) + 2 \cdot 2H_2(x) &= (4x^2 - 2)'' - 2x(4x^2 - 2)' + 2 \cdot 2(4x^2 - 2) \\ &= (8x - 0)' - 2x(8x - 0) + 4(4x^2 - 2) \\ &= 8 - 16x^2 + 16x^2 - 8 \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_3''(x) - 2xH_3'(x) + 2 \cdot 3H_3(x) &= (8x^3 - 12x)'' - 2x(8x^3 - 12x)' + 2 \cdot 3(8x^3 - 12x) \\
&= (24x^2 - 12)' - 2x(24x^2 - 12) + 6(8x^3 - 12x) \\
&= 48x - 48x^3 + 24x + 48x^3 - 72x \\
&= 0.
\end{aligned}$$



DGL/NteOrdHom/Ag_Picard_vektoriell.tex

Aufgabe 14.110 (Picard-Iteration vektoriell)

kr

Geben Sie das wohlbekannte Anfangswertproblem $x''(t) = -x(t)$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

- a) Führen Sie die Variable $v(t) = x'(t)$ ein und schreiben Sie die Differentialgleichung 2. Ordnung in ein System in Ordnung um.

Lösung:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v(t) \\ -x(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v(t) \\ -x(t) \end{pmatrix}$$

- b) Zeigen Sie, dass die exakte Lösung $x(t) = \cos(t)$ tatsächlich ein Fixpunkt der Picard-Iteration ist.

Lösung: Mit der Startlösung $x_0(t) = \cos(t)$, $v_0(t) = x'_0(t) = -\sin(t)$ ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} v_0(\tilde{t}) \\ -x_0(\tilde{t}) \end{pmatrix} d\tilde{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^1 \begin{pmatrix} -\sin(\tilde{t}) \\ -\cos(\tilde{t}) \end{pmatrix} d\tilde{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(t) - 1 \\ -\sin(t) - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0(t) \\ v_0(t) \end{pmatrix}$$

- c) Führen Sie die ersten vier Picard-Iterationen mit der Startapproximation $x_0(t) = 1$, $v_0(t) = 0$ durch und vergleichen Sie die erhaltene Picard-Näherung mit der Taylor-Entwicklung der exakten

Lösung. $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}t^2 \\ -t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}t^2 \\ -t + \frac{1}{6}t^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_4(t) \\ v_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 \\ -t + \frac{1}{6}t^3 \end{pmatrix}$

Lösung: Mit der Startlösung $x(t) = 1$, $v_0(t) = 0$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} v_0(\tilde{t}) \\ -x_0(\tilde{t}) \end{pmatrix} d\tilde{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} d\tilde{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x_2(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} v_1(\tilde{t}) \\ -x_1(\tilde{t}) \end{pmatrix} d\tilde{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^1 \begin{pmatrix} -\tilde{t} \\ -1 \end{pmatrix} d\tilde{t} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}t^2 \\ -t \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x_3(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} v_2(\tilde{t}) \\ -x_2(\tilde{t}) \end{pmatrix} d\tilde{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^1 \begin{pmatrix} -\tilde{t} \\ -1 + \frac{1}{2}\tilde{t}^2 \end{pmatrix} d\tilde{t} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}t^2 \\ -t + \frac{1}{6}t^3 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x_4(t) \\ v_4(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} v_3(\tilde{t}) \\ -x_3(\tilde{t}) \end{pmatrix} d\tilde{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^1 \begin{pmatrix} -\tilde{t} + \frac{1}{6}\tilde{t}^3 \\ -1 + \frac{1}{2}\tilde{t}^2 \end{pmatrix} d\tilde{t} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 \\ -t + \frac{1}{6}t^3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

In der Tat entsprechen $x_4(t)$ und $v_4(t)$ den Anfängen der Taylorreihen der exakten Lösungen $\cos(t)$ bzw. $-\sin(t)$.



DGL/NteOrdInhom/Ag_DGLOnInhom_AvTdrSAufOderUeberKlausurniveau.tex

Aufgabe 15.111 (Ansätze vom Typ der rechten Seite auf oder über Klausurniveau)

spf

Geben Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen an!

a) $y'''(x) + 9y'(x) = 4y''(x) + 36y(x) + 20 \cdot (5x + 6) \cdot \sin(2x)$

$$A \cdot e^{4x} + B \cdot \sin(3x) + C \cdot \cos(3x) - 2x \cdot \cos(2x) - (4x + 7) \cdot \sin(2x)$$

Lösung:

Es handelt sich um eine lineare inhomogene Differentialgleichung höherer Ordnung. Wir lösen zunächst die zugehörige homogene Differentialgleichung allgemein:

$$y_H'''(x) + 9y_H'(x) = 4y_H''(x) + 36y_H(x).$$

Da diese homogene lineare Differentialgleichung konstante Koeffizienten hat, machen wir zu Lösung den Exponentialansatz $y_H(x) = e^{\lambda x}$ mit zu bestimmenden $\lambda \in \mathbb{C}$. Es folgt $y_H'(x) = \lambda \cdot e^{\lambda x}$, $y_H''(x) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}$ und $y_H'''(x) = \lambda^3 \cdot e^{\lambda x}$. Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} \lambda^3 \cdot e^{\lambda x} + 9\lambda \cdot e^{\lambda x} &= 4\lambda^2 \cdot e^{\lambda x} + 36 \cdot e^{\lambda x} & \cdot e^{-\lambda x} \neq 0 & \iff \lambda^3 + 9\lambda = 4\lambda^2 + 36 \\ \iff \lambda \cdot (\lambda^2 + 9) &= 4 \cdot (\lambda^2 + 9) & \iff & \lambda = 4 \text{ oder } \lambda^2 + 9 = 0 \\ \iff \lambda = 4 \text{ oder } \lambda = 3i &\text{ oder } \lambda = -3i. & & \end{aligned}$$

Also gibt es $\alpha \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{C}$ und $\gamma \in \mathbb{C}$ mit $y_H(x) = \alpha \cdot e^{4x} + \beta \cdot e^{3ix} + \gamma \cdot e^{-3ix}$.

Ist man lediglich an reellen Lösungen interessiert, so findet man $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$ und $C \in \mathbb{R}$ mit

$$y_H(x) = A \cdot e^{4x} + B \cdot \sin(3x) + C \cdot \cos(3x).$$

Bei einer linearen inhomogenen Differentialgleichung höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten kann ein Ansatz vom Typ der rechten Seite zum Ziel führen. Bei der vorliegenden Differentialgleichung hat die rechte Seite die Form

$$20 \cdot (5x + 6) \cdot \sin(2x) = e^{\mu_1 \cdot x} \cdot (p(x) \cdot \cos(\mu_2 \cdot x) + q(x) \cdot \sin(\mu_2 \cdot x))$$

mit $\mu_1 := 0$, $\mu_2 := 2$, $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto p(x) := 0$ und $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto q(x) := 100x + 120$.

Da $\mu_1 + i \cdot \mu_2 = 0 + i \cdot 2 = 2i$ keine, also eine 0-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms der Differentialgleichung und $\max\{\deg(p); \deg(q)\} = 1$ ist, empfiehlt sich zur Bestimmung einer partikulären Lösung der Ansatz

$$\begin{aligned} y_P(x) &= x^0 \cdot e^{\mu_1 \cdot x} \cdot ((ax + b) \cdot \cos(\mu_2 \cdot x) + (cx + d) \cdot \sin(\mu_2 \cdot x)) \\ &= (ax + b) \cdot \cos(2x) + (cx + d) \cdot \sin(2x). \end{aligned}$$

Ableiten dieses Ansatzes liefert

$$\begin{aligned} y_P'(x) &= a \cdot \cos(2x) - 2 \cdot (ax + b) \cdot \sin(2x) + c \cdot \sin(2x) + 2 \cdot (cx + d) \cdot \cos(2x) \\ &= (2cx + (a + 2d)) \cdot \cos(2x) + (-2ax + (-2b + c)) \cdot \sin(2x), \\ y_P''(x) &= 2c \cdot \cos(2x) - 2 \cdot (2cx + (a + 2d)) \cdot \sin(2x) \\ &\quad - 2a \cdot \sin(2x) + 2 \cdot (-2ax + (-2b + c)) \cdot \cos(2x) \\ &= (-4ax + (-4b + 4c)) \cdot \cos(2x) + (-4cx + (-4a - 4d)) \cdot \sin(2x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{und } y_P'''(x) &= -4a \cdot \cos(2x) - 2 \cdot (-4ax + (-4b + 4c)) \cdot \sin(2x) \\ &\quad - 4c \cdot \sin(2x) + 2 \cdot (-4cx + (-4a - 4d)) \cdot \cos(2x) \\ &= (-8cx + (-12a - 8d)) \cdot \cos(2x) + (8ax + (8b - 12c)) \cdot \sin(2x). \end{aligned}$$

Aus der Differentialgleichung folgt damit

$$\begin{aligned}
& 20 \cdot (5x + 6) \cdot \sin(2x) \\
&= (0x + 0) \cdot \cos(2x) + (100x + 120) \cdot \sin(2x) \\
&= y_P'''(x) - 4y_P''(x) + 9y_P'(x) - 36y_P(x) \\
&= (-8cx + (-12a - 8d)) \cdot \cos(2x) + (8ax + (8b - 12c)) \cdot \sin(2x) \\
&\quad - 4 \cdot ((-4ax + (-4b + 4c)) \cdot \cos(2x) + (-4cx + (-4a - 4d)) \cdot \sin(2x)) \\
&\quad + 9 \cdot ((2cx + (a + 2d)) \cdot \cos(2x) + (-2ax + (-2b + c)) \cdot \sin(2x)) \\
&\quad - 36 \cdot ((ax + b) \cdot \cos(2x) + (cx + d) \cdot \sin(2x)) \\
&= ((-8c + 16a + 18c - 36a) \cdot x + (-12a - 8d + 16b - 16c + 9a + 18d - 36b)) \cdot \cos(2x) \\
&\quad + ((8a + 16c - 18a - 36c) \cdot x + (8b - 12c + 16a + 16d - 18b + 9c - 36d)) \cdot \sin(2x) \\
&= ((-20a + 10c) \cdot x + (-3a - 20b - 16c + 10d)) \cdot \cos(2x) \\
&\quad + ((-10a - 20c) \cdot x + (16a - 10b - 3c - 20d)) \cdot \sin(2x).
\end{aligned}$$

Ein Vergleich der Koeffizienten der zweiten und der letzten Zeile dieser Gleichungskette liefert das lineare Gleichungssystem

$$-20a + 10c = 0, \quad -3a - 20b - 16c + 10d = 0, \quad -10a - 20c = 100 \quad \text{und} \quad 16a - 10b - 3c - 20d = 120,$$

welches mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren gelöst werden kann:

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{cccc|c} -20 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ -3 & -20 & -16 & 10 & 0 \\ -10 & 0 & -20 & 0 & 100 \\ 16 & -10 & -3 & -20 & 120 \end{array} \right) \left\| \begin{array}{l} \cdot \frac{8}{5} \quad \cdot 2 \quad \cdot \frac{3}{10} \quad \cdot \frac{1}{10} \\ + \\ + \\ + \end{array} \right. \\
& \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -35 & -20 & 0 & 10 & 0 \\ -50 & 0 & 0 & 0 & 100 \\ 10 & -10 & 0 & -20 & 120 \end{array} \right) \left\| \begin{array}{l} \text{tauschen} \\ + \\ \text{tauschen} \\ \cdot \frac{1}{2} \quad \cdot \frac{-1}{20} \end{array} \right. \\
& \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -50 & 0 & 0 & 0 & 100 \\ -30 & -25 & 0 & 0 & 60 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & -6 \end{array} \right) \left\| \begin{array}{l} \cdot \frac{-3}{5} \quad \cdot \frac{-1}{25} \quad \cdot \frac{-1}{100} \quad \cdot \frac{-1}{50} \\ + \\ + \\ + \end{array} \right. \\
& \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & -7 \end{array} \right) \left\| \begin{array}{l} \cdot \frac{1}{50} \quad \cdot \frac{-1}{25} \\ + \\ + \end{array} \right. \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Es folgt also $y_P(x) = -2x \cdot \cos(2x) - (4x + 7) \cdot \sin(2x)$.

Addiert man diese partikuläre Lösung zur allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung, so ergibt sich die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = A \cdot e^{4x} + B \cdot \sin(3x) + C \cdot \cos(3x) - 2x \cdot \cos(2x) - (4x + 7) \cdot \sin(2x).$$

b) $f'''(t) + 5f'(t) + 50f(t) = 8f''(t) + 12 \cdot (14t^2 + 4t - 7) \cdot e^{5t}$

$$A \cdot e^{-2t} + (2t^4 - 6t^2 + Bt + C) \cdot e^{5t}$$

Lösung:

Es handelt sich um eine lineare inhomogene Differentialgleichung höherer Ordnung. Wir lösen zunächst die zugehörige homogene Differentialgleichung allgemein:

$$f_H'''(t) + 5f_H'(t) + 50f_H(t) = 8f_H''(t).$$

Da diese homogene lineare Differentialgleichung konstante Koeffizienten hat, machen wir zu Lösung den Exponentialansatz $f_H(t) = e^{\lambda t}$ mit zu bestimmenden $\lambda \in \mathbb{C}$. Es folgt $f'_H(t) = \lambda \cdot e^{\lambda t}$, $f''_H(t) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda t}$ und $f'''_H(t) = \lambda^3 \cdot e^{\lambda t}$. Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

$$\lambda^3 \cdot e^{\lambda t} + 5\lambda \cdot e^{\lambda t} + 50 \cdot e^{\lambda t} = 8\lambda^2 \cdot e^{\lambda t} \stackrel{e^{-\lambda t} \neq 0}{\iff} \lambda^3 + 5\lambda + 50 = 8\lambda^2 \stackrel{-8\lambda^2}{\iff} \lambda^3 - 8\lambda^2 + 5\lambda + 50 = 0.$$

Die erste Lösung dieser Gleichung wird geraten. Es sind

$$\begin{aligned} 1^3 - 8 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 50 &= 1 - 8 \cdot 1 + 5 + 50 = 56 - 8 = 48 \neq 0, \\ (-1)^3 - 8 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) + 50 &= -1 - 8 \cdot 1 - 5 + 50 = 44 - 8 = 36 \neq 0, \\ 2^3 - 8 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 + 50 &= 8 - 8 \cdot 4 + 10 + 50 = 68 - 32 = 36 \neq 0 \\ \text{und} \quad (-2)^3 - 8 \cdot (-2)^2 + 5 \cdot (-2) + 50 &= -8 - 8 \cdot 4 - 10 + 50 = 32 - 32 = 0. \end{aligned}$$

Mittels einer Polynomdivision werden die weiteren Nullstellen des charakteristischen Polynoms bestimmt:

$$\begin{array}{rcl} \lambda^3 - 8\lambda^2 + 5\lambda + 50 & = & (\lambda + 2) \cdot (\lambda^2 - 10\lambda + 25) \\ -(\lambda^3 + 2\lambda^2) & = & (\lambda + 2) \cdot (\lambda^2 - 2 \cdot \lambda \cdot 5 + 5^2) \\ \hline -10\lambda^2 + 5\lambda + 50 & = & (\lambda + 2) \cdot (\lambda - 5)^2 \\ -(-10\lambda^2 - 20\lambda) & & \\ \hline 25\lambda + 50 & & \\ -(25\lambda + 50) & & \\ \hline 0 & & \end{array}$$

Da -2 eine einfache und 5 eine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms sind, gibt es $\alpha \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{C}$ und $\gamma \in \mathbb{C}$ mit $f_H(t) = \alpha \cdot e^{-2t} + \beta \cdot e^{5t} + \gamma \cdot t \cdot e^{5t}$.

Ist man lediglich an reellen Lösungen interessiert, so findet man $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$ und $C \in \mathbb{R}$ mit

$$f_H(t) = A \cdot e^{-2t} + (Bt + C) \cdot e^{5t}.$$

Bei einer linearen inhomogenen Differentialgleichung höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten kann ein Ansatz vom Typ der rechten Seite zum Ziel führen. Bei der vorliegenden Differentialgleichung hat die rechte Seite die Form

$$12 \cdot (14t^2 + 4t - 7) \cdot e^{5t} = e^{\mu_1 \cdot t} \cdot (p(t) \cdot \cos(\mu_2 \cdot t) + q(t) \cdot \sin(\mu_2 \cdot t))$$

mit $\mu_1 := 5$, $\mu_2 := 0$, $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto p(t) := 168t^2 + 48t - 84$ und $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto q(t) := 0$.

Da $\mu_1 + i \cdot \mu_2 = 5 + i \cdot 0 = 5$ eine 2-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms der Differentialgleichung und $\max\{\deg(p); \deg(q)\} = 2$ ist, empfiehlt sich zur Bestimmung einer partikulären Lösung der Ansatz

$$\begin{aligned} f_P(t) &= t^2 \cdot e^{\mu_1 \cdot t} \cdot ((at^2 + bt + c) \cdot \cos(\mu_2 \cdot t) + (ut^2 + vt + w) \cdot \sin(\mu_2 \cdot t)) \\ &= (at^4 + bt^3 + ct^2) \cdot e^{5t}. \end{aligned}$$

Ableiten dieses Ansatzes liefert

$$\begin{aligned}
f'_P(t) &= (4at^3 + 3bt^2 + 2ct) \cdot e^{5t} + (at^4 + bt^3 + ct^2) \cdot 5 \cdot e^{5t} \\
&= (5at^4 + (4a + 5b) \cdot t^3 + (3b + 5c) \cdot t^2 + (2c) \cdot t) \cdot e^{5t}, \\
f''_P(t) &= (20at^3 + (12a + 15b) \cdot t^2 + (6b + 10c) \cdot t + (2c)) \cdot e^{5t} \\
&\quad + (5at^4 + (4a + 5b) \cdot t^3 + (3b + 5c) \cdot t^2 + (2c) \cdot t) \cdot 5 \cdot e^{5t} \\
&= (25at^4 + (40a + 25b) \cdot t^3 + (12a + 30b + 25c) \cdot t^2 + (6b + 20c) \cdot t + (2c)) \cdot e^{5t} \quad \text{und} \\
f'''_P(t) &= (100at^3 + (120a + 75b) \cdot t^2 + (24a + 60b + 50c) \cdot t + (6b + 20c)) \cdot e^{5t} \\
&\quad + (25at^4 + (40a + 25b) \cdot t^3 + (12a + 30b + 25c) \cdot t^2 + (6b + 20c) \cdot t + (2c)) \cdot 5 \cdot e^{5t} \\
&= (125at^4 + (300a + 125b) \cdot t^3 + (180a + 225b + 125c) \cdot t^2 \\
&\quad + (24a + 90b + 150c) \cdot t + (6b + 30c)) \cdot e^{5t}.
\end{aligned}$$

Aus der Differentialgleichung folgt damit

$$\begin{aligned}
&12 \cdot (14t^2 + 4t - 7) \cdot e^{5t} \\
&= (168t^2 + 48t - 84) \cdot e^{5t} \\
&= f'''(t) - 8f''(t) + 5f'(t) + 50f(t) \\
&= (125at^4 + (300a + 125b) \cdot t^3 + (180a + 225b + 125c) \cdot t^2 \\
&\quad + (24a + 90b + 150c) \cdot t + (6b + 30c)) \cdot e^{5t} \\
&\quad - 8 \cdot (25at^4 + (40a + 25b) \cdot t^3 + (12a + 30b + 25c) \cdot t^2 + (6b + 20c) \cdot t + (2c)) \cdot e^{5t} \\
&\quad + 5 \cdot (5at^4 + (4a + 5b) \cdot t^3 + (3b + 5c) \cdot t^2 + (2c) \cdot t) \cdot e^{5t} \\
&\quad + 50 \cdot (at^4 + bt^3 + ct^2) \cdot e^{5t} \\
&= e^{5t} \cdot t^4 \cdot (125a - 200a + 25a + 50a) \\
&\quad + e^{5t} \cdot t^3 \cdot (300a + 125b - 320a - 200b + 20a + 25b + 50b) \\
&\quad + e^{5t} \cdot t^2 \cdot (180a + 225b + 125c - 96a - 240b - 200c + 15b + 25c + 50c) \\
&\quad + e^{5t} \cdot t \cdot (24a + 90b + 150c - 48b - 160c + 10c) \\
&\quad + e^{5t} \cdot (6b + 30c - 16c) \\
&= (84at^2 + (24a + 42b) \cdot t + (6b + 14c)) \cdot e^{5t}.
\end{aligned}$$

Ein Vergleich der Koeffizienten der zweiten und der letzten Zeile dieser Gleichungskette liefert das lineare Gleichungssystem

$$84a = 168, \quad 24a + 42b = 48, \quad \text{und} \quad 6b + 14c = -84.$$

Teilt man die erste Gleichung durch 84, so folgt $a = 2$. Einsetzen in die zweite Gleichung liefert $48 + 42b = 48$, also $42b = 0$, woraus $b = 0$ folgt. Setzt man dies in die dritte Gleichung ein, so ergibt sich $0 + 14c = -84$, also $c = -6$. Damit folgt $f_P(t) = (2 \cdot t^4 + 0 \cdot t^3 + (-6) \cdot t^2) \cdot e^{5t}$.

Addiert man diese partikuläre Lösung zur allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung, so ergibt sich die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$f(t) = f_H(t) + f_P(t) = A \cdot e^{-2t} + (2t^4 - 6t^2 + Bt + C) \cdot e^{5t}.$$



DGL/NteOrdInhom/Ag_DGLOnInhom_AvTdrSAwpsRwpAlleKombis.tex

Aufgabe 15.112 (Ansatz vom Typ der rechten Seite)

spf

Geben Sie zu den folgenden Differentialgleichungen zunächst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung an!

Bestimmen Sie danach eine partikuläre Lösung mit Hilfe eines Ansatzes vom Typ der rechten Seite!

Sind Anfangs- bzw. Randbedingungen angegeben, so bestimmen Sie die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung, die diese Anfangs- bzw. Randbedingungen erfüllt!

a) $y''(x) - 2y'(x) - 8y(x) = (36x + 12) \cdot e^{4x}$ mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 2$
 $(3x^2 + x + A) \cdot e^{4x} + B e^{-2x}$ und $A = -B = \frac{1}{6}$

Lösung:

Wir berechnen zunächst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung mit Hilfe des Ansatzes $y_H(x) = e^{\lambda x}$. Dann gilt $y'_H(x) = \lambda \cdot e^{\lambda x}$ und $y''_H(x) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}$. In den homogenen Teil der Differentialgleichung eingesetzt folgt

$$\begin{aligned} \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} - 2 \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x} - 8 \cdot e^{\lambda x} &= 0 & \iff & e^{\lambda x} \cdot (\lambda^2 - 2 \cdot \lambda \cdot 1 + 1^2 - 1 - 8) = 0 \\ \iff e^{\lambda x} \cdot ((\lambda - 1)^2 - 9) &= 0 & \iff & e^{\lambda x} \cdot (\lambda - 1 - 3) \cdot (\lambda - 1 + 3) = 0 \\ \iff e^{\lambda x} \cdot (\lambda - 4) \cdot (\lambda + 2) &= 0 & \iff & \lambda = 4 \text{ oder } \lambda = -2. \end{aligned}$$

Also gibt es ein $A \in \mathbb{R}$ und ein $B \in \mathbb{R}$ mit

$$y_H(x) = A \cdot e^{4x} + B \cdot e^{-2x}.$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $(36x + 12) \cdot e^{4x} = e^{4x} \cdot (1 \cdot \sin(0 \cdot x) + (36x + 12) \cdot \cos(0 \cdot x))$.

Da $4 + 0i$ eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, empfiehlt sich für die partikuläre Lösung der Ansatz

$$y_P(x) = x^1 \cdot e^{4x} \cdot ((Ux + V) \cdot \sin(0 \cdot x) + (Cx + D) \cdot \cos(0 \cdot x)) = e^{4x} \cdot (Cx^2 + Dx).$$

Ableiten liefert $y'_P(x) = e^{4x} \cdot (4Cx^2 + 4Dx + 2Cx + D)$ und $y''_P(x) = e^{4x} \cdot (16Cx^2 + 16Dx + 8Cx + 4D + 8Cx + 4D + 2C)$.

Eingesetzt in die inhomogene Differentialgleichung erhält man

$$\begin{aligned} &e^{4x} \cdot (36x + 12) \\ &= e^{4x} \cdot (16Cx^2 + 16Dx + 16Cx + 8D + 2C) \\ &\quad - 2 \cdot e^{4x} \cdot (4Cx^2 + 4Dx + 2Cx + D) - 8 \cdot e^{4x} \cdot (Cx^2 + Dx) \\ &= e^{4x} \cdot (16Cx^2 + 16Dx + 16Cx + 8D + 2C - 8Cx^2 - 8Dx - 4Cx - 2D - 8Cx^2 - 8Dx) \\ &= e^{4x} \cdot (12Cx + 2C + 6D). \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert also $12C = 36$ und $2C + 6D = 12$ bzw. $C = 3$ und $D = -\frac{1}{3} \cdot C + 2 = -1 + 2 = 1$.

Damit ergibt sich die partikuläre Lösung zu $y_P(x) = e^{4x} \cdot (3x + 1)$ und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet

$$y(x) = A \cdot e^{4x} + B \cdot e^{-2x} + e^{4x} \cdot (3x^2 + x) = (3x^2 + x + A) \cdot e^{4x} + B \cdot e^{-2x}.$$

Damit folgt $y'(x) = (12x^2 + 4x + 4A + 6x + 1) \cdot e^{4x} - 2B \cdot e^{-2x}$. Mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 2$ ergibt sich also $A + B = 0$ und $4A + 1 - 2B = 2$. Es folgt $B = -A$ und $4A - 2B = 1$, was $6A = 1$ bzw. $A = \frac{1}{6}$ und damit auch $B = -\frac{1}{6}$ liefert. Insgesamt folgt

$$y(x) = (3x^2 + x + \frac{1}{6}) \cdot e^{4x} - \frac{1}{6} \cdot e^{-2x}.$$

b) $u'''(s) - 5u''(s) + 3u'(s) + 9u(s) = (16s - 8) \cdot e^s + 32e^{-s}$ mit $u(0) = 2$, $u'(0) = 6$ und $u''(0) = 10$

$$(2s + A) \cdot e^{-s} + (Bs + C) \cdot e^{3s} + 2s \cdot e^s, A = C = 1 \text{ und } B = 0$$

Lösung:

Wir berechnen zunächst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung mit Hilfe des Ansatzes $u_H(s) = e^{\lambda s}$. Dann gilt $u'_H(s) = \lambda \cdot e^{\lambda s}$, $u''_H(s) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda s}$ und $u'''_H(s) = \lambda^3 \cdot e^{\lambda s}$. In den homogenen Teil der Differentialgleichung eingesetzt folgt

$$\lambda^3 \cdot e^{\lambda s} - 5 \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda s} + 3 \cdot \lambda \cdot e^{\lambda s} + 9 \cdot e^{\lambda s} = 0 \iff e^{\lambda s} \cdot (\lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9) = 0.$$

Es gilt $1^3 - 5 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 9 = 1 - 5 + 3 + 9 = 8$ und $(-1)^3 - 5 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 9 = -1 - 5 - 3 + 9 = 0$.

Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{array}{rcl} \lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9 & = & (\lambda + 1) \cdot (\lambda^2 - 6\lambda + 9) \\ \frac{-(\lambda^3 - \lambda^2)}{-6\lambda^2 + 3\lambda + 9} & = & (\lambda + 1) \cdot (\lambda^2 - 2 \cdot \lambda \cdot 3 + 3^2) \\ & = & (\lambda + 1) \cdot (\lambda - 3)^2. \\ \frac{-(-6\lambda^2 - 6\lambda)}{9\lambda + 9} & & \\ \frac{-(9\lambda + 9)}{0} & & \end{array}$$

Also gibt es ein $A \in \mathbb{R}$, ein $B \in \mathbb{R}$ und ein $C \in \mathbb{R}$ mit

$$u_H(s) = A \cdot e^{-s} + B \cdot s \cdot e^{3s} + C \cdot e^{3s}.$$

Für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$(16s - 8) \cdot e^s = e^{1 \cdot s} \cdot (1 \cdot \sin(0 \cdot s) + (16s - 8) \cdot \cos(0 \cdot s))$$

und

$$32e^{-s} = e^{-1 \cdot s} \cdot (1 \cdot \sin(0 \cdot s) + 32 \cdot \cos(0 \cdot s)).$$

Da $1+0i$ keine und $-1+0i$ eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms sind, empfiehlt sich für die partikuläre Lösung der Ansatz

$$\begin{aligned} u_P(s) &= s^0 \cdot e^{1 \cdot s} \cdot ((Us + V) \cdot \sin(0 \cdot s) + (Ds + E) \cdot \cos(0 \cdot s)) \\ &\quad + s^1 \cdot e^{-1 \cdot s} \cdot (W \cdot \sin(0 \cdot s) + F \cdot \cos(0 \cdot s)) \\ &= e^s \cdot (Ds + E) + e^{-s} \cdot Fs. \end{aligned}$$

Ableiten liefert $u'_P(s) = e^s \cdot (Ds + D + E) + e^{-s} \cdot (-Fs + F)$,

$u''_P(s) = e^s \cdot (Ds + 2D + E) + e^{-s} \cdot (Fs - 2F)$ und $u'''_P(s) = e^s \cdot (Ds + 3D + E) + e^{-s} \cdot (-Fs + 3F)$.

Eingesetzt in die inhomogene Differentialgleichung erhält man

$$\begin{aligned} (16s - 8) \cdot e^s + 32e^{-s} &= e^s \cdot (Ds + 3D + E - 5Ds - 10D - 5E + 3Ds + 3D + 3E + 9Ds + 9E) \\ &\quad + e^{-s} \cdot (-Fs + 3F - 5Fs + 10F - 3Fs + 3F + 9Fs) \\ &= e^s \cdot (8Ds - 4D + 8E) + e^{-s} \cdot 16F. \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert also $8D = 16$, $-4D + 8E = -8$ und $16F = 32$ bzw. $D = 2$, $E = \frac{1}{2} \cdot D - 1 = 1 - 1 = 0$ und $F = 2$.

Damit ergibt sich die partikuläre Lösung zu $u_P(s) = e^s \cdot 2s + e^{-s} \cdot 2s$ und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet

$$u(s) = A \cdot e^{-s} + B \cdot s \cdot e^{3s} + C \cdot e^{3s} + e^s \cdot 2s + e^{-s} \cdot 2s = (2s + A) \cdot e^{-s} + (Bs + C) \cdot e^{3s} + 2s \cdot e^s.$$

Damit folgt $u'(s) = (-2s - A + 2) \cdot e^{-s} + (3Bs + B + 3C) \cdot e^{3s} + (2s + 2) \cdot e^s$ und $u''(s) = (2s + A - 4) \cdot e^{-s} + (9Bs + 6B + 9C) \cdot e^{3s} + (2s + 4) \cdot e^s$. Mit $u(0) = 2$, $u'(0) = 6$ und $u''(0) = 10$ ergibt sich also $A + C = 2$, $-A + 2 + B + 3C + 2 = 6$ und $A - 4 + 6B + 9C + 4 = 10$. Wir lösen dieses lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 9 & 10 \end{array} \right) \left\| \begin{array}{l} \cdot 1 \\ + \\ \end{array} \right. \cdot (-1) \quad \longleftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 8 & 8 \end{array} \right) \left\| \begin{array}{l} \\ \cdot (-6) \\ + \end{array} \right. \\ & \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -16 & -16 \end{array} \right) \left\| \begin{array}{l} + \\ \\ \cdot \frac{1}{16} \end{array} \right. + \quad \longleftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \left\| \begin{array}{l} \\ \cdot \frac{1}{4} \\ \cdot (-\frac{1}{16}) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Also sind $A = 1$, $B = 0$ und $C = 1$. Insgesamt folgt

$$u(s) = (2s + 1) \cdot e^{-s} + e^{3s} + 2s \cdot e^s = 4s \cdot \cosh(s) + 2e^s \cdot \cosh(2s).$$

c) $f''(z) + 4f(z) = 25z \cdot \sin(3z)$ mit $f(0) = 0$ und $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{9}{2}$
 $A \cdot \sin(2z) + B \cdot \cos(2z) - 5z \cdot \sin(3z) - 6 \cdot \cos(3z)$, $A = \sqrt{3}$ und $B = 6$

Lösung:

Wir berechnen zunächst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung mit Hilfe des Ansatzes $f_H(z) = e^{\lambda z}$. Dann gilt $f'_H(z) = \lambda \cdot e^{\lambda z}$ und $f''_H(z) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda z}$. In den homogenen Teil der Differentialgleichung eingesetzt folgt

$$\begin{aligned} \lambda^2 \cdot e^{\lambda z} + 4 \cdot e^{\lambda z} &= 0 & \iff & e^{\lambda z} \cdot (\lambda^2 - (2i)^2) = 0 \\ \iff e^{\lambda x} \cdot (\lambda - 2i) \cdot (\lambda + 2i) &= 0 & \iff & \lambda = 2i \text{ oder } \lambda = -2i. \end{aligned}$$

Nach der Euler'schen Formel gilt $e^{2iz} = \cos(2z) + i \cdot \sin(2z)$ für alle $z \in \mathbb{R}$.

Also gibt es ein $A \in \mathbb{R}$ und ein $B \in \mathbb{R}$ mit

$$f_H(z) = A \cdot \sin(2z) + B \cdot \cos(2z).$$

Für alle $z \in \mathbb{R}$ gilt $25z \cdot \sin(3z) = e^{0 \cdot z} \cdot (25z \cdot \sin(3 \cdot z) + 0 \cdot \cos(3 \cdot z))$.

Da $0 + 3i$ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, empfiehlt sich für die partikuläre Lösung der Ansatz

$$\begin{aligned} f_P(z) &= z^0 \cdot e^{0 \cdot z} \cdot ((Cz + D) \cdot \sin(3 \cdot z) + (Ez + F) \cdot \cos(3 \cdot z)) \\ &= (Cz + D) \cdot \sin(3z) + (Ez + F) \cdot \cos(3z). \end{aligned}$$

Ableiten liefert $f'_P(z) = (-3Ez - 3F + C) \cdot \sin(3z) + (3Cz + 3D + E) \cdot \cos(3z)$ und $f''_P(z) = (-9Cz - 9D - 3E - 3E) \cdot \sin(3z) + (-9Ez - 9F + 3C + 3C) \cdot \cos(3z)$.

Eingesetzt in die inhomogene Differentialgleichung erhält man

$$\begin{aligned} & 25z \cdot \sin(3z) \\ &= (-9Cz - 9D - 6E + 4Cz + 4D) \cdot \sin(3z) + (-9Ez - 9F + 6C + 4Ez + 4F) \cdot \cos(3z) \\ &= (-5Cz - 5D - 6E) \cdot \sin(3z) + (-5Ez - 5F + 6C) \cdot \cos(3z). \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert also $-5C = 25$, $-5D - 6E = 0$, $-5E = 0$ und $-5F + 6C = 0$, bzw. $C = -5$, $E = 0$, $D = -\frac{5}{6} \cdot E = 0$ und $F = \frac{6}{5} \cdot C = -6$.

Damit ergibt sich die partikuläre Lösung zu $f_P(z) = -5z \cdot \sin(3z) - 6 \cdot \cos(3z)$ und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet

$$f(z) = A \cdot \sin(2z) + B \cdot \cos(2z) - 5z \cdot \sin(3z) - 6 \cdot \cos(3z).$$

Mit $f(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{9}{2}$, $f(0) = A \cdot \sin(0) + B \cdot \cos(0) - 0 \cdot \sin(0) - 6 \cdot \cos(0) = B - 6$ und $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + B \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \frac{5\pi}{3} \cdot \sin(\pi) - 6 \cdot \cos(\pi) = A \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + B \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{5\pi}{3} \cdot 0 - 6 \cdot (-1) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot A - \frac{1}{2} \cdot B + 6$ ergibt sich also $B - 6 = 0$ und $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot A - \frac{1}{2} \cdot B + 6 = \frac{9}{2}$. Es folgt $B = 6$, was $A = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{9}{2} - 6 + \frac{1}{2} \cdot B\right) = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot \frac{9-12+6}{2} = \sqrt{3}$ liefert. Insgesamt folgt

$$f(z) = \sqrt{3} \cdot \sin(2z) + 6 \cdot \cos(2z) - 5z \cdot \sin(3z) - 6 \cdot \cos(3z).$$

d) $v'''(t) - 3v''(t) + v'(t) - 3v(t) = (40t - 4) \cdot \sin(t)$

$$A \cdot e^{3t} - (t^2 + 4t + B) \cdot \sin(t) + (3t^2 + C) \cdot \cos(t)$$

Lösung:

Wir berechnen zunächst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung mit Hilfe des Ansatzes $v_H(t) = e^{\lambda t}$. Dann gilt $v'_H(t) = \lambda \cdot e^{\lambda t}$, $v''_H(t) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda t}$ und $v'''_H(t) = \lambda^3 \cdot e^{\lambda t}$. In den homogenen Teil der Differentialgleichung eingesetzt folgt

$$\lambda^3 \cdot e^{\lambda t} - 3 \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda t} + \lambda \cdot e^{\lambda t} - 3 \cdot e^{\lambda t} = 0 \iff e^{\lambda t} \cdot (\lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda - 3) = 0.$$

Es gilt $3^3 - 3 \cdot 3^2 + 3 - 3 = 3^3 - 3^3 + 0 = 0$.

Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{array}{r} \lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda - 3 = (\lambda - 3) \cdot (\lambda^2 + 1) = (\lambda - 3) \cdot (\lambda - i) \cdot (\lambda + i) \\ \hline -(\lambda^3 - 3\lambda^2) \\ \lambda - 3 \\ \hline -(\lambda - 3) \\ \hline 0 \end{array}$$

Nach der Euler'schen Formel gilt $e^{-it} = \cos(t) + i \cdot \sin(-t) = \cos(t) + i \cdot (-\sin(t))$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Also gibt es ein $A \in \mathbb{R}$, ein $B \in \mathbb{R}$ und ein $C \in \mathbb{R}$ mit

$$v_H(t) = A \cdot e^{3t} - B \cdot \sin(t) + C \cdot \cos(t).$$

Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $(40t - 4) \cdot \sin(t) = e^{0 \cdot t} \cdot ((40t - 4) \cdot \sin(1 \cdot t) + 0 \cdot \cos(1 \cdot t))$.

Da $0 + 1i = i$ eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms sind, empfiehlt sich für die partikuläre Lösung der Ansatz

$$\begin{aligned} v_P(t) &= t^1 \cdot e^{0 \cdot t} \cdot ((Ct + D) \cdot \sin(1 \cdot t) + (Et + F) \cdot \cos(1 \cdot t)) \\ &= (Ct^2 + Dt) \cdot \sin(t) + (Et^2 + Ft) \cdot \cos(t). \end{aligned}$$

Ableiten liefert

$$\begin{aligned} v'_P(t) &= (-Et^2 - Ft + 2Ct + D) \cdot \sin(t) + (Ct^2 + Dt + 2Et + F) \cdot \cos(t), \\ v''_P(t) &= (-Ct^2 - Dt - 2Et - F - 2Et - F + 2C) \cdot \sin(t) \\ &\quad + (-Et^2 - Ft + 2Ct + D + 2Ct + D + 2E) \cdot \cos(t) \\ &= (-Ct^2 - Dt - 4Et - 2F + 2C) \cdot \sin(t) + (-Et^2 - Ft + 4Ct + 2D + 2E) \cdot \cos(t) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} v'''_P(t) &= (Et^2 + Ft - 4Ct - 2D - 2E - 2Ct - D - 4E) \cdot \sin(t) \\ &\quad + (-Ct^2 - Dt - 4Et - 2F + 2C - 2Et - F + 4C) \cdot \cos(t) \\ &= (Et^2 + Ft - 6Ct - 3D - 6E) \cdot \sin(t) + (-Ct^2 - Dt - 6Et - 3F + 6C) \cdot \cos(t). \end{aligned}$$

Eingesetzt in die inhomogene Differentialgleichung erhält man

$$\begin{aligned}
& (40t - 4) \cdot \sin(t) \\
&= (Et^2 + Ft - 6Ct - 3D - 6E) \cdot \sin(t) + (-Ct^2 - Dt - 6Et - 3F + 6C) \cdot \cos(t) \\
&\quad + (3Ct^2 + 3Dt + 12Et + 6F - 6C) \cdot \sin(t) + (3Et^2 + 3Ft - 12Ct - 6D - 6E) \cdot \cos(t) \\
&\quad + (-Et^2 - Ft + 2Ct + D) \cdot \sin(t) + (Ct^2 + Dt + 2Et + F) \cdot \cos(t) \\
&\quad + (-3Ct^2 - 3Dt) \cdot \sin(t) + (-3Et^2 - 3Ft) \cdot \cos(t) \\
&= ((-4C + 12E) \cdot t + (-6C - 2D - 6E + 6F)) \cdot \sin(t) \\
&\quad + ((-12C - 4E) \cdot t + (6C - 6D - 6E - 2F)) \cdot \cos(t).
\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert also das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{cccc|c} -4 & 0 & 12 & 0 & 40 \\ -6 & -2 & -6 & 6 & -4 \\ -12 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 6 & -6 & -6 & -2 & 0 \end{array} \right) \parallel + \\
& \quad + \left(\begin{array}{cccc|c} -40 & 0 & 0 & 0 & 40 \\ 12 & -2 & 0 & 6 & -4 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 24 & -6 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \parallel + \\
& \quad + \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & 0 & -2 & 24 \end{array} \right) \parallel + \\
& \quad + \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & 0 \end{array} \right) \parallel + \\
& \quad + \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \parallel
\end{aligned}$$

Also ist $(C, D, E, F)^T = (-1, -4, 3, 0)^T$. Damit ergibt sich die partikuläre Lösung zu $v_P(t) = (-t^2 - 4t) \cdot \sin(t) + 3t^2 \cdot \cos(t)$ und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet

$$\begin{aligned}
v(t) &= A \cdot e^{3t} - B \cdot \sin(t) + C \cdot \cos(t) + (-t^2 - 4t) \cdot \sin(t) + 3t^2 \cdot \cos(t) \\
&= A \cdot e^{3t} - (t^2 + 4t + B) \cdot \sin(t) + (3t^2 + C) \cdot \cos(t).
\end{aligned}$$

e) $g^{(4)}(w) + 2g''(w) + 8g'(w) + 5g(w) = (20w + 16) \cdot \sin(w) + 96w \cdot e^{-w}$
 $(2w^3 + 3w^2 + Aw + B) \cdot e^{-w} + (C \cdot \sin(2w) + D \cdot \cos(2w)) \cdot e^w + (w + 2) \cdot \sin(w) - 2w \cdot \cos(w)$

Lösung:

Wir berechnen zunächst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung mit Hilfe des Ansatzes $g_H(w) = e^{\lambda w}$. Dann gilt $g'_H(w) = \lambda \cdot e^{\lambda w}$, $g''_H(w) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda w}$, $g'''_H(w) = \lambda^3 \cdot e^{\lambda w}$ und $g^{(4)}_H(w) = \lambda^4 \cdot e^{\lambda w}$. In den homogenen Teil der Differentialgleichung eingesetzt folgt

$$\lambda^4 \cdot e^{\lambda w} + 2 \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda w} + 8 \cdot \lambda \cdot e^{\lambda w} + 5 \cdot e^{\lambda w} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{\lambda w} \cdot (\lambda^4 + 2\lambda^2 + 8\lambda + 5) = 0.$$

Es gilt $(-1)^4 + 2 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot (-1) + 5 = -1 + 2 - 8 + 5 = 0$
und $(-1)^3 - (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 5 = -1 - 1 - 3 + 5 = 0$.

Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{array}{rcl}
 \lambda^4 + 2\lambda^2 + 8\lambda + 5 & = & (\lambda + 1) \cdot (\lambda^3 - \lambda^2 + 3\lambda + 5) = (\lambda + 1)^2 \cdot (\lambda^2 - 2\lambda + 5) \\
 \frac{-(\lambda^4 + \lambda^3)}{-\lambda^3 + 2\lambda^2 + 8\lambda + 5} & & \frac{-(\lambda^3 + \lambda^2)}{-2\lambda^2 + 3\lambda + 5} \\
 \frac{-(-\lambda^3 - \lambda^2)}{3\lambda^2 + 8\lambda + 5} & & \frac{-(-2\lambda^2 - 2\lambda)}{5\lambda + 5} \\
 \frac{-(3\lambda^2 + 3\lambda)}{5\lambda + 5} & & \frac{-(5\lambda + 5)}{0} \\
 \frac{-(5\lambda + 5)}{0} & &
 \end{array}$$

und

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = \lambda^2 - 2 \cdot \lambda \cdot 1 + 1^2 - 1 + 5 = (\lambda - 1)^2 + 4 = (\lambda - (1 + 2i)) \cdot (\lambda - (1 - 2i)).$$

Für alle $w \in \mathbb{R}$ gilt $e^{(1+2i) \cdot w} = e^w \cdot e^{2iw} = e^w \cdot (\cos(2w) + i \cdot \sin(2w)) = e^w \cdot \cos(2w) + i \cdot e^w \cdot \sin(2w)$.

Also gibt es ein $A \in \mathbb{R}$, ein $B \in \mathbb{R}$, ein $C \in \mathbb{R}$ und ein $D \in \mathbb{R}$ mit

$$g_H(w) = A \cdot w \cdot e^{-w} + B \cdot e^{-w} + C \cdot e^w \cdot \sin(2w) + D \cdot e^w \cdot \cos(2w).$$

Für alle $w \in \mathbb{R}$ gilt

$$(20w + 16) \cdot \sin(w) = e^{0 \cdot w} \cdot ((20w + 16) \cdot \sin(1 \cdot w) + 0 \cdot \cos(1 \cdot w))$$

und

$$96w \cdot e^{-w} = e^{-1 \cdot w} \cdot (1 \cdot \sin(0 \cdot w) + 96w \cdot \cos(0 \cdot w)).$$

Da $0 + 1i$ keine und $-1 + 0i$ eine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms sind, empfiehlt sich für die partikuläre Lösung der Ansatz

$$\begin{aligned}
 g_P(w) &= w^0 \cdot e^{0 \cdot w} \cdot ((Rw + U) \cdot \sin(1 \cdot w) + (Sw + V) \cdot \cos(1 \cdot w)) \\
 &\quad + w^2 \cdot e^{-1 \cdot w} \cdot ((Yw + Z) \cdot \sin(0 \cdot w) + (Tw + W) \cdot \cos(0 \cdot w)) \\
 &= (Rw + U) \cdot \sin(w) + (Sw + V) \cdot \cos(w) + (Tw^3 + Ww^2) \cdot e^{-w}.
 \end{aligned}$$

Viermal ableiten ergibt

$$\begin{aligned}
 g'_P(w) &= (-Sw - V + R) \cdot \sin(w) + (Rw + U + S) \cdot \cos(w) \\
 &\quad + (-Tw^3 - Ww^2 + 3Tw^2 + 2Ww) \cdot e^{-w}, \\
 g''_P(w) &= (-Rw - U - 2S) \cdot \sin(w) + (-Sw - V + 2R) \cdot \cos(w) \\
 &\quad + (Tw^3 + Ww^2 - 6Tw^2 - 4Ww + 6Tw + 2W) \cdot e^{-w}, \\
 g'''_P(w) &= (Sw + V - 3R) \cdot \sin(w) + (-Rw - U - 3S) \cdot \cos(w) \\
 &\quad + (-Tw^3 - Ww^2 + 9Tw^2 + 6Ww - 18Tw - 6W + 6T) \cdot e^{-w}
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 g^{(4)}_P(w) &= (Rw + U + 4S) \cdot \sin(w) + (Sw + V - 4R) \cdot \cos(w) \\
 &\quad + (Tw^3 + Ww^2 - 12Tw^2 - 8Ww + 36Tw + 12W - 24T) \cdot e^{-w}.
 \end{aligned}$$

Eingesetzt in die inhomogene Differentialgleichung erhält man

$$\begin{aligned}
 (20w + 16) \cdot \sin(w) + 96w \cdot e^{-w} &= (Rw + U + 4S) \cdot \sin(w) + (Sw + V - 4R) \cdot \cos(w) \\
 &\quad + (Tw^3 + Ww^2 - 12Tw^2 - 8Ww + 36Tw + 12W - 24T) \cdot e^{-w} \\
 &\quad + (-2Rw - 2U - 4S) \cdot \sin(w) + (-2Sw - 2V + 4R) \cdot \cos(w) \\
 &\quad + (2Tw^3 + 2Ww^2 - 12Tw^2 - 8Ww + 12Tw + 4W) \cdot e^{-w} \\
 &\quad + (-8Sw - 8V + 8R) \cdot \sin(w) + (8Rw + 8U + 8S) \cdot \cos(w) \\
 &\quad + (-8Tw^3 - 8Ww^2 + 24Tw^2 + 16Ww) \cdot e^{-w} \\
 &\quad + (5Rw + 5U) \cdot \sin(w) + (5Sw + 5V) \cdot \cos(w) \\
 &\quad + (5Tw^3 + 5Ww^2) \cdot e^{-w} \\
 &= ((4R - 8S) \cdot w + (8R + 4U - 8V)) \cdot \sin(w) \\
 &\quad + ((8R + 4S) \cdot w + (8S + 8U + 4V)) \cdot \cos(w) \\
 &\quad + (48Tw - 24T + 16W) \cdot e^{-w}.
 \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert also $4R - 8S = 20$, $8R + 4U - 8V = 16$, $8R + 4S = 0$, $8S + 8U + 4V = 0$, $48T = 96$ und $-24T + 16W = 0$.

Die vorletzte Gleichung liefert direkt $T = 2$. Eingesetzt in die letzte folgt $W = \frac{1}{16} \cdot 24T = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3$.

Addiert man das Doppelte der dritten Gleichung zur ersten, so erhält man $20R = 20$, also $R = 1$, was in die dritte Gleichung eingesetzt $S = \frac{1}{4} \cdot (-8R) = -2 \cdot 1 = -2$ liefert.

Setzt man $R = 1$ und $S = -2$ in die verbleibenden beiden Gleichungen ein, so ergibt sich $8 + 4U - 8V = 16$ und $-16 + 8U + 4V = 0$ bzw. $4U - 8V = 8$ und $8U + 4V = 16$. Addiert man das Doppelte der zweiten dieser resultierenden Gleichungen zur ersten, so folgt $20U = 40$, also $U = 2$, womit sich aus der zweiten Gleichung $V = \frac{1}{4} \cdot (16 - 8 \cdot U) = 4 - 2 \cdot 2 = 0$ ergibt.

Zusammengefasst sind also $R = 1$, $U = 2$, $S = -2$, $V = 0$, $T = 2$ und $W = 3$ und wir erhalten als partikuläre Lösung $g_P(w) = (w + 2) \cdot \sin(w) - 2w \cdot \cos(w) + (2w^3 + 3w^2) \cdot e^{-w}$.

Insgesamt ergibt sich als allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$g(w) = (2w^3 + 3w^2 + Aw + B) \cdot e^{-w} + (C \cdot \sin(2w) + D \cdot \cos(2w)) \cdot e^w + (w + 2) \cdot \sin(w) - 2w \cdot \cos(w).$$



DGL/NteOrdInhom/Ag_DGLOnInhom_AvTdrSMitLaplaceTransOderAvTdrSEinstieg02.txt

Aufgabe 15.113 ()

Die Aufgabe

\MAGSPfadM/DGL/MitLaplaceTrans/Ag_DGLOnInhom_MitLaplaceTransOderAvTdrSEinstieg02 eignet sich auch als Einstiegsaufgabe in den Ansatz vom Typ der rechten Seite.



DGL/NteOrdInhom/Ag_DGLOnInhom_AvTdrS02GeradenRechts.tex

Aufgabe 15.114 (Inhomogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten)

[kr](#) und [spf](#)

Geben Sie jeweils die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an!

a) $3y''(x) - 8y'(x) + 5y(x) = 35$

$$Ae^x + Be^{\frac{5}{3}x} + 7$$

Lösung:

Die homogene Gleichung löst man mit dem Exponentialansatz $y_H(x) := e^{\lambda x}$ mit $y_H'(x) := \lambda \cdot e^{\lambda x}$ und $y_H''(x) := \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}$. Einsetzen in die Gleichung führt auf

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} 3\lambda^2 \cdot e^{\lambda x} - 8\lambda \cdot e^{\lambda x} + 5 \cdot e^{\lambda x} = 3 \cdot e^{\lambda x} \cdot \left(\lambda^2 - 2 \cdot \lambda \cdot \frac{4}{3} + \left(\frac{4}{3} \right)^2 - \frac{16}{9} + \frac{5}{3} \right) \\ &= 3 \cdot e^{\lambda x} \cdot \left(\left(\lambda - \frac{4}{3} \right)^2 - \frac{1}{9} \right) = 3 \cdot e^{\lambda x} \cdot \left(\lambda - \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \right) \cdot \left(\lambda - \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \right) = 3 \cdot e^{\lambda x} \cdot (\lambda - 1) \cdot \left(\lambda - \frac{5}{3} \right). \end{aligned}$$

Ein Fundamentalsystem besteht folglich aus $y_{H,1}(x) = e^x$ und $y_{H,2}(x) = e^{\frac{5}{3}x}$. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet damit

$$y_H(x) = Ae^x + Be^{\frac{5}{3}x}.$$

Eine partikuläre Lösung für die inhomogene Gleichung lässt sich systematisch mit einem *Ansatz vom Typ der rechten Seite* bestimmen. Dieser lautet hier $y_P(x) := u$ mit $y_P'(x) = 0$ und $y_P''(x) = 0$ sowie konstantem $u \in \mathbb{C}$. Einsetzen liefert $3 \cdot 0 - 8 \cdot 0 + 5 \cdot u = 35$, also $u = 7$.

Somit lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = Ae^x + Be^{\frac{5}{3}x} + 7.$$

b) $f''(t) + f'(t) - 12f(t) = -144t$

$$Ce^{-4t} + De^{3t} + 12t + 1$$

Lösung:

Die homogene Gleichung löst man mit dem Exponentialansatz $f_H(t) := e^{\lambda t}$ mit $f_H'(t) := \lambda \cdot e^{\lambda t}$ und $f_H''(t) := \lambda^2 \cdot e^{\lambda t}$. Einsetzen in die Gleichung führt auf

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \lambda^2 \cdot e^{\lambda t} + \lambda \cdot e^{\lambda t} - 12 \cdot e^{\lambda t} = e^{\lambda t} \cdot \left(\lambda^2 + 2 \cdot \lambda \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} - 12 \right) \\ &= e^{\lambda t} \cdot \left(\left(\lambda + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{49}{4} \right) = e^{\lambda t} \cdot \left(\lambda + \frac{1}{2} + \frac{7}{2} \right) \cdot \left(\lambda + \frac{1}{2} - \frac{7}{2} \right) = e^{\lambda t} \cdot (\lambda + 4) \cdot (\lambda - 3). \end{aligned}$$

Ein Fundamentalsystem besteht folglich aus $f_{H,1}(t) = e^{-4t}$ und $f_{H,2}(t) = e^{3t}$. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet damit

$$f_H(t) = Ce^{-4t} + De^{3t}.$$

Eine partikuläre Lösung für die inhomogene Gleichung lässt sich systematisch mit einem *Ansatz vom Typ der rechten Seite* bestimmen. Dieser lautet hier $f_P(t) := vt + w$ mit $v \in \mathbb{C}$, $w \in \mathbb{C}$, $f_P'(t) = v$ und $f_P''(t) = 0$. Einsetzen liefert $0 + v - 12 \cdot (vt + w) = -144t$.

Sortiert ergibt sich $-12v \cdot t + (v - 12w) = -144 \cdot t + 0$. Ein Koeffizientenvergleich liefert $-12v = -144$ und $v - 12w = 0$, also $v = \frac{-144}{-12} = 12$ und $w = \frac{1}{12} \cdot v = \frac{1}{12} \cdot 12 = 1$.

Somit lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$f(t) = f_H(t) + f_P(t) = Ce^{-4t} + De^{3t} + 12t + 1.$$



DGL/NteOrdInhom/Ag_DGLOnInhom_EulerInhomogenVieleVerfahren.tex

Aufgabe 15.115 (Suchen einer partikulären Lösung)

spf

Finden Sie eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung

$$x^2 \cdot f''(x) + 5x \cdot f'(x) + 3 \cdot f(x) = (x^2 - 3) \cdot \sin(x) - 5x \cdot \cos(x) \quad !$$

$$-\sin(x)$$

Hinweise: Sie können die partikuläre Lösung raten, mit Laplace-Transformation berechnen, über Variation der Konstanten bestimmen oder über einen Potenzreihenansatz ermitteln.
Falls Sie Laplace-Transformation verwenden, bedenken Sie, dass die Laplace-Transformierte einer Funktion vom exponentiellen Typ mit wachsendem Argument gegen 0 konvergiert.

Lösung durch „scharfes Hinsehen“:

„Offensichtlich“ löst $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := -\sin(x)$ die Differentialgleichung:

Mit $f'(x) = -\cos(x)$ und $f''(x) = \sin(x)$ folgt

$$\begin{aligned} x^2 \cdot f''(x) + 5x \cdot f'(x) + 3 \cdot f(x) &= x^2 \cdot \sin(x) + 5x \cdot (-\cos(x)) + 3 \cdot (-\sin(x)) \\ &= (x^2 - 3) \cdot \sin(x) - 5x \cdot \cos(x). \end{aligned}$$

Lösung mit Laplace-Transformation:

Bezeichnet $F := \mathcal{L}f$ die Laplace-Transformierte von f , so folgt $(\mathcal{L}f')(s) = s \cdot F(s) - f(0)$ und $(\mathcal{L}f'')(s) = s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - f'(0)$ mit dem Satz über die Differentiation im Urbildraum.

Der Satz über die Differentiation im Bildraum liefert dann als Laplace-Transformierte der linken Seite

$$\begin{aligned} &\frac{d^2}{ds^2} (s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - f'(0)) - 5 \cdot \frac{d}{ds} (s \cdot F(s) - f(0)) + 3 \cdot F(s) \\ &= \frac{d}{ds} (s^2 \cdot F'(s) + 2s \cdot F(s) - f(0)) - 5 \cdot (s \cdot F'(s) + F(s)) + 3 \cdot F(s) \\ &= s^2 \cdot F''(s) + 2s \cdot F'(s) + 2s \cdot F'(s) + 2 \cdot F(s) - 5s \cdot F'(s) - 5 \cdot F(s) + 3 \cdot F(s) \\ &= s^2 \cdot F''(s) - s \cdot F'(s). \end{aligned}$$

Ebenfalls mit dem Satz über die Differentiation im Bildraum sowie mit $(\mathcal{L}(\text{id} \cdot \sin))(s) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$ und $(\mathcal{L}(\text{id} \cdot \cos))(s) = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$ ergibt sich als Laplace-Transformierte der rechten Seite zu

$$\begin{aligned} &-\frac{d}{ds} \left(\frac{2s}{(s^2+1)^2} \right) - 3 \cdot \frac{1}{s^2+1} - 5 \cdot \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2} \\ &= -\frac{2 \cdot (s^2+1)^2 - 2s \cdot 2 \cdot (s^2+1)^1 \cdot 2s}{(s^2+1)^4} - \frac{3s^2+3+5s^2-5}{(s^2+1)^2} \\ &= -\frac{2s^2+2-8s^2+8s^4+8s^2-2s^2-2}{(s^2+1)^3} = \frac{-8s^4}{(s^2+1)^3}. \end{aligned}$$

Für F ergibt sich also die Differentialgleichung

$$s^2 \cdot F''(s) - s \cdot F'(s) = \frac{-8s^4}{(s^2+1)^3} \quad \text{bzw.} \quad s \cdot F''(s) - F'(s) = \frac{-8s^3}{(s^2+1)^3}.$$

Die zugehörige homogene Gleichung $s \cdot F''(s) - F'(s) = 0$ löst man mittels Trennung der Veränderlichen:

$$\frac{F''_{\text{H}}(s)}{F'_{\text{H}}(s)} = \frac{1}{s} \iff \ln(|F'_{\text{H}}(s)|) = \ln(|s|) + D \iff |F'_{\text{H}}(s)| = e^D \cdot |s|, \quad \text{also} \quad F'_{\text{H}}(s) = A \cdot s.$$

Variation der Konstanten liefert den Ansatz $F'_{\text{P}}(s) = C(s) \cdot s$ für die partikuläre Lösung der Differentialgleichung für F .

Es folgt $F'_{\text{P}}(s) = C'(s) \cdot s + C(s)$, was in die Differentialgleichung für F eingesetzt werden kann:

$$\frac{-8s^3}{(s^2+1)^3} = s \cdot (C'(s) \cdot s + C(s)) - C(s) \cdot s = s^2 \cdot C'(s) \quad \text{bzw.} \quad C'(s) = \frac{-8s}{(s^2+1)^3}.$$

Mit $p(t) = 2 \cdot \frac{-2}{t^3}$ und $r(s) = s^2 + 1$ ergibt sich $r'(s) = 2s$, also

$$C(s) = \int \underbrace{2 \cdot \frac{-2}{(s^2+1)^3}}_{=p(r(s))} \cdot \underbrace{2s}_{=r'(s)} ds = \left[\int 2 \cdot \frac{-2}{t^3} dt \right]_{t=r(s)} = \left[2 \cdot \frac{1}{t^2} \right]_{t=s^2+1} = \frac{2}{(s^2+1)^2}.$$

Mit $q(t) = -\frac{1}{t^2}$ folgt damit für ein $A \in \mathbb{C}$ und ein $B \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} F(s) &= \int F'(s) \, ds = \int (F'_H(s) + F'_P(s)) \, ds = \int \left(As + s \cdot \frac{2}{(s^2+1)^2} \right) \, ds \\ &= \int As \, ds + \int \underbrace{\left(-\frac{-1}{(s^2+1)^2} \right)}_{=q(r(s))} \cdot \underbrace{2s}_{=r'(s)} \, ds = \frac{A}{2} \cdot s^2 + B + \left[\int \left(-\frac{-1}{t^2} \right) \, dt \right]_{t=r(s)} \\ &= \frac{A}{2} \cdot s^2 + B + \left[-\frac{1}{t} \right]_{t=s^2+1} = \frac{A}{2} \cdot s^2 + B - \frac{1}{s^2+1}. \end{aligned}$$

Da für jede Laplace-Transformierte einer Funktion g vom exponentiellen Typ $\lim_{s \rightarrow \infty} (\mathcal{L}g)(s) = 0$ gilt, wählen wir entsprechende Konstanten A und B mit $A = B = 0$. Damit folgt

$$F(s) = -\frac{1}{s^2+1}, \quad \text{also} \quad f(x) = -\sin(x).$$

Lösung mit Variation der Konstanten:

Wir lösen zunächst die zugehörige homogene Gleichung $x^2 \cdot f''_H(x) + 5x \cdot f'_H(x) + 3 \cdot f_H(x) = 0$. Da es sich um eine Euler'sche Differentialgleichung handelt, empfiehlt sich der Ansatz $f_H(x) = x^\lambda$. Es folgt $f'_H(x) = \lambda \cdot x^{\lambda-1}$ und $f''_H(x) = \lambda \cdot (\lambda-1) \cdot x^{\lambda-2}$. Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 \cdot f''_H(x) + 5x \cdot f'_H(x) + 3 \cdot f_H(x) = x^2 \cdot (\lambda^2 - \lambda) \cdot x^{\lambda-2} + 5x \cdot \lambda \cdot x^{\lambda-1} + 3 \cdot x^\lambda \\ &= x^\lambda \cdot (\lambda^2 - \lambda + 5\lambda + 3) = x^\lambda \cdot (\lambda^2 + 2 \cdot \lambda \cdot 2 + 2^2 - 4 + 3) \\ &= x^\lambda \cdot ((\lambda + 2)^2 - 1) = x^\lambda \cdot (\lambda + 2 + 1) \cdot (\lambda + 2 - 1) = x^\lambda \cdot (\lambda - (-3)) \cdot (\lambda - (-1)). \end{aligned}$$

Diese Gleichung wird für alle $x \in \mathbb{R}$ gelöst durch $\lambda = -3$ und $\lambda = -1$.

Als allgemeine homogene Lösung der Differentialgleichung ergibt sich also

$$f_H(x) = A \cdot x^{-3} + B \cdot x^{-1} \quad \text{mit } A \in \mathbb{C} \text{ und } B \in \mathbb{C}.$$

Für die partikuläre Lösung empfiehlt sich der Ansatz

$$f_P(x) = C(x) \cdot x^{-3} + D(x) \cdot x^{-1}.$$

Abgeleitet wird das zu

$$f'_P(x) = C'(x) \cdot x^{-3} + D'(x) \cdot x^{-1} - 3 \cdot C(x) \cdot x^{-4} - D(x) \cdot x^{-2} = -3 \cdot C(x) \cdot x^{-4} - D(x) \cdot x^{-2},$$

wenn man zusätzlich $C'(x) \cdot x^{-3} + D'(x) \cdot x^{-1} = 0$ fordert.

Damit folgt

$$f''_P(x) = -3 \cdot C'(x) \cdot x^{-4} - D'(x) \cdot x^{-2} + 12 \cdot C(x) \cdot x^{-5} + 2 \cdot D(x) \cdot x^{-3}.$$

Setzt man f_P in die inhomogene Differentialgleichung ein, so folgt also

$$\begin{aligned} &x^2 \cdot (-3 \cdot C'(x) \cdot x^{-4} - D'(x) \cdot x^{-2} + 12 \cdot C(x) \cdot x^{-5} + 2 \cdot D(x) \cdot x^{-3}) \\ &+ 5x \cdot (-3 \cdot C(x) \cdot x^{-4} - D(x) \cdot x^{-2}) + 3 \cdot (C(x) \cdot x^{-3} + D(x) \cdot x^{-1}) \\ &= -3x^{-2} \cdot C'(x) - D'(x) = (x^2 - 3) \cdot \sin(x) - 5x \cdot \cos(x). \end{aligned}$$

Das sich ergebende lineare Gleichungssystem für $C'(x)$ und $D'(x)$ lösen wir mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{cc|c} x^{-3} & x^{-1} & 0 \\ -3x^{-2} & -1 & (x^2 - 3) \cdot \sin(x) - 5x \cdot \cos(x) \end{array} \right) \parallel \cdot 3x \quad \cdot x^3 \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & x^2 & 0 \\ 0 & 2 & (x^2 - 3) \cdot \sin(x) - 5x \cdot \cos(x) \end{array} \right) \parallel \cdot \frac{-x^2}{2} \quad \cdot \frac{1}{2} \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{-x^4+3x^2}{2} \cdot \sin(x) + \frac{5x^3}{2} \cdot \cos(x) \\ 0 & 1 & \frac{x^2-3}{2} \cdot \sin(x) - \frac{5x}{2} \cdot \cos(x) \end{array} \right) \end{aligned}$$

Mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned}
C(x) &= \int \left(\frac{-x^4 + 3x^2}{2} \cdot \sin(x) + \frac{5x^3}{2} \cdot \cos(x) \right) dx = \int \frac{-x^4 + 3x^2}{2} \cdot \sin(x) dx + \int \frac{5x^3}{2} \cdot \cos(x) dx \\
&= \frac{-x^4 + 3x^2}{2} \cdot (-\cos(x)) - \int (-2x^3 + 3x) \cdot (-\cos(x)) dx + \int \frac{5x^3}{2} \cdot \cos(x) dx \\
&= \frac{x^4 - 3x^2}{2} \cdot \cos(x) + \int \frac{x^3 + 6x}{2} \cdot \cos(x) dx \\
&= \frac{x^4 - 3x^2}{2} \cdot \cos(x) + \frac{x^3 + 6x}{2} \cdot \sin(x) - \int \frac{3x^2 + 6}{2} \cdot \sin(x) dx \\
&= \frac{x^4 - 3x^2}{2} \cdot \cos(x) + \frac{x^3 + 6x}{2} \cdot \sin(x) - \frac{3x^2 + 6}{2} \cdot (-\cos(x)) + \int 3x \cdot (-\cos(x)) dx \\
&= \frac{x^4 + 6}{2} \cdot \cos(x) + \frac{x^3 + 6x}{2} \cdot \sin(x) - \int 3x \cdot \cos(x) dx \\
&= \frac{x^4 + 6}{2} \cdot \cos(x) + \frac{x^3 + 6x}{2} \cdot \sin(x) - 3x \cdot \sin(x) + \int 3 \cdot \sin(x) dx \\
&= \frac{x^4 + 6}{2} \cdot \cos(x) + \frac{x^3}{2} \cdot \sin(x) + 3 \cdot (-\cos(x)) = \frac{x^4}{2} \cdot \cos(x) + \frac{x^3}{2} \cdot \sin(x)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
D(x) &= \int \left(\frac{x^2 - 3}{2} \cdot \sin(x) - \frac{5x}{2} \cdot \cos(x) \right) dx = \int \frac{x^2 - 3}{2} \cdot \sin(x) dx - \int \frac{5x}{2} \cdot \cos(x) dx \\
&= \frac{x^2 - 3}{2} \cdot (-\cos(x)) - \int x \cdot (-\cos(x)) dx - \int \frac{5x}{2} \cdot \cos(x) dx \\
&= \frac{-x^2 + 3}{2} \cdot \cos(x) - \int \frac{3x}{2} \cdot \cos(x) dx = \frac{-x^2 + 3}{2} \cdot \cos(x) - \frac{3x}{2} \cdot \sin(x) + \int \frac{3}{2} \cdot \sin(x) dx \\
&= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} \right) \cdot \cos(x) - \frac{3x}{2} \cdot \sin(x) - \frac{3}{2} \cdot \cos(x) = -\frac{x^2}{2} \cdot \cos(x) - \frac{3x}{2} \cdot \sin(x).
\end{aligned}$$

Also ergibt sich als eine Lösung der Differentialgleichung

$$f_P(x) = C(x) \cdot x^{-3} + D(x) \cdot x^{-1} = \frac{x}{2} \cdot \cos(x) + \frac{1}{2} \cdot \sin(x) - \frac{x}{2} \cdot \cos(x) - \frac{3}{2} \cdot \sin(x) = -\sin(x).$$

Allgemein ergibt sich als Lösung der Differentialgleichung $f(x) = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x} - \sin(x)$.

Lösung mit einem Potenzreihenansatz:

Der Ansatz $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ liefert $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$ und $f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-2}$.
Eingesetzt in die linke Seite der Differentialgleichung folgt

$$\begin{aligned}
&x^2 \cdot f''(x) + 5x \cdot f'(x) + 3 \cdot f(x) \\
&= x^2 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-2} + 5x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1} + 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 - n) \cdot a_n \cdot x^n + 5a_1x + \sum_{n=2}^{\infty} 5n \cdot a_n \cdot x^n + 3a_0 + 3a_1x + \sum_{n=2}^{\infty} 3a_n \cdot x^n \\
&= 3a_0 + 8a_1x + \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 + 4n + 3) \cdot a_n \cdot x^n \\
&= 3a_0 + 8a_1x + \sum_{k=1}^{\infty} \left((2k)^2 + 4 \cdot 2k + 3 \right) \cdot a_{2k} \cdot x^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} \left((2k+1)^2 + 4 \cdot (2k+1) + 3 \right) \cdot a_{2k+1} \cdot x^{2k+1} \\
&= 3a_0 + 8a_1x + \sum_{k=1}^{\infty} (4k^2 + 8k + 3) \cdot a_{2k} \cdot x^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} (4k^2 + 12k + 8) \cdot a_{2k+1} \cdot x^{2k+1}.
\end{aligned}$$

Die rechte Seite lässt sich ebenfalls um 0 in eine Potenzreihe entwickeln:

$$\begin{aligned}
 (x^2 - 3) \cdot \sin(x) - 5x \cdot \cos(x) &= (x^2 - 3) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} - 5x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+3} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot 3x^{2k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot 5x^{2k+1} \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} \cdot x^{2k+1} - 3x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot 3x^{2k+1} - 5x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot 5x^{2k+1} \\
 &= 0 - 8x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{-2k \cdot (2k+1) - 3 - 5 \cdot (2k+1)}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} \\
 &= 0 - 8x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{-(4k^2 + 12k + 8)}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}.
 \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich der rechten und linken Seite ergibt also für alle $k \in \mathbb{N}$

$$a_0 = 0, \quad 8a_1 = -8, \quad (4k^2 + 8k + 3) \cdot a_{2k} = 0 \quad \text{und} \quad (4k^2 + 12k + 8) \cdot a_{2k+1} = (-1)^k \cdot \frac{-(4k^2 + 12k + 8)}{(2k+1)!}.$$

Auflösen liefert $a_{2k} = 0$ und $a_{2k+1} = -\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, also

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} \cdot x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \cdot x^{2k+1} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} 0 \cdot x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \right) \cdot x^{2k+1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} = -\sin(x).
 \end{aligned}$$



DGL/NteOrdInhom/Ag_DGLOnInhom_PotReihenAnsAblDesArctan.tex

Aufgabe 15.116 (Potenzreihenansatz)

spf

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertaufgabe mit dem Potenzreihenansatz!

Berechnen Sie die ersten sieben Koeffizienten der Potenzreihe!

Geben Sie außerdem eine Stammfunktion der Lösungsfunktion an!

$$(1+x^2) \cdot (y''(x) - 2) + 4xy'(x) + (x^4 + 2x^2 + 3) \cdot y(x) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$$

Handelt es sich um eine homogene Differentialgleichung?

Die Lösung $\frac{2}{1+x^2}$ der inhomogenen Differentialgleichung hat $2 \arctan(x)$ als Stammfunktion.

Lösung:

Es handelt sich um eine inhomogene Differentialgleichung mit der Inhomogenität $2 + 2x^2$.

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die Koeffizientenfolge der Potenzreihenentwicklung von y um 0.

$$\text{Dann gilt } y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n, \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot a_{n+1} \cdot x^n \quad \text{und}$$

$$y''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \cdot n \cdot a_{n+1} \cdot x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) \cdot (n+1) \cdot a_{n+2} \cdot x^n.$$

$$\text{Insbesondere sind } a_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot 0^n = y(0) = 2 \quad \text{und} \quad a_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot a_{n+1} \cdot 0^n = y'(0) = 0.$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung folgt

$$\begin{aligned}
& 2 + 2x^2 \\
&= (1 + x^2) \cdot y''(x) + 4xy'(x) + (x^4 + 2x^2 + 3) \cdot y(x) \\
&= (1 + x^2) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) \cdot (n+1) \cdot a_{n+2} \cdot x^n + 4x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot a_{n+1} \cdot x^n + (x^4 + 2x^2 + 3) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) \cdot (n+1) \cdot a_{n+2} \cdot x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) \cdot (n+1) \cdot a_{n+2} \cdot x^{n+2} \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot (n+1) \cdot a_{n+1} \cdot x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^{n+4} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n \cdot x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} 3a_n \cdot x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) \cdot (n+1) \cdot a_{n+2} \cdot x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot x^n \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} 4na_n \cdot x^n + \sum_{n=4}^{\infty} a_{n-4} \cdot x^n + \sum_{n=2}^{\infty} 2a_{n-2} \cdot x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3a_n \cdot x^n \\
&= 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + 2a_2x^2 + 6a_3x^3 \\
&\quad + 4a_1x + 8a_2x^2 + 12a_3x^3 + 2a_0x^2 + 2a_1x^3 + 3a_0 + 3a_1x + 3a_2x^2 + 3a_3x^3 \\
&\quad + \sum_{n=4}^{\infty} \left((n^2 + 3n + 2) \cdot a_{n+2} + (n^2 - n) \cdot a_n + 4na_n + 4a_{n-4} + 2a_{n-2} + 3a_n \right) \cdot x^n \\
&= (2a_2 + 3a_0) + (6a_3 + 7a_1) \cdot x + (12a_4 + 13a_2 + 2a_0) \cdot x^2 + (20a_5 + 21a_3 + 2a_1) \cdot x^3 \\
&\quad + \sum_{n=4}^{\infty} \left((n^2 + 3n + 2) \cdot a_{n+2} + (n^2 + 3n + 3) \cdot a_n + 2a_{n-2} + a_{n-4} \right) \cdot x^n.
\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert $2a_2 + 3a_0 = 2$, $6a_3 + 7a_1 = 0$, $12a_4 + 13a_2 + 2a_0 = 2$, $20a_5 + 21a_3 + 2a_1 = 0$ und $(n^2 + 3n + 2) \cdot a_{n+2} + (n^2 + 3n + 3) \cdot a_n + 2a_{n-2} + a_{n-4} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$.

Also gilt $a_2 = 1 - \frac{3a_0}{2} = 1 - 3 = -2$, $a_3 = -\frac{7a_1}{6} = 0$, $a_4 = \frac{1}{6} - \frac{13a_2}{12} - \frac{a_0}{6} = \frac{1+13-2}{6} = 2$, $a_5 = -\frac{21a_3}{20} - \frac{a_1}{10} = 0$ und $a_6 = -\frac{1}{16+12+2} \cdot ((16+12+3) \cdot a_4 + 2a_2 + a_0) = -\frac{1}{30} \cdot (31 \cdot 2 - 4 + 2) = -2$.

Es folgt $a_0 = 2$, $a_1 = 0$, $a_2 = -2$, $a_3 = 0$, $a_4 = 2$, $a_5 = 0$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$

$$a_{n+2} = -\frac{(n^2 + 3n + 3) \cdot a_n + 2a_{n-2} + a_{n-4}}{n^2 + 3n + 2} = -a_n - \frac{a_n + 2a_{n-2} + a_{n-4}}{n^2 + 3n + 2}.$$

Behauptung: $a_{2k} = (-1)^k \cdot 2$ und $a_{2k+1} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Induktionsanfang: Für $k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ stimmt die Behauptung (siehe oben).

Induktionsvoraussetzung: Sei $K \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ eine Zahl, für die $a_{2\ell} = (-1)^\ell \cdot 2$ und $a_{2\ell+1} = 0$ für alle $\ell \in \mathbb{N}_0$ mit $\ell \leq K$ bereits gezeigt wurde.

Induktionsschluss: Dann gilt

$$\begin{aligned}
a_{2 \cdot (K+1)} &= a_{2K+2} = -a_{2K} - \frac{a_{2K} + 2a_{2K-2} + a_{2K-4}}{(2K)^2 + 3 \cdot 2K + 2} \\
&= -(-1)^K \cdot 2 - \frac{1}{4K^2+6K+2} \cdot \left((-1)^K \cdot 2 + 2 \cdot (-1)^{K-1} \cdot 2 + (-1)^{K-2} \cdot 2 \right) \\
&= (-1)^{K+1} \cdot 2 - \frac{(-1)^K}{4K^2+6K+2} \cdot (2 - 4 + 2) = (-1)^{K+1} \cdot 2
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
a_{2 \cdot (K+1)+1} &= a_{2K+3} = -a_{2K+1} - \frac{a_{2K+1} + 2a_{2K-1} + a_{2K-3}}{(2K+1)^2 + 3 \cdot (2K+1) + 2} \\
&= -0 - \frac{1}{(2K+1)^2+3 \cdot (2K+1)+2} \cdot (0 + 2 \cdot 0 + 0) = 0.
\end{aligned}$$

Also ist für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_{2k} x^{2k} + a_{2k+1} x^{2k+1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot 2 \cdot x^{2k} = 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \frac{2}{1 - (-x^2)} = \frac{2}{1 + x^2}. \end{aligned}$$

Die Funktion $y(x) = \frac{2}{1+x^2}$ erfüllt auch für alle $x \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung und die Anfangswerte. Zuguterletzt ist für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\int y(x) dx = \int \frac{2}{1+x^2} dx = 2 \cdot \int \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \arctan(x).$$



DGL/NteOrdInhom/Ag_DGLOnInhom_PotReihenAnsKonstKoeffWieInAvTdrS02GeradenRechts.tex

Aufgabe 15.117 (Inhomogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten)

spf

Verwenden Sie einen Potenzreihenansatz, um die Lösungen der Anfangswertaufgaben zu erhalten:

a) $3y''(x) - 8y'(x) + 5y(x) = 35$ mit $y(0) = 9$ und $y'(0) = 2$

$$2e^x + 7$$

Lösung:

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die Koeffizientenfolge der Potenzreihe von y . Dann folgt

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n, & y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot a_{n+1} \cdot x^n \quad \text{und} \\ y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) \cdot (n+1) \cdot a_{n+2} \cdot x^n. \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung folgt

$$\begin{aligned} 35 &= 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) \cdot (n+1) \cdot a_{n+2} \cdot x^n - 8 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot a_{n+1} \cdot x^n + 5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (3 \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot a_{n+2} - 8 \cdot (n+1) \cdot a_{n+1} + 5a_n) \cdot x^n. \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert $35 = 6a_2 - 8a_1 + 5a_0$ und $0 = 3 \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot a_{n+2} - 8 \cdot (n+1) \cdot a_{n+1} + 5a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit den Anfangswerten $a_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot 0^n = y(0) = 9$ und

$$a_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot 0^{n-1} = y'(0) = 2 \text{ ergibt sich } a_2 = \frac{8a_1 - 5a_0 + 35}{6} = \frac{8 \cdot 2 - 5 \cdot 9 + 35}{6} = 1, \text{ also die Folge}$$

$$a_0 = 9, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+2} = \frac{8 \cdot (n+1) \cdot a_{n+1} - 5a_n}{3 \cdot (n+2) \cdot (n+1)} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Behauptung: Es gilt $a_n = \frac{2}{n!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang: ($n = 1$ und $n = 2$): Es gilt $a_1 = 2 = \frac{2}{1!} = \frac{2}{1!}$ und $a_2 = 1 = \frac{2}{2!} = \frac{2}{2!}$.

Induktionsvoraussetzung: ($n = N$ und $n = N + 1$): Sei $N \in \mathbb{N}$ eine Zahl, für die $a_N = \frac{2}{N!}$ und $a_{N+1} = \frac{2}{(N+1)!}$ bereits gezeigt wurde.

Induktionsschluss: ($n = N + 2$): Dann gilt

$$\begin{aligned} a_{N+2} &= \frac{8 \cdot (N+1) \cdot a_{N+1} - 5a_N}{3 \cdot (N+2) \cdot (N+1)} = \frac{8 \cdot (N+1) \cdot \frac{2}{(N+1)!} - 5 \cdot \frac{2}{N!}}{3 \cdot (N+2) \cdot (N+1)} \\ &= \frac{8 \cdot \frac{2}{N!} - 5 \cdot \frac{2}{N!}}{3 \cdot (N+1) \cdot (N+2)} = \frac{3 \cdot \frac{2}{N!}}{3 \cdot (N+1) \cdot (N+2)} = \frac{2}{N! \cdot (N+1) \cdot (N+2)} = \frac{2}{(N+2)!}. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt $y(x) = 9 \cdot x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n!} \cdot x^n = 9 - 2 \cdot \frac{x^0}{0!} + 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 2 \cdot e^x + 7.$

b) $f''(t) + f'(t) - 12f(t) = -144t$ mit $f(0) = -6$ und $f'(0) = -9$

$$-7e^{3t} + 12t + 1$$

Lösung:

Sei $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die Koeffizientenfolge der Potenzreihe von f . Dann folgt

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot t^n, & f'(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot b_n \cdot t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot b_{n+1} \cdot t^n \quad \text{und} \\ f''(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot b_n \cdot t^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) \cdot (n+1) \cdot b_{n+2} \cdot t^n. \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung folgt

$$\begin{aligned} -144t &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) \cdot (n+1) \cdot b_{n+2} \cdot t^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot b_{n+1} \cdot t^n - 12 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} ((n+2) \cdot (n+1) \cdot b_{n+2} + (n+1) \cdot b_{n+1} - 12b_n) \cdot t^n. \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert $0 = 2b_2 + b_1 - 12b_0$, $-144 = 6b_3 + 2b_2 - 12b_1$ und

$$0 = (n+2) \cdot (n+1) \cdot b_{n+2} + (n+1) \cdot b_{n+1} - 12b_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Mit den Anfangswerten $b_0 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot 0^n = f(0) = -6$ und $b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot b_n \cdot 0^{n-1} = f'(0) = -9$ ergibt sich $b_2 = \frac{12b_0 - b_1}{2} = \frac{12 \cdot (-6) - (-9)}{2} = -\frac{63}{2}$ und $b_3 = \frac{12b_1 - 2b_2 - 144}{6} = 2b_1 - \frac{b_2}{3} - 24 = -18 + \frac{21}{2} - 24 = -42 + \frac{21}{2} = -\frac{63}{2}$, also die Folge

$$b_0 = -6, \quad b_1 = -9, \quad b_2 = b_3 = -\frac{63}{2} \quad \text{und} \quad b_{n+2} = \frac{-(n+1) \cdot b_{n+1} + 12b_n}{(n+2) \cdot (n+1)} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Behauptung: Es gilt $b_n = -7 \cdot \frac{3^n}{n!}$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Induktionsanfang: ($n = 2$ und $n = 3$):

$$\text{Es gilt } b_2 = -\frac{63}{2} = -\frac{7 \cdot 9}{2} = -7 \cdot \frac{3^2}{2!} \text{ und } b_3 = -\frac{63}{2} = -\frac{7 \cdot 9 \cdot 3}{2 \cdot 3} = -7 \cdot \frac{3^3}{3!}.$$

Induktionsvoraussetzung: ($n = N$ und $n = N + 1$):

Sei $N \in \mathbb{N}$ eine Zahl, für die $b_N = -7 \cdot \frac{3^N}{N!}$ und $b_{N+1} = -7 \cdot \frac{3^{N+1}}{(N+1)!}$ bereits gezeigt wurde.

Induktionsschluss: ($n = N + 2$): Dann gilt

$$\begin{aligned} b_{N+2} &= \frac{-(N+1) \cdot b_{N+1} + 12b_N}{(N+2) \cdot (N+1)} = \frac{-(N+1) \cdot \left(-7 \cdot \frac{3^{N+1}}{(N+1)!}\right) + 12 \cdot \left(-7 \cdot \frac{3^N}{N!}\right)}{(N+2) \cdot (N+1)} \\ &= \frac{21 \cdot \frac{3^N}{N!} - 84 \cdot \frac{3^N}{N!}}{(N+1) \cdot (N+2)} = \frac{-63 \cdot \frac{3^N}{N!}}{(N+1) \cdot (N+2)} = \frac{-7 \cdot 3^2 \cdot 3^N}{N! \cdot (N+1) \cdot (N+2)} = -7 \cdot \frac{3^{N+2}}{(N+2)!}. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$\begin{aligned} f(t) &= -6 \cdot t^0 - 9 \cdot t^1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(-7 \cdot \frac{3^n}{n!} \right) \cdot t^n = -6 - 9t - 7 \cdot \left(-\frac{3^0 \cdot t^0}{0!} - \frac{3^1 \cdot t^1}{1!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n \cdot t^n}{n!} \right) \\ &= -6 - 9t - 7 \cdot \left(-1 - 3t + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3t)^n}{n!} \right) = 1 + 12t - 7e^{3t}. \end{aligned}$$

Tipp: Es ergeben sich im Laufe der Rechnung doppelt rekursiv dargestellte Folgen. Falls Sie keine zündende Idee haben, wie die Folgen in geschlossener Darstellung aussehen, können Sie versuchen, als Zwischenschritt eine einfach rekursive Produktdarstellung zu finden.



DGL/NteOrdInhom/Ag_DGLOnInhom_PotReihenAnsZumUeben.tex

Aufgabe 15.118 (Potenzreihenansätze)

spf

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme mittels eines Potenzreihenansatzes!

a) $(2t^2 + 3t) \cdot g''(t) - 2g'(t) - 4g(t) = 8t - 4$ mit $g(0) = 1$

$$4t^2 + 1$$

Lösung:

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die Koeffizientenfolge der Potenzreihe von g bei Entwicklung um 0. Dann gilt

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad g'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} \quad \text{und} \quad g''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \cdot n a_n t^{n-2}.$$

Insbesondere ergibt sich $g(0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot 0^n = a_0$. Mit $g(0) = 1$ folgt also $a_0 = 1$.

Setzt man die Potenzreihe von g in die Differentialgleichung ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} 8t - 4 &= (2t^2 + 3t) \cdot g''(t) - 2g'(t) - 4g(t) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} 2 \cdot (n-1) \cdot n a_n t^n + \sum_{n=2}^{\infty} 3 \cdot (n-1) \cdot n a_n t^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n t^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} 2 \cdot (n-1) \cdot n a_n t^n + \sum_{n=1}^{\infty} 3n \cdot (n+1) \cdot a_{n+1} \cdot t^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot (n+1) \cdot a_{n+1} \cdot t^n - \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n t^n \\ &= 6a_2 t - 2a_1 - 4a_2 t - 4a_0 - 4a_1 t + \sum_{n=2}^{\infty} ((3n-2) \cdot (n+1) \cdot a_{n+1} + (2n^2 - 2n - 4) \cdot a_n) \cdot t^n \\ &= (2a_2 - 4a_1) \cdot t + (-2a_1 - 4a_0) + \sum_{n=2}^{\infty} ((3n-2) \cdot a_{n+1} + (2n-4) \cdot a_n) \cdot (n+1) \cdot t^n, \end{aligned}$$

denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} 2n^2 - 2n - 4 &= 2 \cdot \left(n^2 - 2 \cdot n \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} - 2 \right) = 2 \cdot \left(\left(n - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{9}{4} \right) \\ &= 2 \cdot \left(n - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \right) \cdot \left(n - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \right) = 2 \cdot (n-2) \cdot (n+1) = (2n-4) \cdot (n+1). \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert $((3n-2) \cdot a_{n+1} + (2n-4) \cdot a_n) \cdot (n+1) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $-2a_1 - 4a_0 = -4$ und $2a_2 - 4a_1 = 8$. Mit $a_0 = 1$ ergibt sich $-2a_1 = -4 + 4 = 0$ und $2a_2 = 8 - 2 \cdot 0$.

Das liefert

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 4 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = -\frac{2n-4}{3n-2} \cdot a_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Behauptung: Es gilt $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1; 2\}$.

Induktionsanfang: Es ist $a_3 = -\frac{2 \cdot 2 - 4}{3 \cdot 2 - 2} \cdot a_2 = -\frac{4 - 4}{6 - 2} \cdot 4 = 0$.

Induktionsvoraussetzung: Sei $N \in \mathbb{N} \setminus \{1; 2\}$ eine Zahl, für die $a_N = 0$ bereits gezeigt wurde.

Induktionsschluss: Dann gilt $a_{N+1} = -\frac{2N-4}{3N-2} \cdot a_N = -\frac{2N-4}{3N-2} \cdot 0 = 0$.

Insgesamt folgt

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 1 + 0 \cdot t + 4 \cdot t^2 + \sum_{n=3}^{\infty} 0 \cdot t^n = 4t^2 + 1.$$

b) $xf''(x) - f'(x) + 4xf(x) = 12x^4 - 8x^3 + 9x^2$ mit $f''(0) = -4$

$$3x^3 - 2x^2$$

Lösung:

Sei $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die Koeffizientenfolge der Potenzreihe von f bei Entwicklung um 0. Dann gilt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^{n-1} \quad \text{und} \quad f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \cdot n b_n x^{n-2}.$$

Insbesondere ergibt sich $f''(0) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \cdot n b_n \cdot 0^{n-2} = (2-1) \cdot 2b_2 = 2b_2$. Mit $f''(0) = -4$ folgt also $b_2 = -2$.

Setzt man die Potenzreihe von f in die Differentialgleichung ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} 12x^4 - 8x^3 + 9x^2 &= xf''(x) - f'(x) + 4xf(x) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \cdot n b_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 4b_n x^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (n+1) \cdot b_{n+1} \cdot x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot b_{n+1} \cdot x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 4b_{n-1} \cdot x^n \\ &= -b_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((n^2 - 1) \cdot b_{n+1} + 4b_{n-1} \right) \cdot x^n \end{aligned}$$

Also gilt $b_2 = -2$, $-b_1 = 0$, $4b_0 = 0$, $3b_3 + 4b_1 = 9$, $8b_4 + 4b_2 = -8$, $15b_5 + 4b_3 = 12$ und $(n^2 - 1) \cdot b_{n+1} + 4b_{n-1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1; 2; 3; 4\}$.

Es folgt $b_0 = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = -2$, $b_3 = 3 + \frac{4}{3} \cdot 0 = 3$, $b_4 = -1 - \frac{-2}{2} = 0$ und $b_5 = \frac{4}{5} - \frac{4}{15} \cdot 3 = 0$.

Behauptung: Es gilt $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$.

Induktionsanfang: $b_4 = 0$ und $b_5 = 0$ haben wir gerade berechnet.

Induktionsvoraussetzung: Sei $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq 5$ eine Zahl, für die $b_{N-1} = 0$ bereits gezeigt wurde.

Induktionsschluss: Dann gilt $b_{N+1} = \frac{-4}{N^2-1} \cdot b_{N-1} = \frac{-4}{N^2-1} \cdot 0 = 0$.

Insgesamt folgt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 0 + 0 \cdot x + (-2) \cdot x^2 + 3 \cdot x^3 + \sum_{n=4}^{\infty} 0 \cdot x^n = 3x^3 - 2x^2.$$

c) $(z^3 + z^2) \cdot u''(z) - zu'(z) + u(z) = z^2$ mit $u'(0) = A \in \mathbb{C}$

$$z \cdot \ln(z+1) + Az$$

Lösung:

Sei $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die Koeffizientenfolge der Potenzreihe von u bei Entwicklung um 0. Dann gilt

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad u'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1} \quad \text{und} \quad u''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \cdot n c_n z^{n-2}.$$

Setzt man die Potenzreihe von u in die Differentialgleichung ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} z^2 &= (z^3 + z^2) \cdot u''(z) - z u'(z) + u(z) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \cdot n c_n z^{n+1} + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \cdot n c_n z^n - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \\ &= \sum_{n=3}^{\infty} (n-2) \cdot (n-1) \cdot c_{n-1} \cdot z^n + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \cdot n c_n z^n - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \\ &= 2c_2 z^2 - c_1 z - 2c_2 z^2 + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \left((n-2) \cdot (n-1) \cdot c_{n-1} + (n-1)^2 \cdot c_n \right) \cdot z^n \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt $c_0 = 0$, $c_2 = 1$ und $(n-2) \cdot (n-1) \cdot c_{n-1} + (n-1)^2 \cdot c_n = 0$ bzw. $c_n = -\frac{n-2}{n-1} \cdot c_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1; 2\}$.

Behauptung: Es gilt $c_n = \frac{(-1)^n}{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Induktionsanfang: Es gilt $c_2 = 1 = \frac{1}{1} = \frac{(-1)^2}{2-1}$.

Induktionsvoraussetzung: Sei $N \in \mathbb{N} \setminus \{1; 2\}$ eine Zahl, für die $c_{N-1} = \frac{(-1)^{N-1}}{N-2}$ bereits gezeigt wurde.

Induktionsschluss: Dann gilt $c_N = -\frac{N-2}{N-1} \cdot c_{N-1} = -\frac{N-2}{N-1} \cdot \frac{(-1)^{N-1}}{N-2} = \frac{(-1)^N}{N-1}$.

Außerdem ergibt sich $u'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n \cdot 0^{n-1} = 1 \cdot c_1$. Mit $u'(0) = A$ folgt also $c_1 = A$.

Insgesamt folgt wegen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot z^n = \ln(z+1)$ für alle $z \in \mathbb{R}$ mit $|z| < 1$

$$\begin{aligned} u(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = 0 + Az + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} \cdot z^n = Az + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot z^{n+1} \\ &= Az + z \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot z^n = Az + z \cdot \ln(z+1). \end{aligned}$$

$u(z) = Az + z \cdot \ln(z+1)$ löst die Differentialgleichung für alle $z \in \mathbb{R}$ mit $z > -1$.



DGL/NteOrdInhom/Ag_DGLOnInhom_TypDerRechtenSeiteMehr_kurz.tex

Aufgabe 15.119 (Ansatz vom Typ der rechten Seite)

[spf](#)

Geben Sie zu den folgenden Differentialgleichungen zunächst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung an!

Bestimmen Sie danach eine partikuläre Lösung mit Hilfe eines Ansatzes vom Typ der rechten Seite!

Sind Anfangs- bzw. Randbedingungen angegeben, so bestimmen Sie die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung, die diese Anfangs- bzw. Randbedingungen erfüllt!

a) $y''(x) - 2y'(x) - 8y(x) = (36x + 12) \cdot e^{4x},$

$y(0) = 0$ und $y'(0) = 2$

$(3x^2 + x + A) \cdot e^{4x} + B e^{-2x}$ und $A = -B = \frac{1}{6}$

Lösung:

Wir berechnen zunächst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung mit Hilfe des Ansatzes $y_H(x) = e^{\lambda x}$. Dann gilt $y'_H(x) = \lambda \cdot e^{\lambda x}$ und $y''_H(x) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}$. In den homogenen Teil der Differentialgleichung eingesetzt folgt

$$\begin{aligned} \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} - 2 \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x} - 8 \cdot e^{\lambda x} &= 0 & \iff & e^{\lambda x} \cdot (\lambda^2 - 2 \cdot \lambda \cdot 1 + 1^2 - 1 - 8) = 0 \\ \iff e^{\lambda x} \cdot ((\lambda - 1)^2 - 9) &= 0 & \iff & e^{\lambda x} \cdot (\lambda - 1 - 3) \cdot (\lambda - 1 + 3) = 0 \\ \iff e^{\lambda x} \cdot (\lambda - 4) \cdot (\lambda + 2) &= 0 & \iff & \lambda = 4 \text{ oder } \lambda = -2. \end{aligned}$$

Also gibt es ein $A \in \mathbb{R}$ und ein $B \in \mathbb{R}$ mit

$$y_H(x) = A \cdot e^{4x} + B \cdot e^{-2x}.$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$(36x + 12) \cdot e^{4x} = e^{4x} \cdot (1 \cdot \sin(0 \cdot x) + (36x + 12) \cdot \cos(0 \cdot x)).$$

Da $4 + 0i$ eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, empfiehlt sich für die partikuläre Lösung der Ansatz

$$y_P(x) = x^1 \cdot e^{4x} \cdot ((Ux + V) \cdot \sin(0 \cdot x) + (Cx + D) \cdot \cos(0 \cdot x)) = e^{4x} \cdot (Cx^2 + Dx).$$

Ableiten liefert $y'_P(x) = e^{4x} \cdot (4Cx^2 + 4Dx + 2Cx + D)$ und $y''_P(x) = e^{4x} \cdot (16Cx^2 + 16Dx + 8Cx + 4D + 8Cx + 4D + 2C)$.

Eingesetzt in die inhomogene Differentialgleichung erhält man

$$\begin{aligned} &e^{4x} \cdot (36x + 12) \\ &= e^{4x} \cdot (16Cx^2 + 16Dx + 16Cx + 8D + 2C) - 2 \cdot e^{4x} \cdot (4Cx^2 + 4Dx + 2Cx + D) - 8 \cdot e^{4x} \cdot (Cx^2 + Dx) \\ &= e^{4x} \cdot (16Cx^2 + 16Dx + 16Cx + 8D + 2C - 8Cx^2 - 8Dx - 4Cx - 2D - 8Cx^2 - 8Dx) \\ &= e^{4x} \cdot (12Cx + 2C + 6D). \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert also $12C = 36$ und $2C + 6D = 12$ bzw. $C = 3$ und $D = -\frac{1}{3} \cdot C + 2 = -1 + 2 = 1$.

Damit ergibt sich die partikuläre Lösung zu $y_P(x) = e^{4x} \cdot (3x^2 + x)$ und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet

$$y(x) = A \cdot e^{4x} + B \cdot e^{-2x} + e^{4x} \cdot (3x^2 + x) = (3x^2 + x + A) \cdot e^{4x} + B \cdot e^{-2x}.$$

Damit folgt $y'(x) = (12x^2 + 4x + 4A + 6x + 1) \cdot e^{4x} - 2B \cdot e^{-2x}$. Mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 2$ ergibt sich also $A + B = 0$ und $4A + 1 - 2B = 2$. Es folgt $B = -A$ und $4A - 2B = 1$, was $6A = 1$ bzw. $A = \frac{1}{6}$ und damit auch $B = -\frac{1}{6}$ liefert. Insgesamt folgt

$$y(x) = \left(3x^2 + x + \frac{1}{6}\right) \cdot e^{4x} - \frac{1}{6} \cdot e^{-2x}.$$

$$\text{b) } f''(z) + 4f(z) = 25z \cdot \sin(3z), \quad f(0) = 0 \text{ und } f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{9}{2}$$

$$A \cdot \sin(2z) + B \cdot \cos(2z) - 5z \cdot \sin(3z) - 6 \cdot \cos(3z), \quad A = \sqrt{3} \text{ und } B = 6$$

Lösung:

Wir berechnen zunächst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung mit Hilfe des Ansatzes $f_H(z) = e^{\lambda z}$. Dann gilt $f'_H(z) = \lambda \cdot e^{\lambda z}$ und $f''_H(z) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda z}$. In den homogenen Teil der Differentialgleichung eingesetzt folgt

$$\begin{aligned} \lambda^2 \cdot e^{\lambda z} + 4 \cdot e^{\lambda z} &= 0 & \iff & e^{\lambda z} \cdot (\lambda^2 - (2i)^2) = 0 \\ \iff e^{\lambda z} \cdot (\lambda - 2i) \cdot (\lambda + 2i) &= 0 & \iff & \lambda = 2i \text{ oder } \lambda = -2i. \end{aligned}$$

Nach der Euler'schen Formel gilt $e^{2iz} = \cos(2z) + i \cdot \sin(2z)$ für alle $z \in \mathbb{R}$.

Also gibt es ein $A \in \mathbb{R}$ und ein $B \in \mathbb{R}$ mit

$$f_H(z) = A \cdot \sin(2z) + B \cdot \cos(2z).$$

Für alle $z \in \mathbb{R}$ gilt

$$25z \cdot \sin(3z) = e^{0 \cdot z} \cdot (25z \cdot \sin(3 \cdot z) + 0 \cdot \cos(3 \cdot z)).$$

Da $0 + 3i$ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, empfiehlt sich für die partikuläre Lösung der Ansatz

$$\begin{aligned} f_P(z) &= z^0 \cdot e^{0 \cdot z} \cdot ((Cz + D) \cdot \sin(3 \cdot z) + (Ez + F) \cdot \cos(3 \cdot z)) \\ &= (Cz + D) \cdot \sin(3z) + (Ez + F) \cdot \cos(3z). \end{aligned}$$

Ableiten liefert $f'_P(z) = (-3Ez - 3F + C) \cdot \sin(3z) + (3Cz + 3D + E) \cdot \cos(3z)$ und $f''_P(z) = (-9Cz - 9D - 3E - 3E) \cdot \sin(3z) + (-9Ez - 9F + 3C + 3C) \cdot \cos(3z)$.

Eingesetzt in die inhomogene Differentialgleichung erhält man

$$\begin{aligned} 25z \cdot \sin(3z) &= (-9Cz - 9D - 6E + 4Cz + 4D) \cdot \sin(3z) + (-9Ez - 9F + 6C + 4Ez + 4F) \cdot \cos(3z) \\ &= (-5Cz - 5D - 6E) \cdot \sin(3z) + (-5Ez - 5F + 6C) \cdot \cos(3z). \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert also $-5C = 25$, $-5D - 6E = 0$, $-5E = 0$ und $-5F + 6C = 0$, bzw. $C = -5$, $E = 0$, $D = -\frac{5}{6} \cdot E = 0$ und $F = \frac{6}{5} \cdot C = -6$.

Damit ergibt sich die partikuläre Lösung zu $f_P(z) = -5z \cdot \sin(3z) - 6 \cdot \cos(3z)$ und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet

$$f(z) = A \cdot \sin(2z) + B \cdot \cos(2z) - 5z \cdot \sin(3z) - 6 \cdot \cos(3z).$$

Mit $f(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{9}{2}$, $f(0) = A \cdot \sin(0) + B \cdot \cos(0) - 0 \cdot \sin(0) - 6 \cdot \cos(0) = B - 6$ und $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + B \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \frac{5\pi}{3} \cdot \sin(\pi) - 6 \cdot \cos(\pi) = A \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + B \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{5\pi}{3} \cdot 0 - 6 \cdot (-1) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot A - \frac{1}{2} \cdot B + 6$ ergibt sich also $B - 6 = 0$ und $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot A - \frac{1}{2} \cdot B + 6 = \frac{9}{2}$. Es folgt $B = 6$ und $A = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{9}{2} - 6 + \frac{1}{2} \cdot B\right) = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot \frac{9 - 12 + 6}{2} = \sqrt{3}$ liefert. Insgesamt folgt

$$f(z) = \sqrt{3} \cdot \sin(2z) + 6 \cdot \cos(2z) - 5z \cdot \sin(3z) - 6 \cdot \cos(3z).$$

c) $v'''(t) - 3v''(t) + v'(t) - 3v(t) = (40t - 4) \cdot \sin(t)$

$$A \cdot e^{3t} - (t^2 + 4t + B) \cdot \sin(t) + (3t^2 + C) \cdot \cos(t)$$

Lösung:

Wir berechnen zunächst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung mit Hilfe des Ansatzes $v_H(t) = e^{\lambda t}$. Dann gilt $v'_H(t) = \lambda \cdot e^{\lambda t}$, $v''_H(t) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda t}$ und $v'''_H(t) = \lambda^3 \cdot e^{\lambda t}$. In den homogenen Teil der Differentialgleichung eingesetzt folgt

$$\lambda^3 \cdot e^{\lambda t} - 3 \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda t} + \lambda \cdot e^{\lambda t} - 3 \cdot e^{\lambda t} = 0 \iff e^{\lambda t} \cdot (\lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda - 3) = 0.$$

Es gilt $3^3 - 3 \cdot 3^2 + 3 - 3 = 3^3 - 3^3 + 0 = 0$.

Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda - 3 &= (\lambda - 3) \cdot (\lambda^2 + 1) = (\lambda - 3) \cdot (\lambda - i) \cdot (\lambda + i) . \\ \frac{-(\lambda^3 - 3\lambda^2)}{\lambda - 3} &= \frac{-(\lambda - 3)}{0} \end{aligned}$$

Nach der Euler'schen Formel gilt $e^{-it} = \cos(t) + i \cdot \sin(-t) = \cos(t) + i \cdot (-\sin(t))$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Also gibt es ein $A \in \mathbb{R}$, ein $B \in \mathbb{R}$ und ein $C \in \mathbb{R}$ mit

$$v_H(t) = A \cdot e^{3t} - B \cdot \sin(t) + C \cdot \cos(t) .$$

Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$(40t - 4) \cdot \sin(t) = e^{0 \cdot t} \cdot ((40t - 4) \cdot \sin(1 \cdot t) + 0 \cdot \cos(1 \cdot t)) .$$

Da $0 + 1i = i$ eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms sind, empfiehlt sich für die partikuläre Lösung der Ansatz

$$\begin{aligned} v_P(t) &= t^1 \cdot e^{0 \cdot t} \cdot ((Ct + D) \cdot \sin(1 \cdot t) + (Et + F) \cdot \cos(1 \cdot t)) \\ &= (Ct^2 + Dt) \cdot \sin(t) + (Et^2 + Ft) \cdot \cos(t) . \end{aligned}$$

Ableiten liefert

$$\begin{aligned} v'_P(t) &= (-Et^2 - Ft + 2Ct + D) \cdot \sin(t) + (Ct^2 + Dt + 2Et + F) \cdot \cos(t) , \\ v''_P(t) &= (-Ct^2 - Dt - 2Et - F - 2Et - F + 2C) \cdot \sin(t) \\ &\quad + (-Et^2 - Ft + 2Ct + D + 2Ct + D + 2E) \cdot \cos(t) \\ &= (-Ct^2 - Dt - 4Et - 2F + 2C) \cdot \sin(t) + (-Et^2 - Ft + 4Ct + 2D + 2E) \cdot \cos(t) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} v'''_P(t) &= (Et^2 + Ft - 4Ct - 2D - 2E - 2Ct - D - 4E) \cdot \sin(t) \\ &\quad + (-Ct^2 - Dt - 4Et - 2F + 2C - 2Et - F + 4C) \cdot \cos(t) \\ &= (Et^2 + Ft - 6Ct - 3D - 6E) \cdot \sin(t) + (-Ct^2 - Dt - 6Et - 3F + 6C) \cdot \cos(t) . \end{aligned}$$

Eingesetzt in die inhomogene Differentialgleichung erhält man

$$\begin{aligned} &(40t - 4) \cdot \sin(t) \\ &= (Et^2 + Ft - 6Ct - 3D - 6E) \cdot \sin(t) + (-Ct^2 - Dt - 6Et - 3F + 6C) \cdot \cos(t) \\ &\quad + (3Ct^2 + 3Dt + 12Et + 6F - 6C) \cdot \sin(t) + (3Et^2 + 3Ft - 12Ct - 6D - 6E) \cdot \cos(t) \\ &\quad + (-Et^2 - Ft + 2Ct + D) \cdot \sin(t) + (Ct^2 + Dt + 2Et + F) \cdot \cos(t) \\ &\quad + (-3Ct^2 - 3Dt) \cdot \sin(t) + (-3Et^2 - 3Ft) \cdot \cos(t) \\ &= ((-4C + 12E) \cdot t + (-6C - 2D - 6E + 6F)) \cdot \sin(t) \\ &\quad + ((-12C - 4E) \cdot t + (6C - 6D - 6E - 2F)) \cdot \cos(t) . \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert also das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{cccc|c} -4 & 0 & 12 & 0 & 40 \\ -6 & -2 & -6 & 6 & -4 \\ -12 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 6 & -6 & -6 & -2 & 0 \end{array} \right) \parallel \begin{array}{l} + \\ + \\ + \\ + \end{array} \cdot 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \\
 \Leftrightarrow & \left(\begin{array}{cccc|c} -40 & 0 & 0 & 0 & 40 \\ 12 & -2 & 0 & 6 & -4 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 24 & -6 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \parallel \begin{array}{l} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{40} \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{1}{40}\right) \\ + \\ + \\ + \end{array} \\
 \Leftrightarrow & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & 0 & -2 & 24 \end{array} \right) \parallel \begin{array}{l} \cdot (-3) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ + \\ + \\ + \end{array} \\
 \Leftrightarrow & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & 0 \end{array} \right) \parallel \begin{array}{l} + \\ + \\ + \\ \cdot \left(-\frac{3}{20}\right) \cdot \left(-\frac{1}{20}\right) \end{array} \\
 \Leftrightarrow & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Also ist $(C, D, E, F)^T = (-1, -4, 3, 0)^T$. Damit ergibt sich die partikuläre Lösung zu $v_P(t) = (-t^2 - 4t) \cdot \sin(t) + 3t^2 \cdot \cos(t)$ und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet

$$\begin{aligned}
 v(t) &= A \cdot e^{3t} - B \cdot \sin(t) + C \cdot \cos(t) + (-t^2 - 4t) \cdot \sin(t) + 3t^2 \cdot \cos(t) \\
 &= A \cdot e^{3t} - (t^2 + 4t + B) \cdot \sin(t) + (3t^2 + C) \cdot \cos(t).
 \end{aligned}$$

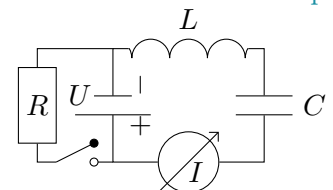


DGL/NteOrdInhom/Ag_DGLOnInhom_VdKAvTdrSLCKreisMitU.tex

Aufgabe 15.120 (Spannungsabfall im LC -Kreis)

Eine Spule und ein Kondensator werden in Reihe an eine (als widerstandsfrei angenommene) Batterie angeschlossen. Aus den Einzelspannungen an Spule ($L \cdot \dot{I}$) und Kondensator ($\frac{Q}{C}$) ergibt sich die Differentialgleichung

$$\dot{U}(t) = L \cdot \ddot{I}(t) + \frac{1}{C} \cdot I(t).$$



- a) Zu Beginn der Messung ist die Batterie voll im Saft und liefert eine konstante Spannung. Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an!

$$A \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{LC}}{LC} \cdot t\right) + B \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{LC}}{LC} \cdot t\right)$$

Lösung:

Da die Spannung U konstant ist, gilt $\dot{U} = 0$ und die Differentialgleichung ist homogen. Es handelt sich um eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, was den Ansatz $I_{H,\lambda}(t) = e^{\lambda t}$ nahelegt. Dann folgt $\dot{I}_{H,\lambda}(t) = \lambda \cdot e^{\lambda t}$ und $\ddot{I}_{H,\lambda}(t) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda t}$.

Mit $\dot{U}(t) = 0$ folgt aus der Differentialgleichung

$$0 = (L\lambda^2 + \frac{1}{C}) \cdot e^{\lambda t} = L \cdot \left(\lambda - \frac{i}{\sqrt{LC}}\right) \cdot \left(\lambda + \frac{i}{\sqrt{LC}}\right) \cdot e^{\lambda t}.$$

Mit $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ergibt sich als allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$I_H(t) = \alpha e^{i\omega t} + \beta e^{-i\omega t} = A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t).$$

- b) Nach einiger Zeit wird ein Widerstand parallel zum bisherigen Kreis an die Batterie angeschlossen. Dadurch nimmt die Leistungsfähigkeit der Batterie ab und die Spannung fällt jetzt exponentiell mit der Zeit (präzise: $U(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{T_0}}$, wobei $T_0 \in \mathbb{R}$ mit $T_0 > 0$ von R abhängt).

Berechnen Sie die Lösung der jetzt inhomogenen Differentialgleichung mittels Variation der Konstanten!

$$A \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{LC}}{LC} \cdot t\right) + B \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{LC}}{LC} \cdot t\right) - \frac{U_0 CT_0}{LC + T_0^2} \cdot e^{-\frac{t}{T_0}}$$

Lösung:

Jetzt gilt $\dot{U}(t) = -\frac{U_0}{T_0} \cdot e^{-\frac{t}{T_0}}$. Der Ansatz $I_P(t) = D(t) \cdot e^{i\omega t} + E(t) \cdot e^{-i\omega t}$ liefert $\dot{I}_P(t) = \dot{D}(t) \cdot e^{i\omega t} + \dot{E}(t) \cdot e^{-i\omega t} + D(t) \cdot i\omega e^{i\omega t} - E(t) \cdot i\omega e^{-i\omega t}$. Nehmen wir $\dot{D}(t) \cdot e^{i\omega t} + \dot{E}(t) \cdot e^{-i\omega t} = 0$ an, so folgt $\ddot{I}_P(t) = \dot{D}(t) \cdot i\omega e^{i\omega t} - \dot{E}(t) \cdot i\omega e^{-i\omega t} - D(t) \cdot \omega^2 e^{i\omega t} - E(t) \cdot \omega^2 e^{-i\omega t}$.

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} -\frac{U_0}{T_0} \cdot e^{-\frac{t}{T_0}} &= L \cdot \left(\dot{D}(t) \cdot i\omega e^{i\omega t} - \dot{E}(t) \cdot i\omega e^{-i\omega t} - D(t) \cdot \frac{1}{LC} \cdot e^{i\omega t} - E(t) \cdot \frac{1}{LC} \cdot e^{-i\omega t} \right) \\ &\quad + \frac{1}{C} \cdot (D(t) \cdot e^{i\omega t} + E(t) \cdot e^{-i\omega t}) \\ &= \dot{D}(t) \cdot i\omega L e^{i\omega t} - \dot{E}(t) \cdot i\omega L e^{-i\omega t}. \end{aligned}$$

Zusammen mit der Bedingung $\dot{D}(t) \cdot e^{i\omega t} + \dot{E}(t) \cdot e^{-i\omega t} = 0$ ergibt sich für $\dot{D}(t)$ und $\dot{E}(t)$ das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{cc|c} i\omega L e^{i\omega t} & -i\omega L e^{-i\omega t} & -\frac{U_0}{T_0} \cdot e^{-\frac{t}{T_0}} \\ e^{i\omega t} & e^{-i\omega t} & 0 \end{array} \right) \parallel + \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2i\omega L e^{i\omega t} & 0 & -\frac{U_0}{T_0} \cdot e^{-\frac{t}{T_0}} \\ e^{2i\omega t} & 1 & 0 \end{array} \right) \parallel \cdot \frac{i e^{i\omega t}}{2\omega L} \quad \cdot \frac{-i}{2\omega L e^{i\omega t}} \quad \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{U_0 i}{2\omega L T_0} \cdot e^{-\frac{t}{T_0} - i\omega t} \\ 0 & 1 & \frac{-U_0 i}{2\omega L T_0} \cdot e^{-\frac{t}{T_0} + i\omega t} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} I_P(t) &= e^{i\omega t} \cdot \int \dot{D}(t) dt + e^{-i\omega t} \cdot \int \dot{E}(t) dt \\ &= e^{i\omega t} \cdot \int \frac{U_0 i}{2\omega L T_0} \cdot e^{(-\frac{1}{T_0} - i\omega) \cdot t} dt + e^{-i\omega t} \cdot \int \frac{-U_0 i}{2\omega L T_0} \cdot e^{(-\frac{1}{T_0} + i\omega) \cdot t} dt \\ &= e^{i\omega t} \cdot \frac{U_0 i}{2\omega L T_0} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{T_0} - i\omega} \cdot e^{-\frac{t}{T_0} - i\omega t} + e^{-i\omega t} \cdot \frac{-U_0 i}{2\omega L T_0} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{T_0} + i\omega} \cdot e^{-\frac{t}{T_0} + i\omega t} \\ &= \frac{iU_0}{2\omega L T_0} \cdot \frac{T_0 \cdot (-1 + i\omega T_0)}{1 + \omega^2 T_0^2} \cdot e^{-\frac{t}{T_0}} + \frac{-iU_0}{2\omega L T_0} \cdot \frac{T_0 \cdot (-1 - i\omega T_0)}{1 + \omega^2 T_0^2} \cdot e^{-\frac{t}{T_0}} \\ &= \left(\frac{-U_0 \omega T_0 - i \cdot U_0}{2\omega L \cdot (1 + \omega^2 T_0^2)} + \frac{-U_0 \omega T_0 + i \cdot U_0}{2\omega L \cdot (1 + \omega^2 T_0^2)} \right) \cdot e^{-\frac{t}{T_0}} \\ &= -\frac{U_0 T_0}{L \cdot \left(1 + \frac{T_0^2}{LC}\right)} \cdot e^{-\frac{t}{T_0}} = -\frac{U_0 C T_0}{LC + T_0^2} \cdot e^{-\frac{t}{T_0}}. \end{aligned}$$

Als allgemeine Lösung ergibt sich also

$$I(t) = A \cos\left(\frac{\sqrt{LC}}{LC} \cdot t\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{LC}}{LC} \cdot t\right) - \frac{U_0 C T_0}{LC + T_0^2} \cdot e^{-\frac{t}{T_0}}.$$

- c) Überprüfen Sie Ihre Lösung aus Aufgabenteil b) mit Hilfe eines Ansatzes vom Typ der rechten Seite!

(Bemerkung: Der Ansatz vom Typ der rechten Seite funktioniert hier neben der Variation der Konstanten auch, weil die Differentialgleichung konstante Koeffizienten hat.)

Lösung:

Die rechte Seite $-\frac{U_0}{T_0} \cdot e^{-\frac{t}{T_0}}$ erzeugt keinen Resonanzfall, da die Nullstellen des charakteristischen Polynoms rein imaginär sind. Also ist der Ansatz $I_P(t) = d \cdot e^{-\frac{t}{T_0}}$ erfolgsversprechend. Er liefert $\dot{I}_P(t) = -\frac{d}{T_0} \cdot e^{-\frac{t}{T_0}}$ und $\ddot{I}_P(t) = \frac{d}{T_0^2} \cdot e^{-\frac{t}{T_0}}$.

Eingesetzt in die Differentialgleichung folgt

$$-\frac{U_0}{T_0} \cdot e^{-\frac{t}{T_0}} = d \cdot \frac{L}{T_0^2} \cdot e^{-\frac{t}{T_0}} + \frac{d}{C} \cdot e^{-\frac{t}{T_0}} = d \cdot \left(\frac{L}{T_0^2} + \frac{1}{C} \right) \cdot e^{-\frac{t}{T_0}} = d \cdot \frac{LC + T_0^2}{CT_0^2} \cdot e^{-\frac{t}{T_0}}.$$

Teilen durch $e^{-\frac{t}{T_0}}$ liefert $-\frac{U_0}{T_0} = d \cdot \frac{LC + T_0^2}{CT_0^2}$, also $d = -\frac{U_0 CT_0}{LC + T_0^2}$.

Als allgemeine Lösung ergibt sich wie in Aufgabenteil b)

$$I(t) = A \cos\left(\frac{\sqrt{LC}}{LC} \cdot t\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{LC}}{LC} \cdot t\right) - \frac{U_0 CT_0}{LC + T_0^2} \cdot e^{-\frac{t}{T_0}}.$$



DGL/NteOrdInhom/Ag_DGLOnInhom_VdKEulerRedDerOrdEuler.tex

Aufgabe 15.121 (Variation der Konstanten)

spf

Geben Sie zu den folgenden Differentialgleichungen die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung an! Bestimmen Sie danach eine partikuläre Lösung mittels Variation der Konstanten!

a) $x^2 \cdot y''(x) + 2x \cdot y'(x) - 6y(x) = 5x^2 + 30$

$$y(x) = Cx^2 + Bx^{-3} + x^2 \cdot \ln(x) - 5$$

Lösung:

Die Euler'sche Differentialgleichung lässt sich im homogenen Teil mit dem Ansatz $y_{H,\lambda}(x) = x^\lambda$ lösen. Es folgt $y'_{H,\lambda}(x) = \lambda \cdot x^{\lambda-1}$ und $y''_{H,\lambda}(x) = \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot x^{\lambda-2}$. Eingesetzt in die homogene Differentialgleichung folgt

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 \cdot (\lambda^2 - \lambda) \cdot x^{\lambda-2} + 2x \cdot \lambda \cdot x^{\lambda-1} - 6x^\lambda = (\lambda^2 + \lambda - 6) \cdot x^\lambda \\ &= \left(\lambda^2 + 2 \cdot \lambda \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 6 \right) \cdot x^\lambda = \left(\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} \right) \cdot x^\lambda \\ &= \left(\lambda + \frac{1}{2} - \frac{5}{2} \right) \cdot \left(\lambda + \frac{1}{2} + \frac{5}{2} \right) \cdot x^\lambda = (\lambda - 2) \cdot (\lambda + 3) \cdot x^\lambda \end{aligned}$$

Also sind 2 und -3 die jeweils einfachen Nullstellen des charakteristischen Polynoms, was die folgende allgemeine homogene Lösung liefert

$$y_H(x) = Ax^2 + Bx^{-3}.$$

Variation der Konstanten liefert den Ansatz $y_P(x) = D(x) \cdot x^2 + E(x) \cdot x^{-3}$. Damit folgt $y'_P(x) = D'(x) \cdot x^2 + E'(x) \cdot x^{-3} + 2D(x) \cdot x - 3E(x) \cdot x^{-4}$. Die Forderung $D'(x) \cdot x^2 + E'(x) \cdot x^{-3} = 0$ führt zu $y''_P(x) = 2D'(x) \cdot x - 3E'(x) \cdot x^{-4} + 2D(x) + 12E(x) \cdot x^{-5}$.

Setzt man y_P in die Differentialgleichung ein, erhält man

$$\begin{aligned} 5x^2 + 30 &= x^2 \cdot y''_P(x) + 2x \cdot y'_P(x) - 6y_P(x) \\ &= x^2 \cdot (2D'(x) \cdot x - 3E'(x) \cdot x^{-4} + 2D(x) + 12E(x) \cdot x^{-5}) \\ &\quad + 2x \cdot (2D(x) \cdot x - 3E(x) \cdot x^{-4}) - 6 \cdot (D(x) \cdot x^2 + E(x) \cdot x^{-3}) \\ &= (2D'(x) \cdot x^3 - 3E'(x) \cdot x^{-2}) + D(x) \cdot x^2 \cdot (2 + 4 - 6) + E(x) \cdot x^{-3} \cdot (12 - 6 - 6) \\ &= D'(x) \cdot 2x^3 - E'(x) \cdot 3x^{-2}. \end{aligned}$$

Zusammen mit der Bedingung $D'(x) \cdot x^2 + E'(x) \cdot x^{-3} = 0$ ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2x^3 & -3x^{-2} & 5x^2 + 30 \\ x^2 & x^{-3} & 0 \end{array} \right) \parallel \cdot \begin{array}{c} + \\ 3x \\ \cdot x^3 \end{array} \quad \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 5x^3 & 0 & 5x^2 + 30 \\ x^5 & 1 & 0 \end{array} \right) \parallel \cdot \begin{array}{c} \frac{-x^2}{5} \\ + \\ \frac{1}{5x^3} \end{array} \\ \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{x} + \frac{6}{x^3} \\ 0 & 1 & -x^4 - 6x^2 \end{array} \right)$$

Also gilt

$$\begin{aligned} y_P(x) &= x^2 \cdot \int D'(x) dx + x^{-3} \cdot \int E'(x) dx \\ &= x^2 \cdot \int \left(\frac{1}{x} + \frac{6}{x^3} \right) dx + x^{-3} \int (-x^4 - 6x^2) dx \\ &= x^2 \cdot \left(\ln(x) - \frac{3}{x^2} \right) + x^{-3} \cdot \left(-\frac{1}{5} \cdot x^5 - 2x^3 \right) = x^2 \cdot \ln(x) - 3 - \frac{1}{5} \cdot x^2 - 2 \\ &= x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{5} \cdot x^2 - 5. \end{aligned}$$

Als allgemeine Lösung $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$ der Differentialgleichung ergibt sich

$$y(x) = Ax^2 + Bx^{-3} + x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{5} \cdot x^2 - 5 = Cx^2 + Bx^{-3} + x^2 \cdot \ln(x) - 5.$$

b) $(x^2 - x) \cdot f''(x) + (-2x^2 + 1) \cdot f'(x) + (4x - 2) \cdot f(x) = (x^2 - x)^2 \cdot e^x$

Tipp: e^{2x} ist eine Fundamentallösung der homogenen Gleichung. Bestimmen Sie eine von e^{2x} linear unabhängige Lösung der homogenen Gleichung durch Reduktion der Ordnung!

$$f(x) = Ae^{2x} + Bx^2 - e^x \cdot (x^2 + x + 1)$$

Lösung:

Es gilt

$$(x^2 - x) \cdot (e^{2x})'' + (-2x^2 + 1) \cdot (e^{2x})' + (4x - 2) \cdot e^{2x} = (4x^2 - 4x - 4x^2 + 2 + 4x - 2) \cdot e^{2x} = 0.$$

Also ist $f_{H,1}(x) = e^{2x}$ eine Fundamentallösung des homogenen Teils der Differentialgleichung. Wir setzen $f_{H,2}(x) = C(x) \cdot e^{2x}$ für die zweite Fundamentallösung an.

Dann ergibt sich $f'_{H,2}(x) = (C'(x) + 2C(x)) \cdot e^{2x}$ und $f''_{H,2}(x) = (C''(x) + 4C'(x) + 4C(x)) \cdot e^{2x}$.

In den homogenen Teil der Differentialgleichung eingesetzt folgt

$$\begin{aligned} 0 &= (x^2 - x) \cdot f''_{H,2}(x) + (-2x^2 + 1) \cdot f'_{H,2}(x) + (4x - 2) \cdot f_{H,2}(x) \\ &= (x^2 - x) \cdot (C''(x) \cdot e^{2x} + 4C'(x) \cdot e^{2x} + 4C(x) \cdot e^{2x}) \\ &\quad + (-2x^2 + 1) \cdot (C'(x) \cdot e^{2x} + 2C(x) \cdot e^{2x}) + (4x - 2) \cdot C(x) \cdot e^{2x} \\ &= C''(x) \cdot (x^2 - x) \cdot e^{2x} + C'(x) \cdot (4x^2 - 4x - 2x^2 + 1) \cdot e^{2x} \\ &\quad + C(x) \cdot (4x^2 - 4x - 4x^2 + 2 + 4x - 2) \cdot e^{2x} \\ \iff \quad \frac{C''(x)}{C'(x)} &= \frac{-2x^2 + 4x - 1}{x^2 - x}. \end{aligned}$$

Mit $\frac{-2x^2 + 4x - 1}{x^2 - x} = \frac{-2x^2 + 2x + 2x - 1}{x^2 - x} = -2 + \frac{2x - 1}{x^2 - x} = -2 + \frac{(x^2 - x)'}{x^2 - x}$ folgt

$$\ln(C'(x)) = -2x + \ln(x^2 - x) \quad \text{bzw.} \quad C'(x) = e^{-2x} \cdot (x^2 - x).$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
f_{H,2}(x) &= e^{2x} \cdot \int \underbrace{e^{-2x}}_{=u'(x)} \cdot \underbrace{(x^2 - x)}_{=v(x)} dx = e^{2x} \cdot \underbrace{\frac{e^{-2x}}{-2}}_{=u(x)} \cdot \underbrace{(x^2 - x)}_{=v(x)} - e^{2x} \cdot \int \underbrace{\frac{e^{-2x}}{-2}}_{=u(x)} \cdot \underbrace{(2x - 1)}_{=v'(x)} dx \\
&= \frac{x^2 - x}{-2} + e^{2x} \cdot \int \underbrace{e^{-2x}}_{=u'(x)} \cdot \underbrace{\left(x - \frac{1}{2}\right)}_{=w(x)} dx \\
&= \frac{x^2 - x}{-2} + e^{2x} \cdot \underbrace{\frac{e^{-2x}}{-2}}_{=u(x)} \cdot \underbrace{\left(x - \frac{1}{2}\right)}_{=w(x)} - e^{2x} \cdot \int \underbrace{\frac{e^{-2x}}{-2}}_{=u(x)} \cdot \underbrace{1}_{=w'(x)} dx \\
&= \frac{x^2 - x + x - \frac{1}{2}}{-2} + e^{2x} \cdot \int \frac{e^{-2x}}{2} dx = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4} + e^{2x} \cdot \frac{e^{-2x}}{-4} = -\frac{x^2}{2}.
\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung $f_H(x) = A \cdot f_{H,1}(x) - 2B \cdot f_{H,2}(x)$ der homogenen Gleichung ist damit

$$f_H(x) = Ae^{2x} + Bx^2.$$

Als Ansatz für die partikuläre Lösung wählen wir also $f_P(x) = D(x) \cdot e^{2x} + E(x) \cdot x^2$.

Dann folgt

$$f'_P(x) = D'(x) \cdot e^{2x} + E'(x) \cdot x^2 + 2D(x) \cdot e^{2x} + 2xE(x)$$

und

$$f''_P(x) = 2D'(x) \cdot e^{2x} + 2xE'(x) + 4D(x) \cdot e^{2x} + 2E(x),$$

wenn man $D'(x) \cdot e^{2x} + E'(x) \cdot x^2 = 0$ fordert.

Eingesetzt in die Differentialgleichung liefert das

$$\begin{aligned}
(x^2 - x)^2 \cdot e^x &= (x^2 - x) \cdot f''_P(x) + (-2x^2 + 1) \cdot f'_P(x) + (4x - 2) \cdot f_P(x) \\
&= (x^2 - x) \cdot (2D'(x) \cdot e^{2x} + 2xE'(x) + 4D(x) \cdot e^{2x} + 2E(x)) \\
&\quad + (-2x^2 + 1) \cdot (2D(x) \cdot e^{2x} + 2xE(x)) + (4x - 2) \cdot (D(x) \cdot e^{2x} + E(x) \cdot x^2) \\
&= D'(x) \cdot (2x^2 - 2x) \cdot e^{2x} + E'(x) \cdot (2x^3 - 2x^2) \\
&\quad + D(x) \cdot (4x^2 - 4x - 4x^2 + 2 + 4x - 2) \cdot e^{2x} \\
&\quad + E(x) \cdot (2x^2 - 2x - 4x^3 + 2x + 4x^3 - 2x^2) \\
&= D'(x) \cdot (2x^2 - 2x) \cdot e^{2x} + E'(x) \cdot (2x^3 - 2x^2).
\end{aligned}$$

Zusammen mit $D'(x) \cdot e^{2x} + E'(x) \cdot x^2 = 0$ ergibt sich für $D'(x)$ und $E'(x)$ das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{cc|c} (2x^2 - 2x) \cdot e^{2x} & 2x^3 - 2x^2 & (x^2 - x)^2 \cdot e^x \\ e^{2x} & x^2 & 0 \end{array} \right) \left\| \begin{array}{c} + \\ \cdot (-2x + 2) \end{array} \right. \cdot x^{-2} \\
\rightsquigarrow &\left(\begin{array}{cc|c} (2x^2 - 4x + 2) \cdot e^{2x} & 0 & (x^2 - x)^2 \cdot e^x \\ x^{-2} \cdot e^{2x} & 1 & 0 \end{array} \right) \left\| \begin{array}{c} \cdot \frac{-1}{2x^2 \cdot (x-1)^2} \\ + \end{array} \right. \cdot \frac{e^{-2x}}{2 \cdot (x-1)^2} \\
\rightsquigarrow &\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot e^{-x} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \cdot e^x \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung ist also

$$\begin{aligned}
 f_P(x) &= e^{2x} \cdot \int D'(x) dx + x^2 \cdot \int E'(x) dx = e^{2x} \cdot \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{=u(x)} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{=v'(x)} dx + x^2 \cdot \int \left(-\frac{1}{2} \cdot e^x\right) dx \\
 &= e^{2x} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{=u(x)} \cdot \underbrace{(-e^{-x})}_{=v(x)} - e^{2x} \cdot \int \underbrace{x}_{=u'(x)} \cdot \underbrace{(-e^{-x})}_{=v(x)} dx + x^2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot e^x\right) \\
 &= -\frac{x^2}{2} \cdot e^x + e^{2x} \cdot \int \underbrace{x}_{=w(x)} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{=v'(x)} dx - \frac{x^2}{2} \cdot e^x \\
 &= -x^2 \cdot e^x + e^{2x} \cdot \underbrace{x}_{=w(x)} \cdot \underbrace{(-e^{-x})}_{=v(x)} - e^{2x} \cdot \int \underbrace{1}_{=w'(x)} \cdot \underbrace{(-e^{-x})}_{=v(x)} dx = -xe^x + 2e^{2x} \cdot \int e^{-x} dx \\
 &= -x^2 \cdot e^x - xe^x + 2e^{2x} \cdot (-e^{-x}) = -e^x \cdot (x^2 + x + 1)
 \end{aligned}$$

Als allgemeine Lösung $f(x) = f_H(x) + f_P(x)$ der Differentialgleichung ergibt sich

$$f(x) = Ae^{2x} + Bx^2 - e^x \cdot (x^2 + x + 1).$$

c) $x^3 \cdot g'''(x) - x^2 \cdot g''(x) + 2x \cdot g'(x) - 2g(x) = x^6 + x^2$

$$g(x) = x \cdot (B \cdot \ln(x) + A) + x^2 \cdot (\ln(x) + C - 2) + \frac{1}{100} \cdot x^6$$

Lösung:

Die Euler'sche Differentialgleichung impliziert zum Auffinden der homogenen Lösung den Ansatz $g_{H,\lambda}(x) = x^\lambda$. Damit folgt $g'_{H,\lambda}(x) = \lambda x^{\lambda-1}$, $g''_{H,\lambda}(x) = \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot x^{\lambda-2} = (\lambda^2 - \lambda) \cdot x^{\lambda-2}$ und $g'''_{H,\lambda}(x) = \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 2) \cdot x^{\lambda-3} = (\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda) \cdot x^{\lambda-3}$.

Setzt man dies in den homogenen Teil der Differentialgleichung ein, so erhält man

$$0 = x^3 \cdot (\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda) \cdot x^{\lambda-3} - x^2 \cdot (\lambda^2 - \lambda) \cdot x^{\lambda-2} + 2x \cdot \lambda x^{\lambda-1} - 2x^\lambda = x^\lambda \cdot (\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2).$$

$$\text{Es gilt } 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 2 = 1 - 4 + 5 - 2 = 0.$$

Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned}
 \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 &= (\lambda - 1) \cdot (\lambda^2 - 3\lambda + 2) \\
 \frac{-(\lambda^3 - \lambda^2)}{-3\lambda^2 + 5\lambda - 2} &= (\lambda - 1) \cdot \left(\lambda^2 - 2 \cdot \lambda \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2\right) \\
 &= (\lambda - 1) \cdot \left(\left(\lambda - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) \\
 \frac{-(-3\lambda^2 + 3\lambda)}{2\lambda - 2} &= (\lambda - 1) \cdot \left(\lambda - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\lambda - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) \\
 &= (\lambda - 1)^2 \cdot (\lambda - 2). \\
 \frac{-(2\lambda - 2)}{0} &
 \end{aligned}$$

Da 1 eine doppelte und 2 eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, erhalten wir die allgemeine Lösung des homogenen Teils der Differentialgleichung

$$g_H(x) = Ax + Bx \cdot \ln(x) + Cx^2.$$

Für die partielle Lösung ergibt sich der Ansatz $g_P(x) = D(x) \cdot x + E(x) \cdot x \cdot \ln(x) + F(x) \cdot x^2$.

Es folgt $g'_P(x) = D'(x) \cdot x + E'(x) \cdot x \cdot \ln(x) + F'(x) \cdot x^2 + D(x) + E(x) \cdot \ln(x) + E(x) + 2x \cdot F(x)$.

Die Forderung $D'(x) \cdot x + E'(x) \cdot x \cdot \ln(x) + F'(x) \cdot x^2 = 0$ liefert $g_P''(x) = D'(x) + E'(x) \cdot \ln(x) + E'(x) + 2x \cdot F'(x) + E(x) \cdot \frac{1}{x} + 2F(x)$. Fordern wir wieder $D'(x) + E'(x) \cdot \ln(x) + E'(x) + 2x \cdot F'(x) = 0$, so bleibt $g_P'''(x) = E'(x) \cdot \frac{1}{x} - E(x) \cdot \frac{1}{x^2} + 2F'(x)$.

Die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} x^6 + x^2 &= x^3 \cdot g_P'''(x) - x^2 \cdot g_P''(x) + 2x \cdot g_P'(x) - 2g_P(x) \\ &= x^3 \cdot \left(E'(x) \cdot \frac{1}{x} - E(x) \cdot \frac{1}{x^2} + 2F'(x) \right) - x^2 \cdot (E(x) \cdot \frac{1}{x} + 2F(x)) \\ &\quad + 2x \cdot (D(x) + E(x) \cdot \ln(x) + E(x) + 2x \cdot F(x)) \\ &\quad - 2 \cdot (D(x) \cdot x + E(x) \cdot x \cdot \ln(x) + F(x) \cdot x^2) \\ &= x^2 \cdot E'(x) + 2x^3 \cdot F'(x) + D(x) \cdot (2x - 2x) \\ &\quad + E(x) \cdot (-x - x + 2x \cdot \ln(x) + 2x - 2x \cdot \ln(x)) + F(x) \cdot (-2x^2 + 4x^2 - 2x^2) \\ &= x^2 \cdot E'(x) + 2x^3 \cdot F'(x). \end{aligned}$$

Mit $D'(x) \cdot x + E'(x) \cdot x \cdot \ln(x) + F'(x) \cdot x^2 = 0$ und $D'(x) + E'(x) \cdot \ln(x) + E'(x) + 2x \cdot F'(x) = 0$ ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & x^2 & 2x^3 & x^6 + x^2 \\ 1 & \ln(x) + 1 & 2x & 0 \\ x & x \cdot \ln(x) & x^2 & 0 \end{array} \right) \parallel \begin{array}{l} \cdot \frac{1}{x^2} \\ + \\ \cdot \frac{-1}{x} \end{array} \cdot \frac{1}{x} \quad \uparrow \uparrow \\ \Leftrightarrow &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \ln(x) & x & 0 \\ 0 & 1 & 2x & x^4 + 1 \\ 0 & 1 & x & 0 \end{array} \right) \parallel \begin{array}{l} + \\ \cdot (-\ln(x)) \end{array} \cdot (-1) \quad \uparrow \\ \Leftrightarrow &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & x - \ln(x) \cdot x & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & x & x^4 + 1 \end{array} \right) \parallel \begin{array}{l} + \\ \cdot (\ln(x) - 1) \end{array} \cdot (-1) \quad \cdot \frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & (x^4 + 1) \cdot (\ln(x) - 1) \\ 0 & 1 & 0 & -x^4 - 1 \\ 0 & 0 & 1 & x^3 + \frac{1}{x} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$\begin{aligned} g_P(x) &= x \cdot \int D'(x) dx + x \cdot \ln(x) \cdot \int E'(x) dx + x^2 \cdot \int F'(x) dx \\ &= x \cdot \int \underbrace{(x^4 + 1)}_{=u'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{=v(x)} dx + x \cdot \int (-x^4 - 1) dx \\ &\quad + x \cdot \ln(x) \cdot \int (-x^4 - 1) dx + x^2 \cdot \int \left(x^3 + \frac{1}{x} \right) dx \\ &= x \cdot \underbrace{\left(\frac{x^5}{5} + x \right)}_{=u(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{=v(x)} - x \cdot \int \underbrace{\left(\frac{x^5}{5} + x \right)}_{=u(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{=v'(x)} dx + x \cdot \left(-\frac{x^5}{5} - x \right) \\ &\quad + x \cdot \ln(x) \cdot \left(-\frac{x^5}{5} - x \right) + x^2 \cdot \left(\frac{x^4}{4} + \ln(x) \right) \\ &= x^2 \cdot \ln(x) + \frac{x^6}{4} - \frac{x^6}{5} - x^2 - x \cdot \int \left(\frac{x^4}{5} + 1 \right) dx \\ &= x^2 \cdot \ln(x) + \frac{x^6}{20} - x^2 - x \cdot \left(\frac{x^5}{25} + x \right) \\ &= x^2 \cdot \ln(x) + \frac{1}{100} \cdot x^6 - 2x^2. \end{aligned}$$

Die Lösung $g(x) = g_H(x) + g_P(x)$ der Differentialgleichung ergibt sich also zu

$$g(x) = x \cdot (B \cdot \ln(x) + A) + x^2 \cdot (\ln(x) + C - 2) + \frac{1}{100} \cdot x^6.$$



DGL/PartDGL/Ag_LineareTransportgleichung.tex

Aufgabe 16.122 (Lineare Transportgleichung)

kr

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung. Es gelte $t, x, y, u \in \mathbb{R}$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 4 \frac{\partial u}{\partial x} = \cos(t), \quad u(x, 0) = \sin^2(x)$$

$$\sin^2(x - 4t) + \sin(t)$$

Lösung: Allgemein gilt für diese Art von Randbedingung für eine solche Transportgleichung, dass die Lösung gegeben ist durch $u(x, t) = f(x - vt) + \int_0^t g(x - v(t - s), s) ds$. Hier lesen wir aus der Aufgabenstellung ab, dass $v = 4$, $f(x) = \sin^2(x)$, $g(x, t) = \cos(t)$ gilt. Damit ergibt sich $u(x, t) = \sin^2(x - 4t) + \int_0^t \cos(s) ds = \sin^2(x - 4t) + \sin(t)$.



DGL/PartDGL/Ag_LineareTransportgleichungen.tex

Aufgabe 16.123 (Lineare Transportgleichungen)

kr

Bestimmen Sie jeweils die Lösung der Differentialgleichung. Es gelte $t, x, y, s \in \mathbb{R}$.

a) $\frac{\partial u}{\partial t} - 5 \frac{\partial u}{\partial x} = e^{-2t}$, $u(x, 0) = x^4$

$$(x + 5t)^4 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}$$

Lösung: Allgemein gilt für diese Art von Randbedingung für eine solche Transportgleichung, dass die Lösung gegeben ist durch $u(x, t) = f(x - vt) + \int_0^t g(x - v(t - s), s) ds$. Hier lesen wir aus der Aufgabenstellung ab, dass $v = -5$, $f(x) = x^4$, $g(x, t) = e^{-2t}$ gilt. Damit ergibt sich $u(x, t) = (x - (-5)t)^4 + \int_0^t e^{-2s} ds = (x + 5t)^4 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}$.

b) $\frac{\partial u}{\partial t} + 4 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $u(s, 2s) = 1 + s^2$

$$u(x, t) = 1 + \left(\frac{x-4t}{7}\right)^2$$

Lösung: Allgemein gilt für eine solche homogene Transportgleichung, dass die Lösung gegeben ist durch $u(x, t) = h(x - vt)$ mit einer noch aus der Anfangsbedingung zu bestimmenden Funktion h . Hier lesen wir aus der Aufgabenstellung ab, dass $v = 4$ gilt, also hat die Lösung die Form $u(x, t) = h(x - 4t)$. Aus der Anfangsbedingung ergibt sich $u(s, 2s) = 1 + s^2 \Leftrightarrow h(s - 4 \cdot 2s) = 1 + s^2 \Leftrightarrow h(-7s) = 1 + s^2$. Definieren wir $r = -7s$ (und somit $s = -\frac{1}{7}r$), so ergibt sich $h(r) = 1 + (-\frac{1}{7}r)^2 = 1 + (\frac{1}{7}r)^2$ und wir haben somit die Funktionsvorschrift von h gefunden. Also ergibt sich $u(x, t) = h(x - 4t) = 1 + \left(\frac{x-4t}{7}\right)^2$.

c) $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $u(x, y, 0) = x^2 \cdot \sin(y^2)$

$$u(x, y, t) = (x + t)^2 \cdot \sin((y - 2t)^2)$$

Lösung: Allgemein gilt für diese Art von Randbedingung für eine solche homogene vektorielle Transportgleichung, dass die Lösung gegeben ist durch $u(x, t) = f(\vec{x} - \vec{v}t)$. Hier lesen wir aus der Aufgabenstellung ab, dass $\vec{x} = (x \ y)^T$, $\vec{v} = (-1 \ 2)^T$ und $f(\vec{x}) = x^2 \cdot \sin(y^2)$ gilt. Also ist die Lösung $u(x, y, t) = f(\vec{x} - \vec{v}t) = f(x - (-1)t, y - 2t) = (x + t)^2 \cdot \sin((y - 2t)^2)$.

d) $\frac{\partial u}{\partial t} + 7 \frac{\partial u}{\partial x} = xe^{-t}$, $u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}$

$$u(x, t) = \frac{1}{1+(x-7t)^2} + (x+7)(1-e^{-t}) - 7t$$

Lösung: Allgemein gilt für diese Art von Randbedingung für eine solche Transportgleichung, dass die Lösung gegeben ist durch $u(x, t) = f(x - vt) + \int_0^t g(x - v(t - s), s) ds$. Hier lesen wir aus der Aufgabenstellung ab, dass $v = 7$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $g(x, t) = xe^{-t}$ gilt. Damit ergibt sich $u(x, t) = \frac{1}{1+(x-7t)^2} + I(x, t)$ mit dem Integral $I(x, t) = \int_0^t (x - 7(t - s))e^{-s} ds = \int_0^t (x - 7t)e^{-s} ds + \int_0^t 7se^{-s} ds = (x - 7t) \int_0^t e^{-s} ds + 7 \int_0^t se^{-s} ds = (x - 7t)(1 - e^{-t}) + 7I_2(t)$. Dabei ist $I_2(t) = \int_0^t se^{-s} ds = \int_0^t s(-e^{-s})' ds = [-se^{-s}]_0^t - \int_0^t s' - e^{-s} ds = -te^{-t} + \int_0^t e^{-s} ds = -te^{-t} + 1 - e^{-t}$

wobei wir partielle Integration verwendet haben.

Einsetzen der Teilergebnisse und Vereinfachen der Terme ergibt die Lösung $u(x, t) = \frac{1}{1+(x-7t)^2} + (x+7)(1-e^{-t}) - 7t$.



DGL/PartDGL/Ag_Separationsansatz_AWP.tex

Aufgabe 16.124 (Separationsansatz)

kr

Lösen Sie das Anfangswertproblem mit einem Separationsansatz der Form $u(x, t) = v(x) \cdot w(t)$.

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + (1+x^2) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \cos(t) u(x, t), \quad u(x, 0) = e^{2 \arctan(x)}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2$$

$$u(x, t) = e^{-2t + \sin(t) + 2 \arctan(x)}$$

Lösung: Mit dem Separationsansatz $u(x, t) = v(x) \cdot w(t)$ ergibt sich aus der DGL:

$$v(x) \cdot \frac{\partial w(t)}{\partial t} + (1+x^2) \frac{\partial v(x)}{\partial x} \cdot w(t) = \cos(t) v(x) \cdot w(t).$$

Dividieren durch $v(x) \cdot w(t)$ ergibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{w(t)} \cdot \frac{\partial w(t)}{\partial t} + (1+x^2) \frac{\partial v(x)}{\partial x} \cdot \frac{1}{v(x)} &= \cos(t) \quad \Leftrightarrow \\ \frac{1}{w(t)} \cdot \frac{\partial w(t)}{\partial t} - \cos(t) &= -(1+x^2) \frac{\partial v(x)}{\partial x} \cdot \frac{1}{v(x)} \end{aligned}$$

Die linke Seite hängt nicht von x ab. Weil beide Seiten gleich sein müssen hängt damit die rechte Seite ebenfalls nicht von x ab. Die rechte Seite hängt nicht von t ab. Weil beide Seiten gleich sein müssen hängt damit die linke Seite ebenfalls nicht von t ab. Beide Seiten der Gleichung sind also gleich einer Konstanten. Nennen wir diese Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$, so erhalten wir zwei gewöhnliche Differentialgleichungen. Von der linken Seite ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{w(t)} \cdot \frac{\partial w(t)}{\partial t} - \cos(t) &= \lambda \Rightarrow \\ \frac{1}{w} \cdot dw &= (\lambda + \cos(t)) dt \Rightarrow \\ \int \frac{1}{w} \cdot dw &= \int (\lambda + \cos(t)) dt \Rightarrow \\ \ln(w) &= \lambda t + \sin(t) + C \Rightarrow \\ w(t) &= e^{\lambda t + \sin(t) + C} \end{aligned}$$

mit einer Integrationskonstanten $C \in \mathbb{R}$.

Von der rechten Seite der obigen Gleichung ergibt sich:

$$\begin{aligned} -(1+x^2) \frac{\partial v(x)}{\partial x} \cdot \frac{1}{v(x)} &= \lambda \Rightarrow \\ \frac{1}{v} dv &= -\frac{\lambda}{1+x^2} dx \Rightarrow \\ \int \frac{1}{v} dv &= -\int \frac{\lambda}{1+x^2} dx \Rightarrow \\ \ln(v) &= -\lambda \arctan(x) + C_2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$v(x) = e^{-\lambda \arctan(x) + C_2}$$

mit einer Integrationskonstanten $C_2 \in \mathbb{R}$.

Aus der Anfangsbedingung $u(x, 0) = e^{2 \arctan(x)}$ ergibt sich
 $v(x) \cdot w(0) = e^{2 \arctan(x)} \Leftrightarrow e^{-\lambda \arctan(x) + C_2 + \lambda \cdot 0 + \sin(0) + C} = e^{2 \arctan(x)}$.

Daraus ergibt sich $\lambda = -2$, $C_2 + C = 0$. Also lautet die Lösung des Anfangswertproblems

$$u(x, t) = e^{-2t + \sin(t) + 2 \arctan(x)}.$$



DGL/PartDGL/Ag_Separationsansatz_Einstieg.tex

Aufgabe 16.125 (Separationsansatz)

kr

Lösen Sie das Anfangswertproblem mit einem Separationsansatz der Form $u(x, t) = v(x) \cdot w(t)$.

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + (1+x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \sin(t) u(x, t), \quad u(x, 0) = (1+x)^4, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2$$

$$u(x, t) = e \cdot (1+x)^4 e^{-4t - \cos(t)}$$

Lösung: Mit dem Separationsansatz $u(x, t) = v(x) \cdot w(t)$ ergibt sich aus der DGL:

$$v(x) \cdot \frac{\partial w(t)}{\partial t} + (1+x) \frac{\partial v(x)}{\partial x} \cdot w(t) = \sin(t) v(x) \cdot w(t).$$

Dividieren durch $v(x) \cdot w(t)$ ergibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{w(t)} \cdot \frac{\partial w(t)}{\partial t} + (1+x) \frac{\partial v(x)}{\partial x} \cdot \frac{1}{v(x)} &= \sin(t) \Leftrightarrow \\ \frac{1}{w(t)} \cdot \frac{\partial w(t)}{\partial t} - \sin(t) &= -(1+x) \frac{\partial v(x)}{\partial x} \cdot \frac{1}{v(x)} \end{aligned}$$

Die linke Seite hängt nicht von x ab. Weil beide Seiten gleich sein müssen hängt damit die rechte Seite ebenfalls nicht von x ab. Die rechte Seite hängt nicht von t ab. Weil beide Seiten gleich sein müssen hängt damit die linke Seite ebenfalls nicht von t ab. Beide Seiten der Gleichung sind also gleich einer Konstanten. Nennen wir diese Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$, so erhalten wir zwei gewöhnliche Differentialgleichungen. Von der linken Seite ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{w(t)} \cdot \frac{\partial w(t)}{\partial t} - \sin(t) &= \lambda \Rightarrow \\ \frac{1}{w} \cdot dw &= (\lambda + \sin(t)) dt \Rightarrow \\ \int \frac{1}{w} \cdot dw &= \int (\lambda + \sin(t)) dt \Rightarrow \\ \ln(w) &= \lambda t - \cos(t) + C \Rightarrow \\ w(t) &= e^{\lambda t - \cos(t) + C} \end{aligned}$$

mit einer Integrationskonstanten $C \in \mathbb{R}$.

Von der rechten Seite der obigen Gleichung ergibt sich:

$$\begin{aligned} -(1+x) \frac{\partial v(x)}{\partial x} \cdot \frac{1}{v(x)} &= \lambda \Rightarrow \\ \frac{1}{v} dv &= -\frac{\lambda}{1+x} dx \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{v} dv &= - \int \frac{\lambda}{1+x} dx \Rightarrow \\ \ln(v) &= -\lambda \ln(1+x) + C_2 \Rightarrow \\ \ln(v) &= \ln\left((1+x)^{-\lambda}\right) + C_2 \Rightarrow \\ v(x) &= (1+x)^{-\lambda} e^{C_2}\end{aligned}$$

mit einer Integrationskonstanten $C_2 \in \mathbb{R}$.

Aus der Anfangsbedingung $u(x, 0) = (1+x)^4$ ergibt sich $v(x) \cdot w(0) = (1+x)^4 \Leftrightarrow (1+x)^{-\lambda} e^{C_2} \cdot e^{-1+C} = (1+x)^4$.

Daraus ergibt sich $\lambda = -4$, $e^{C_2} \cdot e^{-1+C} = 1$ bzw. $e^{C_2} \cdot e^C = e$. Also lautet die Lösung des Anfangswertproblems

$$u(x, t) = e \cdot (1+x)^4 e^{-4t - \cos(t)}.$$



DGL/PartDGL/Ag_Separationsansatz_Transportgl.tex

Aufgabe 16.126 (Zusatzaufgabe: Separationsansatz bei Transportgleichungen)

kr

Welche Lösung ergibt sich mit einem Separationsansatz der Form $u(x, t) = v(x) \cdot w(t)$ bzw. $u(x, y, t) = v(x) \cdot w(y) \cdot r(t)$? Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem was Sie über solche Transportgleichungen wissen bzw. mit den entsprechenden Ergebnissen aus Aufgabe 5.2.

a) $\frac{\partial u}{\partial t} + 4 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$

$$Ae^{-\frac{\lambda}{4}(x-4t)}$$

Lösung: Mit dem Separationsansatz $u(x, t) = v(x) \cdot w(t)$ ergibt sich aus der DGL:

$$v(x) \frac{\partial w(t)}{\partial t} + 4w(t) \frac{\partial v(x)}{\partial x}$$

Dividieren durch $v(x) \cdot w(t)$ und eine weitere kleine Umformung führen zu

$$\frac{1}{w(t)} \frac{\partial w(t)}{\partial t} = -4 \frac{1}{v(x)} \frac{\partial v(x)}{\partial x}$$

Die linke Seite hängt nicht von x ab. Weil beide Seiten gleich sein müssen hängt damit die rechte Seite ebenfalls nicht von x ab. Die rechte Seite hängt nicht von t ab. Weil beide Seiten gleich sein müssen hängt damit die linke Seite ebenfalls nicht von t ab. Beide Seiten der Gleichung sind also gleich einer Konstanten. Nennen wir diese Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$, so erhalten wir zwei gewöhnliche Differentialgleichungen. Von der linken Seite ergibt sich:

$$\frac{\partial w(t)}{\partial t} = \lambda w(t)$$

mit der Lösung

$$w(t) = Ae^{\lambda t}$$

mit einer Konstanten $A \in \mathbb{R}$.

Von der rechten Seite ergibt sich:

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x} = -\frac{\lambda}{4} v(x)$$

mit der Lösung

$$v(x) = Be^{-\frac{\lambda}{4}x}$$

mit einer Konstanten $B \in \mathbb{R}$. Setzen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $B = 1$, so ergibt sich die Lösung

$$u(x, t) = v(x) \cdot w(t) = Ae^{\lambda(t - \frac{x}{4})} = Ae^{-\frac{\lambda}{4}(x-4t)}$$

. Die Lösung lässt sich also, wie wir das von solchen Transportgleichungen kennen, auf die Form $f(x - vt)$ bringen mit $v = 4$, $f(s) = Ae^{-\frac{\lambda}{4}s}$. Allerdings wäre diese Lösungsfunktion zur Lösung z.B. des Anfangswertproblems aus 5.2 b) nicht geeignet.

$$\text{b) } \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad Ae^{C_1(x+\frac{y}{2})+C_2(t-\frac{y}{2})} = Ae^{C_1(x+t)+\frac{C_1-C_2}{2}(y-2t)}$$

Lösung: Mit dem Separationsansatz $u(x, y, t) = v(x) \cdot w(y) \cdot r(t)$ ergibt sich aus der DGL:

$$v(x)w(y)\frac{\partial r(t)}{\partial t} - w(y)r(t)\frac{\partial v(x)}{\partial x} + 2v(x)r(t)\frac{\partial w(y)}{\partial y}$$

Dividieren durch $v(x) \cdot w(y) \cdot r(t)$ und eine weitere kleine Umformung führen zu

$$\frac{1}{r(t)} \frac{\partial r(t)}{\partial t} + 2 \frac{1}{w(y)} \frac{\partial w(y)}{\partial y} = \frac{1}{v(x)} \frac{\partial v(x)}{\partial x}$$

Die linke Seite hängt nicht von x ab. Weil beide Seiten gleich sein müssen hängt damit die rechte Seite ebenfalls nicht von x ab. Die rechte Seite hängt nicht von y und t ab. Weil beide Seiten gleich sein müssen hängt damit die linke Seite ebenfalls nicht von y und t ab. Beide Seiten der Gleichung sind also gleich einer Konstanten. Nennen wir diese Konstante $C_1 \in \mathbb{R}$, so erhalten wir zwei Differentialgleichungen. Von der rechten Seite ergibt sich:

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x} = C_1 v(x)$$

mit der Lösung

$$v(x) = Ae^{C_1 x}$$

mit einer Konstanten $A \in \mathbb{R}$. Die aus der linken Seite resultierende DGL kann geschrieben werden als:

$$\frac{1}{r(t)} \frac{\partial r(t)}{\partial t} = C_1 - 2 \frac{1}{w(y)} \frac{\partial w(y)}{\partial y}$$

Hier sind wieder die Variablen von einanderauf verschiedene Seiten getrennt. Analog zu vorher sind beide Seiten gleich einer Konstanten die wir $C_2 \in \mathbb{R}$ nennen und es folgt:

$$\frac{\partial r(t)}{\partial t} = C_2 r(t)$$

mit der Lösung

$$r(t) = Be^{C_2 t}$$

mit einer Konstanten $B \in \mathbb{R}$. Ausserdem folgt:

$$\frac{\partial w(y)}{\partial y} = \frac{C_1 - C_2}{2} w(y)$$

mit der Lösung

$$w(y) = De^{\frac{C_1 - C_2}{2} y}$$

mit einer Konstanten $D \in \mathbb{R}$. Setzen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $B = 1 = D$, so ergibt sich die Lösung

$$u(x, y, t) = Ae^{C_1(x+\frac{y}{2})+C_2(t-\frac{y}{2})} = Ae^{C_1(x+t-\frac{y}{2})+C_2(t-\frac{y}{2})} = Ae^{C_1(x+t)+\frac{C_1-C_2}{2}(y-2t)}.$$

Allgemein gilt für diese Art von Randbedingung für eine solche homogene vektorielle Transportgleichung, dass die Lösung gegeben ist durch $u(x, y, t) = f(\vec{x} - \vec{v}t) = f(x - v_1 t, y - v_2 t)$. Hier lesen wir aus der Aufgabenstellung ab, dass $\vec{x} = (x \ y)^T$, $\vec{v} = (-1 \ 2)^T = (v_1 \ v_2)^T$ gilt. In der Tat ist es uns gelungen die Lösung in diese Form zu bringen mit $f(s_1, s_2) = Ae^{C_1 s_1 + \frac{C_1 - C_2}{2} s_2}$. Allerdings wäre diese Lösungsfunktion zur Lösung z.B. des Anfangswertproblems aus 5.2 c) nicht geeignet.

**Aufgabe 16.127** (Separationsansatz bei der Wellengleichung)

kr

Wir betrachten die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L$$

für eindimensionale Schallausbreitung in einer luftgefüllten Röhre der Länge L , wobei c die Schallgeschwindigkeit in Luft ist. Es soll $x, t, L, c, u(x, t) \in \mathbb{R}$ gelten.

- a) Berechnen Sie die Lösungen der Wellengleichung, die mit dem Separationsansatz $u(x, t) = v(x) \cdot w(t)$ zu finden sind und die Randbedingungen $u(0, t) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$ erfüllen. (Bem.: Das entspricht dem Fall, dass die Röhre bei $x = 0$ geschlossen und bei $x = L$ offen ist.) $u_n(x, t) = v_n(x) \cdot w_n(t)$ mit $v_n(x) = \sin(k_n \cdot x)$, $k_n = (2n + 1)\frac{\pi}{2L}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $w_n(t) = C_n \sin(\omega_n t) + D_n \cos(\omega_n t)$, $C_n, D_n \in \mathbb{C}$, $\omega_n = k_n \cdot c$

Lösung: Mit dem Separationsansatz $u(x, t) = v(x) \cdot w(t)$ ergibt sich aus der DGL:

$$v(x) \frac{\partial^2 w(t)}{\partial t^2} = c^2 w(t) \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2}$$

Dividieren durch $v(x) \cdot w(t)$ ergibt

$$\frac{1}{w(t)} \cdot \frac{\partial^2 w(t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{1}{v(x)} \cdot \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2}$$

Die linke Seite hängt nicht von x ab. Weil beide Seiten gleich sein müssen hängt damit die rechte Seite ebenfalls nicht von x ab. Die rechte Seite hängt nicht von t ab. Weil beide Seiten gleich sein müssen hängt damit die linke Seite ebenfalls nicht von t ab. Beide Seiten der Gleichung sind also gleich einer Konstanten. Nennen wir diese Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$, so erhalten wir zwei gewöhnliche Differentialgleichungen. Von der rechten Seite ergibt sich:

$$c^2 \frac{1}{v(x)} \cdot \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} = \lambda$$

Wir betrachten zunächst den Fall $\lambda < 0$. Dann können wir $\lambda = -k^2 \cdot c^2$ schreiben mit einem $k \in (0, \infty)$. Die Differentialgleichung für $v(x)$ wird dann zu

$$\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} = -k^2 v(x)$$

Diese wohlbekannte lineare Differentialgleichung hat die allgemeine Lösung $v(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$ mit $A, B \in \mathbb{C}$.

Aus der Randbedingung $u(0, t) = 0$ ergibt sich $v(0) = 0 \Leftrightarrow A = 0$. Aus der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$ ergibt sich $v'(L) = 0 \Leftrightarrow Bk \cos(kL) = 0$. Damit muss gelten $B = 0$ oder $kL = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Definieren wir

$$k_n = (2n + 1)\frac{\pi}{2L},$$

so lassen sich die Lösungen als

$$v_n(x) = B_n \sin(k_n x)$$

schreiben.

Die Differentialgleichung für $w(t)$ lautet dann

$$\frac{1}{w(t)} \cdot \frac{\partial^2 w(t)}{\partial t^2} = -k^2 c^2$$

Wenn wir von vorneherein nur die zulässigen Werte k_n betrachten und aus Bequemlichkeit definieren $\omega_n = k_n \cdot c$, so ergibt sich für die entsprechenden Funktionen $w_n(t)$ die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 w_n(t)}{\partial t^2} = -\omega_n^2 w_n(t)$$

Analog zu oben ergibt sich die allgemeine Lösung $w_n(t) = C_n \sin(\omega_n t) + D_n \cos(\omega_n t)$ mit Konstanten $C_n, D_n \in \mathbb{C}$. Für die entsprechenden Lösungen $u_n(x, t)$ ergibt sich dann

$$u_n(x, t) = (C_n \sin(\omega_n t) + D_n \cos(\omega_n t)) \sin(k_n x)$$

wobei wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $B_n = 1$ gesetzt haben.

Betrachten wir noch die Fälle $\lambda = 0$ und $\lambda > 0$. Sei also zunächst $\lambda = 0$. Dann lautet die Differentialgleichung für $v(x)$

$$\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser linearen DGL lautet $v(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Aus der Randbedingung $u(0, t) = 0$ ergibt sich $v(0) = 0 \Leftrightarrow a \cdot 0 + b = 0 \Leftrightarrow b = 0$. Aus der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$ ergibt sich $v'(L) = 0 \Leftrightarrow a = 0$. Somit gibt es im Fall $\lambda = 0$ nur die triviale Lösung $u(x, t) = 0$, die bereits im 1. Fall enthalten ist.

Sei jetzt $\lambda > 0$. Dann lautet die Differentialgleichung für $v(x)$

$$\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} = \lambda v(x).$$

Die allgemeine Lösung dieser linearen DGL lautet (wie man durch Einsetzen leicht nachprüft) $v(x) = F e^{\sqrt{\lambda} x} + G e^{-\sqrt{\lambda} x}$. Aus der Randbedingung $u(0, t) = 0$ ergibt sich $v(0) = 0 \Leftrightarrow F + G = 0$ bzw. $G = -F$. Aus der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$ ergibt sich $v'(L) = 0 \Leftrightarrow F \lambda (e^{\sqrt{\lambda} L} + e^{-\sqrt{\lambda} L}) = 0$. Also muss gelten: $F = 0$ oder $e^{\sqrt{\lambda} L} = -e^{-\sqrt{\lambda} L}$. Weil reelle Exponentialfunktionen nicht negativ sein können ist die letzte Gleichung nicht lösbar. Somit gibt es auch im Fall $\lambda > 0$ nur die triviale Lösung $u(x, t) = 0$, die bereits im 1. Fall enthalten ist.

- b) Jetzt seien zusätzlich die Anfangsbedingungen $u(x, 0) = 2 \sin(\frac{\pi}{2L} x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = -2 \frac{5\pi}{2L} c \cdot \sin(\frac{5\pi}{2L} x)$ gegeben. Lösen Sie dieses Anfangswertproblem mit Hilfe des Ergebnisses aus a) und der Linearität der Wellengleichung. $u(x, t) = 2 \cos(\omega_0 t) \sin(k_0 x) - 2 \sin(\omega_2 t) \sin(k_2 x)$ mit $k_0 = \frac{\pi}{2L}$, $\omega_0 = k_0 c$, $k_2 = \frac{5\pi}{2L}$, $\omega_2 = k_2 c$

Lösung: Mit den Definitionen aus der Lösung in a) lassen sich die Anfangsbedingungen schreiben als $u(x, 0) = 2 \sin(k_0 x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = -2\omega_2 \cdot \sin(k_2 x)$.

Dies legt folgenden Ansatz nahe: $u(x, t) = (C_0 \cos(\omega_0 t) + D_0 \sin(\omega_0 t)) \sin(k_0 x) + (C_2 \cos(\omega_2 t) + D_2 \sin(\omega_2 t)) \sin(k_2 x)$ (Durch die Linearität der Wellengleichung gilt das Superpositionsprinzip: beliebige Linearkombinationen von Lösungen sind ebenfalls Lösungen). Ableiten nach der Zeit ergibt $u(x, t) = (-C_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t) + D_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t)) \sin(k_0 x) + (-C_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t) + D_2 \omega_2 \cos(\omega_2 t)) \sin(k_2 x)$. Einsetzen in die Anfangsbedingungen ergibt

$$C_0 \sin(k_0 x) + C_2 \sin(k_2 x) = 2 \sin(k_0 x),$$

$$D_0 \omega_0 \sin(k_0 x) + D_2 \omega_2 \sin(k_2 x) = -2\omega_2 \cdot \sin(k_2 x).$$

Weil diese Bedingungen für beliebiges x gelten müssen folgt $C_0 = 2$, $C_2 = 0$, $D_0 = 0$, $D_2 = -2$. Also lautet die Lösung des Anfangswertproblems

$$u(x, t) = 2 \cos(\omega_0 t) \sin(k_0 x) - 2 \sin(\omega_2 t) \sin(k_2 x).$$



DGL/SysHomDiag/Ag_DGLSysHomDiag_AngebotKaufverhalten.tex

Aufgabe 17.128 (Gegenseitige Beeinflussung von Angebot und Kaufverhalten) spf

Angebot eines Artikels und das Kaufverhalten der Kunden bei diesem Artikel beeinflussen sich gegenseitig: Hat ein Händler eine hohe Stückzahl des Artikels beim Hersteller gekauft, so sind bei diesem nicht mehr viele Teile vorrätig und er kann kurze Zeit später nicht mehr viele Artikel nachbestellen. Andererseits ist der Artikel dann beim Händler weniger schnell ausverkauft, wodurch mehr Käufer auf den Artikel aufmerksam werden, was das Kaufverhalten ankurbelt.

Bei einem hohen Kaufverhalten wird ein Händler dazu angehalten, mehr von dem Artikel nachzubestellen, wodurch das Angebot wächst. Andererseits entsteht bei den Kunden ein Sättigungseffekt, der das Kaufverhalten eindämmt.

Das Spiel zwischen Angebot A und Kaufverhalten K lasse sich für ein spezielles Produkt durch das folgende lineare Differentialgleichungssystem beschreiben:

$$18A'(t) = K(t) - 9A(t) \quad \text{und} \quad 2K'(t) = -K(t) + A(t).$$

a) Geben Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems an!

$$A(t) = Ce^{-\frac{2t}{3}} + De^{-\frac{t}{3}} \quad \text{und} \quad K(t) = -3Ce^{-\frac{2t}{3}} + 3De^{-\frac{t}{3}} \quad \text{mit denselben } C \in \mathbb{C} \text{ und } D \in \mathbb{C}$$

Lösung:

Mit $\vec{y}(t) := (A(t), K(t))^T$ und $M := \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$\vec{y}'(t) = \begin{pmatrix} A'(t) \\ K'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cdot A(t) + \frac{1}{18} \cdot K(t) \\ \frac{1}{2} \cdot A(t) - \frac{1}{2} \cdot K(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A(t) \\ K(t) \end{pmatrix} = M \cdot \vec{y}(t).$$

Um die Lösungen dieses Differentialgleichungssystems zu bestimmen, werden die Eigenwerte und Eigenvektoren von M berechnet. Für das charakteristische Polynom von M ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{CP}_M(x) &:= (-1)^2 \cdot \det(M - x \cdot I_2) = \det \left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - x & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} - x \end{pmatrix} \right) = \left(-\frac{1}{2} - x\right)^2 - \frac{1}{36} \\ &= \left(-\frac{1}{2} - x - \frac{1}{6}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} - x + \frac{1}{6}\right) = \left(-x - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(-x - \frac{2}{3}\right) = \left(x + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(x + \frac{2}{3}\right). \end{aligned}$$

Die Gleichung $\text{CP}_M(x) = 0$ liefert also die beiden Eigenwerte $\lambda_1 := -\frac{1}{3}$ und $\lambda_2 := -\frac{2}{3}$.

Zur Berechnung des Eigenraums von M zu λ_1 lösen wir das lineare Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{3}\right) & \frac{1}{18} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{3}\right) & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{6} & \frac{1}{18} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & 0 \end{array} \right) \left\| \cdot 3 \quad \cdot 18 \right. \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Zur Berechnung des Eigenraums von M zu λ_2 lösen wir das lineare Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{2} - \left(-\frac{2}{3}\right) & \frac{1}{18} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} - \left(-\frac{2}{3}\right) & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{6} & \frac{1}{18} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \end{array} \right) \left\| \cdot (-3) \quad \cdot 18 \right. \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Also sind $\text{Eig}_M\left(-\frac{1}{3}\right) = \left\{ \mu \cdot (1, 3)^T \in \mathbb{C}^2 \mid \mu \in \mathbb{C} \right\}$ und $\text{Eig}_M\left(-\frac{2}{3}\right) = \left\{ \nu \cdot (1, -3)^T \in \mathbb{C}^2 \mid \nu \in \mathbb{C} \right\}$

Damit ist $\left\{ e^{-\frac{t}{3}} \cdot (1, 3)^T; e^{-\frac{2t}{3}} \cdot (1, -3)^T \right\}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung und die allgemeine Lösung hat die Form $y(t) = C \cdot e^{-\frac{t}{3}} \cdot (1, 3)^T + D \cdot e^{-\frac{2t}{3}} \cdot (1, -3)^T$.

Also gilt für ein $C \in \mathbb{C}$ und ein $D \in \mathbb{C}$

$$A(t) = C \cdot e^{-\frac{t}{3}} + D \cdot e^{-\frac{2t}{3}} \quad \text{und} \quad K(t) = 3C \cdot e^{-\frac{t}{3}} - 3D \cdot e^{-\frac{2t}{3}}.$$

- b) Weisen Sie die lineare Unabhängigkeit der einzelnen Fundamentallösungen nach!

Tipp: Schreiben Sie die Fundamentallösungen in eine Matrix und berechnen Sie deren Determinante. Diese sogenannte „Wronski-Determinante“ darf keine Nullstelle enthalten, um die lineare Unabhängigkeit der Lösungen nachzuweisen.

Lösung:

Die Wronski-Determinante zu dem Fundamentalsystem $\left\{e^{-\frac{t}{3}} \cdot (1, 3)^T; e^{-\frac{2t}{3}} \cdot (1, -3)^T\right\}$ ist

$$W(t) := \det \begin{pmatrix} e^{-\frac{t}{3}} & e^{-\frac{2t}{3}} \\ 3e^{-\frac{t}{3}} & -3e^{-\frac{2t}{3}} \end{pmatrix} = -3e^{-t} - 3e^{-t} = -6e^{-t} \neq 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{C}.$$

- c) Wie entwickeln sich die beiden Funktionen, wenn am Anfang ein großes Angebot ($A(0) = 100$), aber kein Interesse der Käufer ($K(0) = 0$) vorhanden ist? $C = 50$ und $D = 50$

Lösung:

Addiert man das dreifache der Gleichung $A(0) = C \cdot e^0 + D \cdot e^0 = C + D = 100$ zur Gleichung $K(0) = 3C \cdot e^0 - 3D \cdot e^0 = 3C - 3D = 0$, so ergibt sich $6C = 300$ bzw. $C = 50$. Damit folgt $D = 100 - C = 100 - 50 = 50$. Das liefert für den Funktionsverlauf

$$A(t) = 50 \cdot \left(e^{-\frac{t}{3}} + e^{-\frac{2t}{3}}\right) \quad \text{und} \quad K(t) = 150 \cdot \left(e^{-\frac{t}{3}} - e^{-\frac{2t}{3}}\right).$$

- d) Was stellen sie beim Vergleich von $\int_0^\infty A(t) dt$ mit $\int_0^\infty K(t) dt$ fest?

beide liefern 225

Lösung:

Es sind

$$\begin{aligned} \int_0^\infty A(t) dt &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b 50 \cdot \left(e^{-\frac{t}{3}} + e^{-\frac{2t}{3}}\right) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} 50 \cdot \left[-3 \cdot e^{-\frac{t}{3}} - \frac{3}{2} \cdot e^{-\frac{2t}{3}}\right]_0^b \\ &= 50 \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-3 \cdot e^{-\frac{b}{3}} - \frac{3}{2} \cdot e^{-\frac{2b}{3}}\right) - 50 \cdot \left(-3 - \frac{3}{2}\right) = 50 \cdot (0 - 0) - 50 \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = 225 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \int_0^\infty K(t) dt &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b 150 \cdot \left(e^{-\frac{t}{3}} - e^{-\frac{2t}{3}}\right) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} 150 \cdot \left[-3 \cdot e^{-\frac{t}{3}} + \frac{3}{2} \cdot e^{-\frac{2t}{3}}\right]_0^b \\ &= 150 \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2} \cdot e^{-\frac{2b}{3}} - 3 \cdot e^{-\frac{b}{3}}\right) - 150 \cdot \left(\frac{3}{2} - 3\right) = 150 \cdot (0 - 0) - 150 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = 225. \end{aligned}$$



DGL/SysHomDiag/Ag_DGLSysHomDiag_keineTextaufgabe.tex

Aufgabe 17.129 (Lineare homogene Differentialgleichungssysteme erster Ordnung)

spf

Geben Sie alle reellen Lösungen der folgenden Differentialgleichungssysteme an!

- a) $f'(t) = 2f(t) - 4g(t) + h(t)$, $g'(t) = -2f(t) + 3g(t) + 2h(t)$, $h'(t) = -f(t) - 2g(t) + 4h(t)$
 $f(t) = 5Ae^t + Be^{3t} + 3Ce^{5t}$, $g(t) = 2Ae^t - 2Ce^{5t}$, $h(t) = 3Ae^t + Be^{3t} + Ce^{5t}$

Lösung:

Definiert man $y(t) := \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{pmatrix}$ und $M := \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, so ergibt sich die Differentialgleichung $y'(t) = M \cdot y(t)$. Zur Lösung bestimmen wir die Eigenwerte von M :

$$\begin{aligned} \text{CP}_M(\lambda) &:= (-1)^3 \cdot \det(M - \lambda I_3) = -\det \left(\begin{pmatrix} 2-\lambda & -4 & 1 \\ -2 & 3-\lambda & 2 \\ -1 & -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} \right) \\ &= -\det \left(\begin{pmatrix} 3-\lambda & -4 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 3-\lambda & -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} \right) \cdot (-1) = -\det \left(\begin{pmatrix} 3-\lambda^+ & -4 & 1 \\ 0^- & 3-\lambda^+ & 2 \\ 0^+ & 2 & 3-\lambda^+ \end{pmatrix} \right) \\ &= -(3-\lambda) \cdot \det \left(\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \right) = (\lambda-3) \cdot ((3-\lambda)^2 - 2^2) \\ &= (\lambda-3) \cdot (3-\lambda-2) \cdot (3-\lambda+2) = (\lambda-3) \cdot (1-\lambda) \cdot (5-\lambda) \\ &= (\lambda-3) \cdot (\lambda-1) \cdot (\lambda-5). \end{aligned}$$

Also ergeben sich 1, 3 und 5 als Eigenwerte von M .

Zur Bestimmung der Eigenvektoren zum Eigenwert 1 lösen wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \end{array} \right) &\left\| \begin{array}{l} \cdot 2 \\ + \\ + \end{array} \right. \cdot 1 \cdot 2 \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -8 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & 0 \end{array} \right) \left\| \begin{array}{l} + \\ + \\ \cdot \frac{-1}{2} \end{array} \right. \cdot (-1) \cdot \frac{1}{2} \\ &\iff \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Also ist $\text{Eig}_M(1) = \{ \alpha \cdot (5, 2, 3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R} \}$ der Eigenraum von M zum Eigenwert 1.

Zur Bestimmung der Eigenvektoren zum Eigenwert 3 lösen wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) &\left\| \begin{array}{l} \cdot (-2) \\ + \\ + \end{array} \right. \cdot (-1) \cdot (-1) \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right) \left\| \begin{array}{l} + \\ \cdot \frac{-1}{2} \\ + \end{array} \right. \cdot \frac{-1}{4} \cdot \frac{1}{8} \\ &\iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Also ist $\text{Eig}_M(3) = \{ \beta \cdot (1, 0, 1)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \beta \in \mathbb{R} \}$ der Eigenraum von M zum Eigenwert 3.

Zur Bestimmung der Eigenvektoren zum Eigenwert 5 lösen wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -4 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right) &\left\| \begin{array}{l} + \\ \cdot (-2) \\ + \end{array} \right. \cdot (-1) \cdot \frac{-1}{2} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right) \left\| \begin{array}{l} \cdot (-1) \\ + \\ + \end{array} \right. \cdot (-1) \\ &\iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Also ist $\text{Eig}_M(5) = \{ \gamma \cdot (3, -2, 1)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \gamma \in \mathbb{R} \}$ der Eigenraum von M zum Eigenwert 5.

Damit ergibt sich $f(t) = 5Ae^t + Be^{3t} + 3Ce^{5t}$, $g(t) = 2Ae^t - 2Ce^{5t}$ und $h(t) = 3Ae^t + Be^{3t} + Ce^{5t}$ als allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems.

b) $u'(x) = 5w(x) - 2u(x) - v(x), \quad v'(x) = 2v(x) - w(x) - u(x), \quad w'(x) = u(x) - 3v(x)$
 $u(x) = 7Ae^{-x} + 6Be^{-3x} + Ce^{4x}, v(x) = 3Ae^{-x} + Be^{-3x} - Ce^{4x}, w(x) = 2Ae^{-x} - Be^{-3x} + Ce^{4x}$

Lösung:

Definiert man $y(x) := \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \\ w(x) \end{pmatrix}$ und $M := \begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, so ergibt sich die Differentialgleichung $y'(x) = M \cdot y(x)$. Zur Lösung bestimmen wir die Eigenwerte von M :

$$\begin{aligned} \text{CP}_M(\lambda) &:= (-1)^3 \cdot \det(M - \lambda I_3) = -\det \left(\begin{pmatrix} -2-\lambda & -1 & 5 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -3 & -\lambda \end{pmatrix} \right) \cdot (-1) \\ &= \det \left(\begin{pmatrix} 2+\lambda & 1 & -5 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1-\lambda & -1-\lambda \end{pmatrix} \right) = \det \left(\begin{pmatrix} 2+\lambda^+ & 6 & -5 \\ -1 & 3-\lambda^+ & -1 \\ 0^+ & 0^- & -1-\lambda^+ \end{pmatrix} \right) \\ &= (-1-\lambda) \cdot \det \left(\begin{pmatrix} 2+\lambda & 6 \\ -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \right) = -(1+\lambda) \cdot ((2+\lambda) \cdot (3-\lambda) - (-1) \cdot 6) \\ &= (\lambda+1) \cdot (\lambda^2 - \lambda - 12) = (\lambda+1) \cdot \left(\lambda^2 - 2 \cdot \lambda \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 12 \right) \\ &= (\lambda+1) \cdot \left(\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} \right) = (\lambda+1) \cdot \left(\lambda - \frac{1}{2} + \frac{7}{2}\right) \cdot \left(\lambda - \frac{1}{2} - \frac{7}{2}\right) \\ &= (\lambda - (-1)) \cdot (\lambda - (-3)) \cdot (\lambda - 4). \end{aligned}$$

Also ergeben sich -1 , -3 und 4 als Eigenwerte von M .

Zur Bestimmung der Eigenvektoren zum Eigenwert -1 lösen wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right) & \cdot (-1) & \cdot 1 & \cdot (-3) \\ & + & + & \\ & \iff & \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & -15 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & 0 \end{array} \right) & + & \\ & & & \cdot \frac{5}{2} & \cdot 1 & \cdot \frac{1}{2} \\ & \iff & \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Also ist $\text{Eig}_M(-1) = \{ \varphi \cdot (7, 3, 2)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi \in \mathbb{R} \}$ der Eigenraum von M zum Eigenwert -1 .

Zur Bestimmung der Eigenvektoren zum Eigenwert -3 lösen wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right) & \cdot 1 & \cdot (-1) \\ & + & + \\ & \iff & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) & + & \\ & & \cdot \frac{1}{4} & \cdot \frac{1}{2} & \cdot \frac{1}{4} \\ & \iff & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Also ist $\text{Eig}_M(-3) = \{ \psi \cdot (6, 1, -1)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \psi \in \mathbb{R} \}$ der Eigenraum von M zum Eigenwert -3 .

Zur Bestimmung der Eigenvektoren zum Eigenwert 4 lösen wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} -6 & -1 & 5 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -4 & 0 \end{array} \right) & \cdot (-6) & \cdot 1 & \cdot (-1) \\ & + & + & \\ & \iff & \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 11 & 11 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \end{array} \right) & + & \\ & & \cdot \frac{11}{5} & \cdot \frac{1}{5} & \cdot \frac{-1}{5} \\ & \iff & \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Also ist $\text{Eig}_M(4) = \{ \chi \cdot (1, -1, 1)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \chi \in \mathbb{R} \}$ der Eigenraum von M zum Eigenwert 4.

Damit ergibt sich $u(x) = 7Ae^{-x} + 6Be^{-3x} + Ce^{4x}$, $v(x) = 3Ae^{-x} + Be^{-3x} - Ce^{4x}$ und $w(x) = 2Ae^{-x} - Be^{-3x} + Ce^{4x}$ als allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems.

c) $p'(z) = -3p(z) + q(z) - 3r(z)$, $q'(z) = 3p(z) + 4r(z)$, $r'(z) = 6p(z) - q(z) + 6r(z)$
 $p(z) = -Ae^{3z} - B \cos(z) + C \sin(z)$, $q(z) = 3Ae^{3z} + B \sin(z) + C \cos(z)$, $r(z) = 3Ae^{3z} + B \cos(z) - C \sin(z)$

Lösung:

Definiert man $y(z) := \begin{pmatrix} p(z) \\ q(z) \\ r(z) \end{pmatrix}$ und $M := \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 6 & -1 & 6 \end{pmatrix}$, so ergibt sich die Differentialgleichung $y'(z) = M \cdot y(z)$. Zur Lösung bestimmen wir die Eigenwerte von M :

$$\begin{aligned} \text{CP}_M(\lambda) &:= (-1)^3 \cdot \det(M - \lambda I_3) = -\det \left(\begin{pmatrix} -3-\lambda & 1 & -3 \\ 3 & -\lambda & 4 \\ 6 & -1 & 6-\lambda \end{pmatrix} \right) \parallel + \\ &= -\det \left(\begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 3-\lambda \\ 3 & -\lambda & 4 \\ 6 & -1 & 6-\lambda \end{pmatrix} \right) = -\det \left(\begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & -\lambda & 1 \\ 6 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \right) \\ &= -(3-\lambda) \cdot \det \left(\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \right) = (\lambda-3) \cdot ((-\lambda) \cdot (-\lambda) - (-1) \cdot 1) \\ &= (\lambda-3) \cdot (\lambda^2 + 1) = (\lambda-3) \cdot (\lambda-i) \cdot (\lambda+i). \end{aligned}$$

Also ergeben sich 3, i und -i als Eigenwerte von M .

Zur Bestimmung der Eigenvektoren zum Eigenwert 3 lösen wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & 0 \\ 6 & -1 & 3 & 0 \end{array} \right) \parallel + \cdot 3 \quad + \cdot 1 &\iff \left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 1 & -3 & 0 \\ -15 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \parallel + \cdot \frac{-3}{5} \quad + \cdot \frac{-1}{5} \quad + \cdot \frac{-1}{5} \\ &\iff \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Also ist $\text{Eig}_M(3) = \{ \vartheta \cdot (-1, 3, 3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \vartheta \in \mathbb{R} \}$ der Eigenraum von M zum Eigenwert 3.

Zur Bestimmung der Eigenvektoren zum Eigenwert i lösen wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} -3-i & 1 & -3 & 0 \\ 3 & -i & 4 & 0 \\ 6 & -1 & 6-i & 0 \end{array} \right) \parallel + \cdot (-i) \quad + \cdot i \quad + \cdot i \\ \iff \left(\begin{array}{ccc|c} -3-4i & 0 & -3-4i & 0 \\ 3i & 1 & 4i & 0 \\ 6+3i & 0 & 6+3i & 0 \end{array} \right) \parallel + \cdot \frac{3i}{3+4i} \quad + \cdot \frac{6+3i}{3+4i} \quad + \cdot \frac{1}{-3-4i} &\iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Also ist $\text{Eig}_M(i) = \{ \eta \cdot (1, i, -1)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \eta \in \mathbb{R} \}$ der Eigenraum von M zum Eigenwert i.

Zur Bestimmung der Eigenvektoren zum Eigenwert -i lösen wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} -3-i & 1 & -3 & 0 \\ 3 & -i & 4 & 0 \\ 6 & -1 & 6-i & 0 \end{array} \right) \parallel + \cdot (-i) \quad + \cdot i \quad + \cdot (-i) \\ \iff \left(\begin{array}{ccc|c} -3+4i & 0 & -3+4i & 0 \\ -3i & 1 & -4i & 0 \\ 6-3i & 0 & 6-3i & 0 \end{array} \right) \parallel + \cdot \frac{-3i}{3-4i} \quad + \cdot \frac{6-3i}{3-4i} \quad + \cdot \frac{1}{-3+4i} &\iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Also ist $\text{Eig}_M(-i) = \{ \zeta \cdot (1, -i, -1)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \zeta \in \mathbb{R} \}$ der Eigenraum von M zum Eigenwert $-i$.
Damit ergibt sich $y(z) = (-1, 3, 3)^T \cdot ae^{3z} + (1, i, -1)^T \cdot be^{iz} + (1, -i, -1)^T \cdot ce^{-iz}$ als allgemeine Lösung der Differentialgleichung. Wegen

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} \cdot be^{iz} + \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix} \cdot ce^{-iz} &= \begin{pmatrix} b \\ ib \\ -b \end{pmatrix} \cdot (\cos(z) + i \cdot \sin(z)) + \begin{pmatrix} c \\ -ic \\ -c \end{pmatrix} \cdot (\cos(-z) + i \cdot \sin(-z)) \\ &= \begin{pmatrix} (b+c) \cdot \cos(z) \\ (-b-c) \cdot \sin(z) \\ (-b-c) \cdot \cos(z) \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} (b-c) \cdot \sin(z) \\ (b-c) \cdot \cos(z) \\ (-b+c) \cdot \sin(z) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

liefert die Wahl $A := a$, $B := -b - c$ und $C := i \cdot (b - c)$

$$\begin{aligned} p(z) &= -Ae^{3z} - B \cos(z) + C \sin(z), \\ q(z) &= 3Ae^{3z} + B \sin(z) + C \cos(z) \\ \text{und} \quad r(z) &= 3Ae^{3z} + B \cos(z) - C \sin(z). \end{aligned}$$



DGL/SysHomDiag/
Ag_DGLSysHomJordan_DGLSysZweiterOrdAlsSysErsterOrdSchreibenHVLsgAngegeben.txt

Aufgabe 17.130 ()

Die Aufgabe

DGLSysJordan/Ag_DGLSysHomJordan_DGLSysZweiterOrdAlsSysErsterOrdSchreibenHVLsgAngegeben.tex
ist auch ohne die Bestimmung von Hauptvektoren lösbar.



DGL/ZTests/Ag_DGL_EineGlgVieleVerfahren.tex

Aufgabe 18.131 (Eine Gleichung, viele Verfahren)

ehh

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$u''(x) - 16u(x) = 0$$

- a) Klassifizieren Sie die Differentialgleichung, indem Sie in der folgenden Liste zutreffende Adjektive unterstreichen und unzutreffende durchstreichen:

linear — nicht-linear — erster Ordnung — höherer Ordnung — konstante Koeffizienten —
variable Koeffizienten — homogen — inhomogen — einzelne Gleichung — Gleichungssystem

linear, höherer Ordnung, konstante Koeffizienten, homogen, einzelne Gleichung

Lösung:

linear — ~~nicht-linear~~ — ~~erster Ordnung~~ — höherer Ordnung — konstante Koeffizienten —
~~variable Koeffizienten~~ — homogen — ~~inhomogen~~ — einzelne Gleichung — ~~Gleichungssystem~~

- b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung durch einen geeigneten Ansatz.

Der Exponentialansatz $u(x) = e^{\lambda x}$ liefert $u(x) = A \cdot e^{-4x} + B \cdot e^{4x}$

Lösung:

Mit dem Ansatz $u(x) = e^{\lambda x}$ ergibt sich $u'(x) = \lambda \cdot e^{\lambda x}$ und $u''(x) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}$.

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

$$0 = u''(x) - 16u(x) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} - 16 \cdot e^{\lambda x} = e^{\lambda x} \cdot (\lambda^2 - 16) = e^{\lambda x} \cdot (\lambda + 4) \cdot (\lambda - 4).$$

also $\lambda = -4$ oder $\lambda = 4$. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ergibt sich zu

$$u(x) = A \cdot e^{-4x} + B \cdot e^{4x}.$$

- c) Bestimmen Sie die Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems mit $u(0) = -2$ und $u'(0) = 8$.

$$u(x) = -2 \cdot e^{-4x}$$

Lösung:

Mit $u(x) = A \cdot e^{-4x} + B \cdot e^{4x}$ folgt $u'(x) = -4A \cdot e^{-4x} + 4B \cdot e^{4x}$.

Also ist das folgende lineare Gleichungssystem zu lösen:

$$-2 = u(0) = A \cdot e^0 + B \cdot e^0 = A + B \quad \text{und} \quad 8 = u'(0) = -4A \cdot e^0 + 4B \cdot e^0 = -4A + 4B.$$

Addiert man das vierfache der ersten Gleichung zur zweiten, so erhält man $0 = 8B$, also $B = 0$. Einsetzen in die erste Gleichung liefert dann direkt $A = -2$. Insgesamt folgt

$$u(x) = -2 \cdot e^{-4x}.$$

- d) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x)$ für die Lösung des Anfangswertproblems.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0$$

Lösung: Es gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (-2 \cdot e^{-4x}) = -2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-4x} = -2 \cdot 0 = 0$.

- e) Vergessen Sie jetzt alles, was Sie in den vorhergehenden Aufgabenteilen über u erfahren haben!

Schreiben Sie die Differentialgleichung als lineares homogenes Differentialgleichungssystem erster Ordnung $\vec{y}' = M\vec{y}$ für $y_1(x) = u(x)$ und $y_2(x) = u'(x)$ und bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieses Systems.

$$\vec{y}'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 16 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{y}(x) \qquad \vec{y}(x) = C \cdot e^{-4x} \cdot (1, -4)^T + D \cdot e^{4x} \cdot (1, 4)^T$$

Lösung:

Mit der Differentialgleichung folgt $u''(x) = 16u(x)$, also

$$\vec{y}'(x) = \begin{pmatrix} u'(x) \\ u''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'(x) \\ 16u(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot u(x) + 1 \cdot u'(x) \\ 16 \cdot u(x) + 0 \cdot u'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 16 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 16 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{y}(x).$$

Wir bestimmen die Eigenwerte und Eigenvektoren der Koeffizientenmatrix $M := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}$:

$$0 = (-1)^2 \cdot \det(M - \lambda I_2) = \det \left(\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 16 & -\lambda \end{pmatrix} \right) = (-\lambda)^2 - 1 \cdot 16 = \lambda^2 - 4^2 = (\lambda + 4) \cdot (\lambda - 4).$$

Also hat M die Eigenwerte -4 und 4 . Zur Bestimmung der Eigenvektoren lösen wir die LGS

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 0 \\ 16 & 4 & 0 \end{array} \right) \left\| \begin{array}{l} \cdot (-4) \\ + \end{array} \right. \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{und} \quad \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 1 & 0 \\ 16 & -4 & 0 \end{array} \right) \left\| \begin{array}{l} \cdot 4 \\ + \end{array} \right. \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Also ist $\text{Eig}_M(-4) = \left\{ \alpha \cdot (1, -4)^T \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ der Eigenraum von M zum Eigenwert -4 und $\text{Eig}_M(4) = \left\{ \beta \cdot (1, 4)^T \in \mathbb{R}^2 \mid \beta \in \mathbb{R} \right\}$ ist der Eigenraum von M zum Eigenwert 4 .

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems zu

$$y(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \end{pmatrix} = C \cdot e^{-4x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} + D \cdot e^{4x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \cdot e^{-4x} + D \cdot e^{4x} \\ -4C \cdot e^{-4x} + 4D \cdot e^{4x} \end{pmatrix}.$$

- f) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$u''(x) - 16u(x) = -36x \cdot e^{-2x} \quad \text{mit} \quad u(0) = 1 \quad \text{und} \quad u'(0) = -3$$

durch einen Ansatz vom Typ der rechten Seite. Bestimmen Sie außerdem den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x)$.

$$u(x) = (ax + b) \cdot e^{-2x} + C \cdot e^{-4x} + D \cdot e^{4x} \quad \text{mit} \quad a = 3, b = -1, C = 2, D = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0$$

Bemerkung: Sie dürfen die Ergebnisse der vorherigen Aufgabenteile jetzt wieder verwenden.

Lösung:

Wie oben gesehen hat das charakteristische Polynom die jeweils einfachen Nullstellen -4 und 4 . Außerdem haben wir bereits die homogene Lösung der Differentialgleichung ausgerechnet:

$$u_H(x) = C \cdot e^{-4x} + D \cdot e^{4x}.$$

Die rechte Seite lässt sich schreiben in der Form

$$-36x \cdot e^{-2x} = e^{-2x} \cdot ((-36x) \cdot \cos(0 \cdot x) + 0 \cdot \sin(0x)).$$

Also sind $\mu_1 = -2$, $\mu_2 = 0$, $p(x) = -36x$ und $q(x) = 0$.

Damit ist $\mu_1 + i \cdot \mu_2 = -2 + i \cdot 0 = -2$ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms der Differentialgleichung. Mit $\max\{\deg(p); \deg(q)\} = 1$ folgt die Existenz von $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ und $d \in \mathbb{R}$, so dass

$$u_P(x) = x^0 \cdot e^{-2x} \cdot ((ax + b) \cdot \cos(0 \cdot x) + (cx + d) \cdot \sin(0 \cdot x)) = (ax + b) \cdot e^{-2x}$$

eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung darstellt. Ableiten dieses Ansatzes ergibt

$$u'_P(x) = a \cdot e^{-2x} + (ax + b) \cdot e^{-2x} \cdot (-2) = (-2ax + a - 2b) \cdot e^{-2x}$$

und

$$u''_P(x) = -2a \cdot e^{-2x} + (-2ax + a - 2b) \cdot e^{-2x} \cdot (-2) = (4ax - 4a + 4b) \cdot e^{-2x}.$$

Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, so folgt

$$\begin{aligned} -36x \cdot e^{-2x} &= u''_P(x) - 16u_P(x) = (4ax - 4a + 4b) \cdot e^{-2x} - 16 \cdot (ax + b) \cdot e^{-2x} \\ &= (-12ax - 4a - 12b) \cdot e^{-2x}. \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert das LGS $-12a = -36$ und $-4a - 12b = 0$, sprich

$$a = \frac{-36}{-12} = 3 \quad \text{und} \quad b = \frac{-4a}{12} = -\frac{a}{3} = -\frac{3}{3} = -1.$$

Als allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ergibt sich

$$u(x) = u_H(x) + u_P(x) = C \cdot e^{-4x} + D \cdot e^{4x} + (3x - 1) \cdot e^{-2x}.$$

Damit folgt $u'(x) = -4C \cdot e^{-4x} + 4D \cdot e^{4x} + 3 \cdot e^{-2x} + (3x - 1) \cdot e^{-2x} \cdot (-2)$, also

$$1 = u(0) = C \cdot e^0 + D \cdot e^0 + (3 \cdot 0 - 1) \cdot e^0 = C + D - 1$$

und

$$-3 = u'(0) = -4C \cdot e^0 + 4D \cdot e^0 + 3 \cdot e^0 + (3 \cdot 0 - 1) \cdot e^0 \cdot (-2) = -4C + 4D + 5.$$

Dieses lineare Gleichungssystem für C und D lösen wir mit dem Gauß-Algorithmus

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1+1 \\ -4 & 4 & -3-5 \end{array} \right) \left\| \cdot 4 \right. \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \end{array} \right) \left\| \cdot \frac{+}{8} \quad \cdot \frac{1}{8} \right. \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Mit $C = 2$ und $D = 0$ ergibt sich die Lösung des Anfangswertproblems also zu

$$u(x) = 2 \cdot e^{-4x} + (3x - 1) \cdot e^{-2x}.$$

Mit der Regel von de l'Hospital folgt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} u(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (2 \cdot e^{-4x} + (3x - 1) \cdot e^{-2x}) = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-4x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 1}{e^{2x}} \\ &\stackrel{\frac{0}{\infty}}{=} 2 \cdot 0 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{2e^{2x}} = 0 + \frac{3}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-2x} = \frac{3}{2} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

g) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$u''(x) - 16u(x) = -36x \cdot e^{-2x} \quad \text{mit} \quad u(0) = 1 \quad \text{und} \quad u'(0) = -3$$

durch Laplacetransformation.

$$U(s) = \frac{s^3 + s^2 - 8s - 48}{(s+4) \cdot (s-4) \cdot (s+2)^2} = \frac{2}{s+4} - \frac{1}{s+2} + \frac{3}{(s+2)^2}$$

Lösung:

Bezeichnet $U := \mathcal{L}u$ die Laplace-Transformierte von u , so ergibt sich

$$(\mathcal{L}u'')(s) = s^2 \cdot (\mathcal{L}u)(s) - s \cdot u(0) - u'(0) = s^2 \cdot U(s) - s + 3.$$

Eingesetzt in die linke Seite der Differentialgleichung ergibt sich

$$(\mathcal{L}(u'' - 16u))(s) = (\mathcal{L}u'')(s) - 16 \cdot (\mathcal{L}u)(s) = s^2 \cdot U(s) - s + 3 - 16 \cdot U(s) = (s^2 - 16) \cdot U(s) - (s - 3).$$

Mit $s^2 - 16 = (s + 4) \cdot (s - 4)$ und der Transformation der rechten Seite zu $(\mathcal{L}(-36x \cdot e^{-2x}))(s) = -36 \cdot \frac{1!}{(s - (-2))^{1+1}} = -\frac{36}{(s+2)^2}$ liefert die Transformation der Differentialgleichung

$$U(s) = \frac{1}{s^2 - 16} \cdot \left(\frac{-36}{(s+2)^2} + s - 3 \right) = \frac{-36 + (s-3) \cdot (s^2 + 4s + 4)}{(s^2 - 16) \cdot (s+2)^2} = \frac{s^3 + s^2 - 4s \cdot 2 - 16 \cdot 3}{(s+4) \cdot (s-4) \cdot (s+2)^2}.$$

Wir suchen also Konstanten $J \in \mathbb{R}$, $K \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$ und $N \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} U(s) &= \frac{J}{s+4} + \frac{K}{s-4} + \frac{L}{s+2} + \frac{N}{(s+2)^2} \\ &= \frac{J \cdot (s-4) \cdot (s^2 + 4s + 4) + K \cdot (s+4) \cdot (s^2 + 4s + 4) + L \cdot (s^2 - 16) \cdot (s+2) + N \cdot (s^2 - 16)}{(s+4) \cdot (s-4) \cdot (s+2)^2} \\ &= \frac{J \cdot (s^3 - 12s - 16) + K \cdot (s^3 + 8s^2 + 20s + 16) + L \cdot (s^3 + 2s^2 - 16s - 32) + N \cdot (s^2 - 16)}{(s+4) \cdot (s-4) \cdot (s+2)^2} \\ &= \frac{s^3 \cdot (J + K + L) + s^2 \cdot (8K + 2L + N) + 4s \cdot (-3J + 5K - 4L) + 16 \cdot (-J + K - 2L - N)}{(s+4) \cdot (s-4) \cdot (s+2)^2}. \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert das folgende lineare Gleichungssystem für J , K , L und N :

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & -4 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & -1 & -3 \end{array} \right) \left\| \begin{array}{l} + \\ \cdot (-1) \\ \cdot 1 \\ \cdot (-1) \end{array} \right\| \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 9 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & -5 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right) \left\| \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot (-3) \\ + \\ \cdot (-1) \end{array} \right\| \\ &\longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -8 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \left\| \begin{array}{l} + \\ + \\ \cdot (-1) \\ + \end{array} \right\| \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 9 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \left\| \begin{array}{l} + \\ \cdot \frac{-1}{2} \\ + \\ + \end{array} \right\| \cdot \frac{4}{9} \quad \cdot \frac{-1}{3} \quad \cdot \frac{1}{18} \end{aligned}$$

Also gilt $J = 2$, $K = 0$, $L = -1$ und $N = 3$.

Damit folgt

$$U(s) = \frac{2}{s+4} + \frac{0}{s-4} + \frac{-1}{s+2} + \frac{3}{(s+2)^2} = 2 \cdot \frac{1}{s - (-4)} - \frac{1}{s - (-2)} + 3 \cdot \frac{1!}{(s - (-2))^{1+1}},$$

was rücktransformiert die Lösung des Anfangswertproblems liefert:

$$u(x) = 2 \cdot e^{-4x} - e^{-2x} + 3x \cdot e^{-2x} = 2 \cdot e^{-4x} + (3x - 1) \cdot e^{-2x}.$$

- h) Zusatzaufgabe:** Bestimmen Sie eine zu M ähnliche Diagonalmatrix D — sowie die zugehörige Basistransformationsmatrix T und deren Inverse.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}, T^{-1} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = T^{-1} \cdot M \cdot T = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Wir transformieren die Matrix in eine Basis, die aus Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von M besteht. S bezeichne dabei die Standardbasis.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \quad \Rightarrow \quad T = D_{SB}(\text{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T^{-1} = D_{BS}(\text{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Wir invertieren: $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \left\| \begin{array}{l} \cdot 4 \\ + \end{array} \right. \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 1 \end{array} \right) \left\| \begin{array}{l} + \\ \cdot \frac{-1}{8} \end{array} \right. \cdot \frac{1}{8} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \end{array} \right)$

Mit $D_{SS}(M) = M$ folgt

$$\begin{aligned} D &= D_{BB}(M) = D_{BS}(\text{id}) \cdot D_{SS}(M) \cdot D_{SB}(\text{id}) = T^{-1} \cdot M \cdot T = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 16 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 4 \cdot 0 + (-1) \cdot 16 & 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \\ 4 \cdot 0 + 1 \cdot 16 & 4 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -16 & 4 \\ 16 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} (-16) \cdot 1 + 4 \cdot (-4) & (-16) \cdot 1 + 4 \cdot 4 \\ 16 \cdot 1 + 4 \cdot (-4) & 16 \cdot 1 + 4 \cdot 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -32 & 0 \\ 0 & 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



DiffEinDim/DiffQuot/Ag_Ableitung_DefinitionStetigDiffbar.tex

Aufgabe 19.132 (Stetigkeit und Differenzierbarkeit)

kr

Bestimmen Sie die Konstante $a \in \mathbb{R}$ jeweils so, dass die angegebene Funktion bei $x = 0$ stetig ist. Untersuchen Sie anschließend für welche $x \in \mathbb{R}$ die Funktion differenzierbar ist und für welche $x \in \mathbb{R}$ die Funktion stetig differenzierbar ist.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{für } x \neq 0 \\ a, & \text{für } x = 0 \end{cases}$

$$a = 0, \text{ diff'bar auf } \mathbb{R}, f'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}, \text{ stetig diff'bar auf } \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Lösung:

- **Stetigkeit:** Wegen $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ muss $a = 0$ sein.

(Grenzwert folgt mit Einschliessungskriterium aus $-x^2 \leq x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$ und $\lim_{x \rightarrow 0} \pm x^2 = 0$.)

- **Differenzierbarkeit:** f ist für $x \neq 0$ diffbar, da Komposition differenzierbarer Funktionen.

$$x = 0: \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \cos\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \cos\left(\frac{1}{h}\right) = 0$$

(Limes folgt wieder analog mit Einschliessungskriterium.)

- **Ableitungsfunktion:** $f'(x) = \begin{cases} 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$.

Für $x \neq 0$ ist f' als Komposition diffbarer Funktionen diffbar.

$$x = 0: \text{ Betrachte } \lim_{x \rightarrow 0} 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

$\lim_{x \rightarrow 0} 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ (siehe oben), $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ existiert nicht (sieht man mit den Folgen $a_n = \frac{1}{2n\pi} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und $b_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ weil $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{a_n}\right) = 0 \neq 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{b_n}\right)$).

Damit ist f' unstetig bei $x = 0$, also insgesamt f stetig diffbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} \cdot \ln(1 + |x|), & \text{für } x \neq 0 \\ a, & \text{für } x = 0 \end{cases}$

$$a = 1, \text{ stetig diff'bar auf } \mathbb{R} \setminus \{0\}, g'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} \cdot \ln(1 + x) + \frac{1}{x \cdot (1+x)}, & \text{für } x > 0 \\ \frac{1}{x^2} \cdot \ln(1 - x) + \frac{1}{x \cdot (1-x)}, & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Lösung:

$x \neq 0$: g ist als Komposition stetig diffbarer Funktionen stetig diffbar. Wir betrachten im Folgenden nur den Punkt $x = 0$:

- **Stetigkeit:** Betrachten $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$. Fallunterscheidung:

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\ln(1 - x)}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-\frac{1}{1-x}}{-1} = 1 \text{ (mit 0/0-Regel von L'Hospital).}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1 + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1 \text{ (mit 0/0-Regel von L'Hospital).}$$

Damit ist g bei $x = 0$ stetig für $a = 1$.

• **Diffbarkeit:**

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\frac{\ln(1+h)}{h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+h) - h}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{-\frac{1}{(1+h)^2}}{2} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(mit zweimaliger Anwendung der 0/0-Regel von L'Hospital).

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\frac{\ln(1-h)}{-h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-\ln(1-h) - h}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\frac{1}{1-h} - 1}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\frac{1}{(1-h)^2}}{2} = \frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(mit zweimaliger Anwendung der 0/0-Regel von L'Hospital).

Damit ist g bei $x = 0$ nicht diffbar.



DiffEinDim/DiffQuot/Ag_Ableitung_Differenzenquotient2.tex

Aufgabe 19.133 (Differenzenquotienten und Ableitung)

jgl

Untersuchen Sie mittels der Definition der Ableitung, ob die Funktion f_k an der Stelle x_k differenzierbar ist, und berechnen Sie in diesem Fall die Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten:

a) $f_1(x) = \frac{(x-2)^4}{6}$ in $x_1 = 5$

18

Lösung: Für $h \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{f_1(5+h) - f_1(5)}{h} &= \frac{\frac{1}{6} \cdot ((5+h)-2)^4 - \frac{1}{6} \cdot (5-2)^4}{h} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{(3+h)^4 - 3^4}{h} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{3^4 + 4 \cdot 3^3 h + 6 \cdot 3^2 h^2 + 4 \cdot 3 h^3 + h^4 - 3^4}{h} \\ &= 2 \cdot 3^2 + 3^2 h + 2h^2 + \frac{1}{6} \cdot h^3 \\ &\rightarrow 2 \cdot 3^2 = 18\end{aligned}$$

für $h \rightarrow 0$.

b) $f_2(x) = \sqrt{7-x}$ in $x_2 = 3$

$-\frac{1}{4}$

Lösung: Für $h \neq 0$ gilt mit der Stetigkeit der Wurzelfunktion

$$\begin{aligned}\frac{f_2(3+h) - f_2(3)}{h} &= \frac{\sqrt{7-(3+h)} - \sqrt{7-3}}{h} \\ &= \frac{\sqrt{4-x} - 2}{h} \cdot \frac{\sqrt{4-x} + 2}{\sqrt{4-x} + 2} \\ &= \frac{4-h-4}{h \cdot \sqrt{4-h} + 2} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{4-h} + 2} \\ &\rightarrow -\frac{1}{\sqrt{4} + 2} = -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

für $h \rightarrow 0$.

c) $f_3(x) = |x^2 - 16|$, $x_3 = -4$

nicht vorhanden

Lösung: Für $h \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{f_3(-4+h) - f_3(-4)}{h} &= \frac{|(-4+h)^2 - 16| - |(-4)^2 - 16|}{h} \\&= \frac{|16 - 8h + h^2 - 16| - 0}{h} \\&= \frac{|h \cdot (h - 8)|}{h} \\&= \begin{cases} |h - 8| & \text{für } h > 0 \\ -|h - 8| & \text{für } h < 0 \end{cases} \\&\rightarrow \begin{cases} |-8| = 8 & \text{für } h \rightarrow 0+ \\ -|-8| = -8 & \text{für } h \rightarrow 0- \end{cases}\end{aligned}$$

Da linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert nicht übereinstimmen, existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten von f_3 in $x_3 = -4$ für $h \rightarrow 0$ nicht. Deshalb ist f_3 in $x_3 = -4$ nicht differenzierbar.



DiffEinDim/DiffQuot/Ag_Ableitung_Differenzenquotient5.tex

Aufgabe 19.134 (Lücken füllen)

dh

Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass $f_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$x \mapsto f_\alpha(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} \cdot \sin(x), & \text{falls } x \neq 0 \text{ ist} \\ \alpha, & \text{falls } x = 0 \text{ ist} \end{cases}$$

stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist! Wo ist die Funktion dann differenzierbar? $\alpha = 1$, f_1 ist differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$

Lösung:

Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$\begin{aligned}f_\alpha(x) &= \frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{x} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{(-1)^0 \cdot x^{2 \cdot 0}}{(2 \cdot 0 + 1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n+1)!} \\&= \frac{1 \cdot x^0}{1!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{1 \cdot 1}{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n+1)!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n+1)!}.\end{aligned}$$

Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist die Funktion unabhängig von α stetig als Zusammensetzung stetiger Funktionen. Im Nullpunkt erhalten wir als Grenzwert für alle $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_\alpha(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n+1)!} \right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 0^{2n}}{(2n+1)!} = 1 + 0 = 1.$$

Damit f_α stetig in 0 ist, muss also $f_\alpha(0) = \alpha = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} f_\alpha(x)$ sein.

Also müssen wir $\alpha = 1$ in die Funktionsdefinition einsetzen, damit f_α auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist f_1 differenzierbar als Zusammensetzung differenzierbarer Funktionen. Im Nullpunkt müssen wir den Differenzenquotienten ansetzen, mit dem oben gefundenen Wert für $f_1(0)$:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(0+h) - f_1(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(h)}{h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot h^{2n}}{(2n+1)!} - 1 \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot h^{2n}}{(2n+1)!} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot h^{2n-1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 0^{2n-1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0.\end{aligned}$$

Damit ist f_1 im Nullpunkt differenzierbar mit $f'_1(0) = 0$.



DiffEinDim/DiffQuot/Ag_Ableitung_Differenzenquotient6.tex

dh

Aufgabe 19.135 (Einseitige Ableitungen)

Bestimmen Sie sämtliche ein- und zweiseitigen Ableitungen (falls vorhanden) der Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto f(x) := \begin{cases} x^2 - 1, & \text{falls } x < 1 \text{ ist} \\ 0, & \text{falls } x = 1 \text{ ist} \\ \ln(x), & \text{falls } x > 1 \text{ ist} \end{cases}$$

auf dem Definitionsbereich $\mathbb{R}$ und entscheiden Sie, wo die Funktion stetig bzw. differenzierbar ist.

$2x$ für $x < 1$, $\frac{1}{x}$ für $x > 1$, nicht diff'bar für $x = 1$, stetig auf $\mathbb{R}$

Lösung:

Innerhalb der Abschnitte ist die Funktion differenzierbar und stetig (als Zusammensetzung stetiger und differenzierbarer Funktionen), daher ist für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{falls } x < 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{falls } x > 1 \end{cases}$$

sowohl einseitig wie auch zweiseitig.

An der Stelle $x = 1$ müssen wir die Differenzenquotienten separat ansetzen:

$$\begin{aligned} f'(1-) &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \stackrel{h \leq 0}{=} \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{((1+h)^2 - 1) - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} (2 + h) = 2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f'(1+) &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \stackrel{h \geq 0}{=} \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{(\ln(1+h)) - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+h)}{h} \stackrel{\text{Fall „}\frac{0}{0}\text{“}}{=} \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{1+h}}{1} = 1 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} f'(1+) &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \stackrel{h \geq 0}{=} \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{(\ln(1+h)) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{(\ln(1+h)) - (\ln(1))}{h} \\ &= \left[\frac{d}{dt} (\ln(t)) \right]_{t=1} = \left[\frac{1}{t} \right]_{t=1} = \frac{1}{1} = 1. \end{aligned}$$

Da die einseitigen Ableitungen verschieden sind, existiert die beidseitige Ableitung $f'(x)$ für $x = 1$ nicht, die Funktion f ist nur auf $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ differenzierbar.

Wegen

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1) = 0$$

ist sie aber auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

Alternativlösung ohne Differenzenquotienten

Die Differenzierbarkeit im Punkt $x = 1$ kann hier auch ohne Differenzenquotienten untersucht werden.

Wegen

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{falls } x < 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{falls } x > 1 \end{cases}$$

gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} 2x = 2 \quad (\text{Steigung von links ist } 2) \\ \lim_{x \rightarrow 1+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{x} = 1 \quad (\text{Steigung von rechts ist } 1). \end{aligned}$$

D.h., der Funktionsgraph hat an der Stelle $x = 1$ einen „Knick“ und damit ist die Funktion im Punkt $x = 1$ nicht differenzierbar.



DiffEinDim/DiffQuot/Ag_Differenzierbarkeit_Abschnittsweise.tex

Aufgabe 19.136 (Differenzierbarkeit)

Altklausur

Gegeben seien die Funktionen $f: (-\infty; \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: (-\infty; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$t \mapsto f(t) := \begin{cases} \frac{1+t}{1-t}, & \text{für } t < 0 \\ e^{\sin(t)}, & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{und} \quad x \mapsto g(x) := \begin{cases} 0, & \text{für } x \leq 0 \\ \frac{x}{\ln(x)}, & \text{für } 0 < x < 1 \end{cases}.$$

a) Untersuchen Sie f und g auf Stetigkeit in $a := 0$.

f und g sind stetig

Lösung:

Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{n \rightarrow 0^+} e^x = e^0 = 1 \\ \lim_{n \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{1+x}{1-x} = \frac{1+0}{1-0} = 1 \end{aligned}$$

Da $f(0) = 1$ ist die Funktion stetig.

Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow 0^+} g(x) &= \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln(x)} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow 0^-} g(x) &= 0 \end{aligned}$$

Da $g(0) = 0$ ist die Funktion stetig.

b) Berechnen Sie $f'(t)$ für $t \in (-\infty; \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\}$ und $g'(x)$ für $x \in (-\infty; 1) \setminus \{0\}$ und prüfen Sie, ob f und g an der Stelle $a = 0$ differenzierbar sind.

$$f'(t) = \frac{2}{(t-1)^2} \text{ für } t < 0 \text{ und } f'(t) = e^{\sin(t)} \cdot \cos(t) \text{ für } 0 < t < \frac{\pi}{2}, f \text{ ist nicht diff'bar in } a = 0$$

$$g'(x) = 0 \text{ für } x < 0, g'(x) = \frac{\ln(x)-1}{(\ln(x))^2} \text{ für } 0 < x < 1, g \text{ ist diff'bar in } a = 0$$

Lösung:

Es gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \begin{cases} \frac{2}{(1-x)^2}, & x < 0 \\ e^{\sin x} \cos x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \\ \left(\frac{1+x}{1-x} \right)' &= \frac{1 \cdot (1-x) - (1+x) \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow 0^+} f'(x) &= e^{\sin(0)} \cdot \cos(0) = 1 \\ \lim_{n \rightarrow 0^-} f'(x) &= \frac{2}{(1-0)^2} = 2 \end{aligned}$$

ist f nicht differenzierbar in $a = 0$.

Außerdem gilt

$$g'(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{\ln(x)-1}{(\ln(x))^2} & , 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} g'(x) = \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)-1}{(\ln(x))^2} = \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{(\ln(x))^2} = 0 - 0 = 0$$

Es folgt, dass g an der Stelle $a = 0$ differenzierbar ist (mit $g'(0) = 0$).

c) Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von f und g und den Wertebereich von f .

f ist streng monoton wachsend mit $f((-\infty; \frac{\pi}{2}]) = (-1; e]$ und g ist monoton fallend

Lösung:

Für $x < 0$: Es ist $(1-x)^2 > 0$ und damit $f'(x) > 0$. Für $0 < x < \frac{\pi}{2}$: Es sind $e^{\sin(x)} > 0$ und $\cos(x) > 0$ und damit $f'(x) > 0$. Da f stetig in x_0 ist, folgt f ist streng monoton wachsend in $(-\infty, \frac{\pi}{2}]$. Es gilt $f(\frac{\pi}{2}) = e$ und

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{1+x}{1-x} = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} + 1}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{1}{-1} = -1$$

Da f streng monoton wachsend und stetig ist, gilt für den Wertebereich $W_f = (-1, e]$.

Aus Teil b) erhält man $g'(x) < 0$ für alle $x \in (0, 1)$ und g ist damit streng monoton fallend in $(0, 1)$. Wegen $g(x) = 0$ für $x \in (-\infty, 0]$ und der Stetigkeit von g , ist damit g insgesamt monoton fallend.

Quelle: Aufgabe 4a, Klausur HM1 für Bauingenieure, 15.08.2015 bzw. 03.03.2015



DiffEinDim/DiffRegeln/Ag_Ableitung_EHochLn.tex

Aufgabe 20.137 (Ableiten mit dem „e hoch ln“-Trick)

Bestimmen Sie die Ableitung von $f: (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x)$ und $f(x)$ wie jeweils angegeben.

a) $f(x) := x^x$

$$f'(x) = (1 + \ln(x)) \cdot x^x$$

Lösung:

Wir schreiben $f(x)$ für alle $x \in (0; \infty)$ zunächst um:

$$f(x) = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \cdot \ln(x)}.$$

Mit der Kettenregel und der Produktregel folgt nun

$$f'(x) = e^{x \cdot \ln(x)} \cdot (x \cdot \ln(x))' = x^x \cdot (1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}) = x^x \cdot (\ln(x) + 1).$$

b) $f(x) := (x^2 + 1)^{\frac{1}{x}}$

$$f'(x) = (x^2 + 1)^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{2}{x^2 + 1} - \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2} \right)$$

Lösung:

Wir schreiben $f(x)$ für alle $x \in (0; \infty)$ zunächst um:

$$f(x) = (x^2 + 1)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln((x^2 + 1)^{\frac{1}{x}})} = e^{\frac{1}{x} \cdot \ln(x^2 + 1)}.$$

Mit der Kettenregel und der Produktregel folgt nun

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\frac{1}{x} \cdot \ln(x^2 + 1)} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot \ln(x^2 + 1) \right)' = (x^2 + 1)^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \cdot \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{x} \cdot (\ln(x^2 + 1))' \right) \\ &= (x^2 + 1)^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x \right) = (x^2 + 1)^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{2}{x^2 + 1} - \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2} \right). \end{aligned}$$

c) $f(x) := x^{x^2}$

$$f'(x) = x^{x^2} \cdot x^{x^2} \cdot (2x \cdot (\ln(x))^2 + x \cdot \ln(x) + \frac{1}{x})$$

Lösung:

Wir schreiben $f(x)$ für alle $x \in (0; \infty)$ zunächst um:

$$f(x) = x^{x^2} = e^{\ln(x^{x^2})} = e^{x^2 \cdot \ln(x)} = e^{e^{\ln(x^2)} \cdot \ln(x)} = e^{\ln(x) \cdot e^{x^2 \cdot \ln(x)}}.$$

Mit der Kettenregel und der Produktregel folgt nun

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\ln(x) \cdot e^{x^2 \cdot \ln(x)}} \cdot \left(\ln(x) \cdot e^{x^2 \cdot \ln(x)} \right)' = x^{x^2} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot e^{x^2 \cdot \ln(x)} + \ln(x) \cdot \left(e^{x^2 \cdot \ln(x)} \right)' \right) \\ &= x^{x^2} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot e^{x^2 \cdot \ln(x)} + \ln(x) \cdot e^{x^2 \cdot \ln(x)} \cdot (x^2 \cdot \ln(x))' \right) \\ &= x^{x^2} \cdot e^{\ln(x^2)} \cdot \left(\frac{1}{x} + \ln(x) \cdot (2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x}) \right) \\ &= x^{x^2} \cdot x^{x^2} \cdot \left(2x \cdot (\ln(x))^2 + x \cdot \ln(x) + \frac{1}{x} \right). \end{aligned}$$

**Aufgabe 20.138** (Ableitung)Berechnen Sie die Ableitung von g_1 bis g_6 mit

- a) $g_1(x) = 6 \ln(x + 3 + x^2),$ $g'_1(x) = 6 \cdot \frac{1+2x}{x+3+x^2}$
- b) $g_2(x) = 4e^{x^2-3x},$ $g'_2(x) = 4 \cdot (2x - 3) \cdot e^{x^2-3x}$
- c) $g_3(x) = (3 \cos x + \sin x)^7,$ $g'_3(x) = 7(3 \cos x + \sin x)^6 \cdot (-3 \sin x + \cos x)$
- d) $g_4(x) = x \sin(e^x),$ $g'_4(x) = \sin(e^x) + x \cos(e^x) \cdot e^x$
- e) $g_5(x) = (2 - x) \tan(3x),$ $g'_5(x) = 3(2 - x) \tan^2(3x) - \tan(3x) + 3(2 - x)$
- f) $g_6(x) = 2x\sqrt{1+x^4}.$ $g'_6(x) = \frac{2+6x^4}{\sqrt{1+x^4}}$

Lösung: Berechnung der ersten Ableitung der Funktionen:

- a) $g'_1(x) = 6 \cdot \frac{1+2x}{x+3+x^2},$
- b) $g'_2(x) = 4 \cdot e^{x^2-3x} \cdot (2x - 3) = 4 \cdot (2x - 3) \cdot e^{x^2-3x},$
- c) $g'_3(x) = 7(3 \cos x + \sin x)^6 \cdot (-3 \sin x + \cos x),$
- d) $g'_4(x) = 1 \cdot \sin(e^x) + x \cos(e^x) \cdot e^x = \sin(e^x) + x \cos(e^x) \cdot e^x,$
- e) $g'_5(x) = -\tan(3x) + (2 - x)(1 + \tan^2(3x)) \cdot 3 = 3(2 - x) \tan^2(3x) - \tan(3x) + 3(2 - x)$
- f) $g'_6(x) = 2(1 \cdot \sqrt{1+x^4} + x \cdot \frac{4x^3}{2\sqrt{1+x^4}}) = \frac{2+6x^4}{\sqrt{1+x^4}}.$

**Aufgabe 20.139** (Ableitungen)

jgl

Berechnen Sie die Ableitung von $f_k : D_k \rightarrow \mathbb{R}$ mit

- a) $f_1(x) = \frac{2x-x^2}{x+1}$ $-1 + \frac{3}{(x+1)^2}$
- b) $f_2(x) = \frac{x+x^2}{2+3x}$ $\frac{3x^2+4x+2}{(2+3x)^2}$
- c) $f_3(x) = \frac{\frac{x}{3}-x^2}{1-x}$ $\frac{3x^2-6x+1}{3(x-1)^2}$
- d) $f_4(x) = \frac{\sin(x)-1}{\cos(x)+1}$ $\frac{1+\cos(x)-\sin(x)}{(\cos(x)+1)^2}$
- e) $f_5(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ $\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$
- f) $f_6(x) = \frac{x-x^3}{e^{2x}}$ $(2x^3 - 3x^2 - 2x + 1)e^{-2x}$

**Aufgabe 20.140** (Ableitung)

jgl

Berechnen Sie die Ableitung von $f_k : D_k \rightarrow \mathbb{R}$ für $k \in \{1, 2, 3\}$ mit

- a) $f_1(x) := e^{\sin(2x)}$ $2 \cos(2x) e^{\sin(2x)}$
- b) $f_2(x) := \ln(\sin(8x))$ $\frac{8 \cos(8x)}{\sin(8x)} = 8 \cot(8x)$
- c) $f_3(x) := \cos(\ln(x^2))$ $-\frac{2}{x} \sin(\ln(x^2))$

**Aufgabe 20.141** (Ableitung)

jgl

Berechnen Sie die Ableitung von $f_k : D_k \rightarrow \mathbb{R}$ mit

- a) $f_1(x) := \arctan\left(\frac{x^2}{4}\right)$ $\frac{8x}{x^2+16}$
- b) $f_2(x) := \ln(\cos^2(\pi x))$ $-2\pi \tan(\pi x)$
- c) $f_3(x) := \arctan\left(\frac{1}{\ln(3x^2)}\right)$ $-\frac{2}{x(\ln^2(3x^2)+1)}$

**Aufgabe 20.142** (Ableitung der Umkehrfunktion)

spf

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := x + e^{2x}$.

- a) Zeigen Sie, dass f umkehrbar ist! f ist streng monoton

Lösung:

id und 2id sind auf $\mathbb{R}$ genau wie die Exponentialfunktion streng monoton wachsend und stetig. Da sowohl die Hintereinanderausführung als auch die Summe zweier streng monoton wachsender und stetiger Funktionen ebenfalls streng monoton wächst und stetig ist, ist f also streng monoton wachsend und stetig. Aus der strengen Monotonie folgt die Injektivität.

(Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f'(x) = 1 + 2e^{2x} > 0$.)

Wegen $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\underbrace{x}_{\rightarrow -\infty} + \underbrace{e^{2x}}_{\rightarrow 0} \right) = -\infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\underbrace{x}_{\rightarrow \infty} + \underbrace{e^{2x}}_{\rightarrow \infty} \right) = \infty$

gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in \mathbb{R}$ und ein $y_n \in \mathbb{R}$ mit $x_n < y_n$ und $f(x_n) \leq -n < n \leq f(y_n)$. Der Zwischenwertsatz, angewendet auf $[x_n, y_n]$ und f liefert, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ von f alle Werte zwischen $f(x_n)$ und $f(y_n)$ angenommen werden.

Also ist $f(\mathbb{R}) \supseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [f(x_n); f(y_n)] \supseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n; n] = \mathbb{R}$, was auch die Surjektivität von f liefert.

- b) Zeigen Sie, dass f^{-1} in $\ln(2e^4)$ differenzierbar ist und geben Sie die Ableitung der Umkehrfunktion in diesem Punkt an! $(f^{-1})'(\ln(2e^4)) = \frac{1}{9}$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f'(x) = 1 + 2e^{2x} > 0$. Da f' also nirgendwo verschwindet, ist f^{-1} auf $\mathbb{R}$ differenzierbar.

Mit $f(\ln(2)) = \ln(2) + e^{2 \cdot \ln(2)} = \ln(2) + e^{\ln(2^2)} = \ln(2) + 4 = \ln(2) + \ln(e^4) = \ln(2e^4)$ folgt $f^{-1}(\ln(2e^4)) = \ln(2)$ und mit der Regel zur Ableitung der Umkehrfunktion ergibt sich $(f^{-1})'(\ln(2e^4)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\ln(2e^4)))} = \frac{1}{f'(\ln(2))} = \frac{1}{1+2e^{2 \cdot \ln(2)}} = \frac{1}{1+2e^{\ln(2^2)}} = \frac{1}{1+2 \cdot 4} = \frac{1}{9}$.

**Aufgabe 20.143** (Ableitung der Umkehrfunktion)

spf

Gegeben sei $f : (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := \ln(x) + x^2 - 1$. Zeigen Sie, dass f surjektiv und injektiv (und damit umkehrbar) ist und berechnen Sie mit dem Umkehrsatz die Ableitung von f^{-1} im Nullpunkt.

Lösung:

Diese Funktion kann man nicht direkt nach x auflösen. Die Funktion ist erstmal injektiv, da f streng monoton wachsend ist (ln und $\text{id} \cdot \text{id}$ sind auf $(0, \infty)$ streng monoton wachsend). f ist stetig als Zusammensetzung stetiger Funktionen.

Sie ist auch surjektiv, da wegen

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

und dem Zwischenwertsatz *alle* $x \in (-\infty; \infty)$ als Funktionswert auftreten. Damit ist die Funktion umkehrbar. Es gibt also eine Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (0; \infty)$, deren Zuordnungsvorschrift wir aber nicht explizit hinschreiben können.

Wir haben $f(1) = 0$ (kann man raten) und in diesem Punkt nimmt die erste Ableitung $f'(x) = \frac{1}{x} + 2x$ den Wert $f'(1) = 3 \neq 0$ an. Nach dem Umkehrsatz ist f^{-1} dann in $y = 0$ differenzierbar und nimmt den Wert

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3}$$

an.



DiffEinDim/DiffRegeln/Ag_Differentialrechnung_Ableitung_DefBereich.tex

Aufgabe 20.144 (Definitionsbereiche und Ableitung)

13.1.3

Bestimmen Sie den Definitionsbereich D_0 der Funktion f , den Definitionsbereich D_1 der Ableitung f' , und berechnen Sie die Ableitung f' von:

a) $f(x) = x^2 + t^2$ mit $t \in \mathbb{R}$ $D_0 = D_1 = \mathbb{R}, f'(x) = 2x$	$f'(x) = -3 \sin(3x)$	$D_0 = D_1 = \mathbb{R}, f'(x) = 7(x^5 + \sin(x))^6(5x^4 + \cos(x))$
b) $f(t) = x^2 + t^2$ mit $x \in \mathbb{R}$ $D_0 = D_1 = \mathbb{R}, f'(t) = 2t$	e) $f(x) = \cos(x^3)$ $D_0 = D_1 = \mathbb{R}, f'(x) = -3x^2 \sin(x^3)$	h) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ $D_0 = \mathbb{R} \setminus (2, 3), D_1 = \mathbb{R} \setminus [2, 3], f'(x) = \frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+6}}$
c) $f(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^5$ $D_0 = D_1 = \mathbb{R} \setminus \{-1\}, f'(x) = \frac{5x^4}{(1+x)^6}$	f) $f(x) = (\cos(x))^3$ $D_0 = D_1 = \mathbb{R}, f'(x) = -3 \sin(x)(\cos(x))^2$	i) $f(x) = \sqrt{-x^4 + 11}$ $D_0 = [-\sqrt[4]{11}, \sqrt[4]{11}], D_1 = (-\sqrt[4]{11}, \sqrt[4]{11}), f'(x) = -\frac{2x^3}{\sqrt{-x^4+11}}$
d) $f(x) = \cos(3x)$	g) $f(x) = (x^5 + \sin(x))^7$	



DiffEinDim/DiffRegeln/Ag_Differentialrechnung_Ableitung_erste_gemischt.tex

Aufgabe 20.145 (Ableitungsfunktion)

14.2.1

Berechnen Sie die erste Ableitung f' von

- a) $f(x) = \tan(x) + \arctan(x)$
$$f'(x) = \frac{1}{(\cos(x))^2} + \frac{1}{1+x^2} = (1 + (\tan(x))^2) + \frac{1}{1+x^2}$$
- b) $f(x) = \exp(2x) + \exp(-x) \cdot x$
$$f'(x) = 2e^{2x} - e^{-x} \cdot x + e^{-x}$$
- c) $f(x) = \sqrt{1 - (\cos(x))^2}$
$$f'(x) = \cos(x) \text{ für } 2k\pi < x < (2k+1)\pi \text{ und } f'(x) = -\cos(x) \text{ für } (2k-1)\pi < x < 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Lösung:

Zunächst kann der Funktionsterm mit dem *trigonometrischen Pythagoras*

$$(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1^2 = 1$$

vereinfacht werden zu

$$f(x) = \sqrt{1 - (\cos(x))^2} = \sqrt{(\sin(x))^2} = |\sin(x)| = \begin{cases} \sin(x), & \text{falls } \sin(x) \geq 0 \\ -\sin(x), & \text{falls } \sin(x) < 0 \end{cases}$$

Es gilt $\sin(x) > 0 \iff x \in (2k\pi; (2k+1) \cdot \pi)$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ und $\sin(x) < 0 \iff x \in ((2k-1) \cdot \pi; 2k\pi)$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

Auf dem Inneren der einzelnen Teilstücke lässt sich die Ableitung von f mit Hilfe der Ableitungsregeln und Standardableitungen berechnen. Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{\ell\pi \in \mathbb{R} \mid \ell \in \mathbb{Z}\}$ gilt

$$f'(x) = \begin{cases} \cos(x), & \text{falls ein } k \in \mathbb{Z} \text{ mit } x \in (2k\pi; (2k+1) \cdot \pi) \text{ existiert} \\ -\cos(x), & \text{falls ein } k \in \mathbb{Z} \text{ mit } x \in ((2k-1) \cdot \pi; 2k\pi) \text{ existiert} \end{cases}$$

Die Ableitungsfunktion f' ist an den Stellen $x = \ell\pi$ für alle $\ell \in \mathbb{Z}$ *nicht* definiert, da hier die rechts- und linksseitige Ableitung nicht übereinstimmen:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2k\pi + h) - f(2k\pi)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sin(2k\pi + h) - \sin(2k\pi)}{h} = \left[\frac{d}{dx}(\sin(x)) \right]_{x=2k\pi} \\ &= [\cos(x)]_{x=2k\pi} = \cos(2k\pi) = 1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2k\pi + h) - f(2k\pi)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-\sin(2k\pi + h) - \sin(2k\pi)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-\sin(2k\pi + h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-\sin(2k\pi + h) + \sin(2k\pi)}{h} = \left[\frac{d}{dx}(-\sin(x)) \right]_{x=2k\pi} \\ &= [-\cos(x)]_{x=2k\pi} = -\cos(2k\pi) = -1. \end{aligned}$$

Für die Stellen $x = (2k+1) \cdot \pi$ läuft die Rechnung analog.

d) $f(x) = \cos(x) + \frac{2}{x} + 5$

$$f'(x) = -\sin(x) - \frac{2}{x^2}$$

e) $f(x) = \arctan(x^2 + 2x)$

$$f'(x) = \frac{2x+2}{1+(x^2+2x)^2}$$

Lösung:

Mit der Ableitung der Arkustangensfunktion

$$(\arctan(u))' = \frac{1}{1+u^2}$$

folgt mit der Kettenregel

$$\arctan(x^2 + 2x) = \frac{1}{1+(x^2+2x)^2} \cdot (2x+2) = 2 \cdot \frac{x+1}{1+(x^2+2x)^2}$$

f) $f(x) = \ln(\sin(\sqrt{x}))$

$$f'(x) = \frac{\cos(\sqrt{x})}{2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sin(\sqrt{x})} = \frac{\cot(\sqrt{x})}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

g) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{1-2\ln(x)}{x^3}$$

h) $f(x) = x^{-3} \cdot \cot(x)$

$$f'(x) = -\frac{x+3\sin(x)\cdot\cos(x)}{x^4\cdot(\sin(x))^2}$$

i) $f(x) = \frac{\exp(\sqrt{x})}{\cos(x)}$

$$f'(x) = \frac{(\cos(x)+2\cdot\sqrt{x}\cdot\sin(x))\cdot e^{\sqrt{x}}}{2\cdot\sqrt{x}\cdot(\cos(x))^2}$$

Lösung:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \cos(x) - e^{\sqrt{x}} \cdot (-\sin(x))}{(\cos(x))^2} = \frac{(\cos(x) + 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sin(x)) \cdot e^{\sqrt{x}}}{2 \cdot \sqrt{x} \cdot (\cos(x))^2}.$$



DiffEinDim/DiffRegeln/Ag_Differentialrechnung_Ableitung_erste_leicht.tex

Aufgabe 20.146 (Erste Ableitung)

14.1.2

Berechnen Sie die erste Ableitung f' von

a) $f(x) = 4x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x}$

$$f'(x) = 16x^3 + x - \frac{1}{x^2}$$

Lösung:

Mit der Summen- und der Faktorregel liefert die Standardableitung $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (4x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x})' \stackrel{\text{SR}}{=} (4x^4)' + (\frac{1}{2}x^2)' + (\frac{1}{x})' \\ &\stackrel{\text{FR}}{=} 4 \cdot (x^4)' + \frac{1}{2} \cdot (x^2)' + (x^{-1})' \stackrel{\text{SA}}{=} 4 \cdot 4 \cdot x^3 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x^1 + (-1) \cdot x^{-2} = 16x^3 + x - \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

b) $f(x) = \frac{3}{x^3} + 4x^{-1}$

$$f'(x) = -\frac{4x^2+9}{x^4}$$

Lösung:

Mit der Summen- und der Faktorregel liefert die Standardableitung $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\frac{3}{x^3} + 4x^{-1})' = (3x^{-3} + 4x^{-1})' \stackrel{\text{SR}}{=} (3x^{-3})' + (4x^{-1})' \stackrel{\text{FR}}{=} 3 \cdot (x^{-3})' + 4 \cdot (x^{-1})' \\ &\stackrel{\text{SA}}{=} 3 \cdot (-3) \cdot x^{-4} + 4 \cdot (-1) \cdot x^{-2} = -9 \cdot \frac{1}{x^4} - 4 \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{-9-4x^2}{x^4} = -\frac{4x^2+9}{x^4}. \end{aligned}$$

c) $f(x) = -\sin(2x)$

$$f'(x) = -2 \cdot \cos(2x)$$

Lösung:

f ist die Verkettung der Funktionen $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto -\sin(t)$ und $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto 2x$. Die Standardableitungen $(\sin(t))' = \cos(t)$ und $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ liefern mit der Faktorregel

$$\begin{aligned} g'(t) &= (-\sin(t))' = ((-1) \cdot \sin(t))' \stackrel{\text{FR}}{=} (-1) \cdot (\sin(t))' \stackrel{\text{SA}}{=} (-1) \cdot \cos(t) = -\cos(t) \\ \text{und} \quad h'(x) &= (2x)' = (2 \cdot x^1)' \stackrel{\text{FR}}{=} 2 \cdot (x^1)' \stackrel{\text{SA}}{=} 2 \cdot 1 \cdot x^0 = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2. \end{aligned}$$

Die Kettenregel liefert damit

$$f'(x) = (-\sin(2x))' = (g(h(x)))' \stackrel{\text{KR}}{=} g'(h(x)) \cdot h'(x) = -\cos(2x) \cdot 2 = -2 \cdot \cos(2x).$$

d) $f(x) = (\cos(x))^2 - \tan(x)$

$$f'(x) = -\frac{2 \cdot \sin(x) \cdot (\cos(x))^3 + 1}{(\cos(x))^2}$$

Lösung:

Der erste Summand von f ist die Verkettung der Funktionen $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto t^2$ und $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \cos(x)$. Die Standardableitungen $(\cos(x))' = -\sin(x)$ und $(t^\alpha)' = \alpha \cdot t^{\alpha-1}$ liefern

$$g'(t) = (t^2)' \stackrel{\text{SA}}{=} 2 \cdot t^1 = 2t \quad \text{und} \quad h'(x) = (\cos(x))' \stackrel{\text{SA}}{=} -\sin(x).$$

Die Summen-, Faktor- und Kettenregel liefern mit der Standardableitung $(\tan(x))' = \frac{1}{(\cos(x))^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left((\cos(x))^2 - \tan(x) \right)' = (g(h(x)) + (-1) \cdot \tan(x))' \stackrel{\text{SR}}{=} (g(h(x)))' + ((-1) \cdot \tan(x))' \\ &\stackrel{\text{KR\&FR}}{=} g'(h(x)) \cdot h'(x) + (-1) \cdot (\tan(x))' \stackrel{\text{SA}}{=} 2 \cdot \cos(x) \cdot (-\sin(x)) + (-1) \cdot \frac{1}{(\cos(x))^2} \\ &= -2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) - \frac{1}{(\cos(x))^2} = -\frac{2 \cdot \sin(x) \cdot (\cos(x))^3 + 1}{(\cos(x))^2}. \end{aligned}$$

Natürlich hätte man statt der verwendeten Standardableitung des Tangens auch die alternative Darstellung $(\tan(x))' = 1 + (\tan(x))^2$ nutzen können.

Wer möchte, kann auch das Additionstheorem für doppelte Winkel im Sinus noch anwenden: $2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) = \sin(2x)$.

e) $f(x) = \arctan(x) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{\cos(x^{-1})}{x^2}$$

Lösung:

Der zweite Summand von f ist die Verkettung der Funktionen $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto \sin(t)$ und $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \frac{1}{x}$. Die Standardableitungen $(\sin(t))' = \cos(t)$ und $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ liefern

$$g'(t) = (\sin(t))' \stackrel{\text{SA}}{=} \cos(t) \quad \text{und} \quad h'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' \stackrel{\text{SA}}{=} (-1) \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Die Summen- und Kettenregel liefern mit der Standardableitung $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\arctan(x) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right)' = (\arctan(x) + g(h(x)))' \stackrel{\text{SR}}{=} (\arctan(x))' + (g(h(x)))' \\ &\stackrel{\text{KR}}{=} (\arctan(x))' + g'(h(x)) \cdot h'(x) \stackrel{\text{SA}}{=} \frac{1}{1+x^2} + \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{\cos(x^{-1})}{x^2}. \end{aligned}$$

f) $f(x) = e^{-x} + e^{x^{-2}}$

$$f'(x) = -e^{-x} - \frac{2}{x^3} \cdot e^{x^{-2}}$$

Lösung:

Die beiden Summanden der Funktion f sind Verkettungen von $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto e^t$ und $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto -x$ bzw. $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^{-2}$. Die Standardableitungen $(e^t)' = e^t$ und $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ liefern mit der Faktorregel

$$\begin{aligned} g'(t) &= (e^t)' \stackrel{\text{SA}}{=} e^t, \quad h'(x) = (-x)' = ((-1) \cdot x^1)' \stackrel{\text{FR}}{=} (-1) \cdot 1 \cdot x^0 = -1 \cdot 1 \cdot 1 = -1 \\ \text{und} \quad k'(x) &= (x^{-2})' \stackrel{\text{SA}}{=} (-2) \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3}. \end{aligned}$$

Die Summen- und Kettenregel liefern damit

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^{-x} + e^{x^{-2}} \right)' = (g(h(x)) + g(k(x)))' \stackrel{\text{SR}}{=} (g(h(x)))' + (g(k(x)))' \\ &\stackrel{\text{KR}}{=} g'(h(x)) \cdot h'(x) + g'(k(x)) \cdot k'(x) = e^{-x} \cdot (-1) + e^{x^{-2}} \cdot \left(-\frac{2}{x^3}\right) = -e^{-x} - \frac{2}{x^3} \cdot e^{x^{-2}}. \end{aligned}$$

g) $f(x) = (e^x)^3 + \arcsin(x)$

$$f'(x) = 3 \cdot e^{3x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Lösung:

Anwenden des dritten Potenzgesetzes $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ vereinfacht den Funktionsterm zu

$$f(x) = (e^x)^3 + \arcsin(x) = e^{x \cdot 3} + \arcsin(x) = e^{3x} + \arcsin(x).$$

Der erste Summand von f ist also die Verkettung der Funktionen $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto e^t$ und $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto 3x$. Die Standardableitungen $(e^t)' = e^t$ und $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ liefern mit der Faktorregel

$$g'(t) = (e^t)' \stackrel{\text{SA}}{=} e^t \quad \text{und} \quad h'(x) = (3x)' = (3 \cdot x^1)' \stackrel{\text{FR}}{=} 3 \cdot (x^1)' \stackrel{\text{SA}}{=} 3 \cdot 1 \cdot x^0 = 3 \cdot 1 \cdot 1 = 3.$$

Die Summen- und Kettenregel liefern mit der Standardableitung $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{3x} + \arcsin(x))' = (g(h(x)) + \arcsin(x))' \stackrel{\text{SR}}{=} (g(h(x)))' + (\arcsin(x))' \\ &\stackrel{\text{KR}}{=} g'(h(x)) \cdot h'(x) + (\arcsin(x))' \stackrel{\text{SA}}{=} e^{3x} \cdot 3 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 3 \cdot e^{3x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

h) $f(x) = \ln(x) + \ln\left(\frac{2}{3x}\right)$

$$f'(x) = 0$$

Lösung:

Mit Hilfe des zweiten Logarithmengesetzes $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$ und des ersten Logarithmengesetzes $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$ erkennt man, dass f wegen

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x) + \ln\left(\frac{2}{3x}\right) = \ln(x) + \ln(2) - \ln(3x) \\ &= \ln(x) + \ln(2) - (\ln(3) + \ln(x)) = \ln(x) + \ln(2) - \ln(3) - \ln(x) = \ln(2) - \ln(3) \end{aligned}$$

eine konstante Funktion ist. Die Standardableitung für Konstanten $(c)' = 0$ liefert also

$$f'(x) = (\ln(2) - \ln(3))' \stackrel{\text{SA}}{=} 0.$$



DiffEinDim/DiffRegeln/Ag_Differentialrechnung_Ableitung_erste_mittel.tex

Aufgabe 20.147 (Ableiten und zusammenfassen)

Berechnen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen f , und fassen Sie den Term der Ableitungsfunktion f' so weit wie möglich zusammen:

a) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}$

$$\frac{2x-3x^3}{\sqrt{1-x^2}}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \cdot \sqrt{1-x^2} + x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) \\ &= \frac{2x(1-x^2) - x^3}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{2x - 3x^3}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

b) $f(x) = \frac{1 + \sin(2x)}{1 - \sin(2x)}$

$$\frac{4 \cos(2x)}{(1 - \sin(2x))^2}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1 + \sin(2x)}{1 - \sin(2x)} \right)' \\ &= \frac{2 \cos(2x)(1 - \sin(2x)) - (1 + \sin(2x)) \cdot (-2 \cos(2x))}{(1 - \sin(2x))^2} \\ &= \frac{2 \cos(2x) - 2 \sin(2x) \cos(2x) + 2 \cos(2x) + 2 \sin(2x) \cos(2x)}{(1 - \sin(2x))^2} \\ &= \frac{4 \cos(2x)}{(1 - \sin(2x))^2} \end{aligned}$$

c) $f(x) = \tan(x) + \frac{2}{3} \cdot (\tan(x))^3 + \frac{1}{5} \cdot (\tan(x))^5$

$$f'(x) = \frac{1}{(\cos(x))^6}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tan'(x) + 2(\tan(x))^2 \cdot \tan'(x) + (\tan(x))^4 \cdot \tan'(x) \\ &= \tan'(x)(1 + 2(\tan(x))^2 + (\tan(x))^4) \\ &= \frac{1}{(\cos(x))^2} (1 + 2(\tan(x))^2 + (\tan(x))^4) \\ &= \frac{1}{(\cos(x))^2} \left(1 + 2 \frac{(\sin(x))^2}{(\cos(x))^2} + \frac{(\sin(x))^4}{(\cos(x))^4} \right) \\ &= \frac{(\cos(x))^4 + 2(\sin(x))^2(\cos(x))^2 + (\sin(x))^4}{(\cos(x))^6} \\ &= \frac{((\cos(x))^2 + (\sin(x))^2)^2}{(\cos(x))^6} \\ &= \frac{1}{(\cos(x))^6} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tan'(x) + 2(\tan(x))^2 \cdot \tan'(x) + (\tan(x))^4 \cdot \tan'(x) \\ &= \tan'(x)(1 + 2(\tan(x))^2 + (\tan(x))^4) \\ &= (1 + (\tan(x))^2)(1 + 2(\tan(x))^2 + (\tan(x))^4) \\ &= 1 + 2(\tan(x))^2 + (\tan(x))^4 + (\tan(x))^2 + 2(\tan(x))^4 + (\tan(x))^6 \\ &= 1 + 3(\tan(x))^2 + 3(\tan(x))^4 + (\tan(x))^6 \\ &= (1 + (\tan(x))^2)^3 \\ &= \left(1 + \frac{(\sin(x))^2}{(\cos(x))^2} \right)^3 \\ &= \left(\frac{(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2}{(\cos(x))^2} \right)^3 \\ &= \frac{1}{(\cos(x))^6} \end{aligned}$$

d) $f(x) = \frac{\sqrt{4x+1}}{x^2}$

$$-2 \cdot \frac{3x+1}{x^3\sqrt{4x+1}}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{4}{2\sqrt{4x+1}} \cdot x^2 - \sqrt{4x+1} \cdot 2x}{x^4} \\ &= \frac{\frac{2x^2}{\sqrt{4x+1}} - 2x\sqrt{4x+1}}{x^4} \\ &= \frac{\frac{2x}{\sqrt{4x+1}} - 2\sqrt{4x+1}}{x^3} \\ &= 2 \cdot \frac{x - (4x+1)}{x^3\sqrt{4x+1}} \\ &= 2 \cdot \frac{-3x-1}{x^3\sqrt{4x+1}} \\ &= -2 \cdot \frac{3x+1}{x^3\sqrt{4x+1}} \end{aligned}$$

e) $f(t) = \sqrt{1 + (\cos(t^2))^2}$

$$f'(x) = -\frac{2t \sin(t^2) \cos(t^2)}{\sqrt{1 + (\cos(t^2))^2}} = -\frac{t \sin(2t^2)}{\sqrt{1 + (\cos(t^2))^2}}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{2 \cos(t^2) \cdot (-\sin(t^2)) \cdot 2t}{2\sqrt{1 + (\cos(t^2))^2}} \\ &= -\frac{2t \sin(t^2) \cos(t^2)}{\sqrt{1 + (\cos(t^2))^2}} \\ &= -\frac{t \sin(2t^2)}{\sqrt{1 + (\cos(t^2))^2}} \end{aligned}$$

f) $f(t) = |182t - 169t^2 - 49|$

$$338t - 182, t \in \mathbb{R}$$

Lösung:

Die Ableitung von $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(t) = |182t - 169t^2 - 49|$ mit

$$f(t) = |182t - 169t^2 - 49| = |-169t^2 + 182t - 49| = |-(169t^2 - 182t + 49)| = |-(13t - 7)^2| = (13t - 7)^2$$

ist $f'(t) = 2 \cdot (13t - 7) \cdot 13 = 26 \cdot (13t - 7) = 338t - 182$ für $t \in \mathbb{R}$.



DiffEinDim/DiffRegeln/Ag_Differentialrechnung_Ableitungen_erste_zweite_leicht.tex

Aufgabe 20.148 (Erste und zweite Ableitung)

13.1.4

Bilden Sie die erste und zweite Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 3x^5 - 4x^3 + \frac{1}{2} \cdot x - 5$

$$f'(x) = 15x^4 - 12x^2 + \frac{1}{2}, f''(x) = 60x^3 - 24x$$

b) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$

$$f'(x) = \cos(2x) = (\cos(x))^2 - (\sin(x))^2, f''(x) = -2\sin(2x) = -4\sin(x) \cdot \cos(x)$$

c) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 3}$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 2}{(x-3)^2}, f''(x) = \frac{14}{(x-3)^3}$$

Lösung:

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x-3) - (x^2-2x+4) \cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{2x^2-6x-2x+6-x^2+2x-4}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x+2}{(x-3)^2},$$

und daraus durch nochmaliges Ableiten folgend

$$f''(x) = \frac{(2x-6)(x-3)^2 - (x^2-6x+2) \cdot 2(x-3) \cdot 1}{(x-3)^4} = \frac{2x^2-12x+18-2x^2+12x-4}{(x-3)^3} = \frac{14}{(x-3)^3}.$$

Die Berechnung der zweiten Ableitung ist weniger aufwändig, wenn die erste Ableitung mittels quadratischer Ergänzung umgeformt wird:

$$f'(x) = \frac{(x-3)^2 - 7}{(x-3)^2} = 1 - \frac{7}{(x-3)^2} = 1 - 7 \cdot (x-3)^{-2},$$

und daraus durch nochmaliges Ableiten folgend

$$f''(x) = 0 - 7 \cdot (-2) \cdot (x-3)^{-3} = \frac{14}{(x-3)^3}.$$

d) $f(x) = \cos(x) \cdot \ln(x)$

$$f'(x) = -\sin(x) \cdot \ln(x) + \cos(x) \cdot \frac{1}{x}, f''(x) = -\cos(x) \cdot \ln(x) - 2\sin(x) \cdot \frac{1}{x} - \cos(x) \cdot \frac{1}{x^2}$$

Lösung:

$$f'(x) = -\sin(x) \cdot \ln(x) + \cos(x) \cdot \frac{1}{x},$$

und daraus durch nochmaliges Ableiten folgend

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(-\cos(x) \cdot \ln(x) - \sin(x) \cdot \frac{1}{x} \right) + \left(-\sin(x) \cdot \frac{1}{x} - \cos(x) \cdot \frac{1}{x^2} \right) \\ &= -\cos(x) \cdot \ln(x) - 2 \cdot \sin(x) \cdot \frac{1}{x} - \cos(x) \cdot \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

e) $f(x) = \exp\left(\frac{1}{2} \cdot x^2\right)$

$$f'(x) = x \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x^2}, f''(x) = (1+x^2) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x^2}$$

f) $f(x) = x^2 \cdot \arctan(x)$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} + 2x \cdot \arctan(x), f''(x) = \frac{4x+2x^3}{(1+x^2)^2} + 2\arctan(x)$$

Lösung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \cdot \arctan(x) + x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2} = 2x \cdot \arctan(x) + \frac{x^2}{1+x^2} \\ &= 2x \cdot \arctan(x) + \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = 2x \cdot \arctan(x) + 1 - \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

und daraus durch nochmaliges Ableiten folgend

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(2 \cdot \arctan(x) + 2x \cdot \frac{1}{1+x^2} \right)' + 0 - \left(-\frac{2x}{(1+x^2)^2} \right) \\ &= 2 \cdot \arctan(x) + \frac{2x(1+x^2)}{(1+x^2)^2} + \frac{2x}{(1+x^2)^2} = 2 \cdot \arctan(x) + \frac{4x+2x^3}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

g) $f(x) = \frac{\sin(x)}{x^3}$

$$f'(x) = \frac{x \cdot \cos(x) - 3 \sin(x)}{x^4}, \quad f''(x) = \frac{(12-x^2) \cdot \sin(x) - 6x \cdot \cos(x)}{x^5}$$

Lösung:

$$f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot x^3 - \sin(x) \cdot 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{(\cos(x) \cdot x - 3 \sin(x)) \cdot x^2}{x^4 \cdot x^2} = \frac{x \cdot \cos(x) - 3 \cdot \sin(x)}{x^4}$$

und daraus durch nochmaliges Ableiten folgend

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(1 \cdot \cos(x) + x \cdot (-\sin(x)) - 3 \cos(x)) \cdot x^4 - (x \cdot \cos(x) - 3 \sin(x)) \cdot 4x^3}{(x^4)^2} \\ &= \frac{\left((1 \cdot \cos(x) + x \cdot (-\sin(x)) - 3 \cos(x)) \cdot x - (x \cdot \cos(x) - 3 \sin(x)) \cdot 4 \right) \cdot x^3}{x^5 \cdot x^3} \\ &= \frac{x \cdot \cos(x) - x^2 \cdot \sin(x) - 3x \cdot \cos(x) - 4x \cdot \cos(x) + 12 \sin(x)}{x^5} \\ &= \frac{12 \sin(x) - 6x \cdot \cos(x) - x^2 \cdot \sin(x)}{x^5} \end{aligned}$$

h) $f(x) = \tan(e^x)$

$$f'(x) = \frac{e^x}{(\cos(e^x))^2} = (1 + (\tan(e^x))^2) \cdot e^x, \quad f''(x) = \frac{e^x \cdot \cos(e^x) + 2 \sin(e^x) \cdot e^{2x}}{(\cos(e^x))^3} = (2 \tan(e^x) \cdot e^{2x} + e^x) \cdot (1 + (\tan(e^x))^2)$$

Lösung:

Unter Beachtung von

$$\tan(e^x) = \frac{\sin(e^x)}{\cos(e^x)}$$

und

$$(\sin(e^x))' = \cos(e^x) \cdot e^x \quad \text{sowie} \quad (\cos(e^x))' = -\sin(e^x) \cdot e^x$$

folgt mit der Quotientenregel

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\tan(e^x))' = \left(\frac{\sin(e^x)}{\cos(e^x)} \right)' = \frac{\cos(e^x) \cdot e^x \cdot \cos(e^x) - \sin(e^x) \cdot (-\sin(e^x) \cdot e^x)}{\cos^2(e^x)} \\ &= \frac{\cos^2(e^x) + \sin^2(e^x)}{\cos^2(e^x)} \cdot e^x = \frac{1}{\cos^2(e^x)} \cdot e^x \end{aligned} \quad (1)$$

$$= \frac{\cos^2(e^x) + \sin^2(e^x)}{\cos^2(e^x)} \cdot e^x = (1 + \tan^2(e^x)) \cdot e^x \quad (2)$$

und aus (1) durch nochmaliges Ableiten

$$f''(x) = \frac{e^x \cdot \cos^2(e^x) - e^x \cdot 2 \cos(e^x) \cdot (-\sin(e^x)) \cdot e^x}{\cos^4(e^x)} = \frac{\cos(e^x) + 2 \sin(e^x)}{\cos^3(e^x)} \cdot e^x$$

oder alternativ mit der Darstellung (2) der ersten Ableitung durch nochmaliges Ableiten

$$\begin{aligned} f''(x) &= (2 \tan(e^x) \cdot (1 + \tan^2(e^x)) \cdot e^x) \cdot e^x + (1 + \tan^2(e^x)) \cdot e^x \\ &= (2 \tan(e^x) \cdot e^x + 1) \cdot (1 + \tan^2(e^x)) \cdot e^x \end{aligned}$$



DiffEinDim/DiffRegeln/Ag_Diffrechnung_Ableitung_DefBereich_Betrag_mittel.tex

Aufgabe 20.149 (Definitionsbereiche und Ableitung; Ableitung von Funktionen mit Beträgen) 13.1.5
Bestimmen Sie den Definitionsbereich D_0 der Funktion f , den Definitionsbereich D_1 der Ableitung, und berechnen Sie die Ableitung f' von:

a) $f(x) = |x|$

$$D_0 = \mathbb{R}, D_1 = \mathbb{R} \setminus \{0\}, f'(x) = 1 \text{ für } x > 0 \text{ und } f'(x) = -1 \text{ für } x < 0$$

b) $f(x) = \tan\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$$D_0 = D_1 = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ mit } x^2 \neq \frac{2}{(2k+1) \cdot \pi}, k \in \mathbb{N}_0\} \setminus \{0\}, f'(x) = -\frac{2}{x^3} \left(1 + \left(\tan\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^2\right)$$

c) $f(x) = \sin(\sqrt{x})$

$$D_0 = [0, \infty), D_1 = (0, \infty), f'(x) = \frac{\cos(\sqrt{x})}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

d) $f(x) = \sin(|x|)$

$$D_0 = \mathbb{R}, D_1 = \mathbb{R} \setminus \{0\}, f'(x) = \cos(x) \text{ für } x > 0 \text{ und } f'(x) = -\cos(x) \text{ für } x < 0$$

e) $f(x) = \sqrt{\sin(x)}$

$$D_0 = \{x \in \mathbb{R} : 2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}\}, D_1 = \{x \in \mathbb{R} : 2k\pi < x < (2k+1)\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}\},$$

$$f'(x) = \frac{\cos(x)}{2 \cdot \sqrt{\sin(x)}}$$

f) $f(x) = \sqrt{|\sin(x)|}$

$$D_0 = \mathbb{R}, D_1 = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}, f'(x) = \frac{\cos(x)}{2 \cdot \sqrt{|\sin(x)|}} \text{ für } 2k\pi < x < (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ und } f'(x) = -\frac{\cos(x)}{2 \cdot \sqrt{-\sin(x)}} \text{ für } (2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi, k \in \mathbb{Z}$$

g) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$

$$D_0 = \mathbb{R} \setminus (-1, 2], D_1 = \mathbb{R} \setminus [-1, 2], f'(x) = -\frac{3 \cdot \sqrt{x-2}}{2 \cdot (x-2)^2 \cdot \sqrt{x+1}}$$

h) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

$$D_0 = [0, \infty), D_1 = (0, \infty), f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot \sqrt{x+1}}{4 \cdot \sqrt{x^2 + x \cdot \sqrt{x}}}\right)$$

i) $f(x) = \left|(\cos(-3x))^2\right|$

$$3 \cdot \sin(-6x)$$

Lösung:

Zunächst kann der Funktionsterm vereinfacht werden zu

$$\begin{aligned} f(x) &= |\cos^2(-3x)| \\ &= \cos^2(-3x), \quad \text{da } (\cos(u))^2 \geq 0 \text{ für alle } u \in \mathbb{R} \\ &= \cos^2(3x), \quad \text{da die Kosinusfunktion eine gerade Funktion ist, d. h. } \cos(-u) = \cos(u). \end{aligned}$$

Nun wendet man auf den vereinfachten Funktionsterm die Kettenregel an

$$f'(x) = (\cos^2(3x))' = 2 \cdot \cos(3x) \cdot (-\sin(3x)) \cdot 3 = -3 \cdot \sin(6x) = 3 \cdot \sin(-6x),$$

wobei das Additionstheorem für doppelte Winkel

$$\sin(2u) = 2 \cdot \sin(u) \cdot \cos(u)$$

verwendet wurde.



DiffEinDim/DiffRegeln/Ag_KetteProdNFach_HermitePolynome.tex

Aufgabe 20.150 (Hermite-Polynome als Ableitung)

Die Hermite-Polynome $H_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \mapsto H_n(x)$ sind unter anderem in der Physik von Bedeutung. Eine mögliche Darstellung erfolgt über die Ableitung:

$$H_n(x) = (-1)^n \cdot e^{x^2} \cdot \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Werten Sie die Ableitung für $n \leq 3$ aus, um eine explizite Darstellung der ersten Polynome zu erhalten!

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

Lösung:

Seien $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := e^{-x^2}$ und $f_n := \frac{d^n f}{dx^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

$$\begin{aligned} f_0(x) &= f(x) = e^{-x^2}, \\ f_1(x) &= f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}, \\ f_2(x) &= (f')'(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2 \cdot e^{-x^2} \\ \text{und} \quad f_3(x) &= (f'')'(x) = 4x \cdot e^{-x^2} + 8x \cdot e^{-x^2} - 8x^3 \cdot e^{-x^2} = 12x \cdot e^{-x^2} - 8x^3 \cdot e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Multiplikation mit $(-1)^n$ und e^{x^2} („neutralisiert“ die Exponentialfunktion) liefert die gesuchten Hermite-Polynome

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2 \quad \text{und} \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x.$$



DiffEinDim/Geometrisches/Ag_Ableitung_Tangente.tex

Aufgabe 21.151 (Tangente an den Graphen einer Funktion)

Gegeben sei die Kurve $K := \left\{ \left(x, 1 - \exp\left(\frac{x}{2}\right) \right)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \right\}$.

Tangente $\left\{ \left(x, -\frac{x}{2} \right)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \right\}$, Asymptote $\left\{ (x, 1)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \right\}$

- a) Stellen Sie die Gleichung der Tangenten an die Kurve K im Schnittpunkt von K mit der vertikalen Achse auf!

Lösung:

Zur Berechnung des Kurvenschnittpunkts mit der y -Achse setzen wir $x = 0$ in die Kurvengleichung ein:

$$y(0) = 1 - \exp\left(\frac{0}{2}\right) = 1 - 1 = 0.$$

Der Graph von $y = 1 - \exp\left(\frac{x}{2}\right)$ schneidet die y -Achse folglich im Punkt $(0, 0)^T$.

Die Steigung der Kurve bei $x = 0$ ist gegeben durch die Ableitung der Kurvengleichung an dieser Stelle, welche ihrerseits der Steigung der Tangente in $(0, 0)^T$ entspricht:

$$\begin{aligned} y'(x) &= 0 - \exp\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \cdot \exp\left(\frac{x}{2}\right) \\ \Rightarrow y'(0) &= -\frac{1}{2} \cdot \exp\left(\frac{0}{2}\right) = -\frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2} = m_T \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Tangentengleichung (allgemein) zu:

$$y_T = m_T \cdot x + b = -\frac{1}{2} \cdot x + b$$

Der Achsenabschnitt ist $b = 0$, da die Tangente den Graphen der Funktion in $(0, 0)^T$ berührt.

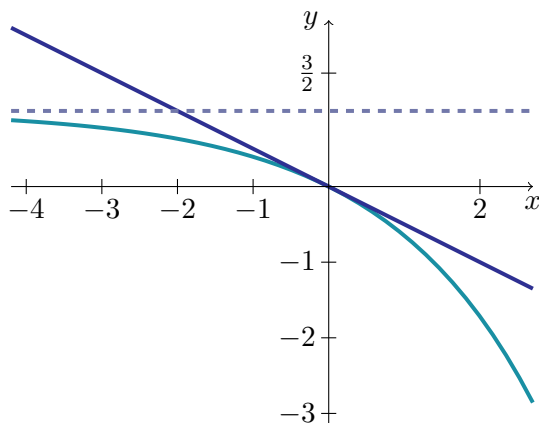
Es folgt:

$$y_T = -\frac{1}{2} \cdot x + 0 = -\frac{1}{2} \cdot x.$$

- b) Zeichnen Sie die Kurve, die Tangente und die horizontale Asymptote der Kurve in ein gemeinsames Koordinatensystem!

Lösung:

Wegen $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp\left(\frac{x}{2}\right) = 0$ ist $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \exp\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 1 - 0 = 1$ und damit ist $y_A = 1$ die Gleichung der horizontalen Asymptoten.





DiffEinDim/Kurvendisk/Ag_DiffEinDim_FktEigenschaftenExtremaWendepkte1a.tex

Aufgabe 22.152 (Charakteristische Punkte von Polynomfunktionen)

Ermitteln Sie die Extrem- und Wendepunkte der folgenden Funktionen, und skizzieren Sie anschließend die Funktionsgraphen.

- a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3$ $(0, -3)$ Hochpunkt,
 $(\frac{4}{3}, -\frac{113}{27})$ Tiefpunkt, $(\frac{2}{3}, -\frac{97}{27})$ Wendepunkt.

Lösung:

- (i) Ableitungen: $f'(x) = 3x^2 - 4x$ und
 $f''(x) = 6x - 4$.

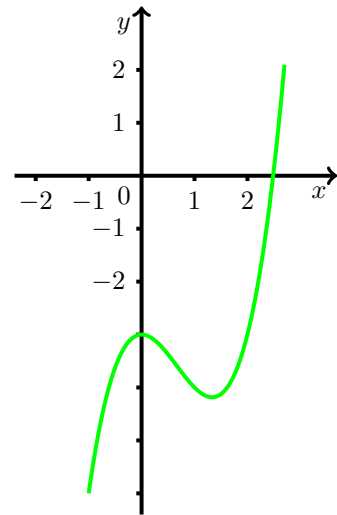
- (ii) Bedingung für stationäre Stellen (kritische Stellen): $f'(x) = 0$ führt auf $3x^2 - 4x = 0$, also $x(3x - 4) = 0$; die Lösungen und damit die stationären Stellen sind $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{4}{3}$.

- (iii) Extrempunkte:

- $x_1 = 0$: $f''(0) = -4 < 0$; also ist $(x_1, f(x_1)) = (0, -3)$ ein lokaler Hochpunkt.
- $x_2 = \frac{4}{3}$: $f''(\frac{4}{3}) = 4 > 0$; also ist $(x_2, f(x_2)) = (\frac{4}{3}, -\frac{113}{27})$ ein lokaler Tiefpunkt.

- (iv) Bedingung für Wendestellen (bzw. Wendepunkte): $f''(x) = 0$ führt auf $6x - 4 = 0$; die einzige Lösung dieser Gleichung ist $w = \frac{2}{3}$. Wegen $f'''(w) = -4 \neq 0$ ist $(w, f(w)) = (\frac{2}{3}, -\frac{97}{27})$ ein Wendepunkt. Dasselbe Ergebnis ergibt sich, indem festgestellt wird, dass die zweite Ableitung f'' an der Stelle $w = \frac{2}{3}$ einen Vorzeichenwechsel hat.

- (v) Ausschnitt aus dem Graphen der Funktion:



- b) $f(x) = 2x^3 + 2x - 6$ $(0, -6)$ Wendepunkt.

Lösung:

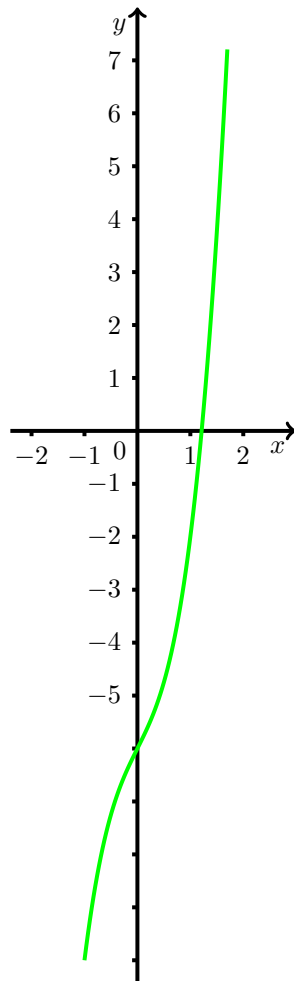
- (i) Ableitungen: $f'(x) = 6x^2 + 4$ und
 $f''(x) = 12x$.

- (ii) Bedingung für stationäre Stellen (kritische Stellen): $f'(x) = 0$ führt auf $6x^2 + 4 = 0$; wegen $6x^2 + 4 \geq 4 > 0$ gibt es keine Lösung und damit keine stationären Stellen.

- (iii) Extrempunkte: Da der Definitionsbereich der differenzierbaren Funktion alle reellen Zahlen umfasst, gibt keine (lokalen) Extrempunkte, da keine stationären Stellen vorhanden sind.

- (iv) Bedingung für Wendestellen (bzw. Wendepunkte): $f''(x) = 0$ führt auf $12x = 0$; die einzige Lösung dieser Gleichung ist $w = 0$. Wegen $f'''(w) = 12 \neq 0$ ist $(w, f(w)) = (0, -6)$ ein Wendepunkt. Dasselbe Ergebnis ergibt sich, indem festgestellt wird, dass die zweite Ableitung f'' an der Stelle $w = 0$ einen Vorzeichenwechsel hat.

- (v) Ausschnitt aus dem Graphen der Funktion:



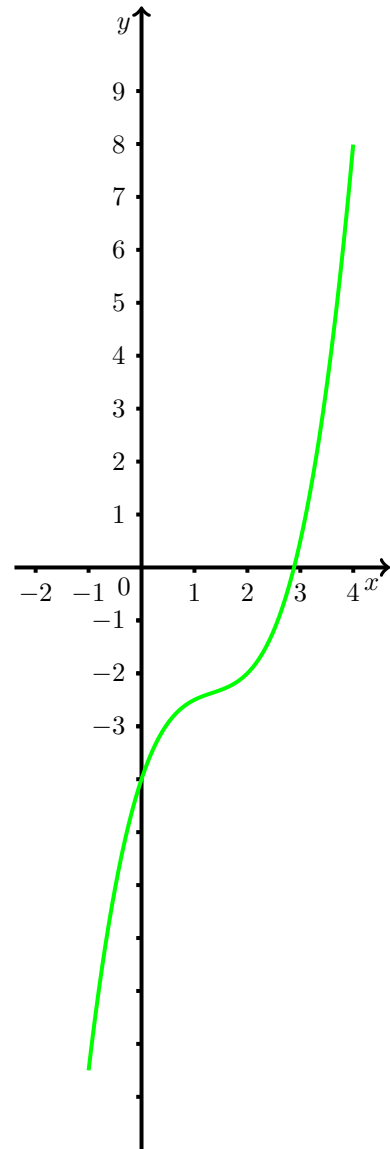
- c) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ $\left(\frac{4}{3}, -\frac{64}{27}\right)$
Wendepunkt.

Lösung:

- (i) Ableitungen: $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4x + 3$ und $f''(x) = 3x - 4$.
- (ii) Bedingung für stationäre Stellen (kritische Stellen): $f'(x) = 0$ führt auf $\frac{3}{2}x^2 - 4x + 3 = 0$; wegen $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot 3 = 16 - 18 = -4 < 0$ gibt es keine reelle Lösung und damit keine stationären Stellen.
- (iii) Extrempunkte: Da der Definitionsbereich der differenzierbaren Funktion alle reellen Zahlen umfasst und da keine stationären Stellen vorhanden sind, gibt es keine (lokalen) Extrempunkte.
- (iv) Bedingung für Wendestellen (bzw. Wendepunkte): $f''(x) = 0$ führt auf $3x - 4 = 0$; die einzige Lösung dieser Gleichung ist $w = \frac{4}{3}$. Wegen $f'''(w) = 3 \neq 0$ ist $(w, f(w)) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{64}{27}\right)$ ein Wendepunkt. Dasselbe Ergebnis ergibt

sich, indem festgestellt wird, dass die zweite Ableitung f'' an der Stelle $w = \frac{4}{3}$ einen Vorzeichenwechsel hat.

- (v) Ausschnitt aus dem Graphen der Funktion:



- d) $f(x) = -2x^3 + 3x + 5$ $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 5 - \sqrt{2}\right)$ TP, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 5 + \sqrt{2}\right)$ HP, $(0, 5)$ WP.

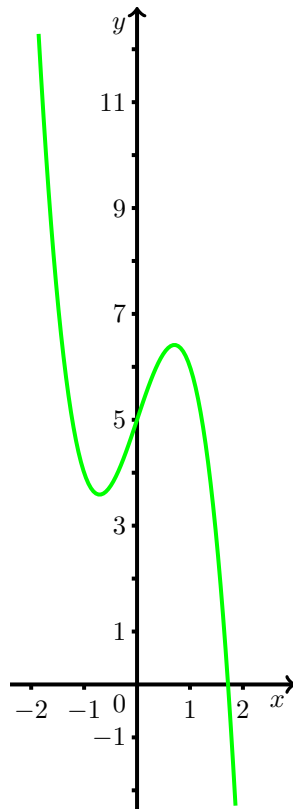
Lösung:

- (i) Ableitungen: $f'(x) = -6x^2 + 3$ und $f''(x) = -12x$.
- (ii) Bedingung für stationäre Stellen (kritische Stellen): $f'(x) = 0$ führt auf $-6x^2 + 3 = 0$, also $x^2 = \frac{1}{2}$; die Lösungen und damit die stationären Stellen sind $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.
- (iii) Extrempunkte:

- $x_2 = -\frac{1}{2}$: $f''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{12}{\sqrt{2}} > 0$; also ist $(x_2, f(x_2)) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 5 - \sqrt{2}\right)$ ein lokaler Tiefpunkt.
- $x_1 = \frac{1}{2}$: $f''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{12}{\sqrt{2}} < 0$; also ist $(x_1, f(x_1)) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 5 + \sqrt{2}\right)$ ein lokaler Hochpunkt.

(iv) Bedingung für Wendestellen (bzw. Wendepunkte): $f''(x) = 0$ führt auf $-12x = 0$; die einzige Lösung dieser Gleichung ist $w = 0$. Wegen $f'''(w) = -12 \neq 0$ ist $(w, f(w)) = (0, 3)$ ein Wendepunkt. Dasselbe Ergebnis ergibt sich, indem festgestellt wird, dass die zweite Ableitung f'' an der Stelle $w = 0$ einen Vorzeichenwechsel hat.

(v) Ausschnitt aus dem Graphen der Funktion:



e) $f(x) = 4x^3 + 2x^2 + 5x - 3$ $\left(-\frac{1}{6}, -\frac{205}{54}\right)$
Wendepunkt.

Lösung:

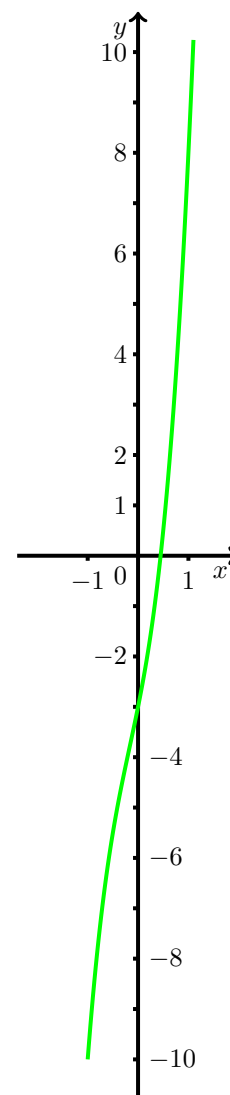
- Ableitungen: $f'(x) = 12x^2 + 4x + 5$ und $f''(x) = 24x + 4$.
- Bedingung für stationäre Stellen (kritische Stellen): $f'(x) = 0$ führt auf

$12x^2 + 4x + 5 = 0$; wegen $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 12 \cdot 5 = 16 - 240 < 0$ gibt es keine reellen Lösungen und damit keine stationären Stellen.

(iii) Extrempunkte: Da die differenzierbare Funktion f auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist und keine stationären Stellen besitzt, kann es keine (lokalen) Extremstellen und somit keine (lokalen) Extrempunkte geben.

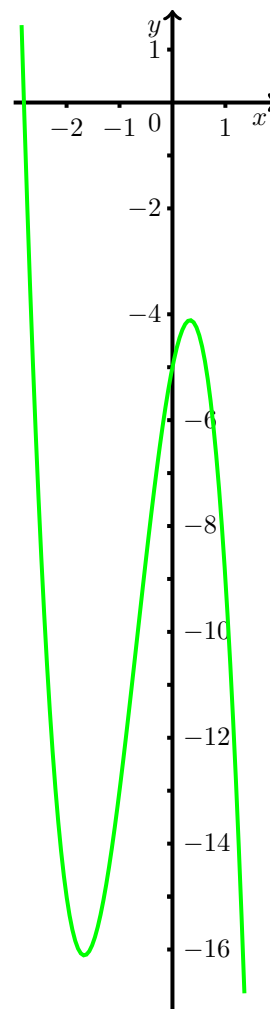
(iv) Bedingung für Wendestellen (bzw. Wendepunkte): $f''(x) = 0$ führt auf $24x + 4 = 0$; die einzige Lösung dieser Gleichung ist $w = -\frac{1}{6}$. Wegen $f'''(w) = -24 \neq 0$ ist $(w, f(w)) = \left(-\frac{1}{6}, -\frac{205}{54}\right)$ ein Wendepunkt. Dasselbe Ergebnis ergibt sich, indem festgestellt wird, dass die zweite Ableitung f'' an der Stelle $w = -\frac{1}{6}$ einen Vorzeichenwechsel hat.

(v) Ausschnitt aus dem Graphen der Funktion:



- f) $f(x) = -3x^3 - 6x^2 + 5x - 5$ $(-\frac{5}{3}, -\frac{145}{9})$
Tiefpunkt, $(\frac{1}{3}, -\frac{37}{9})$ Hochpunkt, $(-\frac{2}{3}, -\frac{91}{9})$ Wendepunkt.

- (v) Ausschnitt aus dem Graphen der Funktion:



Lösung:

- (i) Ableitungen: $f'(x) = -9x^2 - 12x + 5$
und $f''(x) = -18x - 12$.
- (ii) Bedingung für stationäre Stellen (kritische Stellen): $f'(x) = 0$ führt auf $-9x^2 - 12x + 5 = 0$; wegen $\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot (-9) \cdot 5 = 144 + 180 = 324 = 18^2 \geq 0$ sind die Lösungen und damit die stationären Stellen $x_1 = \frac{12 + \sqrt{18^2}}{2 \cdot (-9)} = -\frac{30}{18} = -\frac{5}{3}$ und $x_2 = \frac{12 - 18}{2 \cdot (-9)} = \frac{-6}{-18} = \frac{1}{3}$.
- (iii) Extrempunkte:
- $x_1 = -\frac{5}{3}$: $f''(-\frac{5}{3}) = 18 > 0$; also ist $(x_1, f(x_1)) = (-\frac{5}{3}, -\frac{145}{9})$ ein lokaler Tiefpunkt.
 - $x_2 = \frac{1}{3}$: $f''(\frac{1}{3}) = -18 < 0$; also ist $(x_2, f(x_2)) = (\frac{1}{3}, -\frac{37}{9})$ ein lokaler Hochpunkt.
- (iv) Bedingung für Wendestellen (bzw. Wendepunkte): $f''(x) = 0$ führt auf $-18x - 12 = 0$; die einzige Lösung dieser Gleichung ist $w = -\frac{2}{3}$. Wegen $f'''(w) = -18 \neq 0$ ist $(w, f(w)) = (-\frac{2}{3}, -\frac{91}{9})$ ein Wendepunkt. Dasselbe Ergebnis ergibt sich, indem festgestellt wird, dass die zweite Ableitung f'' an der Stelle $w = -\frac{2}{3}$ einen Vorzeichenwechsel hat.



DiffEinDim/Kurvendisk/Ag_DiffEinDim_FktEigenschaftenExtremaWendepkte2.tex

Aufgabe 22.153 (Charakteristische Stellen von Funktionen)

Bestimmen Sie die Extrem- und die Wendestellen der Funktionen

a) $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := \frac{x^2 - 4}{(x - 1)^2}$

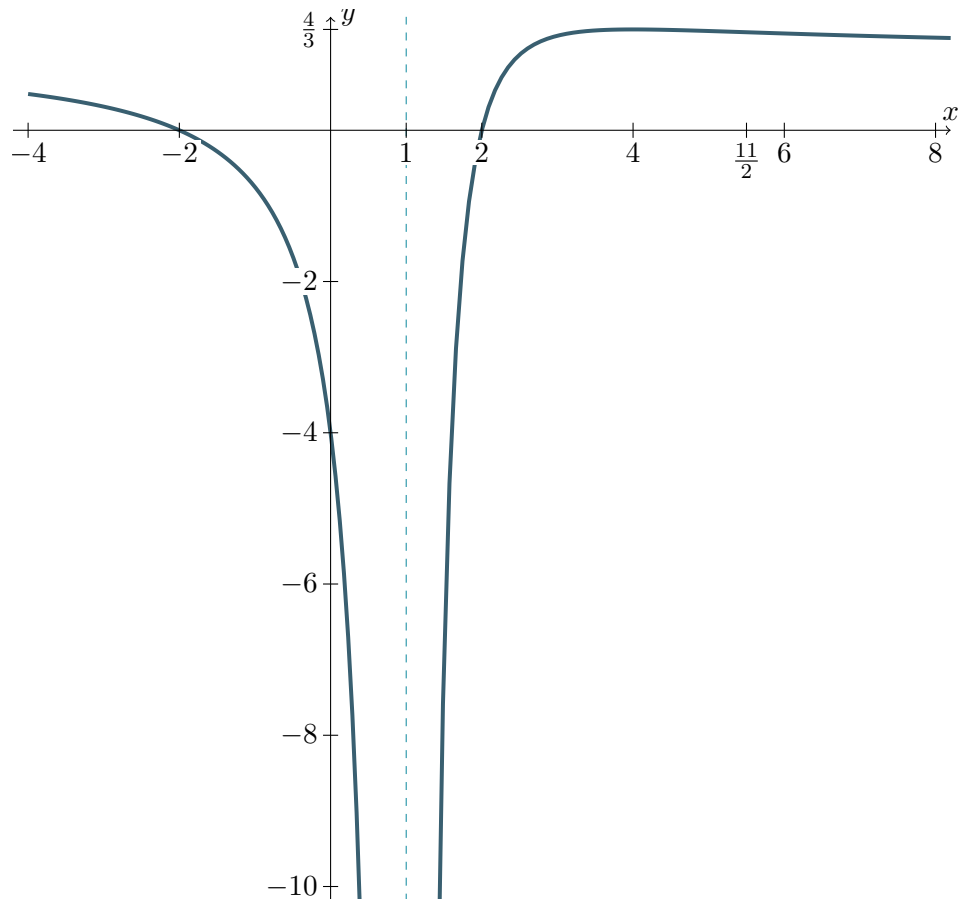
Hochpunkt bei $(4, \frac{4}{3})^T$, Wendepunkt bei $(\frac{11}{2}, \frac{35}{27})^T$

Lösung:

- (i) Ableitungen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x-1)^2 - (x^2-4) \cdot 2(x-1) \cdot 1}{(x-1)^4} \\ &= \frac{2x(x-1) - 2(x^2-4)}{(x-1)^3} = \frac{2x^2 - 2x - 2x^2 + 8}{(x-1)^3} = -2 \cdot \frac{x-4}{(x-1)^3} \\ \text{und} \quad f''(x) &= -2 \cdot \frac{1 \cdot (x-1)^3 - (x-4) \cdot 3(x-1)^2 \cdot 1}{(x-1)^6} \\ &= -2 \cdot \frac{x-1-3x+12}{(x-1)^4} = -2 \cdot \frac{-2x+11}{(x-1)^4} = 4 \cdot \frac{x-\frac{11}{2}}{(x-1)^4} \end{aligned}$$

- (ii) Bedingung für stationäre Stellen (kritische Stellen): $f'(x) = 0$ führt auf $-2(x-4) = 0$, also $x-4=0$; die einzige Lösung und damit die einzige stationäre Stelle ist $x_1 = 4$.
- (iii) Extrempunkte: Es ist $f''(4) = -\frac{6}{3^4} < 0$; also ist $(x_1, f(x_1)) = (4, \frac{4}{3})$ ein lokaler Hochpunkt.
- (iv) Bedingung für Wendestellen (bzw. Wendepunkte): $f''(x) = 0$ führt auf $4(x - \frac{11}{2}) = 0$; die einzige Lösung dieser Gleichung ist $w = \frac{11}{2}$. Der Nenner der zweiten Ableitung ist für alle $x > 0$ positiv; somit hat die zweite Ableitung $f''(x) = \frac{4(x-w)}{(x-1)^4}$ an der Stelle $w = \frac{11}{2} > 1$ einen Vorzeichenwechsel, sodass $w = \frac{11}{2}$ eine Wendestelle und $(w, f(w)) = (\frac{11}{2}, \frac{35}{27})$ ein Wendepunkt ist.
- (v) Ergänzend wird ein Ausschnitt aus dem Graphen gezeichnet:



b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto g(t) = t^3 \cdot e^{-t^2}$

Hochpunkt bei $(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{3 \cdot \sqrt{6}e}{4e^2})^T$, Tiefpunkt bei $(-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{3 \cdot \sqrt{6}e}{4e^2})^T$
Wendepunkte bei $(-\sqrt{3}, -\frac{3 \cdot \sqrt{3}}{e^3})^T$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}e}{4e})^T$, $(0, 0)^T$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}e}{4e})^T$ und $(\sqrt{3}, \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{e^3})^T$

Lösung:

- (i) Für alle $x \in \mathbb{R}$ ergibt sich als Zuordnungsvorschrift der Ableitungen von g :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3x^2 \cdot e^{-x^2} + x^3 \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) \\ &= (-2x^4 + 3x^2) \cdot e^{-x^2} = -x^2 \cdot (2x^2 - 3) \cdot e^{-x^2} \\ g''(x) &= (-8x^3 + 6x) \cdot e^{-x^2} + (-2x^4 + 3x^2) \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2} \\ &= 2x \cdot (2x^4 - 7x^2 + 3) \cdot e^{-x^2} \end{aligned}$$

- (ii) Bedingung für stationäre Stellen (kritische Stellen): $g'(x) = 0$ führt auf $-x^2 \cdot (2x^2 - 3) \cdot e^{-x^2} = 0$. Wegen $-e^{-x^2} \neq 0$ folgt $x^2 \cdot (-2x^2 + 3) = 0$. Die Lösungen und damit die stationären Stellen sind $x_0 = 0$, $x_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ und $x_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$.

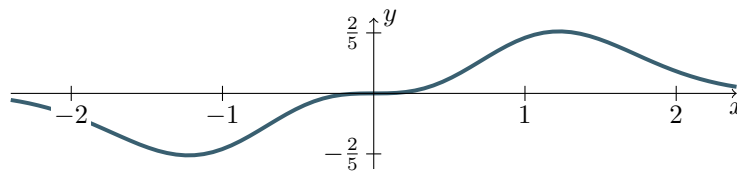
(iii) Extrempunkte:

- $x_0 = 0$: Da g eine ungerade Funktion ist, ist $x_0 = 0$ eine Wendestelle und somit keine Extremstelle.
- $x_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}$: Es ist x_1 die einzige positive stationäre Stelle von g . Wegen $g(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ und $g(x) > 0$ für $x > 0$ ist somit x_1 eine Maximalstelle und deshalb $(x_1, g(x_1)) = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{27}{8}}e^{-\frac{3}{2}}\right)$ ein Hochpunkt.
- $x_2 = -x_1$ ist aufgrund dessen, dass der Graph von g punktsymmetrisch bezüglich $(0, 0)$ ist, eine Minimalstelle und $(x_2, g(x_2)) = (-x_1, -g(x_1)) = \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{27}{8}}e^{-\frac{3}{2}}\right)$ ein Tiefpunkt.

(iv) Bedingung für Wendestellen (bzw. Wendepunkte): $g''(x) = 0$ führt auf $4x^5 - 14x^3 + 6 = 0$ bzw. $2x(2x^4 - 7x^2 + 3) = 0$. Lösungen dieser Gleichung sind $w_0 = 0$ und die Lösungen der biquadratischen Gleichung $2x^4 - 7x^2 + 3 = 0$. Mit $z = x^2$ ergibt sich $2z^2 - 7z + 3 = 0$; deren Lösungen sind $z_1 = \frac{7-\sqrt{49-24}}{4} = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2}$ und $z_2 = \frac{7+5}{4} = 3$. Aus $x^2 = z$ folgen damit als weitere Lösungen $w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $w_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ und $w_3 = \sqrt{3}$ sowie $w_4 = -\sqrt{3}$.

Damit ist $g''(x) = 4x(x-w_1)(x-w_2)(x-w_3)(x-w_4)$. Da die Werte w_j für $0 \leq j \leq 4$ paarweise verschieden sind (es gibt keine doppelte Nullstelle), gibt es an allen Stellen w_j einen Vorzeichenwechsel. Deshalb handelt es sich jeweils um Wendestellen und $(0, 0)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{8}}e^{-\frac{1}{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{8}}e^{-\frac{1}{2}}\right)$, $(\sqrt{3}, \sqrt{27}e^{-3})$ und $(-\sqrt{3}, -\sqrt{27}e^{-3})$ sind die Wendepunkte von g (letztlich genügt es, dies für die Stellen w_1 und w_3 festzustellen; aufgrund der Symmetrie folgt dies für $w_0 = 0$ und für w_2 und für w_4 aus der jeweiligen Eigenschaft von w_1 bzw. w_3).

(v) Ergänzend wird hier ein Ausschnitt des Graphen gezeichnet:



DiffEinDim/Kurvendisk/Ag_Differentiation_KurvendiskussionGemischt.tex

Aufgabe 22.154 (Extrempunkte und Wendepunkte von verschiedenen Funktionen)
Für die Funktionen:

a) $f(x) = x - \sqrt{2} \sin(x)$

- Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich
- Bestimmen Sie die Nullstellen (wenn möglich) und Asymptoten
- Untersuchen Sie die Funktionen auf lokale Extrema und Wendepunkte
- Geben Sie an, wo die Funktionen monoton wachsend bzw. fallend sind
- Geben Sie an, wo die Funktion konvex bzw. konkav sind
- Skizzieren Sie den Graph der Funktion

Lösung:

- Definitionsbereich: Die Funktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, damit ist $D_f = \mathbb{R}$.
- Nullstellen und Asymptoten:
 - Exakte Nullstellen können hier nicht analytisch bestimmt werden. Wegen $-1 \leq \sin x \leq 1$ müssen diese allerdings zwischen $-\sqrt{2}$ und $\sqrt{2}$ liegen.

- Asymptoten: Die Funktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert und ist stetig, damit hat sie keine vertikalen Asymptoten. Untersuche die horizontalen Asymptoten:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{2} \sin x) = +\infty$$

und

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{2} \sin x) = -\infty$$

D.h., es gibt keine horizontalen Asymptoten.

- lokale Extrema und Wendepunkte:

- Extrema. Zuerst bestimmen wir die kritischen Punkte, d.h., Punkte, wo die erste Ableitung der Funktion entweder nicht existiert oder gleich Null ist. Ableitung:

$$f'(x) = 1 - \sqrt{2} \cos x$$

Die kritischen Punkte werden aus der Bedingung

$$0 \stackrel{!}{=} 1 - \sqrt{2} \cos x \Rightarrow x = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Wegen der Periodizität der $\cos$ -Funktion gibt es unendlich viele kritischen Punkte.

$$x_{1,k} = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \quad \text{und} \quad x_{2,k} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Für weitere Einteilung der kritischen Punkte bestimmen wir die zweite Ableitung.

$$f''(x) = \sqrt{2} \sin x$$

Die zweite Ableitung an den kritischen Punkten:

$$f''(x_{1,k}) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 > 0, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Damit sind alle Punkte $x_{1,k}$ lokale Minimumstellen.

$$f''(x_{2,k}) = \sqrt{2} \sin\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) = \sqrt{2} \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1 < 0, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Damit sind alle Punkte $x_{2,k}$ lokale Maximumstellen.

- Wendepunkte. Wir suchen die Punkte, wo $f''(x) = 0$ gilt und kontrollieren danach, ob $f''(x)$ an diesen Stellen auch wirklich den Vorzeichen wechselt.

$$0 \stackrel{!}{=} f''(x) \Leftrightarrow 0 \stackrel{!}{=} \sqrt{2} \sin x$$

Wegen der Periodizität der $\sin$ -Funktion gilt diese Gleichung für unendlich viele Punkte:

$$x_{3,k} = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Da die Sinusfunktion an diesen Stellen auch den Vorzeichen wechselt, sind diese Punkte Wendepunkte.

- Monotones Wachsen bzw. Fallen: Wir untersuchen den Vorzeichen von $f'(x)$.

$$f'(x) = 1 - \sqrt{2} \cos x$$

Wegen der Periodizität der Cosinus-Funktion, nur ein Intervall von der Länge 2π muss untersucht werden. Nullstellen wurden bereits vorher bestimmt.

- $x \in (-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4})$: Dann ist $\cos x > \frac{1}{\sqrt{2}}$ und daraus folgt, dass $f'(x) < 0$. Die Funktion ist in dem Intervall $(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4})$ streng monoton fallend und wegen der Periodizität auch in allen Intervallen

$$(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi k) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

- $x \in (\frac{\pi}{4}; 2\pi - \frac{\pi}{4})$: Dann ist $\cos x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ und daraus folgt, dass $f'(x) > 0$. Die Funktion ist in dem Intervall $(\frac{\pi}{4}; \frac{9\pi}{2})$ streng monoton steigend und wegen der Periodizität auch in allen Intervallen

$$(\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{9\pi}{4} + 2\pi k) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

- Konvex und konkav: Hier muss der Vorzeichen von $f''(x)$ untersucht werden. Die zweite Ableitung ist

$$f''(x) = \sqrt{2} \sin x$$

Ähnlich wie vorher, auch hier muss wegen der Periodizität nur ein Intervall von der Länge 2π untersucht werden.

- $x \in (0; \pi)$: hier ist $\sin x > 0$ und damit auch $f''(x) > 0$. Wegen der Periodizität ist die Funktion in allen Intervallen

$$(2\pi k, 2\pi k + \pi) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

streng konvex.

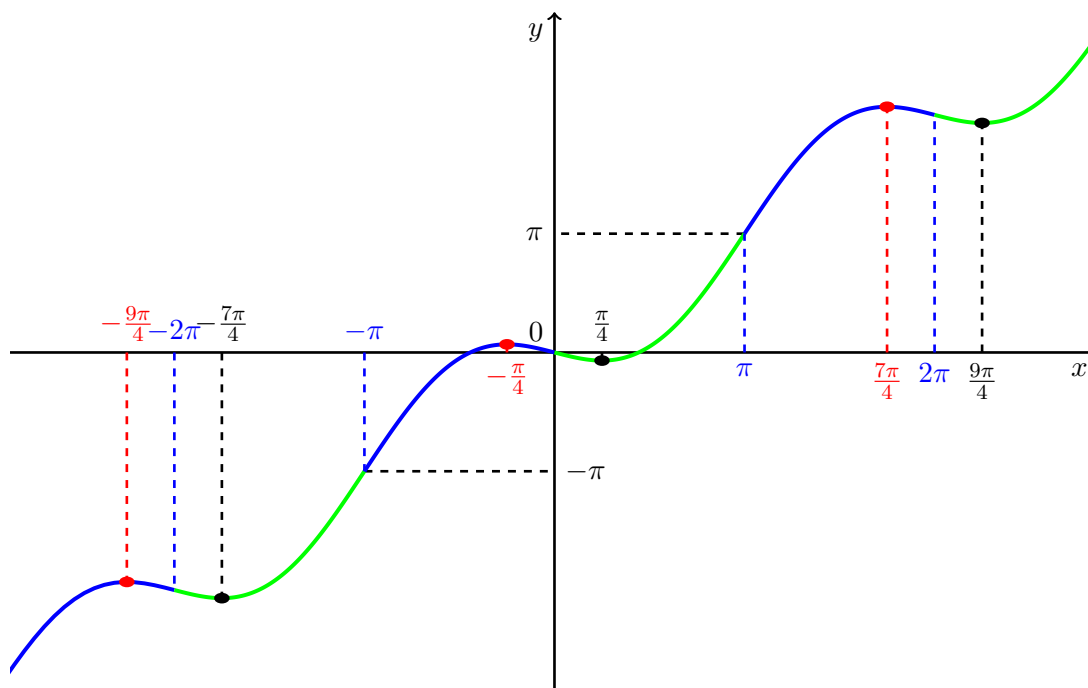
- $x \in (\pi; 2\pi)$: hier ist $\sin x < 0$ und damit auch $f''(x) < 0$. Wegen der Periodizität ist die Funktion in allen Intervallen

$$(2\pi k + \pi; 2\pi k + 2\pi) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

streng konkav.

- Graph:

Blau: Bereiche, wo die Funktion konkav ist, Grün: Bereiche, wo die Funktion konvex ist.
Rot: lokale Maximumstellen, Schwarz: lokale Minimumstellen



b) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+3}$

- Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich

- Bestimmen Sie die Nullstellen (wenn möglich) und Asymptoten
- Untersuchen Sie die Funktionen auf lokale Extrema und Wendepunkte
- Geben Sie an, wo die Funktionen monoton wachsend bzw. fallend sind
- Geben Sie an, wo die Funktion konvex bzw. konkav sind
- Skizzieren Sie den Graph der Funktion

Lösung:

- Definitionsbereich: Die Funktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert (Nenner wird nie Null bei reellen Zahlen), damit ist $D_f = \mathbb{R}$.
- Nullstellen und Asymptoten:
 - Die Funktion hat genau eine Nullstelle: bei $x = 0$.
 - Die Funktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert und ist stetig; damit gibt es keine vertikalen Asymptoten. Untersuche das Verhalten für $x \rightarrow \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 3} = 1$$

Damit hat die Funktion für $x \rightarrow +\infty$ die horizontale Asymptote $y = 1$. Ähnlich gilt

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 + 3} = 1$$

Damit hat die Funktion auch für $x \rightarrow -\infty$ die horizontale Asymptote $y = 1$.

- lokale Extrema und Wendepunkte:
 - Extrema: Zuerst bestimmen wir die kritischen Punkte. Die erste Ableitung von der Funktion:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 3) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{6x}{(x^2 + 3)^2}$$

Damit haben wir einen einzigen kritischen Punkt: $x_0 = 0$. Für weitere Untersuchung berechnen wir die zweite Ableitung:

$$f''(x) = \frac{6(x^2 + 3)^2 - 6x \cdot 2(x^2 + 3) \cdot 2x}{(x^2 + 3)^4} = 18 \cdot \frac{(1 - x^2)}{(x^2 + 3)^3}$$

Damit ist $f''(0) > 0$ und $x_0 = 0$ mit $f(0) = 0$ ein lokales Minimum.

- Wendepunkte. Nullstellen der zweiten Ableitung:

$$18 \cdot \frac{(1 - x^2)}{(x^2 + 3)^3} \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0$$

Damit müssen zwei Punkte untersucht werden:

$$x_1 = -1 \quad \text{und} \quad x_2 = 1$$

Vorzeichen von der zweiten Ableitung ist gleich mit Vorzeichen von $1 - x^2$. Damit gilt

- * $x \in (-\infty; -1) \Rightarrow 1 - x^2 < 0 \Rightarrow f''(x) < 0$ und damit ist die Funktion in diesem Bereich streng konkav.
- * $x \in (-1; 1) \Rightarrow 1 - x^2 > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$ und damit ist die Funktion in diesem Bereich streng konvex.
- * $x \in (1; +\infty) \Rightarrow 1 - x^2 < 0 \Rightarrow f''(x) < 0$ und damit ist die Funktion in diesem Bereich streng konkav.

Damit sind beide Punkte

$$x_1 = -1 \quad \text{und} \quad x_2 = 1$$

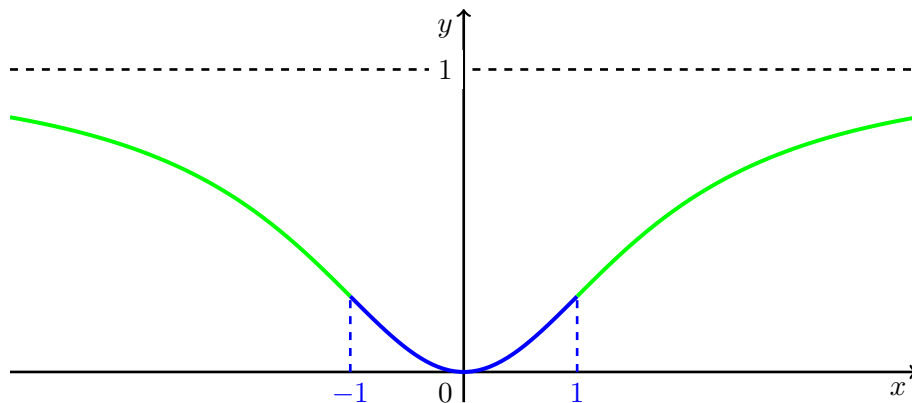
Wendepunkte.

- Monotones Wachsen bzw. Fallen: Vorzeichen von der ersten Ableitung

$$f'(x) = \frac{6x}{(x^2 + 3)^3}$$

ist gleich mit dem Vorzeichen der Funktion $6x$ (da der Nenner immer positiv ist). Damit gilt

- $x \in (-\infty; 0) \Rightarrow 6x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$ Funktion ist streng monoton fallend
- $x \in (0; +\infty) \Rightarrow 6x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ Funktion ist streng monoton steigend
- Konvex und konkav: Wie vorher beim Bestimmung von Wendepunkten bereits diskutiert:
 - Funktion ist streng konvex auf dem Intervall $(-1; 1)$
 - Funktion ist streng konkav auf der Intervalle $(-\infty; -1)$ und $(1; +\infty)$.
- Graph (Beachten Sie die unterschiedlichen Skalierungen der Achsen!):
Blau: der konvexe Bereich, Grün: die konkaven Bereiche.



c) $f(x) = xe^x$

- Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich
- Bestimmen Sie die Nullstellen (wenn möglich) und Asymptoten
- Untersuchen Sie die Funktionen auf lokale Extrema und Wendepunkte
- Geben Sie an, wo die Funktionen monoton wachsend bzw. fallend sind
- Geben Sie an, wo die Funktion konvex bzw. konkav sind
- Skizzieren Sie den Graph der Funktion

Lösung:

- Definitionsbereich: Die Funktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, damit ist $D_f = \mathbb{R}$.
- Nullstellen und Asymptoten:
 - Die Funktion hat genau eine Nullstelle: bei $x = 0$.
 - Die Funktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert und ist stetig; damit gibt es keine vertikalen Asymptoten. Untersuche das Verhalten für $x \rightarrow \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty$$

Damit hat die Funktion für $x \rightarrow +\infty$ keine horizontale Asymptote. Der andere Grenzwert:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = [-\infty \cdot 0] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \text{ (l'Hospital)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \left[\frac{1}{-\infty} \right] = 0\end{aligned}$$

Damit hat die Funktion für $x \rightarrow -\infty$ die horizontale Asymptote $y = 0$.

- lokale Extrema und Wendepunkte:

- Extrempunkte: Berechne die erste Ableitung:

$$f'(x) = x e^x + e^x = (x + 1) e^x$$

Da die Funktion e^x immer positiv ist, ist $x_0 = -1$ der einzige kritische Punkt.

Die zweite Ableitung:

$$f''(x) = (x + 1) e^x + e^x = (x + 2) e^x$$

Da

$$f''(-1) = e^{-1} > 0$$

ist $x_0 = -1$ ein lokales Minimum (im engeren Sinne).

- Wendepunkte: bestimme die Nullstellen von der zweiten Ableitung:

$$f''(x) = (x + 2) e^x$$

damit ist die einzige mögliche Nullstelle $x = -2$. Da die zweite Ableitung hier auch den Vorzeichen wechselt (von negativ nach positiv), ist dies ein Wendepunkt.

- Monotones Wachsen bzw. Fallen: Vorzeichen der ersten Ableitung:

$$f'(x) = (x + 1) e^x$$

ist gleich mit Vorzeichen von $(x + 1)$.

- $x \in (-\infty; -1) \Rightarrow x + 1 < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$ die Funktion ist streng monoton fallend.
- $x \in (-1; +\infty) \Rightarrow x + 1 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ die Funktion ist streng monoton steigend.

- Konvex und konkav: Vorzeichen der zweiten Ableitung

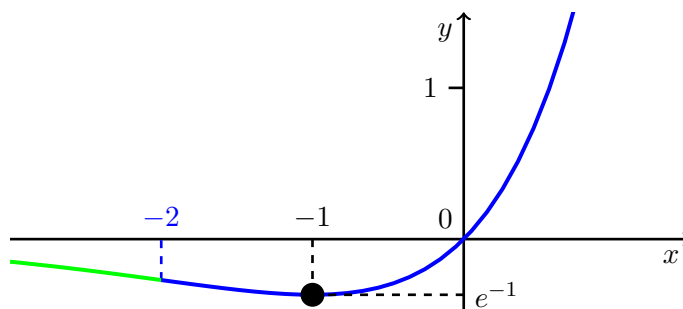
$$f''(x) = (x + 2) e^x$$

ist gleich mit Vorzeichen von $(x + 2)$. Damit ist

- $x \in (-\infty; -2) \Rightarrow x + 2 < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow$ die Funktion ist streng konkav
- $x \in (-2; +\infty) \Rightarrow x + 2 > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow$ die Funktion ist streng konvex

- Graph:

Blau: der konvexe Bereich; Grün: der konkave Bereich



d) $f(x) = x^2 e^x$

- Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich
- Bestimmen Sie die Nullstellen (wenn möglich) und Asymptoten
- Untersuchen Sie die Funktionen auf lokale Extrema und Wendepunkte
- Geben Sie an, wo die Funktionen monoton wachsend bzw. fallend sind
- Geben Sie an, wo die Funktion konvex bzw. konkav sind
- Skizzieren Sie den Graph der Funktion

Lösung:

- Definitionsbereich: Die Funktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, damit ist $D_f = \mathbb{R}$.
- Nullstellen und Asymptoten:
 - Die Funktion hat genau eine Nullstelle: bei $x = 0$.
 - Die Funktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert und ist stetig; damit gibt es keine vertikalen Asymptoten. Untersuche das Verhalten für $x \rightarrow \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^x = +\infty$$

Damit hat die Funktion für $x \rightarrow +\infty$ keine horizontale Asymptote. Der andere Grenzwert:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = [+\infty \cdot 0] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \text{ (l'Hospital)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = \left[\frac{-\infty}{-\infty} \text{ (l'Hospital)} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^x} = \left[\frac{2}{\infty} \right] = 0 \end{aligned}$$

Damit hat die Funktion für $x \rightarrow -\infty$ die horizontale Asymptote $y = 0$.

- lokale Extrema und Wendepunkte:
 - Extremstellen: Die erste Ableitung der Funktion ist

$$f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = x(2+x)e^x$$

Die Ableitungsfunktion $f'(x)$ hat zwei Nullstellen:

$$x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = -2$$

Für weitere Untersuchung der kritischen Punkte bestimmen wir die zweite Ableitung:

$$f''(x) = (2+2x)e^x + (2x+x^2)e^x = (x^2+4x+2)e^x$$

An den beiden kritischen Punkten:

$$f''(x_1) = f''(0) = (0^2 + 4 \cdot 0 + 2)e^0 = 2 \cdot 1 = 2 > 0$$

Damit ist $x_1 = 0$ ein lokales Minimum (im engeren Sinne).

$$f''(x_2) = f''(-2) = (4 - 8 + 2)e^{-2} = -2e^{-2} < 0$$

Damit ist $x_2 = -2$ ein lokales Maximum (im engeren Sinne).

- Wendepunkte: Suche die Nullstellen von der zweiten Ableitung:

$$f''(x) = (x^2 + 4x + 2)e^x \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 2 \stackrel{!}{=} 0$$

da die Exponentialfunktion immer positiv ist. Löse die quadratische Gleichung:

$$x^2 + 4x + 2 = 0 \Rightarrow x_3 = -2 - \sqrt{2}, \quad x_4 = -2 + \sqrt{2}.$$

Vorzeichen von $f''(x)$ ist gleich mit der Vorzeichen von $p(x) := x^2 + 4x + 2$. Da $p(x)$ an der beiden Nullstellen den Vorzeichen auch wirklich wechselt, sind $x_3 = -2 - \sqrt{2}$ und $x_4 = -2 + \sqrt{2}$ Wendepunkte.

- Monotones Wachsen bzw. Fallen: Untersuche das Vorzeichen von der ersten Ableitung:

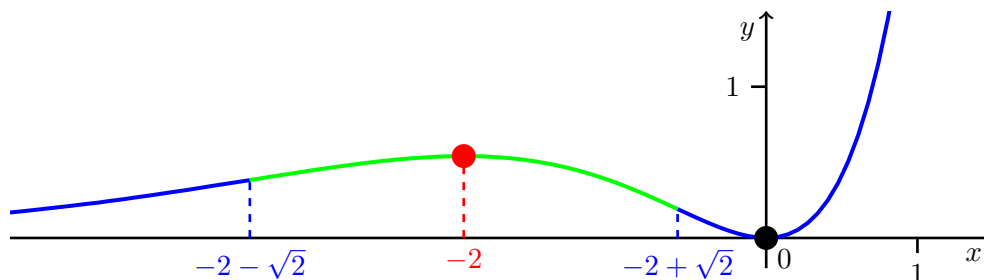
$$f'(x) = x(2 + x)e^x$$

Da e^x immer positiv ist, ist der Vorzeichen von $f'(x)$ gleich mit dem Vorzeichen von $x(x+2)$.

- $x \in (-\infty; -2) \Rightarrow x(x+2) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ die Funktion ist streng monoton steigend.
- $x \in (-2; 0) \Rightarrow x(x+2) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$ die Funktion ist streng monoton fallend.
- $x \in (0; +\infty) \Rightarrow x(x+2) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ die Funktion ist streng monoton steigend.
- Konvex und konkav: Vorzeichen von $f''(x)$ ist gleich mit der Vorzeichen von $p(x) := x^2 + 4x + 2$.
 - $x \in (-\infty; -2 - \sqrt{2}) \Rightarrow p(x) > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow$ die Funktion ist streng konvex.
 - $x \in (-2 - \sqrt{2}; -2 + \sqrt{2}) \Rightarrow p(x) < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow$ die Funktion ist streng konkav.
 - $x \in (-2 + \sqrt{2}; +\infty) \Rightarrow p(x) > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow$ die Funktion ist streng konvex.
- Graph:

Blau: die konvexen Bereiche, Grün: der konkave Bereich.

Rot: lokales Maximum, Schwarz: lokales Minimum



e) $f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

- Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich
- Bestimmen Sie die Nullstellen (wenn möglich) und Asymptoten
- Untersuchen Sie die Funktionen auf lokale Extrema und Wendepunkte
- Geben Sie an, wo die Funktionen monoton wachsend bzw. fallend sind
- Geben Sie an, wo die Funktion konvex bzw. konkav sind
- Skizzieren Sie den Graph der Funktion

Lösung:

- Definitionsbereich: Die Funktion ist nur für positive x definiert: $D_f = (0; +\infty)$.

- Nullstellen und Asymptoten:

- Die Funktion hat genau eine Nullstelle: wenn $\ln x = 0$, d.h., bei $x = 1$.
- Die Funktion ist für $x \in (0, +\infty)$ definiert. Untersuche nach möglicher vertikalen Asymptote bei $x \rightarrow 0+$:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \left[\frac{-\infty}{+0} \right] = -\infty$$

D.h., die Funktion hat bei $x \rightarrow 0+$ eine vertikale Asymptote. Verhalten für $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = 0$$

Damit hat die Funktion eine horizontale Asymptote $y = 0$ für $x \rightarrow +\infty$.

- lokale Extrema und Wendepunkte:

- Extremstellen: bestimme zuerst die kritischen Punkte:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - \ln x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{1 - \frac{1}{2} \ln x}{x\sqrt{x}}$$

Suche x : die Ableitung verschwindet. Dafür muss der Zähler gleich Null sein (am Punkt $x = 0$ ist der Nenner gleich Null, damit könnte $x = 0$ auch ein kritischer Punkt sein. Dieser gehört jedoch nicht zum Definitionsbereich der Funktion!) Löse

$$1 - \frac{1}{2} \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x_0 = e^2$$

Die Funktion hat genau einen kritischen Punkt. Um diese genauer zu untersuchen, wird die zweite Ableitung berechnet:

$$f''(x) = \left(\frac{1 - \frac{1}{2} \ln x}{x\sqrt{x}} \right)' = \frac{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot x\sqrt{x} - (1 - \frac{1}{2} \ln x) \cdot \frac{3}{2}\sqrt{x}}{x^2 \cdot x}$$

Am Punkt $x_0 = e^2$:

$$f''(e^2) = \frac{-\frac{1}{2} \cdot e - (1 - \frac{1}{2} \ln(e^2)) \cdot \frac{3}{2} \cdot e}{e^6} = \frac{-\frac{1}{2}e - (1 - \frac{1}{2} \cdot 2) \cdot \frac{3}{2}e}{e^6} = \frac{-\frac{1}{2}e}{e^6} < 0$$

Damit ist $x_0 = e^2$ ein lokales Maximum (im engeren Sinne).

- Wendepunkte: Suche x : die zweite Ableitung verschwindet.

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot x\sqrt{x} - (1 - \frac{1}{2} \ln x) \cdot \frac{3}{2}\sqrt{x}}{x^3} = 0 \\ &\Leftrightarrow -\sqrt{x} - \left(1 - \frac{1}{2} \ln x\right) \cdot 3\sqrt{x} = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 + 3 \left(1 - \frac{1}{2} \ln x\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} \ln x = -\frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \ln x = -\frac{4}{3} \\ &\Leftrightarrow \ln x = \frac{8}{3} \\ &\Leftrightarrow x_1 = e^{\frac{8}{3}} \end{aligned}$$

Überprüfe, ob in Punkt x_1 die zweite Ableitung den Vorzeichen wechselt. In der Definitionsbereich ist der Nenner immer positiv, deshalb müssen wir uns nur den Vorzeichen von dem Zähler anschauen. Dieser ist wiederum gleich mit der Vorzeichen von der Ausdruck

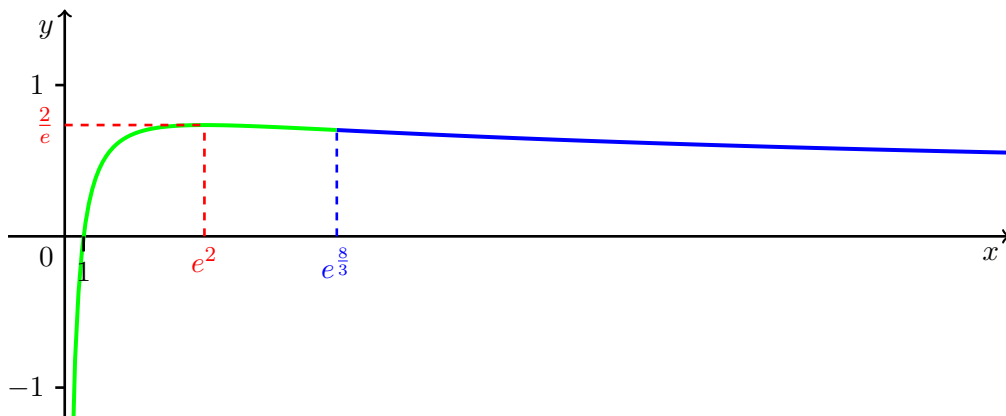
$$h(x) = -\sqrt{x} \left(1 + 3 \left(1 - \frac{1}{2} \ln x \right) \right)$$

- * $x \in (0; e^{\frac{8}{3}}) \Rightarrow 1 + 3(1 - \frac{1}{2} \ln x) > 0 \Rightarrow h(x) < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow$ Funktion ist streng konkav
- * $x \in (e^{\frac{8}{3}}; +\infty) \Rightarrow 1 + 3(1 - \frac{1}{2} \ln x) < 0 \Rightarrow h(x) > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow$ Funktion ist streng konvex

Damit ist $x_1 = e^{\frac{8}{3}}$ ein Wendepunkt.

- Monotones Wachsen bzw. Fallen: Um das Vorzeichen von $f'(x)$ zu bestimmen, brauchen wir nur den Vorzeichen von dem Zähler, da der Nenner innerhalb des Definitionsbereiches immer positiv ist.
 - $x \in (0; e^2) \Rightarrow 1 - \frac{1}{2} \ln x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ Funktion ist streng monoton steigend
 - $x \in (e^2; +\infty) \Rightarrow 1 - \frac{1}{2} \ln x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$ Funktion ist streng monoton fallend
- Konvex und konkav: Diese Bereiche haben wir bereits vorher bestimmt:
 - $x \in (0; e^{\frac{8}{3}}) \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow$ Funktion ist streng konkav
 - $x \in (e^{\frac{8}{3}}; +\infty) \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow$ Funktion ist streng konvex
- Graph (Achtung: unterschiedliche Skalierung für x - und y -Achsen!):

Blau: Bereich, wo die Funktion konvex ist, Grün: Bereich, wo die Funktion konkav ist.



f) $f(x) = x \ln(x)$

- Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich
- Bestimmen Sie die Nullstellen (wenn möglich) und Asymptoten
- Untersuchen Sie die Funktionen auf lokale Extrema und Wendepunkte
- Geben Sie an, wo die Funktionen monoton wachsend bzw. fallend sind
- Geben Sie an, wo die Funktion konvex bzw. konkav sind
- Skizzieren Sie den Graph der Funktion

Lösung:

- Definitionsbereich: Die Funktion ist nur für positive x definiert: $D_f = (0; +\infty)$.
- Nullstellen und Asymptoten:
 - Diese Funktion hat genau eine Nullstelle: wenn $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Die andere scheinbare Nullstelle $x = 0$ gehört nicht zum Definitionsbereich.
 - Untersuchen das Verhalten der Funktion bei $x \rightarrow 0+$:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x = [0 \cdot (-\infty)] = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-x^2}{x} = 0$$

Damit hat diese Funktion *keine* vertikale Asymptote bei $x \rightarrow 0+$.

Untersuche das Verhalten bei $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = [\infty \cdot \infty] = \infty$$

Damit hat die Funktion keine horizontale Asymptote bei $x \rightarrow +\infty$.

- lokale Extrema und Wendepunkte:

- Extremstellen. Finde erst die kritischen Punkte:

$$f'(x) = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x = 1 + \ln x$$

Nullstellen von $f'(x)$:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$$

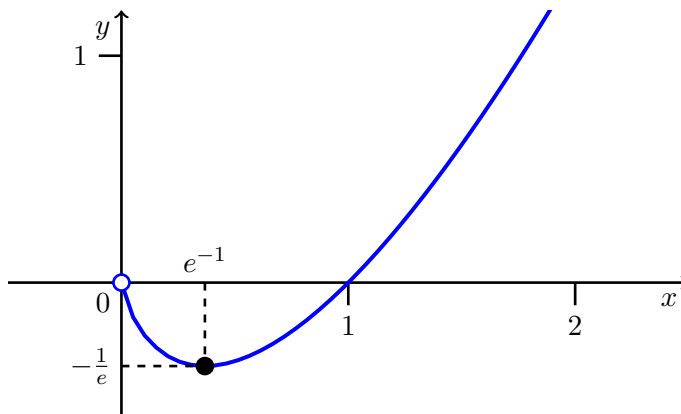
Damit haben wir genau einen kritischen Punkt $x_1 = e^{-1}$. Für weitere Untersuchung berechne die zweite Ableitung:

$$f''(x) = \frac{1}{x}$$

Damit gilt

$$f''(e^{-1}) = \frac{1}{e^{-1}} = e > 0 \Rightarrow x_1 = e^{-1} \text{ ist ein lokales Minimum.}$$

- Wendepunkte: da die zweite Ableitung $f''(x) = \frac{1}{x}$ nie Null werden kann, hat die Funktion keine Wendepunkte.
- Monotones Wachsen bzw. Fallen: Bestimme den Vorzeichen von der ersten Ableitung:
 - $x \in (0; e^{-1}) \Rightarrow 1 + \ln x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$ Funktion ist streng monoton fallend.
 - $x \in (e^{-1}; +\infty) \Rightarrow 1 + \ln x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ Funktion ist streng monoton steigend.
- Konvex und konkav: Da die zweite Ableitung $f''(x) = \frac{1}{x}$ auf dem gesamten Definitionsbereich positiv ist, ist die Funktion überall in $D_f = (0; +\infty)$ streng konvex.
- Graph:



DiffEinDim/Kurvendisk/Ag_Kurvendiskussion.tex

Aufgabe 22.155 (Ermittlung des Qualitativen Verlaufs von Funktionsgraphen)

Führen Sie für die folgenden Funktionen eine vollständige Kurvendiskussion durch:

Angabe von maximalem Definitionsbereich, Symmetrie (bzgl. y -Achse oder Nullpunkt), Periodizität, Achsenschnittpunkten, Asymptoten, Ableitungen f' , f'' , Extremstellen x_k , Wendestellen w_k .

- a) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + x - 3$ $\mathbb{R}$, nicht sym., nicht periodisch, $(0, -3)$, $(3, 0)$, keine Asymptote,
 $f'(x) = 6x^2 - 12x + 1$, $f''(x) = 12x - 12$, $x_1 = 1 - \frac{\sqrt{30}}{6}$ Maximalstelle, $x_2 = 1 + \frac{\sqrt{30}}{6}$ Minimalstelle, $w_0 = 1$.
- b) $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 2}$ $\mathbb{R}$, punktsym., nicht periodisch, $(0, 0)$, Asymptote $y = 0$, $f'(x) = \frac{4(2-x^2)}{(x^2+2)^2}$,
 $f''(x) = \frac{8x(x^2-6)}{(x^2+2)^3}$, $x_1 = -\sqrt{2}$ Minimalstelle, $x_2 = \sqrt{2}$ Maximalstelle, $w_0 = 0$, $w_1 = \sqrt{6}$, $w_2 = -\sqrt{6}$.
- c) $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + 1}$ $\mathbb{R}$, achsensym., nicht periodisch, $(0, 0)$, Asymptote $y = 3$, $f'(x) = \frac{6x}{(x^2+1)^2}$,
 $f''(x) = 6 \cdot \frac{1-3x^2}{(x^2+1)^3}$, $x_0 = 0$ Minimalstelle, $w_1 = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$, $w_2 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.
- d) $f(x) = x \cdot \sqrt{9-x^2}$ $[-3, 3]$, punktsym., nicht periodisch, $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(-3, 0)$, keine Asymptote,
 $f'(x) = \frac{9-2x^2}{\sqrt{9-x^2}}$, $f''(x) = \frac{x(2x^2-27)}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}$, $x_1 = -3$ Maximalstelle, $x_2 = -\frac{3}{\sqrt{2}}$ Minimalstelle, $x_3 = \frac{3}{\sqrt{2}}$ Maximalstelle,
 $x_4 = 3$ Minimalstelle, $w_0 = 0$.
- e) $f(x) = (2x - x^2) \cdot e^x$ $\mathbb{R}$, nicht sym., nicht periodisch, $(0, 0)$, $(2, 0)$, Asymptote $y = 0$, $f'(x) = -(x^2 - 2) \cdot e^x$,
 $f''(x) = -(x^2 + 2x - 2) \cdot e^x$, $x_1 = -\sqrt{2}$ Minimalstelle, $x_2 = \sqrt{2}$ Maximalstelle, $w_1 = -1 - \sqrt{3}$, $w_2 = -1 + \sqrt{3}$.
- f) $f(x) = \frac{(\ln(x))^2}{x}$ $(0; \infty)$, nicht sym., nicht periodisch, $(1, 0)$,
Asymptoten $x = 0$ und $y = 0$, $f'(x) = \frac{(2-\ln(x)) \cdot \ln(x)}{x^2}$, $f''(x) = 2 \cdot \frac{(\ln(x))^2 - 3\ln(x) + 1}{x^3}$, $x_1 = 1$ Minimalstelle, $x_2 = e^2$
Maximalstelle, $w_1 = \exp\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$, $w_2 = \exp\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Lösung:

a) Untersuchung von $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + x - 3$:

Es wird für die durch $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + x - 3$ definierte Funktion f auf ihrem maximalen Definitionsbereich D_f eine Kurvendiskussion durchgeführt:

(i) Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}$,

(ii) Achsenschnittpunkte

- Schnittpunkt mit der y -Achse: $(0, f(0)) = (0, -3)$.
- Nullstelle: $u_1 = 3$ wird durch Ausprobieren gefunden; eine Polynomdivision ergibt $f(x) = (x-3)(2x^2+1)$. Wegen $2x^2+1 \geq 1 > 0$ gibt es somit keine weiteren Nullstellen.

(iii) Symmetrie: Die Funktion f ist weder punkt- noch achsensymmetrisch, da der Koeffizient des konstanten Terms -3 ungleich null und der Grad der Polynomfunktion ungerade ist.

(iv) Grenzwertverhalten: Als Polynomfunktion vom Grad 3 mit $2 > 0$ als Koeffizient zur höchsten Potenz von x ist f für $x \rightarrow \infty$ bzw. $x \rightarrow -\infty$ bestimmt divergent: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Daher gibt es keine Asymptoten.

(v) Als nicht konstante Polynomfunktion ist f nicht periodisch.

(vi) Für die weitere Untersuchung werden zunächst die erste und die zweite Ableitung von f berechnet:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 12x + 1 \\ f''(x) &= 12x - 12 = 12(x - 1). \end{aligned}$$

In diesem Fall kann auch die dritte Ableitung einfach berechnet werden; es gilt

$$f'''(x) = 12.$$

(vii) Extremstellen und Monotonie: Die Funktion f ist auf ganz $\mathbb{R}$ (beliebig oft) differenzierbar. Somit muss jede Minimalstelle bzw. Maximalstelle von f eine kritische Stelle von f sein, das heißt, es muss $f'(x) = 0$ gelten.

Die notwendige Bedingung für Extremstellen

$$0 = f'(x) = 6x^2 - 12x + 1$$

ist wegen $\Delta = 144 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = 120 = 4 \cdot 30 > 0$ genau für die Werte

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{12 - \sqrt{120}}{12} = 1 - \frac{\sqrt{30}}{6} \\x_2 &= \frac{12 + \sqrt{120}}{12} = 1 + \frac{\sqrt{30}}{6}\end{aligned}$$

erfüllt.

Es ist $f''(x_1) = -2\sqrt{30} < 0$ und $f''(x_2) = 2\sqrt{30} > 0$. Folglich ist $f(1 - \frac{\sqrt{30}}{6})$ ein lokales Maximum an der Stelle $x_1 = 1 - \frac{\sqrt{30}}{6}$, und $f(1 + \frac{\sqrt{30}}{6})$ ist ein lokales Minimum an der Stelle $x_2 = 1 + \frac{\sqrt{30}}{6}$.

Auf drei Dezimalen gerundet ist das lokale Maximum $f(x_1) = -2.957$ an der Stelle $x_1 = 0.087$, und $f(x_2) = -9.043$ ist das lokale Minimum an der Stelle $x_2 = 1.913$. Damit ist $(0.087, -2.957)$ der lokale Hochpunkt und $(1.913, -9.043)$ der lokale Tiefpunkt von f .

- (viii) Monotonieverhalten: Die differenzierbare Funktion f ist monoton wachsend, wenn die erste Ableitung größer gleich null ist; sie ist monoton fallend, wenn die erste Ableitung kleiner gleich null ist.

Da f' eine nach oben geöffnete Parabel mit den Nullstellen x_1 und x_2 ist, ergibt sich:

- Für alle $x \in]-\infty, 1 - \frac{\sqrt{30}}{6}]$ ist $f'(x) \geq 0$ und damit f hier monoton wachsend.
- Für alle $x \in [1 - \frac{\sqrt{30}}{6}, 1 + \frac{\sqrt{30}}{6}]$ ist $f'(x) \leq 0$ und damit f hier monoton fallend.
- Für alle $x \in [1 + \frac{\sqrt{30}}{6}, \infty[$ ist $f'(x) \geq 0$ und damit f hier monoton wachsend.

- (ix) Wendestellen: Es ist f auf ganz $\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Somit muss jede Wendestelle eine kritische Stelle von f'' sein, das heißt, es muss $f''(x) = 0$ gelten.

Die notwendige Bedingung für Wendestellen

$$0 = f''(x) = 12(x - 1)$$

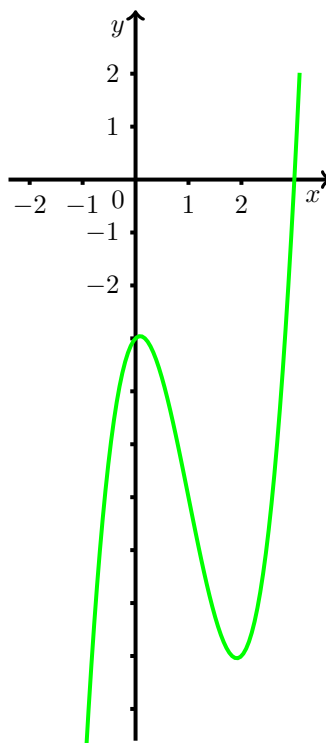
ist nur für $w = 1$ erfüllt. Wegen $f'''(w) = 12 \neq 0$ ist $w = 1$ die Wendestelle von f und $(w, f(w)) = (1, -6)$ der Wendepunkt des Graphen von f .

- (x) Krümmungsverhalten: Die zweimal differenzierbare Funktion f ist konvex, wenn die zweite Ableitung größer gleich null ist; sie ist konkav, wenn die zweite Ableitung kleiner gleich null ist.

Für $x \leq w = 1$ ist $f''(x) = 12(x - 1) \leq 0$, sodass f auf $] -\infty, 1]$ konkav ist. Für $x \geq w = 1$ ist $f''(x) = 12(x - 1) \geq 0$, sodass f auf $[1, \infty[$ konvex ist.

Folglich ist $w = 1$ eine Wendestelle von f , und der Wendepunkt hat die Koordinaten $(w, f(w)) = (1, -6)$.

- (xi) Graph von f im Bereich $-1.1 \leq x \leq 3.1$:



b) Untersuchung von $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 2}$

Es wird die reelle Funktion f mit $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 2}$ untersucht:

- (i) Der maximale Definitionsbereich ist $D_f = \mathbb{R}$, da $x^2 + 2 \geq 2 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
- (ii) Achsenschnittpunkte:
 - Schnittpunkt S_y mit der y -Achse: $f(0) = 0$; somit ist $S_y = (0, 0)$.
 - Schnittpunkt S_x mit der x -Achse: Aus der Bedingung $f(x) = 0$ für Nullstellen folgt $4x = 0$. Somit ist $x_1 = 0$ die einzige Nullstelle von f und $S_x = (0, 0)$.
- (iii) Symmetrie: Es ist $f(-x) = \frac{4(-x)}{(-x)^2 + 2} = -\frac{4x}{x^2 + 2} = -f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Die Funktion f ist somit ungerade und damit der Graph von f punktsymmetrisch bezüglich des Nullpunkts.
- (iv) Grenzwertverhalten: Die Funktion f ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und stetig. Somit ist nur das Grenzwertverhalten für $x \rightarrow \infty$ bzw. $x \rightarrow -\infty$ zu untersuchen. Aufgrund der Symmetrie genügt es, das Verhalten für $x \rightarrow \infty$ zu untersuchen. Als gebrochenrationale Funktion von zwei Polynomfunktionen, wo der Grad des Nennerpolynoms größer als der Grad des Zählerpolynoms ist, besitzt der Graph von f die x -Achse als waagerechte Asymptote; für $x \neq 0$ gilt

$$f(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{4}{1 + \frac{2}{x^2}} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad x \rightarrow \infty.$$

Daher ist $y = 0$ die Asymptote von f .

- (v) Die Funktion f ist als rationale (nicht konstante) Funktion nicht periodisch.
- (vi) Ableitungen: Als rationale Funktion ist f auf ganz $\mathbb{R}$ (beliebig oft) differenzierbar. Für die weitere Untersuchung werden die erste und die zweite Ableitung von f berechnet:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \cdot \frac{1 \cdot (x^2 + 2) - x \cdot 2x}{(x^2 + 2)^2} \\ &= 4 \cdot \frac{-x^2 + 2}{(x^2 + 2)^2} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= 4 \cdot \frac{-2x(x^2+2)^2 - (-x^2+2) \cdot 2(x^2+2) \cdot 2x}{(x^2+2)^4} \\
 &= 4 \cdot \frac{-2x(x^2+2) - (-x^2+2) \cdot 4x}{(x^2+2)^3} \\
 &= 4 \cdot \frac{-2x^3 - 4x + 4x^3 - 8x}{(x^2+2)^3} \\
 &= 4 \cdot \frac{2x^3 - 12x}{(x^2+2)^3} \\
 &= 8 \cdot \frac{x(x^2-6)}{(x^2+2)^3}
 \end{aligned}$$

- (vii) Extremstellen: Die differenzierbare Funktion f ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Somit muss jede Minimalstelle bzw. Maximalstelle von f eine kritische Stelle von f sein, das heißt, es muss $f'(x) = 0$ gelten. Ebenso muss jede Wendestelle eine kritische Stelle von f'' sein.

Die notwendige Bedingung für Extremstellen $f'(x) = 0$ ist zu $-x^2 + 2 = 0$ gleichwertig. Folglich sind $x_1 = -\sqrt{2}$ und $x_2 = \sqrt{2}$ die einzigen Lösungen.

Es ist $f''(\sqrt{2}) = 8 \cdot \frac{\sqrt{2}(2-6)}{(2+2)^3} < 0$, sodass $x_2 = \sqrt{2}$ eine Maximalstelle ist.

Aufgrund der Punktsymmetrie des Graphen ist somit $x_1 = -\sqrt{2}$ eine Minimalstelle von f .

Damit ist $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ der Hochpunkt und $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ der Tiefpunkt des Graphen von f .

- (viii) Monotonieverhalten: Da f auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, ergibt sich das Monotonieverhalten aus den Ergebnissen über die Extremstellen: Die Funktion f ist auf

- $] -\infty, -\sqrt{2}[$ monoton fallend,
- $] -\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ monoton wachsend,
- $] \sqrt{2}, \infty[$ monoton fallend.

- (ix) Wendestellen: Die notwendige Bedingung für Wendestellen $f''(x) = 0$ ist zu

$$8x(x^2 - 6) = 0$$

gleichwertig. Somit sind $w_0 = 0$, $w_1 = \sqrt{6}$ und $w_2 = -\sqrt{6}$ die einzigen Lösungen.

Das Nennerpolynom von f'' ist stets größer null ist; da das Zählerpolynom nur einfache Nullstellen besitzt, ändert somit f'' in allen Stellen w_0 , w_1 und w_2 sein Vorzeichen. Deshalb sind die Stellen $w_0 = 0$, $w_1 = -\sqrt{6}$ und $w_2 = \sqrt{6}$ jeweils Wendestellen von f .

Damit sind $(0, 0)$, $(-\sqrt{6}, -\frac{\sqrt{6}}{2})$ und $(\sqrt{6}, \frac{\sqrt{6}}{2})$ die Wendepunkte des Graphen von f .

- (x) Krümmungsverhalten: Die zweimal differenzierbare Funktion f ist konvex, wenn die zweite Ableitung größer gleich null ist; sie ist konkav, wenn die zweite Ableitung kleiner gleich null ist.

Da das Nennerpolynom von f'' stets größer null ist, genügt es, das Vorzeichen des Zählerpolynoms p mit $p(x) = 8x \cdot (x - \sqrt{6}) \cdot (x + \sqrt{6})$ zu bestimmen.

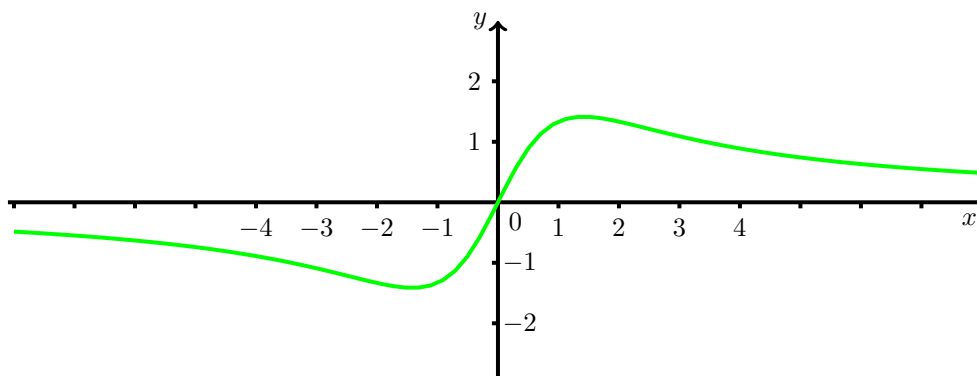
x	$0 < x < \sqrt{6}$	$x > \sqrt{6}$
$f''(x)$	-	+
f	konkav	konvex

Zusammen mit den obigen Ergebnissen zur Symmetrie (oder indem in die Tabelle auch die entsprechenden Aussagen für $x < 0$ aufgenommen werden) erhält man: f ist auf

- $] -\infty, -\sqrt{6}[$ konkav,

- $[\sqrt{6}, 0[$ konvex ist,
- $]0, \sqrt{6}[$ konkav,
- $[\sqrt{6}, \infty[$ konvex ist.

(xi) Skizze des Graphen von f für $-8 \leq x \leq 8$:



c) **Untersuchung von** $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + 1}$

Es wird die durch $f(x) = \frac{3x^2}{x^2+1} = 3 \cdot \frac{x^2}{x^2+1} = 3 - \frac{1}{x^2+1}$ definierte Funktion f untersucht:

(i) Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}$, da $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

- Schnittpunkt mit der y -Achse ist $(0, f(0)) = (0, 0)$.
- Nullstelle: Aus $f(x) = 0$ folgt $3x^2 = 0$. Somit ist $x_1 = 0$ die einzige Nullstelle von f .

(ii) Symmetrie: Die Funktion f ist eine gerade Funktion und damit der Graph von f achsensymmetrisch, da nur die Koeffizienten zu geraden Exponenten von x des Zähler- und des Nennerpolynoms von null verschieden sind. (Oder es wird festgestellt, dass $f(-x) = \frac{3(-x)^2}{(-x)^2+1} = \frac{3x^2}{x^2+1} = f(x)$ ist.)

(iii) Grenzwertverhalten: Die Funktion f ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und stetig. Somit ist nur das Grenzwertverhalten für $x \rightarrow \infty$ bzw. $x \rightarrow -\infty$ zu untersuchen. Aufgrund der Symmetrie genügt es, das Verhalten für $x \rightarrow \infty$ zu untersuchen. Als gebrochenrationale Funktion von zwei Polynomfunktionen mit demselben Grad besitzt f eine waagerechte Asymptote; für $x \neq 0$ gilt

$$f(x) = 3 \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \rightarrow 3 \quad \text{für} \quad x \rightarrow \infty.$$

Daher ist $y = 3$ die Asymptote von f .

(iv) Für die weitere Untersuchung werden zunächst die erste und die zweite Ableitung von f berechnet:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \cdot \frac{2x(x^2 + 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= 3 \cdot \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2 + 1)^2} \\ &= 6 \cdot \frac{x}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}f''(x) &= 6 \cdot \frac{1 \cdot (x^2 + 1)^2 - x \cdot 2(x^2 + 1) \cdot 2x}{(x + 1)^3} \\&= 6 \cdot \frac{x^2 + 1 - 4x^2}{(x^2 + 1)^3} \\&= 6 \cdot \frac{-3x^2 + 1}{(x^2 + 1)^3}.\end{aligned}$$

- (v) Extremstellen: Die Funktion f ist auf ganz $\mathbb{R}$ (beliebig oft) differenzierbar. Somit muss jede Minimalstelle bzw. Maximalstelle von f eine kritische Stelle von f sein, das heißt, es muss $f'(x) = 0$ gelten. Ebenso muss jede Wendestelle eine kritische Stelle von f'' sein.

Die notwendige Bedingung für Extremstellen $f'(x) = 0$ ist zu $6x = 0$ gleichwertig. Folglich ist $x_1 = 0$ die einzige Lösung.

Wegen $f(x) \geq 0$ und der Asymptote $y = 3$ ist $f(x_1) = f(0) = 0$ das absolute Minimum von f und $(0, 0)$ der Tiefpunkt von f .

- (vi) Monotoniebereiche: Die differenzierbare Funktion f ist monoton wachsend, wenn die erste Ableitung größer gleich null ist; sie ist monoton fallend, wenn die erste Ableitung kleiner gleich null ist.

Der Nenner von f' ist stets größer als null. Da das Zählerpolynom von f' eine Gerade $y = 6x$ mit der Nullstelle $x_1 = 0$ ist, ergibt sich:

- Für alle $x \in]-\infty, 0]$ ist $f'(x) \leq 0$ und damit f hier monoton fallend.
- Für alle $x \in [0, \infty[$ ist $f'(x) \geq 0$ und damit f hier monoton wachsend.

- (vii) Wendestellen: Die notwendige Bedingung für Wendepunkte $f''(x) = 0$ ist zu

$$6 \cdot (-3x^2 + 1) = 0$$

gleichwertig. Somit sind $w_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ und $w_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ die Lösungen.

- (viii) Die zweimal differenzierbare Funktion f ist konvex, wenn die zweite Ableitung größer gleich null ist; sie ist konkav, wenn die zweite Ableitung kleiner gleich null ist.

Da das Nennerpolynom von f'' stets größer null ist, genügt es, das Vorzeichen des Zählerpolynoms p mit $p(x) = 6 \cdot (-3x^2 + 1)$ zu bestimmen.

Die Nullstellen von f'' und damit der nach unten geöffneten Parabel p sind $w_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ und $w_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Somit ist $p(x) \leq 0$ und damit $f''(x) \leq 0$, wenn $x \leq w_1$ oder $x \geq w_2$ ist, und $p(x) \geq 0$ und damit $f''(x) \geq 0$, wenn $w_1 \leq x \leq w_2$ ist.¹

Mit den obigen Ergebnissen erhält man:

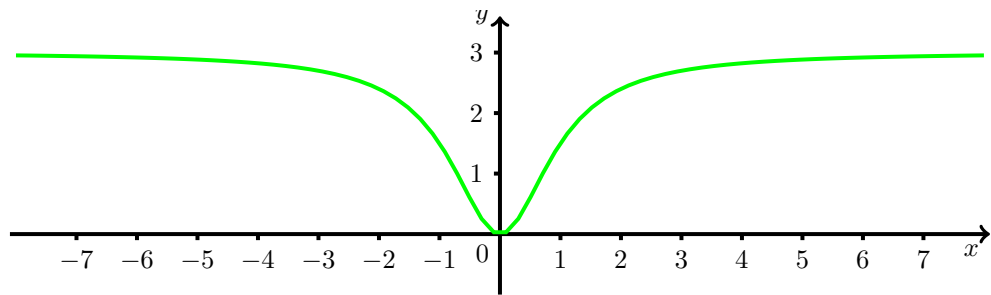
- Für $x \leq w_1$ ist $p(x) \leq 0$ und damit $f''(x) \leq 0$, sodass f auf $] -\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}]$ konkav ist.
- Aufgrund der Symmetrie ist f auf $[\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty[$ ebenfalls konkav ist.
- Für $w_1 \leq x \leq w_2$ ist $p(x) \geq 0$ und damit $f''(x) \geq 0$, sodass f auf $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ konvex ist.

Folglich sind $w_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ und $w_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ Wendestellen von f ; die Wendepunkte haben die Koordinaten $(w_1, f(w_1)) = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4})$ und, was sich auch aus der Symmetrie ergibt, $(w_2, f(w_2)) = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4})$.

- (ix) Das Krümmungsverhalten wurde bereits zusammen mit den Wendestellen bestimmt.

- (x) Graph von f im Bereich $-8 \leq x \leq 8$:

¹Immer dann, wenn f'' stetig ist, genügt es, für die Intervalle, die durch die Nullstellen von f'' gegeben sind, jeweils an einer Stelle x des jeweiligen Intervalls zu prüfen, welches Vorzeichen $f''(x)$ hat. Beispielsweise ist $-2 < w_1$ und $f''(-2) = -\frac{66}{125} < 0$; somit ist $f''(x) < 0$ für alle $x \in]-\infty, w_1[$. Folglich ist f auf $] -\infty, w_1]$ konkav.



d) Untersuchung von $f(x) = x \cdot \sqrt{9 - x^2}$

Es wird die Funktion f mit $f(x) := x\sqrt{9 - x^2}$ untersucht.

(i) Es gilt:

- maximaler Definitionsbereich $D_f = [-3, 3]$; denn es muss $9 - x^2 \geq 0$ gelten.
- Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:
 - x -Achse: Nullstellen sind 0, -3 und 3 .
 - y -Achse: $f(0) = 0$.
- Symmetrie: f ist ungerade; der Graph ist punktsymmetrisch zum Nullpunkt $(0, 0)$.

(ii) Asymptoten: f ist stetig auf dem beschränkten und abgeschlossenen Intervall $D_f = [-3, 3]$, sodass es keine Asymptoten gibt.

(iii) Extrem- und Wendepunkte:

- Ableitungen für $-3 < x < 3$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{9 - 2x^2}{\sqrt{9 - x^2}} \\ f''(x) &= \frac{2x^3 - 27x}{(9 - x^2)\sqrt{9 - x^2}} \\ &= \frac{x(2x^2 - 27)}{(9 - x^2)\sqrt{9 - x^2}} \end{aligned}$$

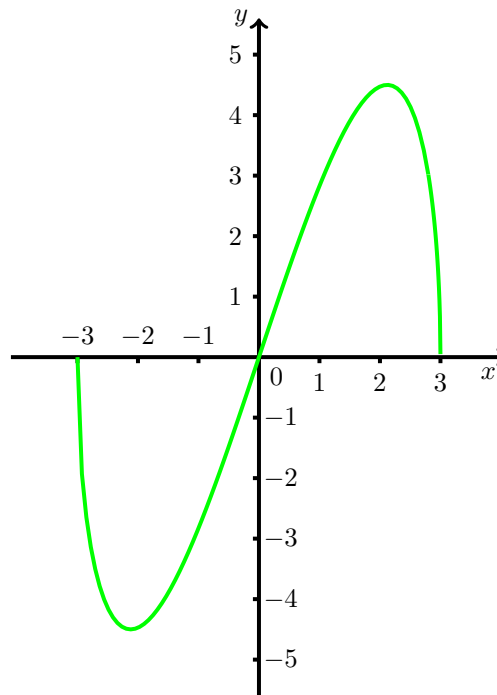
Die Ableitungen sind dort stetig.

- Nullstellen von f' sind $x_1 = -\frac{3}{\sqrt{2}}$ und $x_2 = \frac{3}{\sqrt{2}}$.
- Monotonieverhalten und Extremstellen:
 - Auf $] -3, x_1[$ ist f' negativ und damit f monoton fallend.
 - Auf $]x_1, x_2[$ ist f' positiv und damit f monoton wachsend.
 - Auf $]x_2, 3[$ ist f' negativ und damit f monoton fallend.

Somit sind -3 , x_1 , x_2 und 3 Extremstellen.

- Wendestellen: Aufgrund der Punktsymmetrie ist $w = 0$ eine Wendestelle von f . Da f'' in $D_{f''} =] -3, 3[$ keine weitere Nullstelle hat, gibt es keine weitere Wendestelle.

(iv) Graph von f im Bereich $-3 \leq x \leq 3$:



e) Untersuchung von $f(x) = (2x - x^2) \cdot e^x$

Es wird die Funktion f mit $f(x) := (2x - x^2)e^x$ untersucht.

(i) Es gilt $f(x) = -x(x - 2)e^x$ und $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$; damit ergibt sich:

- Der maximale Definitionsbereich ist $D_f = \mathbb{R}$.
- Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:
 - x -Achse: Nullstellen sind 0 und 2.
 - y -Achse: Es ist $f(0) = 0$.
- Symmetrie: Die Funktion f ist weder gerade noch ungerade und damit der Graph von f weder y -achsensymmetrisch noch punktsymmetrisch bzgl. $(0, 0)$.

(ii) Asymptoten:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -x(x - 2)e^x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x(x - 2)e^x = 0$$

Somit ist $y = 0$ für $x \rightarrow -\infty$ eine Asymptote.

(iii) Extrem- und Wendepunkte:

- Ableitungen für $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2 - 2x)e^x + (2x - x^2)e^x = (2 - x^2)e^x = -(x^2 - 2)e^x \\ f''(x) &= -2xe^x + (2 - x^2)e^x = -(x^2 + 2x - 2)e^x \end{aligned}$$

Die Ableitungen sind stetig.

- Nullstellen von f' : Lösungen von $f'(x) = 0$ sind $x_1 = -\sqrt{2}$ und $x_2 = \sqrt{2}$. Weiter ist $x_1 < x_2$ und

$$f'(x) = -(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})e^x.$$

- Monotonieverhalten und Extremstellen:

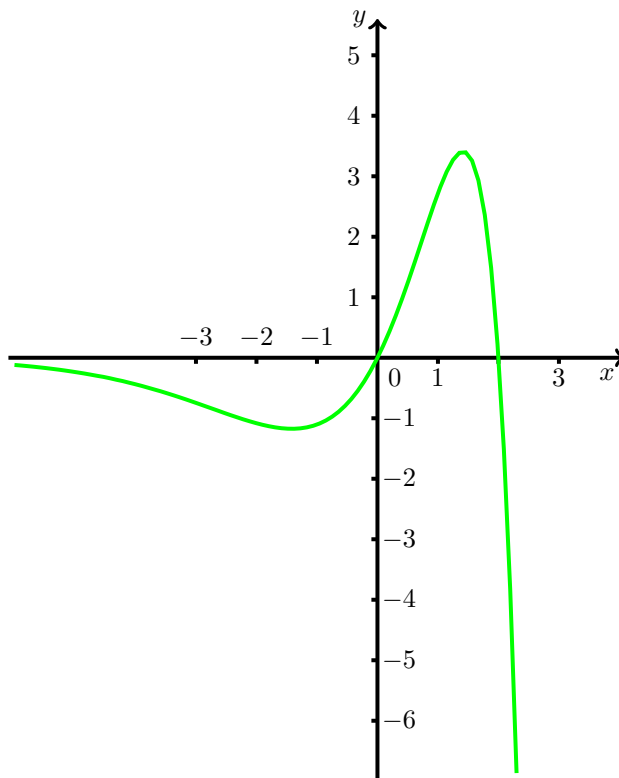
- Auf $]-\infty, -\sqrt{2}[$ ist f' negativ und damit f monoton fallend.
- Auf $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ ist f' positiv und damit f monoton wachsend.

– Auf $]\sqrt{2}, \infty[$ ist f' negativ und damit f monoton fallend.

Somit ist $x_1 = -\sqrt{2}$ Minimalstelle und $x_2 = \sqrt{2}$ Maximalstelle.

- Die notwendige Bedingung für Wendestellen $f''(x) = 0$ führt auf $x^2 + 2x - 2 = 0$. Die Lösungen sind $w_1 = \frac{-2-\sqrt{4+8}}{2} = -1 - \sqrt{3}$ und $w_2 = \frac{-2+\sqrt{4+8}}{2} = -1 + \sqrt{3}$.

(iv) Graph von f im Bereich $-6 \leq x \leq 2.3$:



f) Untersuchung von $f(x) = \frac{(\ln(x))^2}{x}$

Es wird die Funktion f mit $f(x) := \frac{\ln^2 x}{x}$ untersucht.

(i) Es gilt $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x} = \frac{1}{x} \cdot (\ln x)^2$; damit ergibt sich:

- maximaler Definitionsbereich $D_f =]0, \infty[$.
- Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:
 - x -Achse: Nullstelle ist 1.
 - y -Achse: Es ist $0 \notin D_f$, sodass es keinen Schnittpunkt mit der y -Achse gibt.
- Symmetrie: Da der Definitionsbereich die Voraussetzungen nicht erfüllt, erübrigt sich die Frage nach der Symmetrie.

(ii) Asymptoten: Es ist $x = 0$ eine vertikale Asymptote und wegen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2 \ln x}{1}}{\frac{x}{1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 0$$

ist $y = 0$ eine Asymptote für $x \rightarrow \infty$.

(iii) Extrem- und Wendepunkte:

- Ableitungen für $x > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{2\ln x}{x}x - (\ln^2 x) \cdot 1}{x^2} = \frac{2\ln x - \ln^2 x}{x^2} = \frac{(2 - \ln x) \ln x}{x^2} \\ f''(x) &= \frac{(\frac{2}{x} - \frac{2\ln x}{x}) \cdot x^2 - (2\ln x - \ln^2 x) \cdot 2x}{x^4} = 2 \cdot \frac{1 - 3\ln x + \ln^2 x}{x^3} \\ &= 2 \cdot \frac{(\ln x)^2 - 3\ln x + 1}{x^3} \end{aligned}$$

Die Ableitungen sind stetig.

- Nullstellen von f' : Lösungen von $f'(x) = 0$ sind $x_1 = 1$ und $x_2 = e^2$. Weiter ist $x_1 < x_2$ und

$$f'(x) = -\frac{\ln x(\ln x - 2)}{x^2}.$$

- Monotonieverhalten und Extremstellen:

- Auf $]0, 1[$ ist f' negativ und damit f monoton fallend.
- Auf $]1, e^2[$ ist f' positiv und damit f monoton wachsend.
- Auf $]e^2, \infty[$ ist f' negativ und damit f monoton fallend.

Somit ist $x_1 = 1$ Minimalstelle und $x_2 = e^2$ Maximalstelle. Damit ist $(1, 0)$ Tiefpunkt und $(e^2, \frac{4}{e^2})$ Hochpunkt des Graphen von f .

- Wendestellen: Die notwendige Bedingung für Wendestellen $f''(x) = 0$ führt auf die Gleichung $(\ln x)^2 - 3\ln x + 1 = 0$ ($\dagger$). Mit $z := \ln x$ ergibt sich $z^2 - 3z + 1 = 0$, deren Lösungen

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{3 - \sqrt{9 - 4}}{2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \\ z_2 &= \frac{3 + \sqrt{9 - 4}}{2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

sind. Aus $\ln x = z_1$ folgt die Lösung $w_1 := e^{z_1}$ von ($\dagger$), und aus $\ln x = z_2$ ergibt sich die zweite Lösung $w_2 := e^{z_2}$ von ($\dagger$). Damit ist

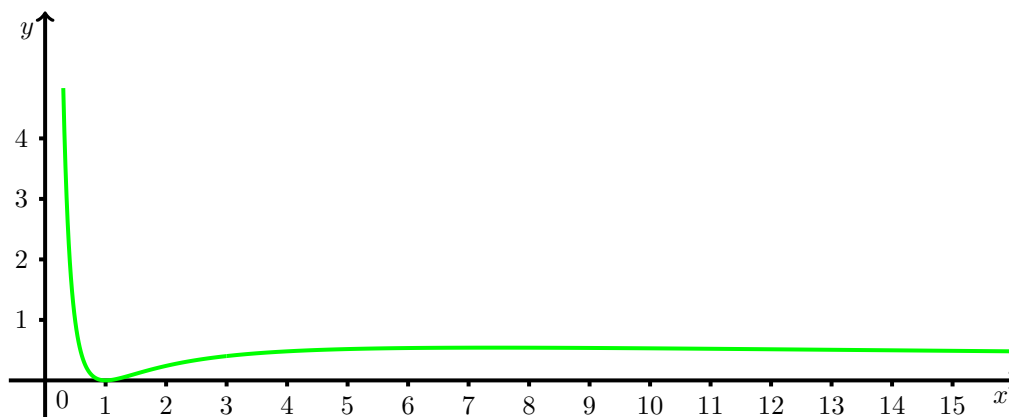
$$f''(x) = 2 \cdot \frac{(\ln x)^2 - 3\ln x + 1}{x^3} = 2 \cdot \frac{(x - w_1) \cdot (x - w_2)}{x^3}. \quad (3)$$

Folglich ändert sich das Vorzeichen von f'' in w_1 bzw. in w_2 . Daher sind w_1 und w_2 Wendestellen von f . Die Wendepunkte lauten damit $(w_1, f(w_1))$ und $(w_2, f(w_2))$.

Weiter ergibt sich aus (??) und $0 < w_1 < w_2$, dass

- f'' auf $]0, w_1[$ positiv und damit f konvex,
- f'' auf $]w_1, w_2[$ negativ und damit f konkav,
- f'' auf $]w_2, \infty[$ positiv und damit f konvex ist.

- (iv) Graph von f im Bereich $0.2 \leq x \leq 3$:



**Aufgabe 22.156** (Kurvendiskussion, Tangente)

Berechnen Sie jeweils die ersten drei Ableitungen dieser Funktionen und führen Sie eine vollständige Kurvendiskussion durch (Monotonieverhalten, lokale/globale Extrema, Wendepunkte, Konvexität, Elastizität). Berechnen Sie bei diesen Funktionen ebenfalls die Tangente im Punkt $x_0 = 1$.

Hinweis: Elastizität ϵ einer positiven Funktion ist definiert als $\epsilon_f(x) = \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)}$.

a) $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$ auf $(0; \infty)$

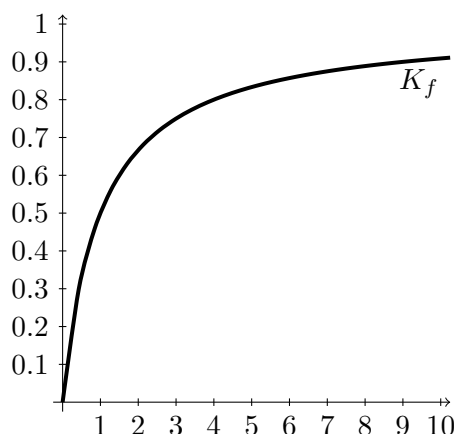
$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}, f''(x) = \frac{-2}{(x+1)^3}, f'''(x) = \frac{6}{(x+1)^4}, \text{ str. mon. wachsend, keine Wendestellen, } \epsilon_f(x) = \frac{1}{x+1},$$

$$T_{f,1}(x) = \frac{x+1}{4}$$

Lösung: Bei f lauten die drei Ableitungen nach der Kettenregel (der Bruch ist die äußere Funktion):

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(1 + \frac{1}{x}\right)' \cdot \frac{-1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2} = -\frac{1/x^2}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}, \\ f''(x) &= (x+1)' \cdot \frac{-2}{(x+1)^3} = \frac{-2}{(x+1)^3}, \\ f'''(x) &= (x+1)' \cdot \frac{6}{(x+1)^4} = \frac{6}{(x+1)^4}. \end{aligned}$$

Da $f'(x)$ nie Null wird (Zähler ist nicht Null und Nenner wird nicht ∞ , da der Definitionsbereich laut Aufgabenstellung nur $(0, \infty)$ ist), hat f keine stationären Punkte, somit auch keine Extremwerte. Wir können das Funktionsverhalten beschreiben: Da $f'(x) > 0$ ist für alle $x \in (0, \infty)$, ist die Funktion auf dem ganzen Definitionsbereich streng monoton steigend. Da $f''(x) < 0$ ist, ist sie überall konkav und hat somit auch keine Wendepunkte:



Graph der Funktion f . f ist streng monoton steigend und konkav.

Die Elastizität der Funktion ist

$$\epsilon_f(x) = \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} = \frac{x \cdot \frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{x \cdot (1 + \frac{1}{x})}{(x+1)^2} = \frac{x+1}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1}.$$

Je größer x wird, desto geringer ist die relative Änderung.

Die Gleichung der Tangente im Punkt $x_0 = 1$ ist

$$T_{f,1}(x) = f(1) + f'(1) \cdot (x-1) = \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} + \frac{1}{(1+1)^2} \cdot (x-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x-1) = \frac{1}{4} + \frac{x}{4}.$$

b) $g(x) = \ln(x^2 + 1)$ auf $\mathbb{R}$

$$g'(x) = \frac{2x}{x^2+1}, g''(x) = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}, g'''(x) = \frac{4x^3-12x}{(x^2+1)^3}, \text{ Minimum in } 0, \text{ Wendestellen in } -1 \text{ und } 1, \\ \epsilon_g(x) = \frac{2x^2}{(x^2+1) \cdot \log(x^2+1)}, T_{g,1}(x) = x - 1 + \ln(2)$$

Lösung: Die zweite Funktion ist komplizierter. Hier sind die ersten drei Ableitungen nach der Ketten- und Quotientenregel

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x^2 + 1)' \cdot \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{2x}{x^2 + 1}, \\ g''(x) &= \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}, \\ g'''(x) &= \frac{(-4x)(x^2 + 1)^2 - (-2x^2 + 2)(2x \cdot 2(x^2 + 1))}{(x^2 + 1)^4} = \frac{4x^3 - 12x}{(x^2 + 1)^3} \end{aligned}$$

(nach Ausklammern von $(x^2 + 1)$).

Die stationären Punkte der Funktion ergeben sich wie folgt:

$$g'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow x_1 = 0.$$

Einsetzen in die zweite Ableitung ergibt $g''(x_1) = \frac{-2 \cdot 0^2 + 2}{(0^2 + 1)^2} = 2$. Der Wert ist > 0 also handelt es sich um ein strenges lokales Minimum. Da es das einzige Minimum ist und, wie wir gleich sehen werden, die Funktion an beiden Rändern gegen $+\infty$ strebt, ist es auch das globale Minimum der Funktion. Das Grenzwertverhalten der Funktion ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log(x^2 + 1) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \log(x^2 + 1) = \infty$$

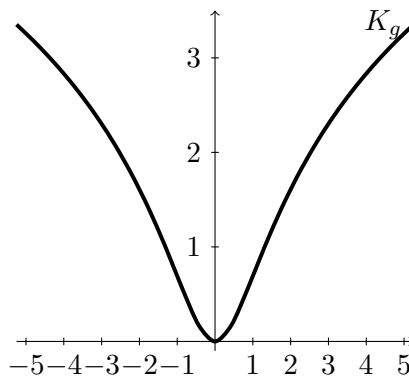
da in beiden Fällen der innere Term $x^2 + 1$ gegen $+\infty$ strebt. Wegen

$$g'(x) < 0 \text{ für } x < 0, \quad g'(x) > 0 \text{ für } x > 0$$

ist die Funktion auf $(-\infty, 0)$ streng monoton fallend und auf $(0, \infty)$ streng monoton steigend. Für die zweite Ableitung ist die Konvexitätsbedingung

$$g''(x) = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} \stackrel{!}{>} 0$$

gleichbedeutend mit $x^2 < 1$, also $|x| < 1$. Die Funktion ist also auf $(-\infty, -1)$ konkav, dann auf $(-1, 1)$ konvex und auf $(1, \infty)$ wieder konkav:



Die Funktion (Kosinus im Bogenmaß) $g(x) = \log(x^2 + 1)$ wechselt ihre Konvexität und ihre Monotonie.

Die Elastizität ist

$$\epsilon_g(x) = \frac{x \cdot g'(x)}{g(x)} = \frac{2x^2}{(x^2 + 1) \cdot \log(x^2 + 1)}.$$

Je weiter man nach Außen geht, desto geringer wird die relative Änderung wegen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{(x^2 + 1) \cdot \log(x^2 + 1)} = 0.$$

Die Funktion wird an den Rändern also immer starrer und ähnelt einer Geraden, die jedoch eine Steigung ungleich Null besitzt.

Die Tangente in Punkt $x_0 = 1$ ist

$$\begin{aligned} T_{g,1}(x) &= g(1) + g'(1) \cdot (x - 1) = \log(1^2 + 1) + \frac{2 \cdot 1}{1^2 + 1} \cdot (x - 1) \\ &= \log(2) + (x - 1) = x - 1 + \log(2). \end{aligned}$$

c) $h(x) = \cos(\pi x)$ auf $\mathbb{R}$

$h'(x) = -\pi \sin(\pi x)$, $h''(x) = -\pi^2 \cos(\pi x)$, $h'''(x) = \pi^3 \sin(\pi x)$, Jeweils für alle $k \in \mathbb{Z}$: Maximum in $2k$, Minimum in $2k + 1$, Wendestelle in $\frac{1}{2} + k$, $\epsilon_h(x)$ existiert nicht, $T_{h,1}(x) = -1$

Lösung: Die dritte Funktion, der um π gestreckte Kosinus, besitzt unendlich viele stationäre Punkte und wechselt unendlich oft sein Verhalten. Da es eine periodische Funktion ist, beschreiben wir das Verhalten jeweils durch periodische Intervalle. Die Ableitungen sind

$$\begin{aligned} \cos(\pi x)' &= -\pi \sin(\pi x), \\ \cos(\pi x)'' &= -\pi^2 \cos(\pi x), \\ \cos(\pi x)''' &= \pi^3 \sin(\pi x), \end{aligned}$$

wobei in jeder Ableitung ein Vorfaktor π hinzukommt wegen der Kettenregel. Alle diese Funktionen haben die Periode 2, da der Kosinus und der Sinus die Periode 2π haben. Da der Sinus seine Nullstellen bei den Zahlen πk mit $k \in \mathbb{Z}$ hat, besitzt $\cos(\pi x)'$ Nullstellen gerade in den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, jede ganze Zahl ist ein stationärer Punkt. Wir prüfen die Extremwerteigenschaft mit der zweiten Ableitung:

- Ist $k \in \mathbb{Z}$ gerade, so ist $g''(k) = -\pi^2 \cos(\pi k) = -\pi^2$, also ist k ein streng lokales Maximum.
- Ist $k \in \mathbb{Z}$ ungerade, so ist $g''(k) = -\pi^2 \cos(\pi k) = \pi^2$, also ist k ein streng lokales Minimum.

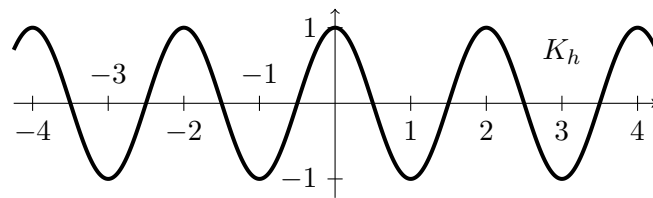
Da es von beiden Sorten unendlich viele gibt, ist keines davon ein globaler Extremwert. Zwischen den Extremwerten wechselt jeweils das Monotonieverhalten. Die richtige Beschreibung des Verhaltens ist:

- Auf den Intervallen $(k, k + 1)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ gerade ist die Funktion streng fallend,
- auf den Intervallen $(k, k + 1)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ungerade ist die Funktion streng wachsend.

Die Konvexität liest man an der zweiten Ableitung ab: $-\pi^2 \cos(\pi x) > 0$ gilt für $x \in (k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})$ mit k ungerade, umgekehrt ist $-\pi^2 \cos(\pi x) < 0$ für $k \in (k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})$ mit k gerade:

- Auf den Intervallen $(k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})$ mit $k \in \mathbb{Z}$ gerade ist die Funktion konkav, das sind gerade die „Berge“ im Funktionsgraph,
- auf den Intervallen $(k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ungerade ist die Funktion konvex, das sind gerade die „Täler“ im Funktionsgraph.

Diese Intervalle sind von den Monotoniebereichen gerade um $\frac{1}{2}$ versetzt, weil sie durch den Kosinus und nicht durch den Sinus festgelegt werden.



Die gestreckte Kosinusfunktion $\cos(\pi x)$ ist periodisch und hat deshalb unendlich viele Extremwerte und wechselt ihr Verhalten regelmäßig an diesen Stellen.

Da die Kosinusfunktion auch negative Werte annehmen kann, besitzt sie keine Elastizität (vgl. Vorlesungsfolien).

Gleichung der Tangente in Punkt $x_0 = 1$:

$$T_{h,1}(x) = h(1) + h'(1)(x - 1) = \cos(\pi \cdot 1) - \pi \sin(\pi \cdot 1) \cdot (x - 1) = -1.$$

Aufgabenblatt 23

DiffEinDim/LHospital



DiffEinDim/LHospital/Ag_Funktionsgrenzwerte_lHospital_leicht.tex

Aufgabe 23.157 (Grenzwerte ausrechnen)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte (falls vorhanden):

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x \cdot (x-1)}{x^2-1}$

 $\frac{e}{2}$

Lösung: Es gilt $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x \cdot (x-1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x \cdot (x-1)}{(x-1) \cdot (x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x}{x+1} = \frac{e^1}{1+1} = \frac{e}{2}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln(x))$

0

Lösung: Für die Regel von de l'Hospital müssen wir umformen, damit ein Bruch entsteht:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\overbrace{\ln(x)}^{\rightarrow -\infty}}{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\rightarrow \infty}} \stackrel{\text{"}\infty\text{"}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{-1} = 0.$$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln(x) + x^2)}{\ln(x)}$

2

Lösung: Hier kann die Regel von de l'Hospital zweimal angewendet werden:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln(x) + x^2)}{\ln(x)} &\stackrel{\text{"}\infty\text{"}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\ln(x) + x^2} \cdot (\frac{1}{x} + 2x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 2x^2}{\ln(x) + x^2} \\ &\stackrel{\text{"}\infty\text{"}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{\frac{1}{x} + 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\frac{1}{x^2} + 2} = \frac{4}{0 + 2} = 2. \end{aligned}$$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1000}}{e^x}$

0

Lösung: Hier muss eine kleine endliche Induktion vorgenommen werden:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1000}}{e^x} \stackrel{\text{"}\infty\text{"}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1000 \cdot x^{999}}{e^x} \stackrel{\text{"}\infty\text{"}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1000 \cdot 999 \cdot x^{998}}{e^x} \stackrel{\text{"}\infty\text{"}}{=} \dots \stackrel{\text{"}\infty\text{"}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1000!}{e^x} = 0.$$

Hier haben wir 1000mal die Regel von l'Hospital angewendet und dabei die entstehenden Ableitungsfaktoren zu 1000! zusammen gefasst. Mathematisch sauber aufgeschrieben:

Behauptung: Falls für ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \leq 1000$ der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1000! \cdot x^{1000-n}}{(1000-n)! \cdot e^x}$ existiert, gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1000}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1000! \cdot x^{1000-n}}{(1000-n)! \cdot e^x}.$$

Induktionsanfang: ($n = 0$):

Wegen $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1000! \cdot x^{1000-0}}{(1000-0)! \cdot e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1000}}{e^x}$ ist die Aussage für $n = 0$ trivialerweise erfüllt.

Induktionsvoraussetzung: ($n = k$):

Sei $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k < 1000$ eine Zahl, für die bereits gezeigt wurde, dass aus der Existenz des Grenzwerts $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1000! \cdot x^{1000-k}}{(1000-k)! \cdot e^x}$ bereits $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1000}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1000! \cdot x^{1000-k}}{(1000-k)! \cdot e^x}$ folgt.

Induktionsschluss: ($n = k + 1$):

Falls $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1000! \cdot x^{1000-(k+1)}}{(1000-(k+1))! \cdot e^x}$ existiert, kann die Regel von de l'Hospital angewendet werden:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1000! \cdot x^{1000-k}}{(1000-k)! \cdot e^x} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1000! \cdot (1000-k) \cdot x^{1000-k-1}}{(1000-k)! \cdot e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1000! \cdot x^{1000-(k+1)}}{(1000-(k+1))! \cdot e^x}.$$

Die Regel von de l'Hospital gewährleistet dann auch die Existenz des Grenzwerts auf der linken Seite und mit der Induktionsvoraussetzung folgt also

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1000}}{e^x} \stackrel{\text{IV}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1000! \cdot x^{1000-k}}{(1000-k)! \cdot e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1000! \cdot x^{1000-(k+1)}}{(1000-(k+1))! \cdot e^x}.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt und für $n = 1000$ ergibt sich, da $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1000!}{e^x}$ existiert,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1000}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1000! \cdot x^{1000-1000}}{(1000-1000)! \cdot e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1000! \cdot x^0}{0! \cdot e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1000!}{e^x} = 0.$$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+4}{\sqrt{9x^2-8x+3}}$

$\frac{2}{3}$

Lösung: Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+4}{\sqrt{9x^2-8x+3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot (2 + \frac{4}{x})}{|x| \cdot \sqrt{9 - \frac{8}{x} + \frac{3}{x^2}}} \stackrel{x \geq 0}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{4}{x}}{\sqrt{9 - \frac{8}{x} + \frac{3}{x^2}}} = \frac{2+0}{\sqrt{9+0+0}} = \frac{2}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}.$$

Fortgesetztes Anwenden der Regel von de l'Hospital liefert kein Ergebnis:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+4}{\sqrt{9x^2-8x+3}} &\stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\frac{18x-8}{2 \cdot \sqrt{9x^2-8x+3}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \sqrt{9x^2-8x+3}}{9x-4} \\ &\stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \frac{18x-8}{2 \cdot \sqrt{9x^2-8x+3}}}{9} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{18x-8}{9 \cdot \sqrt{9x^2-8x+3}} \\ &\stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{18}{9 \cdot \frac{18x-8}{2 \cdot \sqrt{9x^2-8x+3}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \sqrt{9x^2-8x+3}}{9x-4} = \dots \end{aligned}$$

f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x}$

$-\infty$

Lösung: Bei diesem Grenzwert haben wir dagegen $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\overbrace{\ln(x)}^{\rightarrow -\infty}}{\underbrace{x}_{\rightarrow 0}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{\ln(x)}_{\rightarrow -\infty} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\rightarrow \infty} = -\infty$,

wobei wir die Regel von de l'Hospital nicht anwenden dürfen, weil die Divergenzen in Zähler und Nenner nicht in die gleiche Richtung gehen. Wenn man sie (fälschlicherweise) doch anwendet, so

bekommt man $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ heraus.

**Aufgabe 23.158** (Die Regel von de l'Hôpital)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin(x)}{2x - \pi \cdot \sin(x)}$

0

Lösung:

Mit der Regel von de l'Hôpital ergibt sich

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin(x)}{2x - \pi \cdot \sin(x)} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin(x))'}{(2x - \pi \cdot \sin(x))'} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos(x)}{2 - \pi \cdot \cos(x)} = \frac{-0}{2 - \pi \cdot 0} = 0.$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(2x)}{x + \sin(x)}$

1

Lösung:

Mit der Regel von de l'Hôpital ergibt sich

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(2x)}{x + \sin(x)} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sinh(2x))'}{(x + \sin(x))'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \cosh(2x)}{1 + \cos(x)} = \frac{2 \cdot 1}{1 + 1} = 1.$$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{x^2}$

 $\frac{a^2}{2}$ **Lösung:**Mit der Regel von de l'Hôpital ergibt sich für $a \neq 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{x^2} &\stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(ax))'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot \sin(ax)}{2x} \\ &\stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a \cdot \sin(ax))'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 \cdot \cos(ax)}{2} = \frac{a^2 \cdot 1}{2} = \frac{a^2}{2}. \end{aligned}$$

Für $a = 0$ folgt $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(0)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0 = \frac{0^2}{2} = \frac{a^2}{2}.$

d) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{\ln(x)}$

0

Lösung:Hier geht der Zähler gegen Null, der Nenner gegen $-\infty$, also darf man die Regel von l'Hôpital hier *nicht* anwenden sondern erhält direkt, dass der Term gegen 0 konvergiert.

e) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^7(t)}{\sin(7t)}$

0

Lösung:

Mit der Regel von de l'Hôpital ergibt sich

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^7(t)}{\sin(7t)} \stackrel{0/0}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\sin^7(t))'}{(\sin(7t))'} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{7 \cdot \sin^6(t) \cdot \cos(t)}{7 \cdot \cos(7t)} = \frac{7 \cdot 0^6 \cdot 1}{7 \cdot 1} = 0.$$

f) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \cdot \sin(t)}{t^2 - \sin(t)}$

0

Lösung:

Mit der Regel von de l'Hôpital ergibt sich

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \cdot \sin(t)}{t^2 - \sin(t)} \stackrel{0/0}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t^2 \cdot \sin(t))'}{(t^2 - \sin(t))'} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t \cdot \sin(t) + t^2 \cdot \cos(t)}{2t - \cos(t)} = \frac{2 \cdot 0 \cdot 0 + 0^2 \cdot 1}{2 \cdot 0 - 1} = \frac{0}{-1} = 0.$$



DiffEinDim/MWS/Ag_MWS_CosSqrtUngleichung.tex

Aufgabe 24.159 (Mittelwertsatz)

jgl

Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, dass

$$|\cos(\sqrt{x}) - \cos(\sqrt{y})| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $y \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < y < x + 2$ gilt.

Lösung:

Seien $D := (0; \infty)$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto \cos(\sqrt{t})$. f ist differenzierbar auf D mit

$$f'(t) \stackrel{\text{KR}}{=} -\sin(\sqrt{t}) \cdot (\sqrt{t})' = \frac{-\sin(\sqrt{t})}{2 \cdot \sqrt{t}} \quad \text{für alle } t \in D.$$

Also gibt es nach dem Mittelwertsatz für alle $x \in D$ und alle $y \in D$ mit $y > x$ ein $t_{x,y} \in (x; y)$ mit

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{\cos(\sqrt{x}) - \cos(\sqrt{y})}{x - y} = \frac{-\sin(\sqrt{t_{x,y}})}{2 \cdot \sqrt{t_{x,y}}} = f'(t_{x,y}).$$

Wegen $x < t_{x,y}$ folgt für alle $x \in D$ und alle $y \in D$ mit $x < y$

$$|f'(t_{x,y})| = \left| \frac{-\sin(\sqrt{t_{x,y}})}{2 \cdot \sqrt{t_{x,y}}} \right| = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{|\sin(\sqrt{t_{x,y}})|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{t_{x,y}}}}_{< \frac{1}{\sqrt{x}}} \leq \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}.$$

Damit folgt aus der Mittelwertsatz-Gleichung für alle $x \in D$ und alle $y \in D$ mit $x < y$

$$|\cos(\sqrt{x}) - \cos(\sqrt{y})| \leq \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \cdot |x - y| = \frac{y - x}{2 \cdot \sqrt{x}}.$$

Gilt noch zusätzlich $y < x + 2$ so folgt also für alle $x \in D$ und alle $y \in D$ mit $0 < x < y < x + 2$

$$|\cos(\sqrt{x}) - \cos(\sqrt{y})| \leq \frac{y - x}{2 \cdot \sqrt{x}} \leq \frac{x + 2 - x}{2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$



DiffEinDim/MWS/Ag_MWS_GemischteUngleichungen.tex

Aufgabe 24.160 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

spf

Verwenden Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung, um folgende Aussagen zu verifizieren:

- a) Für alle $a \in \mathbb{R}$ und alle $b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$ gilt $1 - \frac{a}{b} \leq \ln\left(\frac{b}{a}\right) \leq \frac{b}{a} - 1$.

Lösung:

Seien $f := \ln$, $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$. Dann gilt $f'(t) = \frac{1}{t}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$.

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es ein $\xi \in \mathbb{R}$ mit

$$a < \xi < b \quad \text{und} \quad \frac{\ln(b) - \ln(a)}{b - a} = f'(\xi) = \frac{1}{\xi}.$$

Wegen $0 < a < \xi < b$ gilt $\frac{1}{b} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{a}$ und $b - a > 0$. Mit $\ln(b) - \ln(a) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ folgt

$$\frac{1}{b} < \frac{\ln(b) - \ln(a)}{b - a} < \frac{1}{a} \quad \text{bzw.} \quad 1 - \frac{a}{b} = \frac{b - a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b - a}{a} = \frac{b}{a} - 1.$$

- b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ gilt $1 - x < e^{-x}$ und $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.

Lösung:

Seien $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := e^{-x}$ und $g: (-1; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto g(x) := \ln(1+x)$.

Dann gilt $f(0) = 1$ und $g(0) = 0$. Mit der Kettenregel folgt $f'(x) = -e^{-x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $g'(x) = \frac{1}{1+x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$.

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ ein $\xi \in \mathbb{R}$ mit $0 < \xi < x$ und

$$\frac{e^{-x} - 1}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi) = -e^{-\xi}.$$

Da f' streng monoton wächst, folgt mit $0 < \xi < x$, dass $-1 = -e^0 < -e^{-\xi} = \frac{e^{-x}-1}{x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ ist. Wegen $x > 0$ folgt damit $-x < e^{-x} - 1$, also $1 - x < e^{-x}$.

Außerdem gibt es nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ ein $\eta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \eta < x$ und

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(\eta) = \frac{1}{1+\eta}.$$

Da g' streng monoton fällt, folgt mit $0 < \eta < x$, dass $\frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+\eta} = \frac{\ln(1+x)}{x} < \frac{1}{1+0} = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ gilt. Wegen $x > 0$ kann bedenkenlos mit x multipliziert werden, um die Behauptung zu erhalten.

- c) Für alle $\alpha \in (0; 1)$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ gilt $1 + \frac{\alpha x}{(1+x)^{1-\alpha}} < (1+x)^\alpha < 1 + \alpha x$.

Lösung:

Sei $f: (-1; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto f(t) := (1+t)^\alpha$. Dann ist $f(0) = 1$.

Mit der Kettenregel folgt $f'(t) = \alpha \cdot (1+t)^{\alpha-1}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t > -1$.

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung liefert ein $\xi \in (0; x)$ mit

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi) = \frac{\alpha}{(1+\xi)^{1-\alpha}}.$$

Wegen $\alpha \in (0; 1)$ ist f' streng monoton fallend.

Mit $0 < \xi < x$ folgt $\frac{\alpha}{(1+x)^{1-\alpha}} < \frac{\alpha}{(1+\xi)^{1-\alpha}} < \frac{\alpha}{(1+0)^{1-\alpha}} = \alpha$.

Oben eingesetzt ergibt sich also $\frac{\alpha}{(1+x)^{1-\alpha}} < \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} < \alpha$.

Wegen $x > 0$ lässt sich diese Gleichung problemlos mit x multiplizieren. Addieren von 1 liefert dann die Behauptung.

- d) Es sind $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$ und $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Lösung:

Seien $f := \cos$ und $g := \sin$. Dann gilt $f' = -\sin$, $g' = \cos$, $f(0) = 1$ und $g(0) = 0$.

Für alle $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ gibt es nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein $\xi \in \mathbb{R}$ mit

$$0 < \xi < x < \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \frac{\cos(x) - 1}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi) = -\sin(\xi).$$

Da das Negative des Sinus auf $[0; \frac{\pi}{2}]$ streng monoton fällt, folgt $-\sin(x) < \frac{\cos(x)-1}{x} < -\sin(0)$ für alle $x \in (0; \frac{\pi}{2})$. Mit dem Einschnürungssatz / Sandwichlemma ergibt sich

$$0 = -\sin(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\sin(x)) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x) - 1}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\sin(0)) = -\sin(0) = 0.$$

Für alle $x \in (-\frac{\pi}{2}; 0)$ gibt es nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein $\zeta \in \mathbb{R}$ mit

$$-\frac{\pi}{2} < x < \zeta < 0 \quad \text{und} \quad \frac{\cos(x) - 1}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\zeta) = -\sin(\zeta).$$

Da das Negative des Sinus auf $[-\frac{\pi}{2}; 0]$ streng monoton fällt, folgt $-\sin(0) < \frac{\cos(x)-1}{x} < -\sin(x)$ für alle $x \in (-\frac{\pi}{2}; 0)$. Mit dem Einschnürungssatz / Sandwichlemma ergibt sich

$$0 = -\sin(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\sin(0) \leq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos(x) - 1}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0^-} -\sin(x) = -\sin(0) = 0.$$

Also gilt $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$ und $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$. Deshalb gilt auch $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$.

Für alle $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ gibt es nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein $\eta \in \mathbb{R}$ mit

$$0 < \eta < x < \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \frac{\sin(x)}{x} = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(\eta) = \cos(\eta).$$

Da der Kosinus auf $[0; \frac{\pi}{2}]$ streng monoton fällt, folgt $\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < \cos(0)$ für alle $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.

Für alle $x \in (-\frac{\pi}{2}; 0)$ gibt es nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein $\vartheta \in \mathbb{R}$ mit

$$-\frac{\pi}{2} < x < \vartheta < 0 \quad \text{und} \quad \frac{\sin(x)}{x} = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(\vartheta) = \cos(\vartheta).$$

Da der Kosinus auf $[-\frac{\pi}{2}; 0]$ streng monoton wächst, folgt $\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < \cos(0)$ für alle $x \in (-\frac{\pi}{2}; 0)$. Also gilt $\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < \cos(0)$ für alle $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\}$.

Mit dem Einschnürungssatz / Sandwichlemma ergibt sich

$$1 = \cos(0) = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x)) \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0} (\cos(0)) = \cos(0) = 1.$$



DiffEinDim/MWS/Ag_MWS_MitOderOhneMWS.tex

Aufgabe 24.161 (Ein nützlicher Grenzwert)

kr

Beweisen Sie den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right) = 1$.

Lösung:

Variante 1: Mit Mittelwertsatz:

$n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right) = \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}$. Definiere die Hilfsfunktion $f : [0, \frac{1}{n}] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = e^t$. Dann gibt es gemäß dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein $c \in (0, \frac{1}{n})$, so dass $\frac{f(\frac{1}{n}) - f(0)}{\frac{1}{n} - 0} = f'(c) \Leftrightarrow \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = e^c$. Für $n \rightarrow \infty$ ergibt sich $c \rightarrow 0$ und somit $\frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \rightarrow e^0 = 1$.

Variante 2: Definition der Ableitung und scharfes Hinsehen:

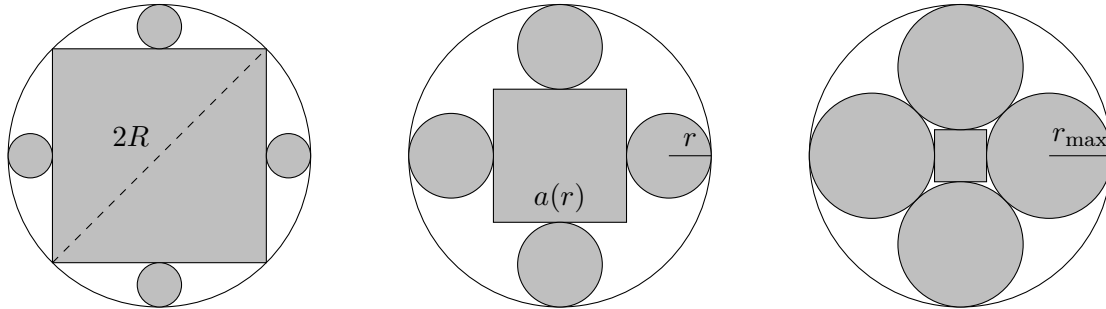
Definiere Hilfsfunktion $f : [0, \frac{1}{n}] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = e^t$. Dann gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n} - 0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\frac{1}{n}) - f(0)}{\frac{1}{n} - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = e^0 = 1$.



DiffEinDim/Optimierung/Ag_DiffEinDimOptimierung_Kreisfuellen.tex

Aufgabe 25.162 (Kreis füllen) ehh

Ein Kreis vom Radius $R \in \mathbb{R}$ mit $R > 0$ soll möglichst großflächig mit einem Quadrat der Kantenlänge $a(r)$ und vier Kreisen mit Radius r abgedeckt werden, siehe Skizzen. Zwischen den Randfällen mit größtem Quadrat beziehungsweise größten Kreisen kommen „Kompromisse“ in Frage:



- a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $a(r)$ und daraus die Funktionsgleichung $S(r)$ für die insgesamt abgedeckte Fläche bei gegebenem R .

$$a(r) = 2 \cdot (R - 2r), \quad S(r) = 4 \cdot ((4 + \pi) \cdot r^2 - 4R \cdot r + R^2)$$

Lösung: Gemäß der Skizzen addieren sich die Durchmesser von zwei kleinen Kreisen und die Kantenlänge des Quadrates zum Durchmesser des großen Kreises:

$$2 \cdot 2 \cdot r + a(r) = 2 \cdot R \Leftrightarrow a(r) = 2 \cdot (R - 2r)$$

Die abgedeckte Fläche ist die Summe der Kreisflächen und der Fläche des Quadrates:

$$S(r) = 4 \cdot \pi \cdot r^2 + (a(r))^2 = 4 \cdot (\pi \cdot r^2 + (R - 2r)^2) = 4 \cdot ((4 + \pi) \cdot r^2 - 4R \cdot r + R^2)$$

- b) Welche Form hat $S(r)$? Was bedeutet dies für Extrempunkte? Sie können die Ableitung zur Extrempunktbestimmung verwenden.

$S(r)$ hat die Form einer nach oben geöffneten Parabel und hat daher auf $\mathbb{R}$ ein Minimum. $S'(r_0) = 0$ liefert $r_0 = \frac{2}{4+\pi}R$ und $S(r_0) = \frac{4\pi}{4+\pi}R^2$

Lösung: Recht offensichtlich hänge a linear von r ab, wodurch die insgesamt abgedeckte Fläche quadratisch in r ist. Eine Parabel hat auf $\mathbb{R}$ genau einen Extrempunkt, hier eine Tiefpunkt. Die größtmögliche abgedeckte Fläche muss also bei einem Randmaximum vorliegen. Der Tiefpunkt kann über quadratische Ergänzung zur Scheitelpunktform oder über die Ableitung bestimmt werden:

$$S'(r) = 4 \cdot (2 \cdot (4 + \pi) \cdot r - 4R)$$

liefert für die Extremstelle r_0

$$S'(r_0) = 0 \Leftrightarrow r_0 = \frac{2}{4 + \pi}R = 0.2800 \dots R$$

Einsetzen von r_0 in die Funktionsgleichung für die Fläche liefert für das Minimum

$$S(r_0) = 4 \cdot \left(\frac{2^2}{4 + \pi}R^2 - 4R \cdot \frac{2}{4 + \pi}R + R^2 \right) = 4 \cdot \frac{4 - 8 + 4 + \pi}{4 + \pi}R^2 = \frac{4\pi}{4 + \pi}R^2 = 1.759 \dots R^2$$

- c) Für die Extremwertbestimmung müssen die Randpunkte betrachtet werden. Die größtmögliche Kantenlänge liefert der Satz von Pythagoras. Die Mittelpunkte der größtmöglichen Kreise bilden ein Quadrat, dessen Diagonalen auf Durchmessern des äußeren Kreises liegen. Bestimmen Sie damit die zugehörigen Radien $r_{\min}$ und $r_{\max}$ sowie die Flächen $S(r_{\min})$ und $S(r_{\max})$. Für die Bestimmung des größeren der beiden Randwerte können Hilfsmittel verwendet werden.

$$\frac{2-\sqrt{2}}{4} = \frac{r_{\min}}{R} < \frac{r_0}{R} < \frac{r_{\max}}{R} = \sqrt{2} - 1 \text{ und } \frac{S(r_0)}{R^2} < \frac{S(r_{\min})}{R^2} = 2 + \frac{3-2\sqrt{2}}{2}\pi \lesssim \frac{S(r_{\max})}{R^2} \text{ mit}$$

$$S(r_{\max}) = 4 \cdot (\pi \cdot (3 - 2\sqrt{2}) + 17 - 12\sqrt{2}) \cdot R^2$$

Lösung: Für das größtmögliche Quadrat liefert der Satz von Pythagoras $a^2 + a^2 = (2R)^2$, also $a^2 = 2R^2$. Hier wird die Umstellung $r(a)$ benötigt, für das größtmögliche Quadrat also

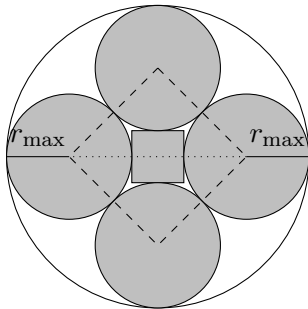
$$2 \cdot 2 \cdot r_{\min} + \sqrt{2}R = 2 \cdot R \Leftrightarrow r_{\min} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}R = 0.1464 \dots R$$

Damit beträgt die Flächenabdeckung mit dem größten Quadrat und den vier kleinen Kreisen

$$S(r_{\min}) = 4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{4}R \right)^2 + 2R^2 = \left(\frac{4 - 2 \cdot 2\sqrt{2} + 2}{4}\pi + 2 \right) R^2 = \left(\frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}\pi + 2 \right) R^2$$

$$= 2.2695 \dots R^2$$

Die Mittelpunkte der vier größtmöglichen Kreise bilden ein Quadrat der Kantenlänge $2r_{\max}$, dessen Diagonalen auf Durchmessern des umgebenden Kreises liegen:



Die Länge der Diagonale ist $\sqrt{(2r_{\max})^2 + (2r_{\max})^2} = 2\sqrt{2}r_{\max}$ und die Summe mit zwei Radien der kleinen Kreise liefert den Außendurchmesser:

$$2r_{\max} + 2\sqrt{2}r_{\max} = 2R \Leftrightarrow r_{\max} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}R$$

Umformung durch Erweitern zur dritten binomischen Formel:

$$r_{\max} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - 1^2}R = (\sqrt{2} - 1)R = 0.4142 \dots R$$

Einsetzen in die Funktionsgleichung (mittlerer Ausdruck) liefert

$$S(r_{\max}) = 4 \cdot \left(\pi \cdot ((\sqrt{2} - 1)R)^2 + (R - 2(\sqrt{2} - 1)R)^2 \right)$$

$$= 4 \cdot \left(\pi \cdot (3 - 2\sqrt{2}) + (3 - 2\sqrt{2})^2 \right) R^2$$

$$= 4 \cdot \left(\pi \cdot (3 - 2\sqrt{2}) + 17 - 12\sqrt{2} \right) R^2$$

$$= 2.2737 \dots R^2$$



Aufgabe 25.163 (Angewandte Extremwertrechnung — Kreiszylinder in einer Kugel) JGL, VEMA 15.2.1

Berechnen Sie den Radius r des Grundkreises und die Höhe h des in eine Kugel vom Radius $R \in \mathbb{R}$ mit $R > 0$ eingesetzten Kreiszylinders maximalen Volumens.

Für den Radius $r = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot R$ und die Höhe $h = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot R$ ergibt sich das maximale Volumen $V = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot V_{\text{Kugel}}$.

Lösung:

Das Volumen der Kreiszylinders beträgt $V = \pi r^2 h$. Wenn der Kreiszylinder einen möglichst großen Teil der Kugel ausfüllt, berühren Boden und Deckel die Kugel: Es gilt $R^2 = r^2 + (\frac{1}{2}h)^2$. Auflösen nach r^2 und Einsetzen führt auf

$$V(h) = \pi \left(R^2 - \frac{1}{4} \cdot h^2 \right) h = \pi R^2 h - \frac{\pi}{4} \cdot h^3$$

für $0 \leq h \leq R$. Wegen $V(0) = 0$ und $V(2R) = 0$ muss die gesuchte Extremstelle, an der V maximal ist, in $]0, 2R[$ liegen. Da die Funktion $V : [0, 2R] \rightarrow \mathbb{R}, h \mapsto V(h) := \pi R^2 h - \frac{\pi}{4} h^3$ differenzierbar ist, ist dafür $V'(h) = 0$ eine notwendige Bedingung; mit $V'(h) = \pi R^2 - \frac{3\pi}{4} h^2$ folgt hieraus

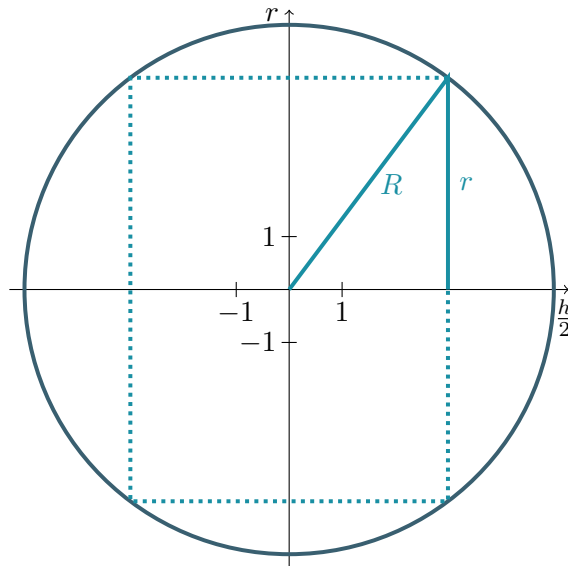
$$h^2 = \frac{4}{3} \cdot R^2 \quad \xLeftrightarrow{h \geq 0} \quad h = 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Da es die einzige kritische Stelle ist und $V(h) \geq 0$ gilt, handelt es sich um die gesuchte Maximalstelle. Somit ist

$$V_{\max} = V \left(2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \pi \left(R^2 - \frac{1}{4} \cdot 4R^2 \cdot \frac{1}{3} \right) \cdot 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot V_{\text{Kugel}}$$

das maximale Volumen.

Mit $r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$ ergibt sich aus der Höhe $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ dann $r^2 = R^2 - \frac{R^2}{3} = \frac{2}{3} R^2$ und damit der Radius $r = R \frac{\sqrt{6}}{3}$. (Der Radius r ist größer als die halbe Höhe: $\tan \alpha = \frac{r}{\frac{1}{2}h} = \sqrt{2} > 1$; somit ist der Winkel α größer als 45° .)



DiffEinDim/Optimierung/Ag_Extremwerte_Intervalle.tex

Aufgabe 25.164 (Extremwerte)

vr

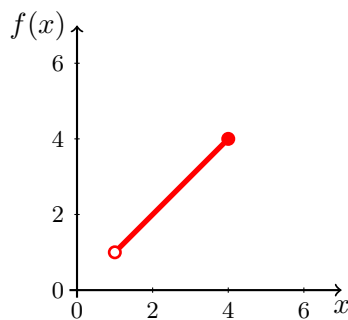
Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extremwerte:

a) $f(x) = x, x \in (1, 4]$

g.Max (4; 4), kein Min

Lösung:

- Ableitungen: $f'(x) = 1$
- Monotonie: da für alle $x \in (1, 4)$ gilt $f'(x) = 1 > 0$, ist die Funktion überall streng monoton wachsend.
- Extremstellen: da für alle $x \in (1, 4)$ gilt $f'(x) = 1 \neq 0$, gibt es keine lokale innere Extremstellen. Wegen Monotonie gibt es einen globalen Maximum bei $x = 4, f(4) = 4$. Es gibt weder globales noch lokales Minimum.
- Skizze:



b) $f(x) = -x^2 + 4x - 4, x \in [1, 4]$

g.Max (2; 0), g.Min (4; -4), l.Min (1; -1)

Lösung:

- Ableitungen: $f'(x) = -2x + 4 = -2(x - 2)$, $f''(x) = -2$.
- Extremstellen: suche $x : f'(x) = 0 \iff -2(x - 2) = 0 \iff x = 2$.

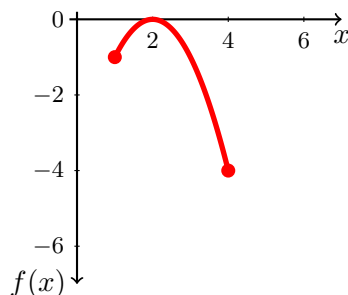
Da $f''(2) = -2 > 0$, ist es ein lokales Maximum.

Die Randpunkte gehören zum Definitionsbereich, überprüfe noch die Werte:

$$f(1) = -1 + 4 - 4 = -1 \quad f(4) = -16 + 16 - 4 = -4.$$

Vergleich aller Werte liefert: globales Minimum bei $x = 4$, $f(4) = -4$, lokales und gleichzeitig globales Maximum bei $x = 2$, $f(2) = 0$.

- Monotonie: da $f'(x) > 0$ für $x < 2$, ist die Funktion auf $[1, 2)$ streng monoton steigend. Auf dem Intervall $(2, 4]$ ist die Funktion streng monoton fallend, da hier $f'(x) < 0$ gilt.
- Skizze:



c) $f(x) = -x^2 + 4x - 4, x \in [1, 4)$

g.Max (2; 0), l.Min (1; -1), kein g.Min

Lösung:

- Ableitungen: $f'(x) = -2x + 4 = -2(x - 2)$, $f''(x) = -2$.
- Extremstellen: suche $x : f'(x) = 0 \iff -2(x - 2) = 0 \iff x = 2$.

Da $f''(2) = -2 > 0$, ist es ein lokales Maximum.

Nur der linke Randpunkt gehört zum Definitionsbereich, überprüfe den Wert:

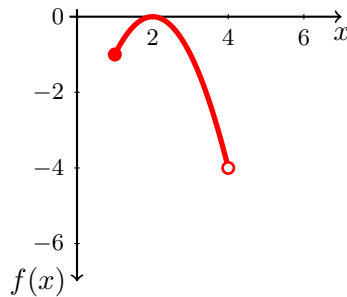
$$f(1) = -1 + 4 - 4 = -1.$$

Wegen $f(1) = -1 < f(2) = 0$ ist das kein globales Maximum.

Wegen $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -4$ ist es auch kein globales Minimum. Da die Funktion ab $x = 1$ jedoch streng monoton steigt, ist es ein lokales Minimum.

Vergleich aller Werte liefert: Lokales Minimum bei $x = 1$, $f(1) = -1$, lokales und gleichzeitig globales Maximum bei $x = 2$, $f(2) = 0$.

- Monotonie: da $f'(x) > 0$ für $x < 2$, ist die Funktion auf $[1, 2)$ streng monoton steigend. Auf dem Intervall $(2, 4)$ ist die Funktion streng monoton fallend, da hier $f'(x) < 0$ gilt.
- Skizze:



d) $f(x) = x + \sin(x)$, $x \in [0, 4\pi]$

g.Min $(0; 0)$, g.Max $(4\pi, 4\pi)$

Lösung:

- Ableitungen

$$f'(x) = 1 + \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

- Extremstellen

Notwendige Bedingung für Extremstellen von f ist $f'(x) = 0$. Hier ergibt sich:

$$1 + \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -1$$

$$\Rightarrow x_k = (2k - 1)\pi \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}$$

Die Funktion ist nur für $k = 1$ und $k = 2$ definiert. Es ergeben sich daraus zwei mögliche Extremstellen $x_1 = \pi$ und $x_2 = 3\pi$. Einsetzen in $f''(x)$ ergibt:

$$f''(x_1) = f''(x_2) = 0$$

Es handelt sich somit um Sattelpunkte.

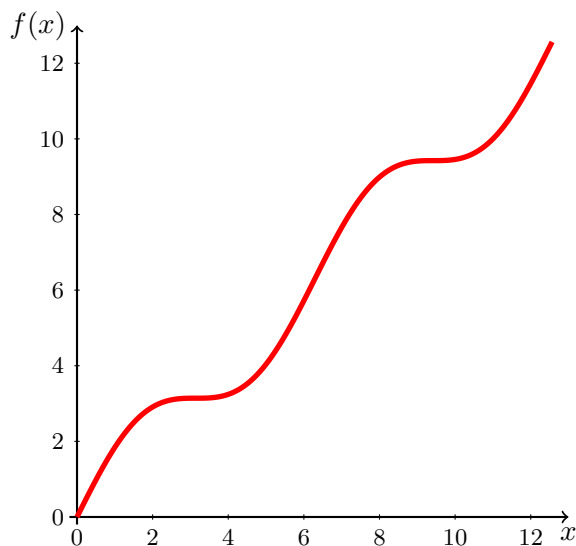
- Monotonie

$f'(x) \geq 0$, d.h. f ist monoton wachsend. Für $x \in [0, \pi)$ und $x \in (3\pi, 4\pi]$ sogar streng monoton wachsend.

- Globale Extremstellen (Untersuchung am Rand)

Aus der Beschränktheit des Definitionsbereichs und der Monotonie folgt das globale Minimum $(0; 0)$ und das globale Maximum $(4\pi; 4\pi)$

- Skizze:



e) $f(x) = x + 2 \cdot \cos(x)$, $x \in [0, 4\pi]$

g.Min $(\frac{5\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3})$, l.Min $(0; 2)$ und $(\frac{17\pi}{6}; \frac{17\pi}{6} - \sqrt{3})$, g.Max $(4\pi; 4\pi + 2)$, l.Max $(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6} + \sqrt{3})$ und $(\frac{13\pi}{6}; \frac{13\pi}{6} + \sqrt{3})$

Lösung:

- Ableitungen

$$f'(x) = 1 - 2 \sin x$$

$$f''(x) = -2 \cos x$$

- Extremstellen

Notwendige Bedingung für Extremstellen von f ist $f'(x) = 0$. Hier ergibt sich:

$$1 - 2 \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x_k = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{und} \quad x_n = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi \quad \text{für } k, n \in \mathbb{Z}$$

Die Funktion ist nur für $k = 0$, $k = 1$, $n = 0$ und $n = 1$ definiert. Es ergeben sich daraus vier mögliche Extremstellen $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{5\pi}{6}$, $x_3 = \frac{13\pi}{6}$ und $x_4 = \frac{17\pi}{6}$. Einsetzen in $f''(x)$ ergibt:

$$f''(x_1) = -\sqrt{3} < 0$$

$$\rightarrow \text{Maximum bei } \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right)$$

$$f''(x_2) = \sqrt{3} > 0$$

$$\rightarrow \text{Minimum bei } \left(\frac{5\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}\right)$$

$$f''(x_3) = -\sqrt{3} < 0$$

$$\rightarrow \text{Maximum bei } \left(\frac{13\pi}{6}; \frac{13\pi}{6} + \sqrt{3}\right)$$

$$f''(x_4) = \sqrt{3} > 0$$

$$\rightarrow \text{Minimum bei } \left(\frac{17\pi}{6}; \frac{17\pi}{6} - \sqrt{3}\right)$$

- Monotonie

Für $x \in [0; \frac{\pi}{6})$ ist $f'(x) > 0$, d.h. f ist streng monoton wachsend. Auch für $x \in (\frac{17\pi}{6}, 4\pi]$ ist $f'(x) > 0$, d.h. f ist streng monoton wachsend.

- Globale Extremstellen (Untersuchung am Rand)

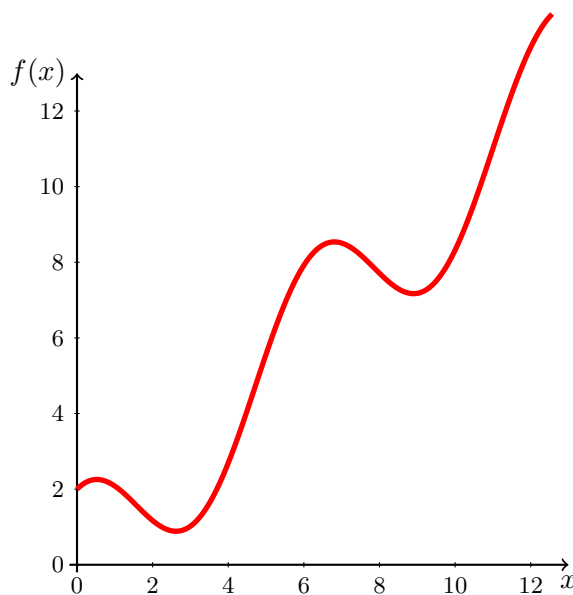
Aus der Beschränktheit des Definitionsbereichs und der Monotonie folgt ein Minimum $(0; 2)$ und ein Maximum $(4\pi; 4\pi + 2)$.

Das Minimum mit dem kleinsten Funktionswert ist $(\frac{5\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3})$, d.h. es ist das globale Minimum.

Das Maximum mit dem größten Funktionswert ist $(4\pi; 4\pi + 2)$, d.h. globales Maximum.

Alle anderen sind lokale Extremstellen.

- Skizze:



f) $f(x) = \frac{2}{3} \cdot x^3 - x^2 + 2, x \in [-1, 2]$

g.Max $(2; \frac{10}{3})$, l.Max $(0; 2)$, g.Min $(-1; \frac{1}{3})$, l.Min $(1; \frac{5}{3})$

Lösung:

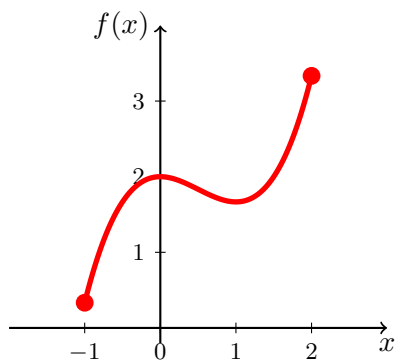
- Ableitungen: $f'(x) = 2x^2 - 2x$, $f''(x) = 4x - 2$

- Extremstellen: suche $x \in (-1, 1) : f'(x) = 0 \iff 2x^2 - 2x = 0$. Die Nullstellen sind $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$. Wegen $f''(x_1) = f''(0) = -2 < 0$ ist an der Stelle $(x_1; f(x_1)) = (0; 2)$ ein lokales Maximum. Wegen $f''(x_2) = f''(1) = 4 \cdot 1 - 2 = 2 > 0$ ist an der Stelle $(x_2; f(x_2)) = (1; \frac{5}{3})$ ein lokales Minimum.

Randpunkte: Da die Funktion an der Stelle $x = -1$ streng monoton wachsend ist, ist an der Stelle $(-1; f(-1)) = (-1; \frac{1}{3})$ ein lokales Minimum. Ebenso ist die Funktion am anderen Ende des Intervalls bei $x = 2$ streng monoton steigend und in $(2, f(2)) = (2, \frac{10}{3})$ ergibt sich dadurch ein lokales Maximum.

Vergleich aller Werte liefert, dass am Randpunkten das globale Maximum und das globale Minimum erreicht werden.

- Monotonie: $f''(x) = 2x^2 - 2x = 2x(x - 1)$ ist negativ für $x \in (0, 1)$, dort ist die Funktion streng monoton fallend. Auf dem Intervallen $[-1, 0)$ und $(1, 2]$ ist die erste Ableitung positiv und die Funktion ist streng monoton wachsend.
- Skizze:



DiffEinDim/Optimierung/Ag_ParamKurven_AbstandZumUrsprung.tex

Aufgabe 25.165 (Abstand zum Ursprung)

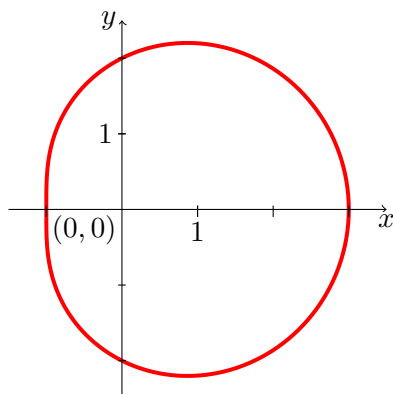
Für die angegebenen parametrisierten Kurven

$$K : \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

berechnen Sie die Punkte mit maximalem und minimalem Abstand zum Ursprung!

a) $x(t) = \cos^2(t) + 2 \cos t$
 $y(t) = \cos t \sin t + 2 \sin t$

Max. Abstand in $(3; 0)$, Min. Abstand in $(-1; 0)$



Lösung:

$$K : \quad r = f(\varphi)$$

Die Extrempunkte von K sind durch die Extremstellen von f gegeben.

Bestimme r :

- Standardvorgehen

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = \sqrt{(\cos^2(t) + 2 \cos t)^2 + (\cos t \sin t + 2 \sin t)^2} \\ &= \sqrt{\cos^4(t) + 2 \cos^3(t) + 4 \cos^2(t) + \cos^2(t) \sin^2(t) + 2 \cos(t) \sin^2(t)^2 + 4 \sin^2(t)} \\ &= \sqrt{\cos^4(t) + \cos^2(t) \sin^2(t) + 2 \cos^3(t) + 2 \cos(t) \sin^2(t)^2 + 4 \cos^2(t) + 4 \sin^2(t)} \\ &= \sqrt{\cos^2(t) (\cos^2(t) + \sin^2(t)) + 2 \cos(t) (\cos^2(t) + \sin^2(t)) + 4 (\cos^2(t) + \sin^2(t))} \\ &= \sqrt{\cos^2(t) + 2 \cos(t) + 4} = \sqrt{(\cos(t) + 2)^2} \\ &= \cos(t) + 2 \end{aligned}$$

- Alternativ

$$\begin{aligned}x(t) &= \cos^2(t) + 2 \cos t = (\cos(t) + 2) \cos(t) = f(t) \cos(t) \\y(t) &= \cos t \sin t + 2 \sin t = (\cos(t) + 2) \sin(t) = f(t) \sin(t) \\r &= f(t) = \cos(t) + 2\end{aligned}$$

Extremstellen von r bestimmen:

- Ableitungen

$$\begin{aligned}f'(t) &= -\sin(t) \\f''(t) &= -\cos(t)\end{aligned}$$

- Notwendige Bedingung

$$\begin{aligned}f'(t) &= 0 = -\sin(t) \\ \Rightarrow t_1 &= 0 \\ t_2 &= \pi \\ t_3 &= 2\pi\end{aligned}$$

- Hinreichende Bedingung

$$\begin{aligned}f''(t_1) &= -1 \rightarrow \text{Maximum} \\ f''(t_2) &= +1 \rightarrow \text{Minimum} \\ f''(t_3) &= -1 \rightarrow \text{Maximum}\end{aligned}$$

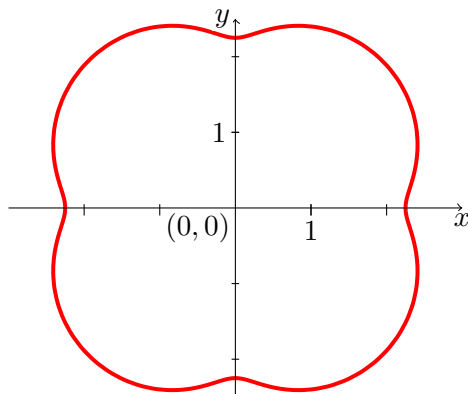
Bestimme die Extrempunkte von K :

- t_1 : $x(t_1) = 3, y(t_1) = 0$
- t_2 : $x(t_2) = -1, y(t_2) = 0$
- t_3 : $x(t_3) = 3, y(t_3) = 0$

$\Rightarrow P_1 = P_3 = (3; 0)$ Maximale Entfernung und $P_2 = (-1; 0)$ Minimale Entfernung.

b)
$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{5}{2} \cos t - \frac{1}{4} \cos(5t) \\ y(t) &= \frac{5}{2} \sin t - \frac{1}{4} \sin(5t)\end{aligned}$$

Max. Abstand in $(\pm \frac{11\sqrt{2}}{8}; \pm \frac{11\sqrt{2}}{8})$ und $(\pm \frac{11\sqrt{2}}{8}; \mp \frac{11\sqrt{2}}{8})$, Min Abstand in $(\pm \frac{9}{4}; 0)$ und $(0; \pm \frac{9}{4})$



Lösung:

Definiere die Hilfsfunktion $f(t) = (r(t))^2$:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= (r(t))^2 = (x(t))^2 + (y(t))^2 \\
 &= \left(\frac{5}{2} \cos t - \frac{1}{4} \cos(5t) \right)^2 + \left(\frac{5}{2} \sin t - \frac{1}{4} \sin(5t) \right)^2 \\
 &= \frac{25}{4} (\cos t)^2 - 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{4} \cos t \cdot \cos(5t) + \frac{1}{16} (\cos(5t))^2 + \frac{25}{4} (\sin t)^2 - 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{4} \sin t \cdot \sin(5t) + \frac{1}{16} (\sin(5t))^2 \\
 &= \frac{25}{4} ((\cos t)^2 + (\sin t)^2) + \frac{1}{16} ((\cos(5t))^2 + (\sin(5t))^2) - \frac{5}{4} (\cos t \cdot \cos(5t) + \sin t \cdot \sin(5t)) \\
 &= \frac{25}{4} + \frac{1}{16} - \frac{5}{4} \cos(5t - t) \\
 &= \frac{101}{16} - \frac{5}{4} \cos(4t).
 \end{aligned}$$

Stationären Punkte: suche t so dass $f'(t) = 0$. Die Ableitung ist

$$f'(t) = \frac{5}{5} \cdot \sin(4t) \cdot 4 = 5 \sin t.$$

Es ist Null, wenn der Argument das Vielfache von π annimmt, d.h.,

$$4t = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Die stationären Punkte sind:

- $k = 0 \implies t_0 = 0, f(t_0) = f(0) = \frac{101}{16} - \frac{5}{4} \cos(4 \cdot 0) = \frac{101}{16} - 1 = \frac{81}{16}.$
- $k = 1 \implies t_1 = \frac{\pi}{4}, f(t_1) = f(\frac{\pi}{4}) = \frac{101}{16} - \frac{5}{4} \cos(4 \cdot \frac{\pi}{4}) = \frac{101}{16} + 1 = \frac{121}{16}.$
- $k = 2 \implies t_2 = \frac{\pi}{2}, f(t_2) = f(\frac{\pi}{2}) = \frac{101}{16} - \frac{5}{4} \cos(4 \cdot \frac{\pi}{2}) = \frac{101}{16} - 1 = \frac{81}{16}.$
- $k = 3 \implies t_3 = \frac{3\pi}{4}, f(t_3) = f(\frac{3\pi}{4}) = \frac{101}{16} - \frac{5}{4} \cos(4 \cdot \frac{3\pi}{4}) = \frac{101}{16} + 1 = \frac{121}{16}.$
- $k = 4 \implies t_4 = \pi, f(t_4) = f(\pi) = \frac{101}{16} - \frac{5}{4} \cos(4 \cdot \pi) = \frac{101}{16} - 1 = \frac{81}{16}.$
- $k = 5 \implies t_5 = \frac{5\pi}{4}, f(t_5) = f(\frac{5\pi}{4}) = \frac{101}{16} - \frac{5}{4} \cos(4 \cdot \frac{5\pi}{4}) = \frac{101}{16} + 1 = \frac{121}{16}.$
- $k = 6 \implies t_6 = \frac{3\pi}{2}, f(t_6) = f(\frac{3\pi}{2}) = \frac{101}{16} - \frac{5}{4} \cos(4 \cdot \frac{3\pi}{2}) = \frac{101}{16} - 1 = \frac{81}{16}.$
- $k = 7 \implies t_7 = \frac{7\pi}{4}, f(t_7) = f(\frac{7\pi}{4}) = \frac{101}{16} - \frac{5}{4} \cos(4 \cdot \frac{7\pi}{4}) = \frac{101}{16} + 1 = \frac{121}{16}.$
- $k = 8 \implies t_8 = 2\pi, f(t_8) = f(2\pi) = \frac{101}{16} - \frac{5}{4} \cos(4 \cdot 2\pi) = \frac{101}{16} - 1 = \frac{81}{16}.$

Vergleich der Funktionswerte ergibt

- Minimum $r_{\min} = \sqrt{\frac{81}{16}} = \frac{9}{4}$ an den Stellen
 $t_0 = 0, t_2 = \frac{\pi}{2}, t_4 = \pi, t_6 = \frac{3\pi}{2}$ und $t_8 = 2\pi$, sowie
- Maximum $r_{\max} = \sqrt{\frac{121}{16}}$ an den Stellen
 $t_1 = \frac{\pi}{4}, t_3 = \frac{3\pi}{4}, t_5 = \frac{5\pi}{4}$ und $t_7 = \frac{7\pi}{4}.$

Im letzten Schritt müssen noch die entsprechenden x - und y -Koordinaten berechnet werden.

- Minimum $r_{\min} = \frac{9}{4}$ an den Stellen

$$\begin{aligned}
 (x(t_0), y(t_0)) &= (x(0), y(0)) = \left(\frac{5}{2} \cos(0) - \frac{1}{4} \cos(5 \cdot 0), \frac{5}{2} \sin(0) - \frac{1}{4} \sin(5 \cdot 0) \right) \\
 &= \left(\frac{9}{4}, 0 \right), \\
 (x(t_2), y(t_2)) &= \left(x\left(\frac{\pi}{2}\right), y\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = \left(\frac{5}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{4} \cos\left(5 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \frac{5}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{4} \sin\left(5 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right) \\
 &= \left(0, \frac{9}{4} \right), \\
 (x(t_4), y(t_4)) &= (x(\pi), y(\pi)) = \left(\frac{5}{2} \cos(\pi) - \frac{1}{4} \cos(5 \cdot \pi), \frac{5}{2} \sin(\pi) - \frac{1}{4} \sin(5 \cdot \pi) \right) \\
 &= \left(-\frac{9}{4}, 0 \right), \\
 (x(t_6), y(t_6)) &= \left(x\left(\frac{3\pi}{2}\right), y\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right) = \left(\frac{5}{2} \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{1}{4} \cos\left(5 \cdot \frac{3\pi}{2}\right), \frac{5}{2} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{1}{4} \sin\left(5 \cdot \frac{3\pi}{2}\right) \right) \\
 &= \left(0, -\frac{9}{4} \right), \\
 (x(t_8), y(t_8)) &= (x(2\pi), y(2\pi)) = \left(\frac{5}{2} \cos(2\pi) - \frac{1}{4} \cos(5 \cdot 2\pi), \frac{5}{2} \sin(2\pi) - \frac{1}{4} \sin(5 \cdot 2\pi) \right) \\
 &= \left(\frac{9}{4}, 0 \right) = (x(t_0), y(t_0)).
 \end{aligned}$$

- Maximum $r_{\max} = \sqrt{\frac{121}{16}}$ an den Stellen

$$\begin{aligned}
 (x(t_1), y(t_1)) &= (x(\frac{\pi}{4}), y(\frac{\pi}{4})) = (\frac{5}{2} \cos(\frac{\pi}{4}) - \frac{1}{4} \cos(5 \cdot \frac{\pi}{4}), \frac{5}{2} \sin(\frac{\pi}{4}) - \frac{1}{4} \sin(5 \cdot \frac{\pi}{4})) \\
 &= \left(\frac{11\sqrt{2}}{8}, \frac{11\sqrt{2}}{8} \right), \\
 (x(t_3), y(t_3)) &= (x(\frac{3\pi}{4}), y(\frac{3\pi}{4})) = (\frac{5}{2} \cos(\frac{3\pi}{4}) - \frac{1}{4} \cos(5 \cdot \frac{3\pi}{4}), \frac{5}{2} \sin(\frac{3\pi}{4}) - \frac{1}{4} \sin(5 \cdot \frac{3\pi}{4})) \\
 &= \left(-\frac{11\sqrt{2}}{8}, \frac{11\sqrt{2}}{8} \right), \\
 (x(t_5), y(t_5)) &= (x(\frac{5\pi}{4}), y(\frac{5\pi}{4})) = (\frac{5}{2} \cos(\frac{5\pi}{4}) - \frac{1}{4} \cos(5 \cdot \frac{5\pi}{4}), \frac{5}{2} \sin(\frac{5\pi}{4}) - \frac{1}{4} \sin(5 \cdot \frac{5\pi}{4})) \\
 &= \left(-\frac{11\sqrt{2}}{8}, -\frac{11\sqrt{2}}{8} \right), \\
 (x(t_7), y(t_7)) &= (x(\frac{7\pi}{4}), y(\frac{7\pi}{4})) = (\frac{5}{2} \cos(\frac{7\pi}{4}) - \frac{1}{4} \cos(5 \cdot \frac{7\pi}{4}), \frac{5}{2} \sin(\frac{7\pi}{4}) - \frac{1}{4} \sin(5 \cdot \frac{7\pi}{4})) \\
 &= \left(\frac{11\sqrt{2}}{8}, \frac{11\sqrt{2}}{8} \right).
 \end{aligned}$$

Hinweis: $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$
 $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$

Aufgabenblatt 26

DiffEinDim/Taylor



DiffEinDim/Taylor/Ag_Taylorpolynom_Grad2Gemischt.tex

Aufgabe 26.166 (Taylorpolynome)

Bestimmen Sie jeweils das Taylorpolynom 2. Grades von den Funktionen beim Entwicklungspunkt $x_0 = 1$, wobei $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ Konstanten sind:

a) $f(x) = a + bx + cx^2$ $T_2(x; f, 1) = T(x; f, 1) = (a + b + c) + (b + 2c) \cdot (x - 1) + c \cdot (x - 1)^2$

Lösung:

Das Taylorpolynom vom Grad 2 mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ ist

$$T_{2,f,1}(x) = f(1) + f'(1) \cdot (x - 1) + \frac{1}{2} f''(1) \cdot (x - 1)^2.$$

Berechne den Funktionswert und die Ableitungen im Entwicklungspunkt:

$$\begin{aligned} f(x) &= a + bx + cx^2 & \implies f(1) &= a + b + c \\ f'(x) &= b + 2cx & \implies f'(1) &= b + 2c \\ f''(x) &= 2c & \implies f''(1) &= 2c \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} T_{2,f,1}(x) &= (a + b + c) + (b + 2c) \cdot (x - 1) + \frac{1}{2} \cdot 2c \cdot (x - 1)^2 \\ &= (a + b + c) + (b + 2c) \cdot (x - 1) + c \cdot (x - 1)^2 \end{aligned}$$

Da die Funktion ein quadratisches Polynom ist, ist die Taylorreihe $T_{f,1}(x)$ identisch mit dem zweiten Taylorpolynom.

b) $g(x) = e^x \cdot \log(x)$ $\frac{e}{2} \cdot (x - 1)^2 + e \cdot (x - 1)$

Lösung:

Das Taylorpolynom vom Grad 2 mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ ist

$$T_{2,g,1}(x) = g(1) + g'(1) \cdot (x - 1) + \frac{1}{2} g''(1) \cdot (x - 1)^2.$$

Berechne den Funktionswert und die Ableitungen im Entwicklungspunkt:

$$\begin{aligned} g(x) &= e^x \log(x) & \implies g(1) &= e^1 \log(1) = 0 \\ g'(x) &= e^x \log(x) + e^x \cdot \frac{1}{x} & \implies g'(1) &= e^1 \log(1) + e^1 \cdot \frac{1}{1} = e \\ g''(x) &= e^x \log(x) + e^x \cdot \frac{1}{x} + e^x \cdot \frac{1}{x} + e^x \cdot \frac{-1}{x^2} \\ &= e^x \log(x) + \frac{2}{x} e^x - \frac{1}{x^2} e^x & \implies g''(1) &= e^1 \log(1) + \frac{2}{1} e^1 - \frac{1}{1} e^1 = e \end{aligned}$$

Damit ist das gesuchte Taylorpolynom

$$T_{2,g,1}(x) = 0 + e \cdot (x - 1) + \frac{1}{2} e \cdot (x - 1)^2.$$

c) $h(x) = \frac{1}{2-x}$

$$(x-1)^2 + (x-1) + 1$$

Geom. Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n$

Lösung:

Das Taylorpolynom vom Grad 2 mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ ist

$$T_{2,h,1}(x) = h(1) + h'(1) \cdot (x-1) + \frac{1}{2}h''(1) \cdot (x-1)^2.$$

Berechne den Funktionswert und die Ableitungen im Entwicklungspunkt:

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{2-x} & \Rightarrow h(1) &= \frac{1}{2-1} = 1 \\ h'(x) &= \frac{-1}{(2-x)^2} \cdot (-1) = \frac{1}{(2-x)^2} & \Rightarrow h'(1) &= \frac{1}{(2-1)^2} = 1 \\ h''(x) &= \frac{-2}{(2-x)^3} \cdot (-1) = \frac{2}{(2-x)^3} & \Rightarrow h''(1) &= \frac{2}{(2-1)^3} = 2 \end{aligned}$$

Damit ist das gesuchte Taylorpolynom

$$T_{2,h,1}(x) = 1 + 1 \cdot (x-1) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (x-1)^2 = 1 + (x-1) + (x-1)^2.$$

Wenn man den Funktionsterm wie folgt umschreibt:

$$h(x) = \frac{1}{2-x} = \frac{1}{1+(1-x)} = \frac{1}{1-(x-1)}$$

erkennt man die Formel für die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$, wobei hier $q = (x-1)$ ist. Also gilt

$$h(x) = \frac{1}{1-(x-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} (x-1)^k \text{ für } |x-1| < 1.$$

Es ist eine Potenzreihe und damit auch die entsprechende Taylorreihe.

Versuchen Sie danach, zu f und h die vollständigen Taylorreihen zu bestimmen, *ohne* die Koeffizientenformel $a_n = \frac{h^{(n)}(x_0)}{n!}$ zu verwenden.



DiffEinDim/Taylor/Ag_Taylorreihe_Fktplus1exp.tex

Aufgabe 26.167 (Taylorreihen)

Gesucht ist die Taylorreihe der Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := (x+1) \cdot e^x$.

- Berechnen Sie die ersten vier Ableitungen von f .
- Stellen Sie eine Vermutung für $f^{(n)}(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ auf.

$$f^{(n)}(x) = (x+n+1) \cdot e^x$$

- Beweisen Sie Ihre Vermutung durch vollständige Induktion.
- Stellen Sie damit die Taylorreihe von f um 0 auf und bestimmen Sie den Konvergenzradius.

$$T_{f,0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} \cdot x^n \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

Lösung:

Berechne die ersten 4 Ableitungen von $f(x)$:

- $f^{(0)}(x) = (x+1)e^x$
- $f^{(1)}(x) = (x+1)e^x + e^x$
- $f^{(2)}(x) = (x+1)e^x + e^x + e^x = (x+1)e^x + 2e^x$
- $f^{(3)}(x) = (x+1)e^x + e^x + 2e^x = (x+1)e^x + 3e^x$
- $f^{(4)}(x) = (x+1)e^x + e^x + 3e^x = (x+1)e^x + 4e^x$

Vermutung:

$$f^{(n)}(x) = (x+1)e^x + ne^x, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Induktionsbeweis:

Induktionsanfang: Für $n = 0$ gilt die Formel.

Induktionsvoraussetzung: Nehme an, dass die Formel für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, d.h.,

$$f^{(n)}(x) = (x+1)e^x + ne^x$$

Induktionsschluss: Es muss gezeigt werden, dass dann die Formel auch für $n+1$ gilt:

$$f^{(n+1)}(x) \stackrel{?}{=} (x+1)e^x + (n+1)e^x$$

Ableiten der Formel in der Induktionsvoraussetzung liefert:

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = ((x+1)e^x + ne^x)' = (x+1)e^x + e^x + ne^x = (x+1)e^x + (n+1)e^x$$

was auch gezeigt werden musste.

Taylorreihe um den Entwicklungspunkt x_0 ist

$$T(x; x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

z.B., mit $x_0 = 0$ gilt

$$f^{(k)}(0) = (0+1)e^0 + ne^0 = (n+1)$$

und die entsprechende Taylorreihe ist

$$T_{f,0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{k!} x^k$$

Konvergenzradius dieser Reihe: diese Reihe ist eine Potenzreihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \quad a_k = \frac{k+1}{k!}$$

Bestimme den Konvergenzradius. Da

$$l^* := \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+2}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+2}{(k+1)^2} = 0$$

ist der Konvergenzradius $r = \infty$. Diese Taylorreihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.



DiffEinDim/ZUebersichten/Ag_Differentiation_Info_ListeAbleitungen.tex

Funktion f	Ableitung f'	Bemerkung
$c = c \cdot x^0$	0	konstante Funktion f mit Wert $c \in \mathbb{R}$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$n \geq 1$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$n \leq -1, x \neq 0$
x^r	$r \cdot x^{r-1}$	$r \in \mathbb{R}, x > 0$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
$\cot(x)$	$-1 - \cot^2(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)}$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\exp(x)$	$\exp(x)$	
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	
$\operatorname{arccot}(x)$	$\frac{-1}{1+x^2}$	
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1 < x < 1$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1 < x < 1$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	
$\tanh(x)$	$1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$	
$\coth(x)$	$1 - \coth^2(x) = \frac{-1}{\sinh^2(x)}$	$x \neq 0$



DiffMehrDim/DiffbarPart/Ag_Gradient_Anwendung.tex

Aufgabe 28.168 (Anwendungen des Gradienten)

kr

- a) Der Zusammenhang zwischen potentieller Energie U und Kraft $\vec{F}$ lautet $\vec{F} = -\nabla U$. Berechnen Sie jeweils die zugehörige Kraft für die elektrostatische Potentielle Energie (Coulomb-Energie) $U_C(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r}$ zwischen der Ladung Q_2 und der im Koordinatenursprung ruhenden Ladung Q_1 mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ sowie für das zur Modellierung von intermolekularen Wechselwirkungen eingesetzte Lennard-Jones-Potential $U_{LJ}(r) = \epsilon \left(\left(\frac{r_m}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{r_m}{r} \right)^6 \right)$ mit den Parametern ϵ, r_m .

$$\vec{F}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{F}_{LJ} = -12\epsilon \left(\frac{r_m^6}{r^8} - \frac{r_m^{12}}{r^{14}} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Lösung:

Zur Bestimmung der Kraft $\vec{F}_C = -\nabla U_C$ berechnen wir zuerst die partielle Ableitung nach x :

$$\frac{\partial U_C}{\partial x} = \frac{dU_C}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{d}{dr} \frac{1}{r} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(-\frac{1}{r^2} \right) \cdot \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = -\frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = -\frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x}{r^3}$$

Aus Symmetriegründen folgt damit auch $\frac{\partial U_C}{\partial y} = -\frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{y}{r^3}$, $\frac{\partial U_C}{\partial z} = -\frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{z}{r^3}$.

$$\text{Damit ergibt sich } \vec{F}_C = -\nabla U_C = - \begin{pmatrix} \frac{\partial U_C}{\partial x} \\ \frac{\partial U_C}{\partial y} \\ \frac{\partial U_C}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Auf ähnliche Art und Weise berechnet man $\vec{F}_{LJ} = -\nabla U_{LJ} = -12\epsilon \left(\frac{r_m^6}{r^8} - \frac{r_m^{12}}{r^{14}} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

- b) Ein kleiner Ball bewege sich reibungsfrei auf der Mantelfläche eines (unendlich langen) Zylinders mit Radius 5, dessen Symmetrieachse auf der y -Achse liegt. Welche Gleichung der Form $g(x, y, z) = 0$ erfüllen die Punkte auf der Zylindermantelfläche? Auf den Ball wirke die Gravitationskraft $\vec{F}_g = (0 \ 0 \ -1)^T$. Wie groß ist die Gesamtkraft $\vec{F}$ auf den Ball am Punkt $(3, 0, 4)$?
- $$g(x, y, z) = x^2 + z^2 - 25, \quad \vec{F} = \frac{1}{25} (12 \ 0 \ -9)^T$$

Lösung:

Auf der Zylindermantelfläche gilt für die Punkte (x, y, z) , dass für jedes beliebige feste y die Koordinaten x und z auf einem Kreis mit Mittelpunkt $x_M = 0$, $z_M = 0$ und Radius 5 liegen müssen. Es gilt deshalb $g(x, y, z) = x^2 + z^2 - 5^2$.

Die Reaktionskraft (Zwangskraft) $\vec{F}_Z(x, y, z)$, die die Zylindermantelfläche auf den Ball ausübt, steht senkrecht auf dieser Oberfläche, ist also proportional zum Gradienten $\nabla g(x, y, z)$:

$$\vec{F}_Z(x, y, z) = \lambda \cdot \nabla g(x, y, z) = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \\ 2z \end{pmatrix}, \text{ wobei wir eine zunächst unbekannte Proportionalitäts-}$$

konstante $\lambda \in \mathbb{R}$ angesetzt haben. Am Punkt $(3, 0, 4)$ ergibt sich dann $\vec{F}_Z(3, 0, 4) = \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$. Die

$$\text{Gesamtkraft an diesem Punkt ist dann } \vec{F} = \vec{F}_Z(3, 0, 4) + \vec{F}_g = \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\lambda \\ 0 \\ 8\lambda - 1 \end{pmatrix}.$$

Um die Unbekannte Zahl λ zu finden, werten wir folgende Bedingung aus:

Die Reaktionskraft der Zylinderoberfläche, stellt sich so ein, dass sie genau den Anteil äußerer Kräfte (hier $\vec{F}_g$) der senkrecht zur Oberfläche steht ausgleicht (verhindert also damit ein Eindringen des Objekts in den Zylinder bzw. Entfernen des Objekts von der Oberfläche). Die resultierende Kraft $\vec{F}$ hat deshalb keinen Anteil senkrecht zur Oberfläche, ist also tangential zur Oberfläche und muss deshalb wiederum senkrecht auf $\vec{F}_Z(3,0,4)$ stehen. D.h. es

$$\begin{aligned} \text{muss gelten: } \vec{F}_Z(3,0,4) \cdot \vec{F} &= 0 \Leftrightarrow \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6\lambda \\ 0 \\ 8\lambda - 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda(36\lambda + 64\lambda - 8) = 0 \Leftrightarrow \\ 36\lambda + 64\lambda - 8 &= 0 \text{ (weil } \lambda \neq 0) \Leftrightarrow 100\lambda = 8 \Leftrightarrow \lambda = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}. \text{ Einsetzen in } \vec{F} \text{ ergibt} \\ \vec{F} &= \begin{pmatrix} 6\frac{2}{25} \\ 0 \\ 8\frac{2}{25} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{25} \\ 0 \\ \frac{16}{25} - \frac{25}{25} \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



DiffMehrDim/DiffbarPart/Ag_HoeherePartielleAbleitungen.tex

Aufgabe 28.169 (Höhere partielle Ableitungen)

Berechnen Sie die angegebenen partiellen Ableitungen:

a) $f(x, y) = 3xy^4 + x^3y^2; f_{xyy}; f_{yyy}$

$$36y^2 + 6x^2; 72xy$$

Lösung:

$$f_x(x, y) = 3y^4 + 3x^2y^2 \implies f_{xy}(x, y) = 12y^3 + 6x^2y \implies f_{xyy}(x, y) = 36y^2 + 6x^2$$

und

$$f_y(x, y) = 12xy^3 + 2x^3y \implies f_{yy}(x, y) = 36xy^2 + 2x^3 \implies f_{yyy}(x, y) = 72xy$$

b) $f(x, t) = x^2e^{-ct}, c \in \mathbb{R}; f_{ttt}; f_{txx}$

$$-c^3x^2e^{-ct}; -2ce^{-ct}$$

Lösung:

$$f_t(x, t) = -cx^2e^{-ct} \implies f_{tt}(x, t) = c^2x^2e^{-ct} \implies f_{ttt}(x, t) = -c^3x^2e^{-ct}$$

und

$$f_t(x, t) = -cx^2e^{-ct} \implies f_{tx}(x, t) = -2cxe^{-ct} \implies f_{txx}(x, t) = -2ce^{-ct}$$

c) $f(x, y, z) = \cos(4x + 3y + 2z); f_{xyz}; f_{yzz}$

$$24 \sin(4x + 3y + 2z); 12 \sin(4x + 3y + 2z)$$

Lösung:

$$\begin{aligned} f_x(x, y, z) &= -4 \sin(4x + 3y + 2z) \implies f_{xy}(x, y, z) = -12 \cos(4x + 3y + 2z) \\ &\implies f_{xyz}(x, y, z) = 24 \sin(4x + 3y + 2z) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f_y(x, y, z) &= -3 \sin(4x + 3y + 2z) \implies f_{yz}(x, y, z) = -6 \cos(4x + 3y + 2z) \\ &\implies f_{yzz}(x, y, z) = 12 \sin(4x + 3y + 2z) \end{aligned}$$

d) $f(r, s, t) = r \ln(rs^2t^3); f_{rss}; f_{rst}$

$$-\frac{2}{s^2}; 0$$

Lösung:

$$\begin{aligned} f_r(r, s, t) &= \ln(rs^2t^3) + r \cdot \frac{1}{rs^2t^3} \cdot s^2t^3 = \ln(rs^2t^3) + 1 \implies f_{rs}(r, s, t) = \frac{1}{rs^2t^3} \cdot 2srt^3 = \frac{2}{s} \\ &\implies f_{rss}(r, s, t) = -\frac{2}{s^2} \text{ und } f_{rst}(r, s, t) = 0 \end{aligned}$$

e) $u(r, \vartheta) = e^{r\vartheta} \sin(\vartheta); u_{r\vartheta r}$

$$\vartheta e^{r\vartheta} \cdot ((r\vartheta + 2) \cdot \sin(\vartheta) + \vartheta \cos(\vartheta))$$

Lösung:

$$\begin{aligned} u_r(r, \vartheta) &= e^{r\vartheta} \vartheta \sin \vartheta \implies u_{rr}(r, \vartheta) = e^{r\vartheta} \vartheta^2 \sin \vartheta \\ &\implies u_{rr\vartheta}(r, \vartheta) = e^{r\vartheta} r \vartheta^2 \sin \vartheta + e^{r\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\vartheta^2 \sin \vartheta) = r \vartheta^2 e^{r\vartheta} \sin \vartheta + e^{r\vartheta} (2\vartheta \sin \vartheta + \vartheta^2 \cos \vartheta) \\ &= r \vartheta^2 e^{r\vartheta} \sin \vartheta + 2\vartheta e^{r\vartheta} \sin \vartheta + \vartheta^2 e^{r\vartheta} \cos \vartheta \end{aligned}$$

f) $u(x, y, z) = x^a y^b z^c, (a, b, c)^T \in \mathbb{R}^3; u_{xyyzzz}$

$$ab(b-1)c(c-1)(c-2)x^{a-1}y^{b-2}z^{c-3}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= ax^{a-1}y^bz^c \\ u_{xy}(x, y, z) &= abx^{a-1}y^{b-1}z^c \\ u_{xyy}(x, y, z) &= ab(b-1)x^{a-1}y^{b-2}z^c \\ u_{xyyz}(x, y, z) &= ab(b-1)cx^{a-1}y^{b-2}z^{c-1} \\ u_{xyyzz}(x, y, z) &= ab(b-1)c(c-1)x^{a-1}y^{b-2}z^{c-2} \\ u_{xyyzzz}(x, y, z) &= ab(b-1)c(c-1)(c-2)y^{a-1}y^{b-2}z^{c-3} \end{aligned}$$



DiffMehrDim/DiffbarPart/Ag_PartDiffbar_DiffQuotMitWurzeltrickUndKontrolle.tex

Aufgabe 28.170 (Differentialquotient für partielle Ableitungen)

SPF

Seien $D := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x > -y^2\}$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto f(x, y) := \frac{1}{\sqrt{(x+y^2)}}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(7, 3) = \frac{-1}{128} \text{ und } \frac{\partial f}{\partial y}(7, 3) = \frac{-3}{64}$$

a) Berechnen Sie $\frac{\partial f}{\partial x}(7, 3)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(7, 3)$ mit Hilfe der entsprechenden Differentialquotienten!

Lösung: Wegen $\sqrt{(7+3^2)} = \sqrt{7+9} = \sqrt{16} = 4$ sind

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial x}(7,3) &= \lim_{u \rightarrow 7} \frac{\frac{1}{\sqrt{(u+3^2)}} - \frac{1}{\sqrt{(7+3^2)}}}{u-7} = \lim_{u \rightarrow 7} \frac{4 - \sqrt{u+9}}{4 \cdot \sqrt{u+9} \cdot (u-7)} \\
 &= \lim_{u \rightarrow 7} \frac{16 - (u+9)}{4 \cdot \sqrt{u+9} \cdot (u-7) \cdot (4 + \sqrt{u+9})} = \lim_{u \rightarrow 7} \frac{7-u}{4 \cdot \sqrt{u+9} \cdot (u-7) \cdot (4 + \sqrt{u+9})} \\
 &= \lim_{u \rightarrow 7} \frac{-1}{4 \cdot \sqrt{u+3^2} \cdot (4 + \sqrt{u+3^2})} = \frac{-1}{4 \cdot \sqrt{7+3^2} \cdot (4 + \sqrt{7+3^2})} \\
 &= \frac{-1}{4 \cdot 4 \cdot (4+4)} = \frac{-1}{16 \cdot 8} = \frac{-1}{128} \quad \text{und} \\
 \frac{\partial f}{\partial y}(7,3) &= \lim_{u \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{\sqrt{(7+u^2)}} - \frac{1}{\sqrt{(7+3^2)}}}{u-3} = \lim_{u \rightarrow 3} \frac{4 - \sqrt{7+u^2}}{4 \cdot \sqrt{7+u^2} \cdot (u-3)} \\
 &= \lim_{u \rightarrow 3} \frac{16 - (7+u^2)}{4 \cdot \sqrt{7+u^2} \cdot (u-3) \cdot (4 + \sqrt{7+u^2})} \\
 &= \lim_{u \rightarrow 3} \frac{9 - u^2}{4 \cdot \sqrt{7+u^2} \cdot (u-3) \cdot (4 + \sqrt{7+u^2})} \\
 &= \lim_{u \rightarrow 3} \frac{(3+u) \cdot (3-u)}{4 \cdot \sqrt{7+u^2} \cdot (u-3) \cdot (4 + \sqrt{7+u^2})} \\
 &= \lim_{u \rightarrow 3} \frac{-(3+u)}{4 \cdot \sqrt{7+u^2} \cdot (4 + \sqrt{7+u^2})} = \frac{-(3+3)}{4 \cdot \sqrt{7+3^2} \cdot (4 + \sqrt{7+3^2})} \\
 &= \frac{-6}{4 \cdot 4 \cdot (4+4)} = \frac{-3}{2 \cdot 4 \cdot 8} = \frac{-3}{8 \cdot 8} = \frac{-3}{64}.
 \end{aligned}$$

- b) Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse aus Aufgabenteil a), indem Sie den Gradienten von f mit den Ableitungsregeln und Standardableitungen ausrechnen und an der Stelle $(7,3)^T$ auswerten!

Lösung: Für alle $(x,y)^T \in D$ liefert die Kettenregel

$$\begin{aligned}
 f(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{(x+y^2)}} = (x+y^2)^{-\frac{1}{2}}, \\
 \partial_1 f(x,y) &= -\frac{1}{2} \cdot (x+y^2)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot 1 = -\frac{1}{2} \cdot (x+y^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{-1}{2 \cdot \sqrt{(x+y^2)^3}} \\
 \text{und} \quad \partial_2 f(x,y) &= -\frac{1}{2} \cdot (x+y^2)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot 2y = -(x+y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot y = \frac{-y}{\sqrt{(x+y^2)^3}}.
 \end{aligned}$$

Setzt man $(7,3)^T$ in die Ableitungen ein, so ergibt sich wegen $\sqrt{(7+3^2)} = \sqrt{7+9} = \sqrt{16} = 4$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial x}(7,3) &= \frac{-1}{2 \cdot \sqrt{(7+3^2)^3}} = \frac{-1}{2 \cdot 4^3} = \frac{-1}{2 \cdot 64} = \frac{-1}{128} \\
 \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(7,3) &= \frac{-3}{\sqrt{(7+3^2)^3}} = \frac{-3}{4^3} = \frac{-3}{64}.
 \end{aligned}$$



DiffMehrDim/DiffbarPart/Ag_PartDiffbar_Einstieg8MitUnd4OhneDiffquot.tex

Aufgabe 28.171 (Erste partielle Ableitung)

Bestimmen Sie für die Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto f(x, y)$ und $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, t)^T \mapsto g(x, t)$ die angegebenen partiellen Ableitungen! Dabei seien für alle $x \in \mathbb{R}$, alle $y \in \mathbb{R}$ und alle $t \in \mathbb{R}$

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x-y}{x+y}, & \text{für } x \neq -y \\ x+1, & \text{für } x = -y \end{cases} \quad \text{und} \quad g(x, t) := \begin{cases} te^{\frac{x}{t}}, & \text{für } t \neq 0 \\ 0, & \text{für } t = 0 \end{cases}.$$

a) $f_x(0, 0)$

0

Lösung: Hier muss die Definition verwendet werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{(0+h)-0}{(0+h)+0} - (0+1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h}{h} - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0. \end{aligned}$$

b) $f_x(3, -3)$

n.e.

Lösung: Hier muss die Definition verwendet werden. Wegen

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h, -3) - f(3, -3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{(3+h)-(-3)}{(3+h)+(-3)} - (3+1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{6+h}{h} - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6-3h}{h^2} = \infty$$

existiert $f_x(3, -3)$ nicht.

c) $f_x(1, 2)$

$\frac{4}{9}$

Lösung: Hier kann mit Ableitungsregeln gearbeitet werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) &= \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x-y}{x+y} \right) \right]_{\substack{x=1 \\ y=2}} \stackrel{\text{Quotientenregel}}{=} \left[\frac{1 \cdot (x+y) - (x-y) \cdot 1}{(x+y)^2} \right]_{\substack{x=1 \\ y=2}} \\ &= \left[\frac{x+y-x+y}{(x+y)^2} \right]_{\substack{x=1 \\ y=2}} = \left[\frac{2y}{(x+y)^2} \right]_{\substack{x=1 \\ y=2}} = \frac{2 \cdot 2}{(1+2)^2} = \frac{4}{3^2} = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

d) $f_y(0, 0)$

n.e.

Lösung: Hier muss die Definition verwendet werden. Wegen

$$\frac{f(0, 0+h) - f(0, 0)}{h} = \frac{\frac{0-(0+h)}{0+(0+h)} - (0+1)}{h} = \frac{\frac{-h}{h} - 1}{h} = \frac{-1-1}{h} = \frac{-2}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0^-} \infty$$

existiert $f_y(0, 0)$ nicht.

e) $f_y(3, -3)$

n.e.

Lösung: Hier muss die Definition verwendet werden. Wegen

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3, -3+h) - f(3, -3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3-(-3+h)}{3+(-3+h)} - (3+1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{6-h}{h} - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6-5h}{h^2} = \infty$$

existiert $f_y(3, -3)$ nicht.

f) $f_y(1, 2)$

$-\frac{2}{9}$

Lösung: Hier kann mit Ableitungsregeln gearbeitet werden:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) &= \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x-y}{x+y} \right) \right]_{\substack{x=1 \\ y=2}} \stackrel{\text{Quotientenregel}}{=} \left[\frac{-1 \cdot (x+y) - (x-y) \cdot 1}{(x+y)^2} \right]_{\substack{x=1 \\ y=2}} \\ &= \left[\frac{-x-y-x+y}{(x+y)^2} \right]_{\substack{x=1 \\ y=2}} = \left[\frac{-2x}{(x+y)^2} \right]_{\substack{x=1 \\ y=2}} = \frac{-2 \cdot 1}{(1+2)^2} = \frac{-2}{3^2} = -\frac{2}{9}.\end{aligned}$$

g) $g_x(0, 0)$

0

Lösung: Hier muss die Definition verwendet werden:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0+h, 0) - g(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

h) $g_x(2, 0)$

0

Lösung: Hier muss die Definition verwendet werden:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(2, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2+h, 0) - g(2, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

i) $g_x(2, 1)$

e^2

Lösung: Hier kann mit Ableitungsregeln gearbeitet werden:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(2, 1) &= \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(t e^{\frac{x}{t}} \right) \right]_{\substack{x=2 \\ t=1}} \stackrel{\text{Faktorregel}}{=} \left[t \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\frac{x}{t}} \right) \right]_{\substack{x=2 \\ t=1}} \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \left[t \cdot e^{\frac{x}{t}} \cdot \frac{1}{t} \right]_{\substack{x=2 \\ t=1}} \\ &= \left[e^{\frac{x}{t}} \right]_{\substack{x=2 \\ t=1}} = e^{\frac{2}{1}} = e^2.\end{aligned}$$

j) $g_t(0, 0)$

1

Lösung: Hier muss die Definition verwendet werden:

$$\frac{\partial g}{\partial t}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0, 0+h) - g(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(0+h) \cdot e^{\frac{0}{0+h}} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot e^0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1.$$

k) $g_t(2, 0)$

n.e.

Lösung: Hier muss die Definition verwendet werden. Wegen $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2}{h} = \infty$ und also

$$\frac{g(2, 0+h) - g(2, 0)}{h} = \frac{(0+h) \cdot e^{\frac{2}{0+h}} - 0}{h} = \frac{h \cdot e^{\frac{2}{h}}}{h} = e^{\frac{2}{h}} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} \infty$$

existiert $g_t(2, 0)$ nicht.

1) $g_t(2, 1)$

$-e^2$

Lösung: Hier kann mit Ableitungsregeln gearbeitet werden:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial t}(2, 1) &= \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(t e^{\frac{x}{t}} \right) \right]_{\substack{x=2 \\ t=1}} \stackrel{\text{Produktregel}}{=} \left[1 \cdot e^{\frac{x}{t}} + t \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{\frac{x}{t}} \right) \right]_{\substack{x=2 \\ t=1}} \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \left[e^{\frac{x}{t}} + t \cdot e^{\frac{x}{t}} \cdot \frac{-x}{t^2} \right]_{\substack{x=2 \\ t=1}} \\ &= \left[e^{\frac{x}{t}} \cdot \left(1 - \frac{x}{t} \right) \right]_{\substack{x=2 \\ t=1}} = e^{\frac{2}{1}} \cdot \left(1 - \frac{2}{1} \right) = e^2 \cdot (1 - 2) = e^2 \cdot (-1) = -e^2.\end{aligned}$$



DiffMehrDim/DiffbarPart/Ag_PartDiffbar_ErstePartAblNachStewartCalculus.tex

Aufgabe 28.172 (Gradient)

VR

Für die angegebenen Funktionen berechnen Sie den Gradienten!

a) $f(x, y) := 3x - 2y^4$

$(3, -8y^3)^T$

Lösung: Es gilt

$$(\text{grad } f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (3x - 2y^4) \\ \frac{\partial}{\partial y} (3x - 2y^4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8y^3 \end{pmatrix}.$$

b) $f(x, y) := x^5 + 3x^3y^2 + 3xy^4$

$(5x^4 + 9x^2y^2 + 3y^4, 6x^3y + 12xy^3)^T$

Lösung: Es gilt

$$(\text{grad } f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (x^5 + 3x^3y^2 + 3xy^4) \\ \frac{\partial}{\partial y} (x^5 + 3x^3y^2 + 3xy^4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x^4 + 9x^2y^2 + 3y^4 \\ 6x^3y + 12xy^3 \end{pmatrix}.$$

c) $f(x, y) := x \cdot e^{3y}$

$e^{3y} \cdot (1, 3x)^T$

Lösung: Die Kettenregel liefert

$$(\text{grad } f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (x \cdot e^{3y}) \\ \frac{\partial}{\partial y} (x \cdot e^{3y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3y} \\ x \cdot e^{3y} \cdot 3 \end{pmatrix} = e^{3y} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3x \end{pmatrix}.$$

d) $f(x, y) := \sin(x) \cdot \cos(y)$

$(\cos(x) \cdot \cos(y), -\sin(x) \cdot \sin(y))^T$

Lösung: Es gilt

$$(\text{grad } f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (\sin(x) \cdot \cos(y)) \\ \frac{\partial}{\partial y} (\sin(x) \cdot \cos(y)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x) \cdot \cos(y) \\ \sin(x) \cdot (-\sin(y)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x) \cdot \cos(y) \\ -\sin(x) \cdot \sin(y) \end{pmatrix}.$$

e) $f(r, s) := r \cdot \ln(r^2 + s^2)$

$\left(\ln(r^2 + s^2) + \frac{2r^2}{r^2 + s^2}, \frac{2rs}{r^2 + s^2} \right)^T$

Lösung: Produkt- und Kettenregel liefern

$$\begin{aligned}(\text{grad } f)(r, s) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \ln(r^2 + s^2)) \\ \frac{\partial}{\partial s} (r \cdot \ln(r^2 + s^2)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot \ln(r^2 + s^2) + r \cdot \frac{1}{r^2 + s^2} \cdot 2r \\ r \cdot \frac{1}{r^2 + s^2} \cdot 2s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(r^2 + s^2) + \frac{2r^2}{r^2 + s^2} \\ \frac{2rs}{r^2 + s^2} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

f) $f(x, y, z) := xy^2z^3 + 3yz$

$$(y^2z^3, 2xyz^3 + 3z, 3xy^2z^2 + 3y)^T$$

Lösung: Es gilt

$$(\text{grad } f)(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(xy^2z^3 + 3yz) \\ \frac{\partial}{\partial y}(xy^2z^3 + 3yz) \\ \frac{\partial}{\partial z}(xy^2z^3 + 3yz) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2z^3 \\ 2xyz^3 + 3z \\ 3xy^2z^2 + 3y \end{pmatrix}.$$

g) $f(x, y, z) := \ln(x + 2y + 3z)$

$$\frac{1}{x+2y+3z} \cdot (1, 2, 3)^T$$

Lösung: Die Kettenregel liefert

$$(\text{grad } f)(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(\ln(x + 2y + 3z)) \\ \frac{\partial}{\partial y}(\ln(x + 2y + 3z)) \\ \frac{\partial}{\partial z}(\ln(x + 2y + 3z)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x+2y+3z} \cdot 1 \\ \frac{1}{x+2y+3z} \cdot 2 \\ \frac{1}{x+2y+3z} \cdot 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{x+2y+3z} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

h) $f(x, t, \vartheta) := x \cdot e^{-t} \cdot \sin(\vartheta)$

$$e^{-t} \cdot (\sin(\vartheta), -x \cdot \sin(\vartheta), x \cdot \cos(\vartheta))^T$$

Lösung: Die Kettenregel liefert

$$(\text{grad } f)(x, t, \vartheta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(x \cdot e^{-t} \cdot \sin(\vartheta)) \\ \frac{\partial}{\partial t}(x \cdot e^{-t} \cdot \sin(\vartheta)) \\ \frac{\partial}{\partial \vartheta}(x \cdot e^{-t} \cdot \sin(\vartheta)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \cdot \sin(\vartheta) \\ x \cdot e^{-t} \cdot (-1) \cdot \sin(\vartheta) \\ x \cdot e^{-t} \cdot \cos(\vartheta) \end{pmatrix} = e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} \sin(\vartheta) \\ -x \cdot \sin(\vartheta) \\ x \cdot \cos(\vartheta) \end{pmatrix}.$$

i) $f(x, y, z, t) := \frac{yz^2}{x} \cdot \tan(yt)$

$$\left(-\frac{yz^2}{x^2} \cdot \tan(yt), \frac{z^2}{x} \cdot \tan(yt) + \frac{t y z^2}{x} \cdot (1 + (\tan(yt))^2), \frac{2yz}{x} \cdot \tan(yt), \frac{y^2 z^2}{x} \cdot (1 + (\tan(yt))^2)\right)^T$$

Lösung: Produkt- und Kettenregel liefern

$$(\text{grad } f)(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{yz^2}{x} \cdot \tan(yt) \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{yz^2}{x} \cdot \tan(yt) \right) \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{yz^2}{x} \cdot \tan(yt) \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{yz^2}{x} \cdot \tan(yt) \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{yz^2}{x^2} \cdot \tan(yt) \\ \frac{z^2}{x} \cdot \tan(yt) + \frac{y z^2}{x} \cdot (1 + (\tan(yt))^2) \cdot t \\ \frac{2yz}{x} \cdot \tan(yt) \\ \frac{y z^2}{x} \cdot (1 + (\tan(yt))^2) \cdot y \end{pmatrix}.$$

j) $f(x, y) := y \cdot \ln(x)$

$$\left(\frac{y}{x}, \ln(x)\right)^T$$

Lösung: Es gilt

$$(\text{grad } f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(y \cdot \ln(x)) \\ \frac{\partial}{\partial y}(y \cdot \ln(x)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y}{x} \\ \ln(x) \end{pmatrix}.$$

k) $f(x, y) := x^y$

$$(yx^{y-1}, x^y \cdot \ln(x))^T$$

Lösung: Es gilt

$$(\text{grad } f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(x^y) \\ \frac{\partial}{\partial y}(x^y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yx^{y-1} \\ \ln(x) \cdot x^y \end{pmatrix}.$$

l) $f(x, t) := \arctan(x \cdot \sqrt{t})$

$$\frac{\sqrt{t}}{tx^2+1} \cdot \left(1, \frac{x}{2t}\right)^T$$

Lösung: Die Kettenregel liefert

$$(\text{grad } f)(x, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (\arctan(x \cdot \sqrt{t})) \\ \frac{\partial}{\partial t} (\arctan(x \cdot \sqrt{t})) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+(x\sqrt{t})^2} \cdot \sqrt{t} \\ \frac{1}{1+(x\sqrt{t})^2} \cdot x \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{t}}{tx^2+1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{x}{2t} \end{pmatrix}.$$

m) $f(x, y, z) := x^2 \cdot e^{yz}$

$$x \cdot e^{yz} \cdot (2, xz, xy)^T$$

Lösung: Die Kettenregel liefert

$$(\text{grad } f)(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 \cdot e^{yz}) \\ \frac{\partial}{\partial y} (x^2 \cdot e^{yz}) \\ \frac{\partial}{\partial z} (x^2 \cdot e^{yz}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \cdot e^{yz} \\ x^2 \cdot e^{yz} \cdot z \\ x^2 \cdot e^{yz} \cdot y \end{pmatrix} = x \cdot e^{yz} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ xz \\ xy \end{pmatrix}.$$

n) $f(r, s, t) := \sqrt{r^2 + s^2 + t^2}$

$$\frac{1}{\sqrt{r^2+s^2+t^2}} \cdot (r, s, t)^T$$

Lösung: Die Kettenregel liefert

$$(\text{grad } f)(r, s, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} (\sqrt{r^2 + s^2 + t^2}) \\ \frac{\partial}{\partial s} (\sqrt{r^2 + s^2 + t^2}) \\ \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{r^2 + s^2 + t^2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{r^2+s^2+t^2}} \cdot 2r \\ \frac{1}{2\sqrt{r^2+s^2+t^2}} \cdot 2s \\ \frac{1}{2\sqrt{r^2+s^2+t^2}} \cdot 2t \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + s^2 + t^2}} \cdot \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}.$$

o) $f(x, y, z, t) := \frac{xy^2}{t+2z}$

$$\frac{y}{t+2z} \cdot \left(y, 2x, -\frac{2xy}{t+2z}, -\frac{xy}{t+2z}\right)^T$$

Lösung: Die Kettenregel liefert

$$(\text{grad } f)(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{xy^2}{t+2z}\right) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{xy^2}{t+2z}\right) \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{xy^2}{t+2z}\right) \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{xy^2}{t+2z}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{t+2z} \\ \frac{2xy}{t+2z} \\ -\frac{xy^2}{(t+2z)^2} \cdot 2 \\ -\frac{xy^2}{(t+2z)^2} \cdot 1 \end{pmatrix} = \frac{y}{t+2z} \cdot \begin{pmatrix} y \\ 2x \\ -\frac{2xy}{t+2z} \\ -\frac{xy}{t+2z} \end{pmatrix}.$$



DiffMehrDim/DiffbarPart/Ag_PartDiffbar_KritischenPunktBerechnenIn3D.tex

Aufgabe 28.173 (Der Gradient)

Bestimmen Sie den Gradienten von $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y, z)^T \mapsto f(x, y, z) := x^2 + e^{xy^2} + xe^{xyz}$ und finden Sie die „kritischen Punkte“ von f , also alle $(a, b, c)^T \in \mathbb{R}^3$ mit $(\text{grad } f)(a, b, c) = \vec{0}$.

$$(\text{grad } f)(x, y, z) = (2x + e^{xy^2} + e^{xyz} + xye^{xyz}, 2ye^x + x^2ze^{xyz}, x^2ye^{xyz})^T \text{ und } (a, b, c)^T = (-\frac{1}{2}, 0, 0)^T$$

Lösung:

Die partiellen Ableitungen von f sind

$$f_x(x, y, z) = 2x + e^{xy^2} + e^{xyz} + xye^{xyz}, \quad f_y(x, y, z) = 2ye^x + x^2ze^{xyz}, \quad f_z(x, y, z) = x^2ye^{xyz}.$$

Also ist der Gradient der Vektor

$$(\text{grad } f)(x, y, z) = (2x + e^x y^2 + e^{xyz} + x y z e^{xyz}, 2y e^x + x^2 z e^{xyz}, x^2 y e^{xyz})^T.$$

Damit $\vec{v} = (a, b, c)^T$ ein kritischer Punkt ist (also $(\text{grad } f)(a, b, c) = \vec{0}$) müssen alle drei Komponenten Null werden. Wir arbeiten sie von der einfachsten bis zur kompliziertesten Komponente ab:

- Die dritte Komponente $a^2 b e^{abc}$ ist nur Null, wenn $a = 0$ ist (Fall I) oder wenn $b = 0$ (Fall II) ist, weil der Term e^{abc} niemals Null werden kann.
- Angenommen Fall I trifft zu.
Einsetzen von $a = 0$ in die zweite Komponente ergibt $2b = 0$, also muss dann auch $b = 0$ sein. Einsetzen von $a = b = 0$ in die erste Komponente ergibt aber 1 und nicht 0, weil der Term $e^{abc} = 1$ nicht verschwindet. Dieser Fall führt also nicht auf einen kritischen Punkt.
- Angenommen Fall II trifft zu. Einsetzen von $b = 0$ in die zweite Komponente ergibt $a^2 c = 0$, also muss dann $a = b = 0$ (Fall IIa) oder $b = c = 0$ (Fall IIb) sein. Fall IIa ergibt genau wie Fall I keinen kritischen Punkt. In Fall IIb ergibt sich $2a + 1 = 0$ in der ersten Komponente.

Nur Fall IIb ergibt also einen kritischen Punkt, nämlich wenn man $a = -\frac{1}{2}$, $b = 0$ und $c = 0$ setzt. Also ist $\vec{v} = (-\frac{1}{2}, 0, 0)^T$ der einzige kritische Punkt von f .



DiffMehrDim/DiffbarPart/Ag_PartDiffbar_ZweiteAbl3D2DUnd4DohneDiffQuot.tex

Aufgabe 28.174 (Partielle Ableitungen)

Seien $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y, z)^T \mapsto f(x, y, z)$, $g: (\mathbb{R} \setminus \{0\})^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(s, t)^T \mapsto g(s, t)$ und $h: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)^T \mapsto h(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ Funktionen mit den unten angegebenen Zuordnungsvorschriften.

Bestimmen Sie sämtliche 2. partiellen Ableitungen dieser Funktionen:

a) $f(x, y, z) := x + yz + z \cdot \sin(xy)$

$$f_x(x, y, z) = 1 + yz \cdot \cos(xy), \quad f_y(x, y, z) = z + xz \cdot \cos(xy) \quad \text{und} \quad f_z(x, y, z) = y + \sin(xy)$$

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y^2 \cdot z \cdot \sin(xy) & z \cdot \cos(xy) - xyz \cdot \sin(xy) & y \cdot \cos(xy) \\ z \cdot \cos(xy) - xyz \cdot \sin(xy) & -x^2 \cdot z \cdot \sin(xy) & 1 + x \cdot \cos(xy) \\ y \cdot \cos(xy) & 1 + x \cdot \cos(xy) & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Für alle $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\begin{aligned} f_x(x, y, z) &= 1 + yz \cdot \cos(xy), & f_y(x, y, z) &= z + xz \cdot \cos(xy), & f_z(x, y, z) &= y + \sin(xy), \\ f_{xx}(x, y, z) &= y^2 \cdot z \cdot \sin(xy), & f_{yx}(x, y, z) &= \text{siehe unten}, & f_{zx}(x, y, z) &= y \cdot \cos(xy), \\ f_{xy}(x, y, z) &= \text{siehe unten}, & f_{yy}(x, y, z) &= -x^2 \cdot z \cdot \sin(xy), & f_{zy}(x, y, z) &= 1 + x \cdot \cos(xy), \\ f_{xz}(x, y, z) &= y \cdot \cos(xy), & f_{yz}(x, y, z) &= 1 + x \cdot \cos(xy), & f_{zz}(x, y, z) &= 0 \quad \text{und} \end{aligned}$$

$$f_{xy}(x, y, z) = f_{yx}(x, y, z) = z \cdot \cos(xy) - xyz \cdot \sin(xy).$$

b) $g(s, t) := \frac{s+t}{st}$

$$\begin{pmatrix} g_s(s, t) \\ g_t(s, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s^{-2} \\ -t^{-2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} g_{ss} & g_{ts} \\ g_{st} & g_{tt} \end{pmatrix}(s, t) = \begin{pmatrix} 2s^{-3} & 0 \\ 0 & 2t^{-3} \end{pmatrix}$$

Lösung:

Für alle $(s, t)^T \in \mathbb{R}^2$ mit $st \neq 0$ gilt $g(s, t) = \frac{s+t}{st} = \frac{s}{st} + \frac{t}{st} = \frac{1}{t} + \frac{1}{s} = t^{-1} + s^{-1}$ und damit folgt

$$\begin{aligned} g_s(s, t) &= -s^{-2}, & g_{ss}(s, t) &= 2s^{-3}, & g_{st}(s, t) &= 0, \\ g_t(s, t) &= -t^{-2}, & g_{ts}(s, t) &= 0 & \text{und} & g_{tt}(s, t) &= 2t^{-3}. \end{aligned}$$

c) $h(\alpha, \beta, \gamma, \delta) := \alpha\beta\gamma\delta$

$$\begin{pmatrix} h_\alpha(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \\ h_\beta(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \\ h_\gamma(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \\ h_\delta(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta\gamma\delta \\ \alpha\gamma\delta \\ \alpha\beta\delta \\ \alpha\beta\gamma \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} h_{\alpha\alpha} & h_{\beta\alpha} & h_{\gamma\alpha} & h_{\delta\alpha} \\ h_{\alpha\beta} & h_{\beta\beta} & h_{\gamma\beta} & h_{\delta\beta} \\ h_{\alpha\gamma} & h_{\beta\gamma} & h_{\gamma\gamma} & h_{\delta\gamma} \\ h_{\alpha\delta} & h_{\beta\delta} & h_{\gamma\delta} & h_{\delta\delta} \end{pmatrix} (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma\delta & \beta\delta & \beta\gamma \\ \gamma\delta & 0 & \alpha\delta & \alpha\gamma \\ \beta\delta & \alpha\delta & 0 & \alpha\beta \\ \beta\gamma & \alpha\gamma & \alpha\beta & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Für alle $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)^\top \in \mathbb{R}^4$ gilt

$$\begin{aligned} h_\alpha(\alpha, \beta, \gamma, \delta) &= \beta\gamma\delta, & h_\beta(\alpha, \beta, \gamma, \delta) &= \alpha\gamma\delta, & h_\gamma(\alpha, \beta, \gamma, \delta) &= \alpha\beta\delta, & h_\delta(\alpha, \beta, \gamma, \delta) &= \alpha\beta\gamma, \\ h_{\alpha\alpha}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) &= 0, & h_{\beta\alpha}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) &= \gamma\delta, & h_{\gamma\alpha}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) &= \beta\delta, & h_{\delta\alpha}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) &= \beta\gamma, \\ h_{\alpha\beta}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) &= \gamma\delta, & h_{\beta\beta}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) &= 0, & h_{\gamma\beta}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) &= \alpha\delta, & h_{\delta\beta}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) &= \alpha\gamma, \\ h_{\alpha\gamma}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) &= \beta\delta, & h_{\beta\gamma}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) &= \alpha\delta, & h_{\gamma\gamma}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) &= 0, & h_{\delta\gamma}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) &= \alpha\beta, \\ h_{\alpha\delta}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) &= \beta\gamma, & h_{\beta\delta}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) &= \alpha\gamma, & h_{\gamma\delta}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) &= \alpha\beta, & h_{\delta\delta}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) &= 0. \end{aligned}$$



DiffMehrDim/DiffbarRichtung/Ag_RichtAbl_Zwei2DNachDefinition.tex

Aufgabe 29.175 (Definition der Richtungsableitung)

spf

Prüfen Sie jeweils durch Untersuchung eines geeigneten Differenzenquotienten, ob die Funktion im angegebenen Punkt in der angegebenen Richtung differenzierbar ist und geben Sie gegebenenfalls den Wert der entsprechenden Ableitung an!

- a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto f(x, y) := (xy)^2$ in $(4, -1)^T$ in der Richtung $\left(\frac{35}{37}, \frac{12}{37}\right)^T$

 $-\frac{104}{37}$

Lösung: Für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $y \in \mathbb{R}$ ist $f(x, y) = (xy)^2 = x^2 \cdot y^2$. Für alle $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ folgt

$$\begin{aligned} & \frac{f\left(4 + h \cdot \frac{35}{37}, -1 + h \cdot \frac{12}{37}\right) - f(4, -1)}{h} \\ &= \frac{\left(4 + h \cdot \frac{35}{37}\right)^2 \cdot \left(-1 + h \cdot \frac{12}{37}\right)^2 - 4^2 \cdot (-1)^2}{h} \\ &= \frac{1}{h} \cdot \left(\left(16 + 8h \cdot \frac{35}{37} + h^2 \cdot \frac{35^2}{37^2}\right) \cdot \left(1 - 2h \cdot \frac{12}{37} + h^2 \cdot \frac{12^2}{37^2}\right) - 16 \cdot 1 \right) \\ &= \frac{1}{h} \cdot \left(16 + 8h \cdot \frac{35}{37} + h^2 \cdot \frac{35^2}{37^2} - 32h \cdot \frac{12}{37} - 16h^2 \cdot \frac{35 \cdot 12}{37^2} - 2h^3 \cdot \frac{35^2 \cdot 12}{37^3} \right. \\ &\quad \left. + 16h^2 \cdot \frac{12^2}{37^2} + 8h^3 \cdot \frac{35 \cdot 12^2}{37^3} + h^4 \cdot \frac{35^2 \cdot 12^2}{37^4} - 16 \right) \\ &= \frac{8 \cdot 35 - 32 \cdot 12}{37} + h \cdot \frac{35^2 - 16 \cdot 35 \cdot 12 + 16 \cdot 12^2}{37^2} - h^2 \cdot \frac{8 \cdot 35 \cdot 12^2 - 2 \cdot 35^2 \cdot 12}{37^3} + h^3 \cdot \frac{35^2 \cdot 12^2}{37^4}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Existenz der gesuchten Richtungsableitung für $\vec{v} := \left(\frac{35}{37}, \frac{12}{37}\right)^T$ mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(4, -1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{8 \cdot 35 - 32 \cdot 12}{37} + h \cdot \frac{35^2 - 16 \cdot 35 \cdot 12 + 16 \cdot 12^2}{37^2} - h^2 \cdot \frac{8 \cdot 35 \cdot 12^2 - 2 \cdot 35^2 \cdot 12}{37^3} + h^3 \cdot \frac{35^2 \cdot 12^2}{37^4} \right) \\ &= \frac{8 \cdot 35 - 32 \cdot 12}{37} = \frac{240 - 320 - 64}{37} = \frac{-80 - 24}{37} = -\frac{104}{37}. \end{aligned}$$

- b) $g: \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(s, t)^T \mapsto g(s, t) := \frac{\sqrt{|s|}}{t}$ in $(3, 2)^T$ in der Richtung $\left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)^T$

 $-\frac{31}{156} \cdot \sqrt{3}$

Lösung: Für alle $h \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{13}{6}; 0\}$ mit $h \geq -\frac{39}{5}$ folgt

$$\begin{aligned} & \frac{g\left(3 + h \cdot \frac{5}{13}, 2 + h \cdot \frac{12}{13}\right) - g(3, 2)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{\sqrt{\left|3 + h \cdot \frac{5}{13}\right|}}{2 + h \cdot \frac{12}{13}} - \frac{\sqrt{|3|}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{h} \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{3 + h \cdot \frac{5}{13}} - \sqrt{3} \cdot (2 + h \cdot \frac{12}{13})}{2 \cdot (2 + h \cdot \frac{12}{13})} = \frac{1}{h} \cdot \frac{\sqrt{3 + h \cdot \frac{5}{13}} - \sqrt{3}}{2 + h \cdot \frac{12}{13}} - \frac{1}{h} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot h \cdot \frac{12}{13}}{4 \cdot (1 + h \cdot \frac{6}{13})} \\ &= \frac{1}{h} \cdot \frac{\left(\sqrt{3 + h \cdot \frac{5}{13}} - \sqrt{3}\right) \cdot \left(\sqrt{3 + h \cdot \frac{5}{13}} + \sqrt{3}\right)}{2 \cdot (1 + h \cdot \frac{6}{13}) \cdot \left(\sqrt{3 + h \cdot \frac{5}{13}} + \sqrt{3}\right)} - \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{13 + 6h} \\ &= \frac{1}{h} \cdot \frac{3 + h \cdot \frac{5}{13} - 3}{2 \cdot (1 + h \cdot \frac{6}{13}) \cdot \left(\sqrt{3 + h \cdot \frac{5}{13}} + \sqrt{3}\right)} - \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{13 + 6h} \\ &= \frac{5}{2 \cdot (13 + 6h) \cdot \left(\sqrt{3 + h \cdot \frac{5}{13}} + \sqrt{3}\right)} - \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{13 + 6h}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Existenz der gesuchten Richtungsableitung mit

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial(\frac{5}{13}, \frac{12}{13})^T}(3, 2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{5}{2 \cdot (13 + 6h) \cdot \left(\sqrt{3 + h \cdot \frac{5}{13}} + \sqrt{3} \right)} - \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{13 + 6h} \right) \\ &= \frac{5}{2 \cdot 13 \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{3})} - \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{13} = \frac{5 \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot \sqrt{3} \cdot 12}{2 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{(5 - 36) \cdot \sqrt{3}}{26 \cdot 6} = -\frac{31}{156} \cdot \sqrt{3}.\end{aligned}$$



DiffMehrDim/DiffbarRichtung/Ag_Richtungsableitung_Standard.tex

Aufgabe 29.176 (Richtungsableitung)

Berechnen Sie jeweils die Ableitung der Funktion im angegebenen Punkt in Richtung des Vektors $\vec{v}$.

a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto f(x, y) := 5xy^2 - 4yx^3$, $(a, b)^T := (1, 2)^T$ und $\vec{v} := (\frac{5}{13}, \frac{12}{13})^T$

$\frac{172}{13}$

Lösung mit Hilfe der Definition: Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1, 2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + h \cdot \frac{5}{13}, 2 + h \cdot \frac{12}{13}) - f(1, 2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5 \cdot (1 + h \cdot \frac{5}{13}) \cdot (2 + h \cdot \frac{12}{13})^2 - 4 \cdot (2 + h \cdot \frac{12}{13}) \cdot (1 + h \cdot \frac{5}{13})^3 - 5 \cdot 1 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 \cdot 1^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(5 + h \cdot \frac{25}{13}) \cdot (4 + h \cdot \frac{48}{13} + h^2 \cdot \frac{12^2}{13^2}) - (1 + h \cdot \frac{15}{13} + h^2 \cdot \frac{75}{13^2} + h^3 \cdot \frac{125}{13^3}) \cdot (8 + h \cdot \frac{48}{13}) - 12}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(-\frac{12}{h} + \frac{20}{h} + \frac{100}{13} + \frac{240}{13} + h \cdot \frac{25 \cdot 48}{13^2} + h \cdot \frac{12^2 \cdot 5}{13^2} + h^2 \cdot \frac{12^2 \cdot 25}{13^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{8}{h} - \frac{48}{13} - \frac{120}{13} - h \cdot \frac{15 \cdot 48}{13^2} - h \cdot \frac{600}{13^2} - h^2 \cdot \frac{75 \cdot 48}{13^3} - h^2 \cdot \frac{1000}{13^3} - h^3 \cdot \frac{125 \cdot 48}{13^4} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{340}{13} - \frac{168}{13} + h \cdot \frac{1200 + 720 - 720 - 600}{13^2} + h^2 \cdot \frac{3600 - 3600 - 1000}{13^3} + h^3 \cdot \frac{6000}{13^4} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{172}{13} + h \cdot \frac{600}{13^2} - h^2 \cdot \frac{1000}{13^3} + h^3 \cdot \frac{6000}{13^4} \right) \\ &= \frac{172}{13}.\end{aligned}$$

Lösung mit Hilfe des Gradienten:

Als Erstes kontrolliere die Länge des Vektors $\vec{v}$:

$$\|\vec{v}\|^2 = \left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{25}{169} + \frac{144}{169} = \frac{169}{169} = 1. \quad \checkmark$$

Berechne die Richtungsableitung mit Hilfe des Gradienten:

$$f(x, y) = 5xy^2 - 4yx^3 \quad \implies \quad f_x(x, y) = 5y^2 - 12yx \quad \text{und} \quad f_y(x, y) = 10xy - 4x^3.$$

Damit ist (Achtung: im Studiengang Bauingenieurwesen ist der Gradient ein Zeilenvektor!)

$$(\text{grad } f)(1, 2) = (5 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 \cdot 1^2, 10 \cdot 1 \cdot 2 - 4 \cdot 1^3)^T = (-4, 16)^T.$$

Für die gesuchte Richtungsableitung folgt

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1, 2) = \langle (\text{grad } f)(1, 2), \vec{v} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{5}{13} \\ \frac{12}{13} \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{-4 \cdot 5}{13} + \frac{16 \cdot 12}{13} = \frac{-20 + 120 + 72}{13} = \frac{172}{13}.$$

Lösung mit Hilfe einer Hilfsfunktion:

Definiere die Hilfsfunktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} h \mapsto g(h) &:= f\left(1 + h \cdot \frac{5}{13}, 2 + h \cdot \frac{12}{13}\right) \\ &= 5 \cdot \left(1 + h \cdot \frac{5}{13}\right) \cdot \left(2 + h \cdot \frac{12}{13}\right)^2 - 4 \cdot \left(2 + h \cdot \frac{12}{13}\right) \cdot \left(1 + h \cdot \frac{5}{13}\right)^3. \end{aligned}$$

Die Ableitung von g ergibt sich nach der Produktregel zu

$$\begin{aligned} g'(h) &= 5 \cdot \frac{5}{13} \cdot \left(2 + h \cdot \frac{12}{13}\right)^2 + 5 \cdot \left(1 + h \cdot \frac{5}{13}\right) \cdot 2 \cdot \left(2 + h \cdot \frac{12}{13}\right) \cdot \frac{12}{13} \\ &\quad - 4 \cdot \frac{12}{13} \cdot \left(1 + h \cdot \frac{5}{13}\right)^3 - 4 \cdot \left(2 + h \cdot \frac{12}{13}\right) \cdot 3 \cdot \left(1 + h \cdot \frac{5}{13}\right)^2 \cdot \frac{5}{13}. \end{aligned}$$

Für die gesuchte Richtungsableitung folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1, 2) &= g'(0) = 5 \cdot \frac{5}{13} \cdot 2^2 + 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{12}{13} - 4 \cdot \frac{12}{13} \cdot 1^3 - 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1^2 \cdot \frac{5}{13} \\ &= \frac{25 \cdot 4 + 10 \cdot 24 - 48 - 8 \cdot 15}{13} = \frac{100 + 240 - 48 - 120}{13} = \frac{172}{13}. \end{aligned}$$

b) $g: (0; \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(s, t)^T \mapsto g(s, t) := t \cdot \ln(s)$, $(a, b)^T := (1, -3)^T$ und $\vec{v} := \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)^T$

$\frac{12}{5}$

Lösung mit Hilfe des Gradienten:

Als Erstes kontrolliere die Länge des Vektors $\vec{v}$:

$$\|\vec{v}\|^2 = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = \frac{25}{25} = 1. \quad \checkmark$$

Berechne die Richtungsableitung mit Hilfe des Gradienten:

$$g(s, t) = t \cdot \ln(s) \quad \implies \quad g_s(s, t) = \frac{t}{s} \quad \text{und} \quad g_t(s, t) = \ln(s).$$

Damit ist (Achtung: im Studiengang Bauingenieurwesen ist der Gradient ein Zeilenvektor!)

$$(\text{grad } g)(1, -3) = \left(\frac{-3}{1}, \ln(1)\right)^T = (-3, 0)^T.$$

Für die gesuchte Richtungsableitung folgt

$$\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(1, -3) = \langle (\text{grad } g)(1, -3), \vec{v} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{(-3) \cdot (-4)}{5} + \frac{0 \cdot 3}{5} = \frac{12}{5}.$$

Lösung mit Hilfe einer Hilfsfunktion:

Definiere die Hilfsfunktion $f: (-\infty; \frac{5}{4}) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$h \mapsto f(h) := g\left(1 - h \cdot \frac{4}{5}, -3 + h \cdot \frac{3}{5}\right) = \left(-3 + h \cdot \frac{3}{5}\right) \cdot \ln\left(1 - h \cdot \frac{4}{5}\right).$$

Die Ableitung von f ergibt sich nach der Produktregel zu

$$f'(h) = \frac{3}{5} \cdot \ln\left(1 - h \cdot \frac{4}{5}\right) + \left(-3 + h \cdot \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{1}{1 - h \cdot \frac{4}{5}} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right).$$

Für die gesuchte Richtungsableitung folgt

$$\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(1, -3) = f'(0) = \frac{3}{5} \cdot \ln(1) + (-3) \cdot \frac{1}{1} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{3 \cdot 0 + (-3) \cdot (-4)}{5} = \frac{12}{5}.$$

c) $u: \mathbb{R} \times [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto u(x, y) := 1 + 2 \cdot x \cdot \sqrt{y}$, $(a, b)^T := (3, 4)^T$ und $\vec{v} := (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})^T$

$\frac{23}{10}$

Lösung mit Hilfe der Definition: Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \vec{v}}(3, 4) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(3 + h \cdot \frac{4}{5}, 4 - h \cdot \frac{3}{5}) - u(3, 4)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2 \cdot (3 + h \cdot \frac{4}{5}) \cdot \sqrt{4 - h \cdot \frac{3}{5}} - 1 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{4}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(6 + h \cdot \frac{8}{5}) \cdot \sqrt{4 - h \cdot \frac{3}{5}} - 12}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{8}{5} \cdot \sqrt{4 - h \cdot \frac{3}{5}} + \frac{6}{h} \cdot \left(\sqrt{4 - h \cdot \frac{3}{5}} - 2 \right) \right) = \frac{8}{5} \cdot \sqrt{4} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6}{h} \cdot \frac{\sqrt{4 - h \cdot \frac{3}{5}}^2 - 2^2}{\sqrt{4 - h \cdot \frac{3}{5}} + 2} \\ &= \frac{16}{5} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6 \cdot (-\frac{3}{5})}{\sqrt{4 - h \cdot \frac{3}{5}} + 2} = \frac{16}{5} + \frac{-\frac{18}{5}}{\sqrt{4} + 2} = \frac{16}{5} - \frac{9}{10} = \frac{32 - 9}{10} = \frac{23}{10}. \end{aligned}$$

Lösung mit Hilfe des Gradienten:

Als Erstes kontrolliere die Länge des Vektors $\vec{v}$:

$$\|\vec{v}\|^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = \frac{25}{25} = 1. \quad \checkmark$$

Berechne die Richtungsableitung mit Hilfe des Gradienten:

$$u(x, y) = 1 + 2 \cdot x \cdot \sqrt{y} \quad \implies \quad u_x(x, y) = 2 \cdot \sqrt{y} \quad \text{und} \quad u_y(x, y) = 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{y}} = \frac{x}{\sqrt{y}}.$$

Damit ist (Achtung: im Studiengang Bauingenieurwesen ist der Gradient ein Zeilenvektor!)

$$(\text{grad } u)(3, 4) = \left(2 \cdot \sqrt{4}, \frac{3}{\sqrt{4}}\right)^T = \left(4, \frac{3}{2}\right)^T.$$

Für die gesuchte Richtungsableitung folgt

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{v}}(3, 4) = \langle (\text{grad } u)(3, 4), \vec{v} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{4 \cdot 4}{5} + \frac{3 \cdot (-3)}{2 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 16 - 9}{10} = \frac{32 - 9}{10} = \frac{23}{10}.$$

Lösung mit Hilfe einer Hilfsfunktion:

Definiere die Hilfsfunktion $w: (-\infty; \frac{20}{3}] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$h \mapsto w(h) := u\left(3 + h \cdot \frac{4}{5}, 4 - h \cdot \frac{3}{5}\right) = 1 + 2 \cdot \left(3 + h \cdot \frac{4}{5}\right) \cdot \sqrt{4 - h \cdot \frac{3}{5}}.$$

Die Ableitung von w ergibt sich nach der Produktregel zu

$$w'(h) = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \sqrt{4 - h \cdot \frac{3}{5}} + 2 \cdot \left(3 + h \cdot \frac{4}{5}\right) \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{4 - h \cdot \frac{3}{5}}} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right).$$

Für die gesuchte Richtungsableitung folgt

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{v}}(3, 4) = w'(0) = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \sqrt{4} + 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{4}} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{8 \cdot 2}{5} + \frac{6 \cdot (-3)}{10 \cdot 2} = \frac{32 - 9}{10} = \frac{23}{10}.$$

d) $y: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(s, t)^T \mapsto y(s, t) := \ln(s^2 + t^2)$, $(a, b)^T := (2, 1)^T$ und $\vec{v} := \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^T$

0

Lösung mit Hilfe des Gradienten:

Als Erstes kontrolliere die Länge des Vektors $\vec{v}$:

$$\|\vec{v}\|^2 = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{5}{25} + \frac{4 \cdot 5}{25} = \frac{25}{25} = 1. \quad \checkmark$$

Berechne die Richtungsableitung mit Hilfe des Gradienten:

$$y(s, t) = \ln(s^2 + t^2) \implies y_s(s, t) = \frac{1}{s^2 + t^2} \cdot 2s = \frac{2s}{s^2 + t^2} \quad \text{und} \quad y_t(s, t) = \frac{1}{s^2 + t^2} \cdot 2t = \frac{2t}{s^2 + t^2}.$$

Damit ist (Achtung: im Studiengang Bauingenieurswesen ist der Gradient ein Zeilenvektor!)

$$(\text{grad } y)(2, 1) = \left(\frac{2 \cdot 2}{2^2 + 1^2}, \frac{2 \cdot 1}{2^2 + 1^2}\right)^T = \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)^T.$$

Für die gesuchte Richtungsableitung folgt

$$\frac{\partial y}{\partial \vec{v}}(2, 1) = \langle (\text{grad } y)(2, 1), \vec{v} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{-4 \cdot \sqrt{5} + 4 \cdot \sqrt{5}}{5} = 0.$$

Lösung mit Hilfe einer Hilfsfunktion:

Definiere die Hilfsfunktion $z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} h \mapsto z(h) &:= y\left(2 - h \cdot \frac{\sqrt{5}}{5}, 1 + h \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \ln\left(\left(2 - h \cdot \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \left(1 + h \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2\right) \\ &= \ln\left(4 - 2 \cdot 2 \cdot h \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} + h^2 \cdot \frac{5}{25} + 1 + 2 \cdot h \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} + h^2 \cdot \frac{4 \cdot 5}{25}\right) = \ln(5 + h^2). \end{aligned}$$

Die Ableitung von z ergibt sich nach der Kettenregel zu

$$z'(h) = \frac{1}{5 + h^2} \cdot 2h = \frac{2h}{5 + h^2}.$$

Für die gesuchte Richtungsableitung folgt

$$\frac{\partial y}{\partial \vec{v}}(2, 1) = z'(0) = \frac{2 \cdot 0}{5 + 0^2} = \frac{0}{5} = 0.$$



DiffMehrDim/DiffbarRichtung/Ag_Richtungsableitungen_Definition.tex

Aufgabe 29.177 (Richtungsableitungen)

Für die Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto f(x, y)$, $(x, y, z)^T \mapsto g(x, y, z)$,

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, & \text{für } (x, y)^T \neq (0, 0)^T \\ 0, & \text{für } (x, y)^T = (0, 0)^T \end{cases} \quad \text{und} \quad g(x, y, z) := \begin{cases} x^{\frac{y}{z}}, & \text{für } z \neq 0 \text{ und } x \geq 0 \\ 0, & \text{für } z = 0 \text{ oder } x < 0 \end{cases}$$

sowie die Vektoren $\vec{a} = (0, 0)^T$, $\vec{b} = (1, 2)^T$, $\vec{c} = (0, 0, 0)^T$, $\vec{d} = (1, 2, 1)^T$,

$$\vec{u} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)^T, \quad \vec{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^T \quad \text{und} \quad \vec{w} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)^T$$

berechnen Sie die angegebenen Richtungsableitungen, falls diese existieren:

a) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\vec{a}^T)$

$\frac{48}{125}$

Lösung: Da keine Aussage über die Differenzierbarkeit der Funktion im Nullpunkt vorliegt, muss die Richtungsableitung nach der Definition berechnet werden:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + hu_1, 0 + hu_2) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(0 + h \cdot \frac{3}{5}, 0 + h \cdot \frac{4}{5}\right) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{3h}{5}, \frac{4h}{5}\right) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} \cdot \frac{\frac{3h}{5} \cdot \left(\frac{4h}{5}\right)^2}{\left(\frac{3h}{5}\right)^2 + \left(\frac{4h}{5}\right)^2} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} \cdot \frac{\frac{3h \cdot 16h^2}{5 \cdot 25}}{\frac{9h^2 + 16h^2}{25}} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} \cdot \frac{48h^3}{125} \cdot \frac{1}{1 \cdot h^2} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{48}{125} = \frac{48}{125}.\end{aligned}$$

b) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\vec{b}^T)$

$\frac{52}{125}$

Lösung mit Hilfe der Definition: Die Richtungsableitung ergibt sich zu

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + hu_1, 2 + hu_2) - f(1,2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + h \cdot \frac{3}{5}, 2 + h \cdot \frac{4}{5}\right) - \frac{1 \cdot 2^2}{1^2 + 2^2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{5+3h}{5}, \frac{10+4h}{5}\right) - \frac{1 \cdot 4}{1+4}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} \cdot \frac{\frac{5+3h}{5} \cdot \left(\frac{10+4h}{5}\right)^2}{\left(\frac{5+3h}{5}\right)^2 + \left(\frac{10+4h}{5}\right)^2} - \frac{4}{5h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{5h} \cdot \frac{(5+3h) \cdot \frac{100+80h+16h^2}{25}}{\frac{25+30h+9h^2+100+80h+16h^2}{25}} - \frac{4}{5h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{5h} \cdot \frac{500 + 400h + 80h^2 + 300h + 240h^2 + 48h^3}{125 + 110h + 25h^2} - \frac{4}{5h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{500 + 700h + 320h^2 + 48h^3 - 500 - 440h - 100h^2}{5h \cdot (125 + 110h + 25h^2)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{260h + 220h^2 + 48h^3}{h \cdot (625 + 550h + 125h^2)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{260 + 220h + 48h^2}{625 + 550h + 125h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{260}{625} = \frac{52}{125}.\end{aligned}$$

Lösung mit Hilfe des Gradienten: Abseits des Nullpunktes ist die Funktion f total differenzierbar. Also kann die Richtungsableitung mittels des Gradienten berechnet werden.

Die Quotientenregel liefert

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{xy^2}{x^2 + y^2} \right) = \frac{y^2 \cdot (x^2 + y^2) - xy^2 \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2y^2 + y^4 - 2x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2y^2 + y^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

und

$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{xy^2}{x^2 + y^2} \right) = \frac{2xy \cdot (x^2 + y^2) - xy^2 \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^3y + 2xy^3 - 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^3y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Die Richtungsableitung ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,2) &= \langle (\text{grad } f)(1,2), \vec{u} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} f_x(1,2) \\ f_y(1,2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{-1^2 \cdot 2^2 + 2^4}{(1^2 + 2^2)^2} \\ \frac{2 \cdot 1^3 \cdot 2}{(1^2 + 2^2)^2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} \frac{-1 \cdot 4 + 16}{(1+4)^2} \\ \frac{2 \cdot 1 \cdot 2}{(1+4)^2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{12}{5^2} \\ \frac{4}{5^2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{36}{5^3} + \frac{16}{5^3} = \frac{52}{125}\end{aligned}$$

c) $\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(\vec{c}^T)$

ex. nicht

Lösung:

Für den Differenzenquotienten gilt mit $h \in \mathbb{R}$ und $h > 0$ wegen $\frac{h \cdot \sqrt{3}}{3} \neq 0$ und $\frac{h \cdot \sqrt{3}}{3} \geq 0$

$$\begin{aligned} & \frac{g\left(0 + h \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}, 0 + h \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}, 0 + h \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\right) - g(0, 0, 0)}{h} = \frac{g\left(\frac{h \cdot \sqrt{3}}{3}, \frac{h \cdot \sqrt{3}}{3}, \frac{h \cdot \sqrt{3}}{3}\right) - g(0, 0, 0)}{h} \\ &= \frac{\left(\frac{h \cdot \sqrt{3}}{3}\right)^{\frac{h \cdot \sqrt{3}}{3}} - 0}{h} = \frac{\left(\frac{h \cdot \sqrt{3}}{3}\right)^1}{h} = \frac{h \cdot \sqrt{3}}{3h} = \frac{\sqrt{3}}{3} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

Andererseits gilt für $h \in \mathbb{R}$ mit $h < 0$ wegen $\frac{h \cdot \sqrt{3}}{3} < 0$

$$\begin{aligned} & \frac{g\left(0 + h \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}, 0 + h \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}, 0 + h \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\right) - g(0, 0, 0)}{h} = \frac{g\left(\frac{h \cdot \sqrt{3}}{3}, \frac{h \cdot \sqrt{3}}{3}, \frac{h \cdot \sqrt{3}}{3}\right) - g(0, 0, 0)}{h} \\ &= \frac{0 - 0}{h} = \frac{0}{h} = 0 \xrightarrow{h \rightarrow 0^-} 0. \end{aligned}$$

Wegen $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(0+hv_1, 0+hv_2, 0+hv_3) - g(0,0,0)}{h} = \frac{\sqrt{3}}{3} \neq 0 = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(0+hv_1, 0+hv_2, 0+hv_3) - g(0,0,0)}{h}$ existiert die Richtungsableitung $\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(0, 0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0+hv_1, 0+hv_2, 0+hv_3) - g(0,0,0)}{h}$ nicht.

d) $\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(\vec{d}^T)$

$$\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}$$

Lösung: Hier kann die Richtungsableitung mit Hilfe des Gradienten berechnet werden. Die partiellen Ableitungen sind

$$\begin{aligned} g_x(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(x^{\frac{y}{z}} \right) = \frac{y}{z} \cdot x^{\frac{y}{z}-1}, \\ g_y(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(x^{\frac{y}{z}} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(e^{\ln(x)} \right)^{\frac{y}{z}} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(e^{\ln(x) \cdot \frac{y}{z}} \right) = \frac{\ln(x)}{z} \cdot e^{\ln(x) \cdot \frac{y}{z}} = \frac{\ln(x)}{z} \cdot x^{\frac{y}{z}} \\ \text{und } g_z(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(x^{\frac{y}{z}} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(e^{\ln(x) \cdot \frac{y}{z}} \right) = \ln(x) \cdot \frac{-y}{z^2} \cdot e^{\ln(x) \cdot \frac{y}{z}} = -\frac{\ln(x) \cdot y}{z^2} \cdot x^{\frac{y}{z}} \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} g_x(1, 2, 1) &= \frac{2}{1} \cdot 1^{\frac{2}{1}-1} = 2 \cdot 1^{2-1} = 2 \cdot 1 = 2, \\ g_y(1, 2, 1) &= \frac{\ln(1)}{1} \cdot 1^{\frac{2}{1}} = \frac{0}{1} \cdot 1^2 = 0 \\ \text{und } g_z(1, 2, 1) &= -\frac{\ln(1) \cdot 2}{1^2} \cdot 1^{\frac{2}{1}} = -\frac{0 \cdot 2}{1} \cdot 1^2 = 0. \end{aligned}$$

Die Richtungsableitung berechnet sich damit zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(1, 2, 1) &= \langle (\text{grad } g)(1, 2, 1), \vec{v} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} g_x(1, 2, 1) \\ g_y(1, 2, 1) \\ g_z(1, 2, 1) \end{pmatrix}, \vec{v} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} + 0 + 0 = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

e) $\frac{\partial g}{\partial \vec{w}}(\vec{c}^T)$

0

Lösung: Berechne die Richtungsableitung nach der Definition:

$$\frac{g\left(0+h \cdot \frac{3}{5}, 0+h \cdot \frac{4}{5}, 0+h \cdot 0\right)-g(0,0,0)}{h}=\frac{g\left(\frac{3 h}{5}, \frac{4 h}{5}, 0\right)-g(0,0,0)}{h}=\frac{0-0}{h}=\frac{0}{h}=0 \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0.$$

f) $\frac{\partial g}{\partial \vec{w}}\left(\vec{d}^T\right)$

$\frac{6}{5}$

Lösung: Hier kann die Richtungsableitung mit Hilfe des Gradienten berechnet werden.

Die Richtungsableitung berechnet sich mit den Ergebnissen aus Aufgabenteil d) zu

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial \vec{w}}(1,2,1) &= \langle (\text{grad } g)(1,2,1), \vec{w} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} g_x(1,2,1) \\ g_y(1,2,1) \\ g_z(1,2,1) \end{pmatrix}, \vec{w} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= 2 \cdot \frac{3}{5} + 0 \cdot \frac{4}{5} + 0 \cdot 0 = \frac{6}{5} + 0 + 0 = \frac{6}{5}.\end{aligned}$$

Aufgabenblatt 30

DiffMehrDim/DiffbarTotal



DiffMehrDim/DiffbarTotal/Ag_DiffbarPartiellTotal.tex

Aufgabe 30.178 (Partielle und totale Differenzierbarkeit)

kr

Untersuchen Sie die Funktion $f(x, y) = xy^2 + |x|$ auf partielle und totale Differenzierbarkeit. partiell und total diffbar auf $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$

Lösung: Die Funktion kann auch geschrieben werden als $f(x) = \begin{cases} xy^2 + x, & x \geq 0 \\ xy^2 - x, & x < 0 \end{cases}$.

Partielle Diffbarkeit: Für $x > 0$ ist $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 + 1 \\ 2xy \end{pmatrix}$, für $x < 0$ ist $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 - 1 \\ 2xy \end{pmatrix}$. Die Funktion f ist damit partiell diffbar für alle (x, y) mit $x \neq 0$ und, weil die Komponenten von f' dort stetig sind auch total diffbar nach dem C^1 -Kriterium. Die „Schnittstellenpunkte“ mit $x = 0$ muss man gesondert mit dem Differenzenquotienten analysieren. Für die partielle Ableitung nach x bei $x = 0$ gilt:

rechtsseitiger Limes: $\frac{\partial f}{\partial x}(0+, y) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(0+h, y) - f(0, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{hy^2 + h - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} y^2 + 1 = y^2 + 1$;
linksseitiger Limes: $\frac{\partial f}{\partial x}(0-, y) = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(0+h, y) - f(0, y)}{h} = \dots = y^2 - 1 \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0+, y)$. Damit existiert der Gesamtlimes nicht, f ist also für $x = 0$ nicht partiell diffbar und damit automatisch auch nicht total diffbar.

(Anmerkung: Aus Konsistenzgründen erfüllen die rechts- bzw. linksseitigen Gradienten $f'(0 \pm, y) = (\frac{\partial f}{\partial x}(0 \pm, y), \frac{\partial f}{\partial y}(0 \pm, y))$ dann natürlich auch nicht die Limesbedingung

$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, y_0)} \frac{f(x, y) - f(0, y_0) - \langle f'(0 \pm, y_0), (x, y) - (0, y_0) \rangle}{\|(x, y) - (0, y_0)\|_2} \neq 0$. Das kann man durch Einsetzen der Folgen $x_k = |c|/k$, $y_k = y_0$ explizit nachprüfen; als Folgenlimes für $k \rightarrow \infty$ ergibt sich $\frac{|c| \mp c}{|c|}$ was z.B. für $c = \mp 1$ ungleich null ist.)



DiffMehrDim/DiffbarTotal/Ag_DiffbarTotal_CeinsMitAbleitenNachDemHauptsatz.tex

Aufgabe 30.179 (Ableiten mit dem Hauptsatz)

spf

Seien $D := (0; \infty)$ und $f : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x, y) := \int_{2x+1}^3 \frac{e^{yt}}{t} dt$.

a) Berechnen Sie auf $D \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ die Hesse-Matrix H_f von f !

$$\begin{pmatrix} -4 \cdot \frac{2xy+y-1}{(2x+1)^2} \cdot e^{2xy+y} & -2e^{2xy+y} \\ -2e^{2xy+y} & \frac{1}{y^2} \cdot ((3y-1) \cdot e^{3y} - (2xy+y-1) \cdot e^{2xy+y}) \end{pmatrix}$$

Lösung:

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ergibt sich mit Hilfe der Kettenregel für alle $x \in D$ und alle $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \partial_x f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{2x+1}^3 \frac{e^{yt}}{t} dt = \frac{\partial}{\partial x} \left(- \int_3^{2x+1} \frac{e^{yt}}{t} dt \right) \\ &= - \left[\frac{e^{yt}}{t} \right]_{t=2x+1} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} (2x+1) \right) = \frac{-2 \cdot e^{(2x+1) \cdot y}}{2x+1}. \end{aligned}$$

Vertauschen von Differentiation und Integration liefert für alle $x \in D$ und alle $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} \partial_y f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{2x+1}^3 \frac{e^{yt}}{t} dt = \int_{2x+1}^3 \frac{\partial}{\partial y} \frac{e^{yt}}{t} dt \\ &= \int_{2x+1}^3 e^{yt} dt = \left[\frac{e^{yt}}{y} \right]_{t=2x+1}^{t=3} = \frac{e^{3y} - e^{(2x+1) \cdot y}}{y}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für alle $x \in D$ und alle $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned}\partial_{xx}f(x, y) &= \partial_x \frac{-2 \cdot e^{(2x+1) \cdot y}}{2x+1} = \frac{-2 \cdot 2y \cdot e^{(2x+1) \cdot y} \cdot (2x+1) - (-2 \cdot e^{(2x+1) \cdot y}) \cdot 2}{(2x+1)^2} \\ &= -4 \cdot \frac{(2xy + y - 1)}{(2x+1)^2} \cdot e^{2xy+y}, \\ \partial_{xy}f(x, y) &= \partial_y \frac{-2 \cdot e^{(2x+1) \cdot y}}{2x+1} = \frac{-2 \cdot (2x+1) \cdot e^{(2x+1) \cdot y}}{2x+1} = -2e^{2xy+y}, \\ \partial_{yx}f(x, y) &= \partial_x \frac{e^{3y} - e^{(2x+1) \cdot y}}{y} = \frac{0 - 2y \cdot e^{(2x+1) \cdot y}}{y} = -2e^{2xy+y} \\ \text{und } \partial_{yy}f(x, y) &= \partial_y \frac{e^{3y} - e^{(2x+1) \cdot y}}{y} = \frac{(3e^{3y} - (2x+1) \cdot e^{(2x+1) \cdot y}) \cdot y - (e^{3y} - e^{(2x+1) \cdot y}) \cdot 1}{y^2} \\ &= \frac{(3y-1) \cdot e^{3y} - (2xy+y-1) \cdot e^{2xy+y}}{y^2}.\end{aligned}$$

b) Berechnen Sie $\partial_y f(x, 0)$ für alle $x \in D$ und untersuchen Sie f auf totale Differenzierbarkeit!

$$\partial_y f(x, 0) = 2 - 2x, \text{ total differenzierbar auf } D \times \mathbb{R}$$

Lösung:

Für $x \in D$ und $y \in \mathbb{R}$ wurde $\partial_x f(x, y) = \frac{-2 \cdot e^{(2x+1) \cdot y}}{2x+1}$ bereits in Aufgabenteil a) berechnet.

Damit ist f auf $D \times \mathbb{R}$ stetig partiell nach x differenzierbar.

Außerdem ergibt sich mit der Regel von de l'Hospital

$$\begin{aligned}\partial_y f(x, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, h) - f(x, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \left(\int_{2x+1}^3 \frac{e^{th}}{t} dt - \int_{2x+1}^3 \frac{e^{t \cdot 0}}{t} dt \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{2x+1}^3 \frac{e^{th} - 1}{th} dt = \int_{2x+1}^3 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{th} - 1}{th} dt \stackrel{0/0}{=} \int_{2x+1}^3 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{t \cdot e^{th}}{t} dt \\ &= \int_{2x+1}^3 \lim_{h \rightarrow 0} e^{th} dt = \int_{2x+1}^3 1 dt = [t]_{t=2x+1}^{t=3} = 3 - (2x+1) = 2 - 2x.\end{aligned}$$

$$\text{Also ist } \partial_y f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{3y} - e^{(2x+1) \cdot y}}{y}, & \text{für } y \neq 0 \\ 2 - 2x, & \text{für } y = 0 \end{cases}.$$

Weil sich mit der Potenzreihe von $\exp$

$$\begin{aligned}\lim_{(t,y)^T \rightarrow (x,0)^T} \partial_y f(t, y) &= \lim_{(t,y)^T \rightarrow (x,0)^T} \frac{e^{3y} - e^{(2t+1) \cdot y}}{y} \\ &= \lim_{(t,y)^T \rightarrow (x,0)^T} \frac{1}{y} \cdot \left(\left(1 + 3y + y^2 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n \cdot y^{n-2}}{n!} \right) - \left(1 + (2t+1) \cdot y + y^2 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2t+1)^n \cdot y^{n-2}}{n!} \right) \right) \\ &= \lim_{(t,y)^T \rightarrow (x,0)^T} \left(2 - 2t + y \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(3^n - (2t+1)^n) \cdot y^{n-2}}{n!} \right) = 2 - 2x\end{aligned}$$

ergibt, ist f auch stetig nach y differenzierbar, also stetig partiell differenzierbar und damit auch total differenzierbar.

Tipps: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass man Grenzwerte, in denen y „läuft“, und Ableitungen nach y mit der Integration vertauschen, also am Integralzeichen vorbeiziehen darf.

Hilft Ihnen die Potenzreihe von $\exp$ bei der Berechnung von $\lim_{(t,y)^T \rightarrow (x,0)^T} \partial_y f(t, y)$?



DiffMehrDim/DiffbarTotal/Ag_DiffbarTotal_LimesBedMitNullEinUndZweifachemSandwich.tex

- a) Bestimmen Sie den Gradienten von $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(v, w)^T \mapsto f(v, w) := v + w$ und zeigen Sie mit der Limesbedingung, dass er die Ableitung von f in $(1, 2)^T$ liefert!

$$(\text{grad } f)(1, 2) = (1, 1)^T$$

Lösung:

Die partiellen Ableitungen von f sind $f_v(v, w) = 1$ sowie $f_w(v, w) = 1$ für alle $(v, w)^T \in \mathbb{R}^2$.

Also ist $(\text{grad } f)(v, w) = (1, 1)^T$ für alle $(v, w)^T \in \mathbb{R}^2$ der Gradient (eine auf $\mathbb{R}^2$ konstante Funktion). Im Punkt $\vec{a} := (1, 2)^T$ nimmt er den Wert $\vec{k} := (\text{grad } f)(\vec{a}) = (1, 1)^T$ an.

In die Limesdefinition der totalen Ableitung

$$\frac{df}{d\vec{r}}(\vec{a}) = \vec{k} \text{ total} \quad : \Longleftrightarrow \quad \lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{a}} \frac{f(\vec{r}) - f(\vec{a}) - \langle \vec{k}, \vec{r} - \vec{a} \rangle}{\|\vec{r} - \vec{a}\|_2} = 0$$

setzen wir alle Terme ein und erhalten den Grenzwert

$$\begin{aligned} & \lim_{(v, w)^T \rightarrow (1, 2)^T} \frac{(v + w) - (1 + 2) - \langle (1, 1)^T, (v, w)^T - (1, 2)^T \rangle}{\|(v, w)^T - (1, 2)^T\|} \\ &= \lim_{(v, w)^T \rightarrow (1, 2)^T} \frac{v + w - 3 - ((v - 1) + (w - 2))}{\sqrt{(v - 1)^2 + (w - 2)^2}} = \lim_{(v, w)^T \rightarrow (1, 2)^T} \frac{0}{\sqrt{(v - 1)^2 + (w - 2)^2}} = 0. \end{aligned}$$

Also ist f im Punkt $(1, 2)^T$ total differenzierbar, und der Gradient $(\text{grad } f)(1, 2) = (1, 1)^T$ ist in diesem Punkt die totale Ableitung von f in $\vec{a}$.

- b) Bestimmen Sie den Gradienten von $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(s, t)^T \mapsto g(s, t) := st^2$ und zeigen Sie mit der Limesbedingung, dass er die Ableitung von g in $(4, -3)^T$ liefert!

$$(\text{grad } g)(4, -3) = (9, -24)^T$$

Lösung:

Die partiellen Ableitungen von g sind $g_s(s, t) = t^2$ sowie $g_t(s, t) = 2st$ für alle $(s, t)^T \in \mathbb{R}^2$.

Also ist $(\text{grad } g)(s, t) = (t^2, 2st)^T$ für alle $(s, t)^T \in \mathbb{R}^2$ der Gradient. Im Punkt $\vec{a} := (4, -3)^T$ nimmt er den Wert $\vec{k} := (\text{grad } g)(\vec{a}) = ((-3)^2, 2 \cdot 4 \cdot (-3))^T = (9, -24)^T$ an.

In den Bruch aus der Limesdefinition der totalen Ableitung

$$\frac{dg}{d\vec{r}}(\vec{a}) = \vec{k} \text{ total} \quad : \Longleftrightarrow \quad \lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{a}} \frac{g(\vec{r}) - g(\vec{a}) - \langle \vec{k}, \vec{r} - \vec{a} \rangle}{\|\vec{r} - \vec{a}\|_2} = 0$$

setzen wir alle Terme ein und erhalten für alle $(s, t)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(4, -3)^T\}$

$$\begin{aligned} & \frac{st^2 - 4 \cdot (-3)^2 - \langle (9, -24)^T, (s, t)^T - (4, -3)^T \rangle}{\|(s, t)^T - (4, -3)^T\|} = \frac{st^2 - 4 \cdot 9 - (9 \cdot (s - 4) - 24 \cdot (t + 3))}{\sqrt{(s - 4)^2 + (t + 3)^2}} \\ &= \frac{st^2 - 36 - 9s + 36 + 24 \cdot (t + 3)}{\sqrt{(s - 4)^2 + (t + 3)^2}} = \frac{s \cdot (t^2 - 9) + 24 \cdot (t + 3)}{\sqrt{(s - 4)^2 + (t + 3)^2}} \\ &= \frac{s \cdot (t - 3) \cdot (t + 3) + 24 \cdot (t + 3)}{\sqrt{(s - 4)^2 + (t + 3)^2}} = \frac{(st - 3s + 24) \cdot (t + 3)}{\sqrt{(s - 4)^2 + (t + 3)^2}}. \end{aligned}$$

Für alle $(s, t)^T \in \mathbb{R}^2$ mit $t \neq -3$ gilt

$$\left| \frac{(st - 3s + 24) \cdot (t + 3)}{\sqrt{(s-4)^2 + (t+3)^2}} \right| \leq \frac{|(st - 3s + 24) \cdot (t + 3)|}{\sqrt{(t+3)^2}} = \frac{|st - 3s + 24| \cdot |t + 3|}{|t + 3|} = |st - 3s + 24|.$$

Da $\left| \frac{(s \cdot (-3) - 3s + 24) \cdot (-3 + 3)}{\sqrt{(s-4)^2 + (-3+3)^2}} \right| = \frac{|-3s - 3s + 24| \cdot |0|}{\sqrt{(s-4)^2 + 0^2}} = 0 \leq |s \cdot (-3) - 3s + 24|$ für alle $s \in \mathbb{R}$ mit $s \neq 4$ gilt, ergibt sich also

$$0 \leq \left| \frac{(st - 3s + 24) \cdot (t + 3)}{\sqrt{(s-4)^2 + (t+3)^2}} \right| \leq |st - 3s + 24| \quad \text{für alle } (s, t)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(4, -3)^T\}.$$

Wegen $\lim_{(s,t)^T \rightarrow (4,-3)^T} |st - 3s + 24| = |4 \cdot (-3) - 3 \cdot 4 + 24| = |-12 - 12 + 24| = |0| = 0$ liefert

das Sandwichlemma $\lim_{(s,t)^T \rightarrow (4,-3)^T} \left| \frac{(st - 3s + 24) \cdot (t + 3)}{\sqrt{(s-4)^2 + (t+3)^2}} \right| = 0$, also die Limesbedingung für g in $\vec{a}$.

Damit ist g im Punkt $(4, -3)^T$ total differenzierbar, und der Gradient $(\text{grad } g)(4, -3) = (9, -24)^T$ ist in diesem Punkt die totale Ableitung von g in $\vec{a}$.

- c) Bestimmen Sie den Gradienten von $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y, z)^T \mapsto \varphi(x, y, z) := x + y^2 - \sin(z)$ und zeigen Sie mit Hilfe der Definition, dass er die Ableitung von φ im Nullpunkt liefert!

$$(\text{grad } \varphi)(0, 0, 0) = (1, 0, -1)^T$$

Lösung:

Die partiellen Ableitungen

$$\varphi_x(x, y, z) = 1, \quad \varphi_y(x, y, z) = 2y \quad \text{und} \quad \varphi_z(x, y, z) = -\cos(z)$$

existieren auf ganz $\mathbb{R}^3$, also auch der Gradient $(\text{grad } \varphi)(x, y, z) = (1, 2y, -\cos(z))^T$. Er ist eine Funktion von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$.

Im Punkt $\vec{a} := (0, 0, 0)^T$ haben wir $\varphi(0, 0, 0) = 0$ und $(\text{grad } \varphi)(0, 0, 0) = (1, 0, -1)^T =: \vec{k}$.

Als Limesbedingung für die totale Ableitung erhalten wir daher

$$\begin{aligned} & \lim_{(x,y,z)^T \rightarrow \vec{0}} \frac{\varphi(x, y, z) - \varphi(0, 0, 0) - \langle \vec{k}, (x, y, z)^T - (0, 0, 0)^T \rangle}{\|(x, y, z)^T - (0, 0, 0)^T\|} \\ &= \lim_{(x,y,z)^T \rightarrow \vec{0}} \frac{x + y^2 - \sin(z) - 0 - \langle (1, 0, -1)^T, (x, y, z)^T \rangle}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \lim_{(x,y,z)^T \rightarrow \vec{0}} \frac{y^2 - \sin(z) + z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \end{aligned}$$

Die Rechnung wird einfacher, wenn man diesen Limes in Teilterme zerlegt

$$\lim_{(x,y,z)^T \rightarrow \vec{0}} \frac{y^2 - \sin(z) + z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \lim_{(x,y,z)^T \rightarrow \vec{0}} \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \lim_{(x,y,z)^T \rightarrow \vec{0}} \frac{\sin(z) - z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

und diese separat auswertet.

Für den ersten Teilterm zeigen wir, dass sein Betrag gegen Null konvergiert. Es gilt

$$0 \leq \left| \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right| \leq \left| \frac{y^2}{\sqrt{y^2}} \right| = |y| \quad \text{für alle } (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } y \neq 0$$

und $0 \leq \left| \frac{0^2}{\sqrt{x^2 + 0^2 + z^2}} \right| = 0 \leq |0|$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $z \in \mathbb{R}$ mit $x^2 + z^2 \neq 0$.

Wegen $\lim_{(x,y,z)^T \rightarrow \vec{0}} |y| = 0$ folgt nach dem Einschnürungssatz auch $\lim_{(x,y,z)^T \rightarrow \vec{0}} \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0$.

Ganz ähnlich kann man den zweiten Teilterm angehen. Für alle $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ mit $z \neq 0$ gilt

$$0 \leq \left| \frac{\sin(z) - z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right| \leq \left| \frac{\sin(z) - z}{\sqrt{z^2}} \right| = \left| \frac{\sin(z) - z}{|z|} \right| = \left| \frac{\sin(z)}{z} - 1 \right|.$$

Definiert man $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $z \mapsto \psi(z) := \begin{cases} 0, & \text{für } z = 0, \\ \frac{\sin(z)}{z} - 1, & \text{für } z \neq 0 \end{cases}$, so folgt wegen

$$0 \leq \left| \frac{\sin(0) - 0}{\sqrt{x^2 + y^2 + 0^2}} \right| = \left| \frac{0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = |0| \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und alle } y \in \mathbb{R} \text{ mit } x^2 + y^2 \neq 0. \text{ also}$$

$$0 \leq \left| \frac{\sin(z) - z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right| \leq |\psi(z)| \quad \text{für alle } (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)^T\}.$$

Mit der Regel von de l'Hospital folgt $\lim_{z \rightarrow 0} \psi(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(z)}{z} - 1 \right) \stackrel{0/0}{=} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos(z)}{1} - 1 = 1 - 1 = 0$ und mit dem Einschnürungssatz ergibt sich $\lim_{(x,y,z)^T \rightarrow \vec{0}} \frac{\sin(z) - z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0$.

Vorsicht: $\sin(z) - z$ darf man nicht weiter in Teilterme zerlegen. Beispielsweise existiert

$$\lim_{(x,y,z)^T \rightarrow \vec{0}} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

nicht, wie man leicht durch Einsetzen der Folgen $(0, 0, \frac{1}{k})^T$ und $(\frac{1}{k}, 0, 0)^T$ sehen kann.



DiffMehrDim/DiffbarTotal/Ag_DiffbarTotal_NachweisMitUndOhneCEinsKriterium.tex

Aufgabe 30.181 (Partielle Differenzierbarkeit und Stetigkeit)

Untersuchen Sie die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y = 0 \\ \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{sonst} \end{cases}$$

auf Stetigkeit, partielle Differenzierbarkeit und totale Differenzierbarkeit auf $\mathbb{R}^2$.

Zeigen Sie die totale Differenzierbarkeit sowohl mit dem C^1 -Kriterium als auch mit der Definition.

Lösung:

Stetigkeit: Weglassen der „Hoch-Vier-Summanden“ im Nenner liefert für $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ mit $xy \neq 0$

$$0 \leq f(x, y) = \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 y^4}{x^4 + 2x^2 y^2 + y^4} \leq \frac{x^4 y^4}{2x^2 y^2} = \frac{x^2 y^2}{2}$$

Für $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)^T\}$ mit $xy = 0$ ist die Abschätzung $0 \leq f(x, y) = 0 \leq \frac{x^2 y^2}{2} = 0$ trivial.

Also gilt $0 \leq f(x, y) \leq \frac{x^2 y^2}{2} \xrightarrow{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} 0$ für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$.

Mit dem Sandwichlemma folgt $\lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$ und damit ist f stetig in $(0, 0)^T$.

Da f auf der offenen Menge $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)^T\}$ eine Komposition stetiger Funktionen ist, folgt damit die Stetigkeit von f auf $\mathbb{R}^2$.

Partielle Differenzierbarkeit: Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\}$ ist f sogar die Komposition partiell differenzierbarer Funktionen und dort gilt wegen der Quotienten- und der Kettenregel

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{4x^3 y^4 \cdot (x^2 + y^2)^2 - x^4 y^4 \cdot 2 \cdot (x^2 + y^2) \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^4} \\ &= \frac{4x^3 y^4 \cdot (x^2 + y^2) - 4x^5 y^4}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{4x^5 y^4 + 4x^3 y^6 - 4x^5 y^4}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{4x^3 y^6}{(x^2 + y^2)^3} \\ \text{und} \quad f_y(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{4x^4 y^3 \cdot (x^2 + y^2)^2 - x^4 y^4 \cdot 2 \cdot (x^2 + y^2) \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^4} \\ &= \frac{4x^4 y^3 \cdot (x^2 + y^2) - 4x^4 y^5}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{4x^6 y^3 + 4x^4 y^5 - 4x^4 y^5}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{4x^6 y^3}{(x^2 + y^2)^3}. \end{aligned}$$

Für $(x, y)^T = (0, 0)^T$ müssen wir die Differenzenquotienten ausrechnen:

$$\begin{aligned} f_x(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 \\ \text{und} \quad f_y(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0. \end{aligned}$$

Damit ist f im Nullpunkt nach beiden Variablen partiell differenzierbar und als Gradient ergibt sich in diesem Punkt $f'(0, 0) = (0, 0)^T$.

Totale Differenzierbarkeit mit dem C^1 -Kriterium: Laut einem Satz ist eine C^1 -Funktion total differenzierbar, wir müssen also nur zeigen, dass sie partiell differenzierbar ist *und* ihre partiellen Ableitungen stetig sind. Partielle Differenzierbarkeit haben wir schon gezeigt mit dem Gradienten

$$f'(x, y) = \begin{cases} \vec{0}, & \text{falls } x = y = 0 \\ \left(\frac{4x^3 y^6}{(x^2 + y^2)^3}, \frac{4x^6 y^3}{(x^2 + y^2)^3} \right)^T, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Wir müssen für die Stetigkeit also die Limites $\lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} f_x(x, y)$ und $\lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} f_y(x, y)$ berechnen.

Für $y = 0 \neq x$ gilt $|f_x(x, 0)| = \left| \frac{4x^3 \cdot 0^6}{(x^2 + 0^2)^3} \right| = 0 \leq |4x^3|$ und für $y \neq 0$ ergibt sich

$$0 \leq |f_x(x, y)| = \left| \frac{4x^3 y^6}{(x^2 + y^2)^3} \right| = \frac{|4x^3| \cdot y^6}{(x^2 + y^2)^3} \leq \frac{|4x^3| \cdot y^6}{(y^2)^3} = |4x^3|.$$

Genauso ergibt sich $|f_y(0, y)| = \left| \frac{4 \cdot 0^6 \cdot y^3}{(0^2 + y^2)^3} \right| = 0 \leq |4y^3|$ für $y \neq 0 = x$ und für $x \neq 0$ gilt

$$0 \leq |f_y(x, y)| = \left| \frac{4x^6 y^3}{(x^2 + y^2)^3} \right| = \frac{|4y^3| \cdot x^6}{(x^2 + y^2)^3} \leq \frac{|4y^3| \cdot x^6}{(x^2)^3} = |4y^3|.$$

Aus $-|4x^3| \leq f_x(x, y) \leq |4x^3|$ und $-|4y^3| \leq f_y(x, y) \leq |4y^3|$ für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)^T\}$ folgt mit dem Sandwichlemma $\lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} f'(x, y) = (0, 0)^T = f'(0, 0)$.

Also sind beide partiellen Ableitungen stetig. Damit ist f eine C^1 -Funktion und total differenzierbar.

Totale Differenzierbarkeit mit der Definition: Wir setzen den Wert des Gradienten im Nullpunkt in den Differenzenquotienten ein und erhalten

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \langle f'(0, 0), (x, y)^T - (0, 0)^T \rangle}{\|(x, y)^T - (0, 0)^T\|} = \frac{\frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^2)^2} - 0 - 0 - 0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{x^4}{(x^2 + y^2)^2} \cdot \frac{y^4}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{x^4}{(x^2 + 0)^2} \cdot \frac{y^4}{\sqrt{0^2 + y^2}} = |y|^3 \xrightarrow{(x, y)^T \rightarrow (0, 0)^T} 0 \end{aligned}$$

für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ mit $xy \neq 0$. Für $xy = 0$ ergibt sich wie oben dieselbe Abschätzung. Das Sandwichlemma liefert die totale Differenzierbarkeit in $(0, 0)^T$.



DiffMehrDim/DiffbarTotal/Ag_DiffbarTotal_NichtCEinsAberTotalDiffbar.tex

Aufgabe 30.182 (Nicht C^1 aber doch total diffbar)

kr nach A. Gathmann, TU KL

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{für } x = y = 0 \\ (x^2 + y^2) \cdot \sin\left((x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}\right), & \text{sonst} \end{cases}.$$

a) Zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar ist und geben Sie den Gradienten an!

$$(\text{grad } f)(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } (\text{grad } f)(x, y) = \left(2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Lösung:

$(x, y)^T \neq (0, 0)^T$: Für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)^T\}$ ergeben sich die partielle Differenzierbarkeit und die partiellen Ableitungen von f aus Produkt- und Kettenregel zu

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2x \cdot \sin\left((x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}\right) + (x^2 + y^2) \cdot \cos\left((x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}\right) \cdot 2x \\ &= 2x \cdot \sin\left((x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}\right) - x \cdot (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos\left((x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}\right) \quad \text{und} \\ f_y(x, y) &= 2y \cdot \sin\left((x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}\right) + (x^2 + y^2) \cdot \cos\left((x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}\right) \cdot 2y \\ &= 2y \cdot \sin\left((x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}\right) - y \cdot (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos\left((x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}\right). \end{aligned}$$

$x = y = 0$: Im Nullpunkt muss mit Hilfe des Differentialquotienten abgeleitet werden:

Für alle $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} &= \frac{(h^2 + 0^2) \cdot \sin\left((h^2 + 0^2)^{-\frac{1}{2}}\right) - 0}{h} = \frac{h^2 \cdot \sin\left((h^2)^{-\frac{1}{2}}\right)}{h} = h \cdot \sin\left(\frac{1}{|h|}\right) \\ \text{und} \quad \frac{f(0, 0+h) - f(0, 0)}{h} &= \frac{(0^2 + h^2) \cdot \sin\left((0^2 + h^2)^{-\frac{1}{2}}\right) - 0}{h} = \frac{h^2 \cdot \sin\left((h^2)^{-\frac{1}{2}}\right)}{h} = h \cdot \sin\left(\frac{1}{|h|}\right). \end{aligned}$$

Wegen $-|h| \leq h \cdot \sin\left(\frac{1}{|h|}\right) \leq |h|$ für alle $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\lim_{h \rightarrow 0} (-|h|) = \lim_{h \rightarrow 0} (|h|) = 0$ liefert das Sandwichlemma die partielle Differenzierbarkeit von f im Nullpunkt mit $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$.

b) Zeigen Sie, dass $\text{grad } f$ in $(0, 0)^T$ unstetig ist!

Lösung:

Sei $z_k := \frac{1}{2\pi k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} (z_k, 0)^T = \lim_{k \rightarrow \infty} (0, z_k)^T = (0, 0)^T$ und

$$(z_k^2 + 0^2)^{-\frac{1}{2}} = (0^2 + z_k^2)^{-\frac{1}{2}} = \left(0 + \left(\frac{1}{2k\pi}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{4k^2\pi^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 2k\pi.$$

Damit folgt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} f_x(z_k, 0) &= 2 \cdot \frac{1}{2k\pi} \cdot \sin(2k\pi) - \frac{1}{2k\pi} \cdot 2k\pi \cdot \cos(2k\pi) = \frac{1}{k\pi} \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 \\ \text{und} \quad f_y(0, z_k) &= 2 \cdot \frac{1}{2k\pi} \cdot \sin(2k\pi) - \frac{1}{2k\pi} \cdot 2k\pi \cdot \cos(2k\pi) = \frac{1}{k\pi} \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1. \end{aligned}$$

Insbesondere folgt $\lim_{k \rightarrow \infty} f_x(z_k, 0) = \lim_{k \rightarrow \infty} (-1) = -1 \neq 0 = f_x(0, 0)$, was die Unstetigkeit von f_x im Nullpunkt zeigt. Genauso folgt wegen $\lim_{k \rightarrow \infty} f_y(0, z_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (-1) = -1 \neq 0 = f_y(0, 0)$ die Unstetigkeit von f_y im Nullpunkt.

c) Zeigen Sie, dass f in $(0, 0)^T$ trotzdem total differenzierbar ist!

Bemerkung: Weil für $(x, y)^T \neq (0, 0)^T$ das C^1 -Kriterium anwendbar ist — f ist dort stetig partiell diff'bar —, ist f damit also total differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}^2$.

Lösung:

Als (totale) Ableitung von f im Nullpunkt kommt nur $(\text{grad } f)(0, 0)$ in Frage.

Zum Nachweis der Differenzierbarkeit muss der Grenzwert des folgenden Bruchs verschwinden:

$$\begin{aligned} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \langle (\text{grad } f)(0, 0), (x, y) - (0, 0) \rangle}{\|(x, y) - (0, 0)\|_2} &= \frac{(x^2 + y^2) \cdot \sin\left((x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}\right) - 0 - 0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin\left((x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}\right). \end{aligned}$$

Für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)^T\}$ gilt

$$-\sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin\left((x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}\right) \leq \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Wegen $\lim_{(x, y)^T \rightarrow (0, 0)^T} \left(-\sqrt{x^2 + y^2}\right) = 0$ und $\lim_{(x, y)^T \rightarrow (0, 0)^T} \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ liefert das Sandwichlemma die Konvergenz des zu betrachtenden Bruchs gegen 0, also die totale Differenzierbarkeit von f im Nullpunkt.



DiffMehrDim/DiffbarTotal/Ag_DiffbarTotal_NichtDBMehrereGründe.tex

Aufgabe 30.183 (Totale Differenzierbarkeit und Stetigkeit)

Bestimmen Sie (falls vorhanden) die partiellen Ableitungen von

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x, y) := \begin{cases} \frac{x}{x^2 + y^2}, & \text{falls } (x, y)^T \neq (0, 0)^T \\ 0, & \text{falls } (x, y)^T = (0, 0)^T. \end{cases}$$

Finden Sie mehrere Gründe dafür, dass f in $(0, 0)^T$ nicht total differenzierbar ist!

$$(\text{grad } f)(x, y) = \left(\frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right)^T \quad \text{für } (x, y)^T \neq (0, 0)^T, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \text{ existiert nicht.}$$

Tip: Bestimmen Sie den Gradienten in $(x, y)^T \neq (0, 0)^T$ durch Differentiationsregeln und die beiden partiellen Ableitungen im Nullpunkt mit dem Differentialquotienten!

Lösung:

Für $(x, y)^T \neq (0, 0)^T$ ist die Funktion (als Komposition von Polynomen und Hyperbeln) total und partiell differenzierbar. Die partiellen Ableitungen erhält man mit Hilfe der Quotientenregel (bei der beachtet werden muss, nach welcher Variable die partielle Ableitung gebildet wird):

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x} x\right) \cdot (x^2 + y^2) - x \cdot \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

und

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\left(\frac{\partial}{\partial y} x\right) \cdot (x^2 + y^2) - x \cdot \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{0 \cdot (x^2 + y^2) - x \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Der Gradient für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)^T\}$ ist also

$$(\text{grad } f)(x, y) = \left(\frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right)^T.$$

Im Nullpunkt muss die Differenzierbarkeit mit Hilfe des Differentialquotienten geprüft werden:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h}{h^2 + 0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} = \infty$$

ist divergent und damit existiert die partielle Ableitung von f nach x im Punkt $(0, 0)^T$ nicht. Für die partielle Ableitung nach y ist dagegen

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{0 + h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Also existiert die partielle Ableitung nach y mit Wert $f_y(0, 0) = 0$. Damit ist $f(x, y)$ im Nullpunkt nicht total differenzierbar (sonst wäre f auch partiell nach x differenzierbar).

Weitere Gründe dafür, dass $f(x, y)$ im Nullpunkt nicht total differenzierbar ist, sind:

- $f(x, y)$ ist im Nullpunkt nicht stetig. Setzt man beispielsweise die Doppelfolge $(x_k, y_k)^T := (\frac{1}{k}, 0)^T$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ein, so ist $f(x_k, y_k) = k \rightarrow \infty$ für $k \rightarrow \infty$ divergent. Funktionen die nicht stetig sind, können nicht total differenzierbar sein (wohl aber in einigen Richtungen differenzierbar, wie z.B. die Rechnung für $f_y(0, 0)$ zeigt).
- Die Definition der totalen Ableitung ist nicht erfüllbar, es gibt kein $\vec{u} = (a, b)^T \in \mathbb{R}^2$, so dass

$$\lim_{(x, y)^T \rightarrow (0, 0)^T} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \langle \vec{u}, (x, y)^T - (0, 0)^T \rangle}{\|(x, y)^T - (0, 0)^T\|} = \lim_{(x, y)^T \rightarrow (0, 0)^T} \frac{\frac{x}{x^2 + y^2} - ax - by}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

gegen Null konvergiert, denn mit zum Beispiel $(x_k, y_k)^T := (\frac{1}{k}, 0)^T$ für alle $k \in \mathbb{N}$ folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k^2} + 0} - a \cdot \frac{1}{k} - b \cdot 0}{\sqrt{\frac{1}{k^2}}} = \lim_{k \rightarrow \infty} (k^2 - a) = \infty \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R} \text{ und alle } b \in \mathbb{R}.$$



DiffMehrDim/DiffbarTotal/Ag_Differentiation_Mehrdimensional_PartiiellNichtTotaldb.tex

Aufgabe 30.184 (Stetigkeit und partielle Ableitungen)

te

Betrachten Sie die folgende Abbildung und beweisen Sie die nachfolgenden Aussagen.

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{für } x = y = 0 \\ \frac{y^3}{x^2 + y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

a) f ist stetig auf ganz $\mathbb{R}^2$.

Lösung: f ist stetig als rationale Funktion auf $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Seien also $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ zwei Nullfolgen. Nehme o.E. an, dass $y_n \neq 0$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$. (Geht, da $f(x, 0) = 0 \forall x$.) Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{y_n^3}{x_n^2 + y_n^2} \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{y_n^3}{y_n^2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |y_n| = 0.$$

Damit ist f stetig.

b) Die partiellen Ableitungen von f in jedem Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ existieren.

Lösung: $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ ist klar. Wir zeigen, dass die beiden partiellen Ableitung $\partial_1 f, \partial_2 f$ in $(0, 0)$ verschwinden:

$$f(h, 0) - f(0, 0) = 0 \Rightarrow \partial_x f(0, 0) = 0$$

$$f(0, h) - f(0, 0) = h \Rightarrow \partial_y f(0, 0) = 1.$$

c) f ist im Punkt $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ nicht differenzierbar.

Lösung: Weil f in $(0, 0)^T$ partiell diff'bar ist mit $\nabla f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ist f genau dann total diff'bar in $(0, 0)^T$, wenn der folgende Grenzwert null ist:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \langle \nabla f(0,0), (x,y) - (0,0) \rangle}{\|(x,y) - (0,0)\|_2} &= \lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} \frac{\frac{y^3}{x^2+y^2} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} \frac{y^3 - y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} \frac{-yx^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Dass dieser Grenzwert nicht 0 ist, kann man mit Hilfe von Folgen zeigen:

Es gilt für $x_n = y_n := 1/n$:

$$\frac{-x_n^2 y_n}{(x_n^2 + y_n^2)^{3/2}} = \frac{-1/n^3}{2^{3/2} 1/n^3} = \frac{-1}{2^{3/2}} \not\rightarrow 0.$$

Damit ist f im Ursprung nicht differenzierbar.



DiffMehrDim/DiffbarVermischt/Ag_Diffbar_GradExistiertRichtungsablAberNicht.tex

Aufgabe 31.185 (Differenzierbarkeit)

Für die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{für } x = y = 0 \\ \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{sonst} \end{cases}$

a) überprüfen Sie die Stetigkeit auf dem gesamten Definitionsbereich!

stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)^T\}$, unstetig in $(0, 0)^T$

Lösung:

Überall abseits des Nullpunktes ist die Funktion stetig als Quotient von zwei stetigen Funktionen mit Nenner ungleich Null. Überprüfe, ob $\lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} f(x, y)$ existiert und gleich $f(0, 0) = 0$ ist.

Das ist hier nicht der Fall. Nehme zum Beispiel die Folgen

$$(x_k, y_k)^T := \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)^T \quad \text{und} \quad (\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)^T := \left(0, \frac{1}{k}\right)^T$$

$$\text{Dann gilt } \lim_{k \rightarrow \infty} (x_k, y_k)^T = (0, 0)^T = \lim_{k \rightarrow \infty} (\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)^T,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k, y_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{0 \cdot \frac{1}{k}}{0 + \frac{1}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

Also existiert der Grenzwert nicht und damit ist die Funktion nicht stetig.

b) berechnen Sie die partiellen Ableitungen $f_x(0, 0)$ und $f_y(0, 0)$!

$$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$$

Lösung:

Trotz Unstetigkeit am Nullpunkt können die partiellen Ableitungen berechnet werden zu

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{(0+h) \cdot 0}{(0+h)^2 + 0^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$\text{und} \quad f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0 \cdot (0+h)}{0^2 + (0+h)^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

c) untersuchen Sie die partiellen Ableitungen auf Stetigkeit im Punkt $(0, 0)^T$!

unstetig im Nullpunkt

Lösung:

Abseits von $(0, 0)^T$ können die partiellen Ableitungen mit der Quotientenregel berechnet werden:

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = \frac{y \cdot (x^2 + y^2) - xy \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2 \cdot y}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\text{und} \quad f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x \cdot (x^2 + y^2) - xy \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^3 - x \cdot y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Abseits des Nullpunktes sind die partiellen Ableitungen von f stetig, da der Nenner nicht Null ist. Es bleibt die Stetigkeit am Nullpunkt zu überprüfen.

Betrachte hierzu die Folgen $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)^T := (0, \frac{1}{k})^T$ und $(\hat{x}_k, \hat{y}_k)^T := (\frac{1}{k}, 0)^T$.

Dann gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} (\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)^T = (0, 0)^T = \lim_{k \rightarrow \infty} (\hat{x}_k, \hat{y}_k)^T$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_x(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k^3} - 0^2 \cdot \frac{1}{k}}{(0^2 + \frac{1}{k^2})^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} k = \infty$$

$$\text{und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f_y(\hat{x}_k, \hat{y}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k^3} - \frac{1}{k} \cdot 0^2}{(\frac{1}{k^2} + 0^2)^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} k = \infty.$$

Also existieren beide Grenzwerte nicht und die partiellen Ableitungen von f sind unstetig am Nullpunkt.

d) berechnen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0)$ mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$!

existiert nicht

Lösung:

Die Richtungsableitung existiert nicht wegen

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(\vec{0} + h\vec{v}) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f\left(\frac{h}{\sqrt{5}}, \frac{2h}{\sqrt{5}}\right) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \cdot \frac{\frac{h}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2h}{\sqrt{5}}}{\left(\frac{h}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{2h}{\sqrt{5}}\right)^2} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2}{5h} = \infty.$$

e) Warum kann man die Richtungsableitung nicht mit dem Gradienten berechnen?

Lösung:

Die Funktion ist am Nullpunkt nicht stetig und damit auch nicht (total) differenzierbar.

Deshalb ist nicht garantiert, dass die Formel mit dem Gradient verwendet werden kann.



DiffMehrDim/ExtremaMitNB/Ag_ExtGebietMitRand.tex

Aufgabe 32.186 (Extrema auf Gebiet mit Rand)

kr

Bestimmen Sie alle Extrema der Funktion $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x, y) = x^4 + y^2,$$

und

$$\mathbb{D} := \{(x, y)^T : h(x, y) := x^2 + y^2 - 1 \leq 0\}.$$

Maximum bei $(-1; 0)$; $(1; 0)$; $(0; -1)$; $(0; 1)$ (Funktionswert 1); Minimum bei $(0, 0)$ (Funktionswert 0)

Lösung:

Weil die Definitionsmenge kompakt und die Funktion stetig ist, nimm f auf $\mathbb{D}$ ihr Maximum und ihr Minimum an. Um diese zu finden untersuchen wir zunächst getrennt die Extrema im Inneren und die Extrema auf dem Rand des Definitionsbereichs.

Kritische Punkte für Extremstellen im Inneren des Definitionsbereichs $x^2 + y^2 < 1$:

Kritische Punkte: $\nabla f = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4x^3 \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wegen $0^2 + 0^2 = 0 < 1$ liegt dieser kritische Punkt auch im Inneren des Definitionsbereichs. Der Funktionswert am kritischen Punkt ist $f(0, 0) = 0$.

Kritische Punkte für Extremstellen auf dem Rand des Definitionsbereichs $x^2 + y^2 = 1$:

Wir verwenden die Methode von Lagrange.

Wir prüfen zunächst, ob es Stellen gibt, an denen der Gradient ∇h der Nebenbedingungsfunktion null ist und die Nebenbedingung selbst erfüllt ist: Dies entspricht hier den Bedingungen

$$\begin{cases} (2x, 2y)^T = (0, 0)^T \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}.$$

Dieses Gleichungssystem hat keine Lösung und damit ist die Methode von Lagrange anwendbar.

Die Lagrange-Funktion lautet hier

$$\begin{aligned} F(x, y, \lambda) &= f(x, y) + \lambda h(x, y) \\ &= x^4 + y^2 + \lambda (x^2 + y^2 - 1) \end{aligned}$$

mit dem Lagrange-Multiplikator λ . Zu den kritischen Punkten für globale Extrema von f gehören die stationären Punkte der Lagrange-Funktion $F(x, y, \lambda)$, d. h. Punkte, die der Gleichung

$$\nabla F(x, y, \lambda) = \vec{0}$$

genügen. Um diese zu finden, hat man das folgende Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{cases} \partial_x F(x, y, \lambda) = 4x^3 + 2\lambda x = 0 \\ \partial_y F(x, y, \lambda) = 2y + 2\lambda y = 0 \\ \partial_\lambda F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Dieses Gleichungssystem hat 8 Lösungen:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1, \lambda_1) &= (-1, 0, -2); (x_2, y_2, \lambda_2) = (1, 0, -2); (x_3, y_3, \lambda_3) = (0, -1, -1); \\ (x_4, y_4, \lambda_4) &= (0, 1, -1); (x_5, y_5, \lambda_5) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right); (x_6, y_6, \lambda_6) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right); \\ (x_7, y_7, \lambda_7) &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right); (x_8, y_8, \lambda_8) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right) \end{aligned}$$

Wir berechnen die Funktionswerte von f an allen kritischen Punkten:

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1) &= 1; & f(x_2, y_2) &= 1; & f(x_3, y_3) &= 1; & f(x_4, y_4) &= 1; & f(x_5, y_5) &= \frac{3}{4}; & f(x_6, y_6) &= \frac{3}{4}; \\ f(x_7, y_7) &= \frac{3}{4}; & f(x_8, y_8) &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Extremstellen auf dem gesamten Definitionsbereich $x^2 + y^2 \leq 1$:

Wir betrachten die berechneten kritischen Punkte und stellen fest, dass der insgesamt kleinste Funktionswert 0 ist und bei $(0, 0)$ angenommen wird (das ist das globale Minimum) und dass der insgesamt größte Funktionswert 1 ist und bei $(x_1, y_1) = (-1, 0)$; $(x_2, y_2) = (1, 0)$; $(x_3, y_3) = (0, -1)$; $(x_4, y_4) = (0, 1)$ angenommen wird (das ist das globale Maximum).



DiffMehrDim/ExtremaMitNB/Ag_ExtGebietMitRand2.tex

Aufgabe 32.187 (Extrema auf Gebiet mit Rand)

kr

Bestimmen Sie alle Extrema der Funktion $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 + 3,$$

und

$$\mathbb{D} := \{(x, y)^T : h(x, y) := 4x^2 + y^2 - 1 \leq 0\}.$$

Maximum bei $(0, -1)$; $(0, 1)$ (Funktionswert 5); Minimum bei $(0, 0)$ (Funktionswert 3)

Lösung:

Weil die Definitionsmenge kompakt und die Funktion stetig ist, nimm f auf $\mathbb{D}$ ihr Maximum und ihr Minimum an. Um diese zu finden untersuchen wir zunächst getrennt die kritischen Punkte für Extrema im Inneren und die kritischen Punkte für Extrema auf dem Rand des Definitionsbereichs.

Kritische Punkte für Extremstellen im Inneren des Definitionsbereichs $4x^2 + y^2 < 1$:

Kritische Punkte: $\nabla f = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6x \\ 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wegen $4 \cdot 0^2 + 0^2 < 1$ liegt der Punkt auch im Inneren des Definitionsbereichs. Der Funktionswert am kritischen Punkt ist $f(0, 0) = 3$.

Kritische Punkte für Extremstellen auf dem Rand des Definitionsbereichs $4x^2 + y^2 = 1$:

Wir verwenden die Methode von Lagrange.

Wir prüfen zunächst, ob es Stellen gibt, an denen der Gradient ∇h der Nebenbedingungsfunktion null ist und die Nebenbedingung selbst erfüllt ist: Dies entspricht hier den Bedingungen

$$\begin{cases} (8x, 2y)^T &= (0, 0)^T \\ 4x^2 + y^2 - 1 &= 0 \end{cases}.$$

Dieses Gleichungssystem hat keine Lösung und damit ist die Methode von Lagrange anwendbar.

Die Lagrange-Funktion lautet hier

$$\begin{aligned} F(x, y, \lambda) &= f(x, y) + \lambda h(x, y) \\ &= \lambda (4x^2 + y^2 - 1) + 3x^2 + 2y^2 + 3 \end{aligned}$$

mit dem Lagrange-Multiplikator λ . Zu den kritischen Punkten für globale Extrema von f gehören die stationären Punkte der Lagrange-Funktion $F(x, y, \lambda)$, d. h. Punkte, die der Gleichung

$$\nabla F(x, y, \lambda) = \vec{0}$$

genügen. Um diese zu finden, hat man das folgende Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{cases} \partial_x F(x, y, \lambda) = 6x + 8\lambda x = 0 \\ \partial_y F(x, y, \lambda) = 4y + 2\lambda y = 0 \\ \partial_\lambda F(x, y, \lambda) = 4x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Dieses Gleichungssystem hat 4 Lösungen:

$$(x_1, y_1, \lambda_1) = (0, -1, -2); (x_2, y_2, \lambda_2) = (0, 1, -2); (x_3, y_3, \lambda_3) = (-\frac{1}{2}, 0, -\frac{3}{4});$$

$$(x_4, y_4, \lambda_4) = (\frac{1}{2}, 0, -\frac{3}{4})$$

Wir berechnen die Funktionswerte von f an allen kritischen Punkten:

$$f(x_1, y_1) = 5; \quad f(x_2, y_2) = 5; \quad f(x_3, y_3) = \frac{15}{4}; \quad f(x_4, y_4) = \frac{15}{4}$$

Extremstellen auf dem gesamten Definitionsbereich $4x^2 + y^2 \leq 1$:

Wir betrachten die berechneten kritischen Punkte für Extremwerte und stellen fest, dass der insgesamt kleinste Funktionswert 3 ist und bei $(0, 0)$ angenommen wird (das ist das globale Minimum) und dass der insgesamt größte Funktionswert 5 ist und bei $(x_1, y_1) = (0, -1)$; $(x_2, y_2) = (0, 1)$ angenommen wird (das ist das globale Maximum).



DiffMehrDim/ExtremaOhneNB/Ag_DiffMehrDim_UnsymmetrischeHesse.tex

Aufgabe 33.188 (Nichtsymmetrische Hessematrix)

vr

Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{für } x = y = 0 \\ \frac{yx^3 - xy^3}{x^2 + y^2}, & \text{sonst} \end{cases}$.

a) Zeigen Sie, dass f im Punkt $(0, 0)^T$ stetig ist.

Zähler aufteilen, dann im Nenner jeweils einen Summanden weglassen

Lösung: Für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)^T\}$ gilt

$$\begin{aligned} 0 \leq |f(x, y)| &= \left| \frac{yx^3 - xy^3}{x^2 + y^2} \right| \stackrel{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq} \left| \frac{yx^3}{x^2 + y^2} \right| + \left| \frac{xy^3}{x^2 + y^2} \right| = \frac{|yx^3|}{x^2 + y^2} + \frac{|xy^3|}{x^2 + y^2} \\ &\leq \frac{|yx| \cdot x^2}{x^2 + 0} + \frac{|xy| \cdot y^2}{0 + y^2} = |yx| + |xy| = 2 \cdot |xy|. \end{aligned}$$

Wegen $\lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} 0 = \lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} 2 \cdot |xy| = 0$ liefert das Sandwichlemma

$$\lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} f(x, y) = 0 = f(0, 0),$$

also die Stetigkeit von f im Nullpunkt.

b) Zeigen Sie, dass $(0, 0)^T$ ein stationärer Punkt von f ist.

$$\partial_x f(0, 0) = \partial_y f(0, 0) = 0$$

Lösung: Für die partiellen Ableitungen im Nullpunkt wird der Differentialquotient verwendet:

$$\begin{aligned} \partial_x f(0, 0) &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u, 0) - f(0, 0)}{u - 0} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\frac{0 \cdot u^3 - u \cdot 0^3}{u^2 + 0^2} - 0}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{u^2} \cdot \frac{1}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{0}{u^3} = \lim_{u \rightarrow 0} 0 = 0 \\ \partial_y f(0, 0) &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(0, u) - f(0, 0)}{u - 0} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\frac{u \cdot 0^3 - 0 \cdot u^3}{0^2 + u^2} - 0}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{u^2} \cdot \frac{1}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{0}{u^3} = \lim_{u \rightarrow 0} 0 = 0. \end{aligned}$$

Wegen $(\text{grad } f)(0, 0) = (0, 0)^T$ ist $(0, 0)^T$ ein stationärer Punkt.

c) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen abseits des Nullpunktes.

$$\partial_x f(x, y) = \frac{yx^4 + 4 \cdot x^2 \cdot y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} \text{ und } \partial_y f(x, y) = \frac{x^5 - 4 \cdot x^3 \cdot y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

Lösung:

Abseits des Nullpunktes können die partiellen Ableitungen mittels der Ableitungsregeln berechnet werden. Konkret liefert die Quotientenregel

$$\begin{aligned} \partial_x f(x, y) &= \partial_x \left(\frac{yx^3 - xy^3}{x^2 + y^2} \right) = \frac{(3yx^2 - y^3) \cdot (x^2 + y^2) - (yx^3 - xy^3) \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{3yx^4 + 3y^3 \cdot x^2 - y^3 \cdot x^2 - y^5 - 2yx^4 + 2x^2 \cdot y^3}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{yx^4 + 4 \cdot x^2 \cdot y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} \\ \text{und } \partial_y f(x, y) &= \partial_y \left(\frac{yx^3 - xy^3}{x^2 + y^2} \right) = \frac{(x^3 - 3xy^2) \cdot (x^2 + y^2) - (yx^3 - xy^3) \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{x^5 + x^3 \cdot y^2 - 3x^3 \cdot y^2 - 3xy^4 - 2y^2 \cdot x^3 + 2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^5 - 4 \cdot x^3 \cdot y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

d) Prüfen Sie, ob es weitere stationäre Punkte von f gibt.

$$(\operatorname{grad} f)(a, b) = (0, 0)^T \iff (a, b)^T = (0, 0)^T$$

Lösung:

Annahme: Es gibt ein $(a, b)^T \in \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)^T\}$ mit $(\operatorname{grad} f)(a, b) = (0, 0)^T$.

$$\text{Dann gilt } \partial_x f(a, b) = \frac{ba^4 + 4 \cdot a^2 \cdot b^3 - b^5}{(a^2 + b^2)^2} = 0 \quad \text{und} \quad \partial_y f(a, b) = \frac{a^5 - 4 \cdot a^3 \cdot b^2 - ab^4}{(a^2 + b^2)^2} = 0.$$

Fall 1: $a = 0$: Ist $a = 0$, so ergibt sich wegen $(a, b)^T \neq (0, 0)^T$ der Widerspruch

$$\partial_x f(a, b) = \frac{b \cdot 0^4 + 4 \cdot 0^2 \cdot b^3 - b^5}{(0^2 + b^2)^2} = \frac{-b^5}{b^4} = -b \neq 0.$$

Fall 2: $b = 0$: Ist $b = 0$, so ergibt sich wegen $(a, b)^T \neq (0, 0)^T$ der Widerspruch

$$\partial_y f(a, b) = \frac{a^5 - 4 \cdot a^3 \cdot b^2 - ab^4}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{a^5}{a^4} = a \neq 0.$$

Fall 3: $a \neq 0 \neq b$: Sind $a \neq 0$ und $b \neq 0$, so sind die Multiplikation der ersten Gleichung mit $\frac{(a^2 + b^2)^2}{b}$ und die der zweiten Gleichung mit $\frac{(a^2 + b^2)^2}{a}$ erlaubt. Damit folgt also

$$a^4 + 4a^2 \cdot b^2 - b^4 = 0 \quad \text{und} \quad a^4 - 4a^2 \cdot b^2 - b^4 = 0.$$

Subtrahiert man beide Gleichungen voneinander, so ergibt sich der Widerspruch $8a^2 \cdot b^2 = 0$ zur Voraussetzung $a \neq 0 \neq b$.

Also hat f keine weiteren stationären Punkte.

e) Berechnen Sie die Hessematrix $H_f(0, 0)$.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Für die Hessematrix müssen die zweiten partiellen Ableitungen im Nullpunkt berechnet werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\partial_x f(u, 0) - \partial_x f(0, 0)}{u - 0} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\frac{0 \cdot u^4 + 4 \cdot u^2 \cdot 0^3 - 0^5}{(u^2 + 0^2)^2} - 0}{u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{0 + 0 - 0}{u^4} \cdot \frac{1}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{0}{u^5} = \lim_{u \rightarrow 0} 0 = 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\partial_x f(0, u) - \partial_x f(0, 0)}{u - 0} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\frac{u \cdot 0^4 + 4 \cdot 0^2 \cdot u^3 - u^5}{(0^2 + u^2)^2} - 0}{u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{0 + 0 - u^5}{u^4} \cdot \frac{1}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{-u^5}{u^5} = \lim_{u \rightarrow 0} (-1) = -1, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\partial_y f(u, 0) - \partial_y f(0, 0)}{u - 0} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\frac{u^5 - 4 \cdot u^3 \cdot 0^2 - u \cdot 0^4}{(u^2 + 0^2)^2} - 0}{u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^5 - 0 - 0}{u^4} \cdot \frac{1}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^5}{u^5} = \lim_{u \rightarrow 0} 1 = 1 \\ \text{und} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\partial_y f(0, u) - \partial_y f(0, 0)}{u - 0} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\frac{0^5 - 4 \cdot 0^3 \cdot u^2 - 0 \cdot u^4}{(0^2 + u^2)^2} - 0}{u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{0 - 0 - 0}{u^4} \cdot \frac{1}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{0}{u^5} = \lim_{u \rightarrow 0} 0 = 0. \end{aligned}$$

Die gesuchte Hessematrix ist also

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} \partial_x \partial_x f(0,0) & \partial_y \partial_x f(0,0) \\ \partial_x \partial_y f(0,0) & \partial_y \partial_y f(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

f) Zeigen Sie, dass im Punkt $(0,0)^T$ keine lokale Extremstelle vorliegt.

Für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ gilt $f\left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{4}\right) > 0$ und $f\left(\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{2}\right) < 0$.

Lösung:

Für alle $\vec{v} = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\vec{v}^T \cdot H_f(0,0) \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} = -v_1 \cdot v_2 + v_2 \cdot v_1 = 0.$$

Mit der Definitheit der Hessematrix kann hier also nicht argumentiert werden, da $H_f(0,0)$ sowohl positiv als auch negativ semidefinit, aber weder positiv definit, noch negativ definit, noch indefinit ist. Auch sind die zweiten Ableitungen nicht stetig (sonst wäre die Hessematrix symmetrisch) und damit sind die hinreichenden Kriterien nicht anwendbar.

Kann man zeigen, dass in jeder noch so kleine Umgebung des Nullpunkts mit dem Funktionswert $f(0,0) = 0$ ein Punkt liegt, dessen Funktionswert positiv ist, so liegt in $(0,0)^T$ kein Maximum vor. Findet man zusätzlich einen Punkt mit negativem Funktionswert, so liegt in $(0,0)^T$ auch kein Minimum vor.

Für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ sei $U_\varepsilon((0,0)^T)$ die ε -Umgebung des Nullpunktes.

- Für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ ist $\left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{4}\right)^T \in U_\varepsilon((0,0)^T)$ mit

$$f\left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{4}\right) = \frac{\frac{\varepsilon}{4} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^3 - \frac{\varepsilon}{2} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^3}{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^2} = \frac{\frac{\varepsilon^4}{32} - \frac{\varepsilon^4}{128}}{\frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^2}{16}} = \frac{\frac{3\varepsilon^4}{128}}{\frac{5\varepsilon^2}{16}} = \frac{3\varepsilon^2}{40} > 0.$$

Damit ist der Nullpunkt keine lokale Maximalstelle.

- Für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ ist $\left(\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{2}\right)^T \in U_\varepsilon((0,0)^T)$ mit

$$f\left(\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{\frac{\varepsilon}{2} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^3 - \frac{\varepsilon}{4} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^3}{\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} = \frac{\frac{\varepsilon^4}{128} - \frac{\varepsilon^4}{32}}{\frac{\varepsilon^2}{16} + \frac{\varepsilon^2}{4}} = \frac{\frac{-3\varepsilon^4}{128}}{\frac{5\varepsilon^2}{16}} = \frac{-3\varepsilon^2}{40} < 0.$$

Damit ist der Nullpunkt keine lokale Minimalstelle.



DiffMehrDim/ExtremaOhneNB/Ag_Differentiation_Mehrdimensional_Extremstellen3.tex

Aufgabe 33.189 (Extremwerte)

Bestimmen Sie alle Extremwerte der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad (x, y)^T \mapsto f(x, y) := 3x - x^3 - 2y^2 + y^4.$$

Sattelpunkte: $(1, 1, 1)^T$, $(1, -1, 1)^T$, $(-1, 0, -2)^T$, Hochpunkt: $(1, 0, 2)^T$, Tiefpunkte: $(-1, 1, -3)^T$, $(-1, -1, -3)^T$

Lösung:

Als erstes werden die stationären Punkte bestimmt. Berechne dafür die ersten partiellen Ableitungen:

$$f_x(x, y) = 3 - 3x^2 \quad \text{und} \quad f_y(x, y) = -4y + 4y^3$$

Suche $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ mit $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$:

$$\begin{cases} 3 - 3x^2 = 0 \\ -4y + 4y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x^2 = 0 \\ -y \cdot (1 - y^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & \text{oder} & x = -1 \\ y = 0 & \text{oder} & y = 1 & \text{oder} & y = -1 \end{cases}$$

Damit haben wir die folgenden sechs stationären Punkte erhalten:

$$\begin{aligned}(x_1, y_1)^T &= (1, -1)^T & (x_2, y_2)^T &= (1, 0)^T & (x_3, y_3)^T &= (1, 1)^T \\(x_4, y_4)^T &= (-1, -1)^T & (x_5, y_5)^T &= (-1, 0)^T & (x_6, y_6)^T &= (-1, 1)^T\end{aligned}$$

In zweitem Schritt müssen die stationären Punkte sortiert werden. Verwende dafür die Hesse-Matrix bzw. die zweiten partiellen Ableitungen

$$f_{xx}(x, y) = -6x, \quad f_{yy}(x, y) = -4 + 12y^2 \quad \text{und} \quad f_{xy}(x, y) = 0.$$

	$(x_1, y_1)^T$ $(1, -1)^T$	$(x_2, y_2)^T$ $(1, 0)^T$	$(x_3, y_3)^T$ $(1, 1)^T$	$(x_4, y_4)^T$ $(-1, -1)^T$	$(x_5, y_5)^T$ $(-1, 0)^T$	$(x_6, y_6)^T$ $(-1, 1)^T$
$H_f(x_j, y_j)$	$\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$
Eigenwerte	-6 und 8	-6 und -4	-6 und 8	6 und 8	6 und -4	6 und 8
$f_{xx}(x_j, y_j)$	$-6 < 0$	$-6 < 0$	$-6 < 0$	$6 > 0$	$6 > 0$	$6 > 0$
$\det(H_f)$	$-48 < 0$	$24 > 0$	$-48 < 0$	$48 > 0$	$-24 < 0$	$48 > 0$
Definitheit	indefinit	neg. def.	indefinit	pos. def.	indefinit	pos. def.
Extrempunkt?	SP	HP	SP	TP	SP	TP

HP = Hochpunkt — SP = Sattelpunkt — TP = Tiefpunkt



DiffMehrDim/ExtremaOhneNB/Ag_ExtrOhneNB_EntscheidungMitWenigInformationen.tex

Aufgabe 33.190 (Lokales Verhalten einer Funktion in der Umgebung eines Punktes)

Reichen die angegebenen Informationen aus, um zu entscheiden, ob am Punkt $\vec{a}$ ein lokales Extremum (also Maximum oder Minimum) vorliegt?

Falls ja, geben Sie bitte an, ob ein Maximum, ein Minimum oder keines von beiden vorliegt.

Alle Funktionen seien zweimal stetig differenzierbar und „ H_f “ bezeichne die Hesse-Matrix von f .

a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(\text{grad } f)(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $H_f(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

nichts

Lösung:

Da f auf einer offenen Menge definiert und differenzierbar ist, müsste der Gradient Null sein, wenn ein Extrempunkt vorliegt (notwendiges Kriterium). Da aber der Gradient in diesem Fall

$(\text{grad } f)(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht null ist, liegt kein Extrem- oder Sattelpunkt vor.

b) $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(\text{grad } g)(\vec{a}) = 0$ und $H_g(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Min

Lösung:

Da der Gradient Null ist, untersuchen wir die Hessematrix.

Diese Matrix ist eine Diagonalmatrix, somit kann man die Eigenwerte direkt ablesen, es sind:

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 3.$$

Da beide Eigenwerte positiv sind, ist die Hesse-Matrix positiv definit. Da der Gradient null ist und Hessematrix positiv definit, liegt ein lokales Minimum vor.

- c) $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(\text{grad } h)(\vec{a}) = 0$ und die Eigenwerte von $H_h(\vec{a})$ sind 0 und -3 .

unklar

Lösung:

Da der Gradient Null ist, untersuchen wir die Hessematrix. Die Eigenwerte sind

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -3.$$

Da der Eigenwert λ_2 negativ ist, können wir schließen, dass es eine Richtung gibt, in der die Funktion kleiner wird. Wir haben also keinen lokalen Tiefpunkt.

Ob es sich hier aber um einen lokalen Hochpunkt oder gar kein Extremum (also ein Sattelpunkt) handelt, lässt sich mit den gegebenen Informationen nicht entscheiden.

- d) $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(\text{grad } p)(\vec{a}) = 0$ und $\det(H_p(\vec{a})) = 3$.

Extrem

Lösung:

Da der Gradient Null ist, untersuchen wir die Hessematrix. Da die Funktion p auf dem $\mathbb{R}^2$ definiert ist, ist die Hessematrix $H_p(\vec{a})$ eine (2×2) -Matrix und hat somit zwei Eigenwerte $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ und $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ (die eventuell aber auch gleich sein können).

Die Determinante ist das Produkt der Eigenwerte, also:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 3 > 0.$$

Damit das Produkt von zwei reellen Zahlen positiv ist, müssen entweder beide Zahlen positiv sein (dann ist die Hessematrix positiv definit) oder beide Zahlen negativ sein (dann ist die Hessematrix negativ definit).

Was jedenfalls nicht sein kann, ist dass die Matrix indefinit ist oder ein Eigenwert Null ist.

Somit können wir schließen, dass der Graph von f an der Stelle entweder einen Tiefpunkt oder einen Hochpunkt hat, aber sicher keinen Sattelpunkt.

- e) $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(\text{grad } q)(\vec{a}) = 0$ und $\det(H_q(\vec{a})) = -4$.

Sattel

Lösung:

Da der Gradient Null ist, untersuchen wir die Hessematrix. Da die Funktion q auf dem $\mathbb{R}^2$ definiert ist, ist die Hessematrix $H_q(\vec{a})$ eine (2×2) -Matrix und hat somit zwei Eigenwerte $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ und $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ (die eventuell aber auch gleich sein können).

Die Determinante ist das Produkt der Eigenwerte, also:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -4 < 0.$$

Damit das Produkt von zwei reellen Zahlen negativ ist, muss eine der beiden Zahlen positiv und die andere negativ sein. Somit ist die Hessematrix indefinit und der Graph von q hat an der Stelle keinen Extrempunkt, sondern einen Sattelpunkt.

- f) $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(\text{grad } u)(\vec{a}) = 0$ und $\det(H_u(\vec{a})) = 3$.

unklar

Lösung:

Da der Gradient Null ist, untersuchen wir die Hessematrix. Da die Funktion u auf dem $\mathbb{R}^3$ definiert ist, ist die Hessematrix $H_u(\vec{a})$ eine (3×3) -Matrix und hat somit drei Eigenwerte $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ (von denen eventuell einige gleich sein können).

Die Determinante ist das Produkt der Eigenwerte, also:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 3 > 0.$$

Da das Produkt von drei reellen Zahlen positiv ist, müssen entweder alle Zahlen positiv sein (dann ist die Hessematrix positiv definit) oder genau eine ist positiv und zwei sind negativ (dann ist die Hessematrix indefinit).

Was jedenfalls nicht sein kann, ist dass die Matrix negativ definit ist, denn dann wäre das Produkt negativ.

Somit können wir schließen, dass der Graph von u an der Stelle entweder einen Tiefpunkt oder einen Sattelpunkt hat, aber sicher keinen Hochpunkt.

- g) $v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(\text{grad } v)(\vec{a}) = 0$ und $\det(H_v(\vec{a})) = -4$.

unklar

Lösung:

Da der Gradient Null ist, untersuchen wir die Hessematrix. Da die Funktion v auf dem $\mathbb{R}^3$ definiert ist, ist die Hessematrix $H_v(\vec{a})$ eine (3×3) -Matrix und hat somit drei Eigenwerte $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ (von denen eventuell einige gleich sein können).

Die Determinante ist das Produkt der Eigenwerte, also:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = -4 < 0.$$

Damit das Produkt von drei reellen Zahlen negativ ist, müssen entweder alle Zahlen negativ sein (dann ist die Hessematrix negativ definit) oder genau eine ist negativ und zwei sind positiv (dann ist die Hessematrix indefinit).

Was jedenfalls nicht sein kann, ist dass die Matrix positiv definit ist, denn dann wäre das Produkt positiv.

Somit können wir schließen, dass der Graph von v an der Stelle entweder einen Hochpunkt oder einen Sattelpunkt hat, aber sicher keinen Tiefpunkt.

- h) $w: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(\text{grad } w)(\vec{a}) = 0$ und $H_w(\vec{a})$ hat die Eigenwerte -4 , 0 und 6 .

Sattel

Lösung:

Da der Gradient Null ist, untersuchen wir die Hessematrix. Da die Hessematrix einen positiven und einen negativen Eigenwert hat, ist sie indefinit.

Somit können wir schließen, dass der Graph von w an der Stelle einen Sattelpunkt hat.

- i) $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto r(x, y) := (x^2 + y^2)^3$ in $\vec{a} = (0, 0)^T$.

Min

Lösung:

Man kann hier leicht den Gradienten an der Stelle $\vec{a} = \vec{0}$ ausrechnen, der ist null. Somit untersucht man dann die Hessematrix an der Stelle $\vec{a}$. Diese ist aber die Nullmatrix und hat somit nur den (doppelten) Eigenwert 0 . Also ist die Hessematrix weder positiv definit noch negativ definit noch indefinit. Anders formuliert: Die Hessematrix ist vollkommen nutzlos.

Glücklicherweise kann man diese Aufgabe auch ganz ohne Differentialrechnung lösen:

$$r(x, y) - r(0, 0) = (x^2 + y^2)^3 - \underbrace{(0^2 + 0^2)^3}_{=0} = (x^2 + y^2)^3 \geq 0,$$

da $x^2 + y^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $y \in \mathbb{R}$ gilt.

Also ist $r(x, y) \geq r(0, 0)$ für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$. Also hat r an der Stelle $(0, 0)^T$ ein (sogar globales) Minimum.

j) $s: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto s(x, y) := x^3 \cdot y^5$ in $\vec{a} = (0, 0)^T$.

Sattel

Lösung:

Hier ergibt sich das gleiche Problem wie in Aufgabenteil i): Die Hessematrix hat nur Eigenwert 0 und ist somit nutzlos.

Glücklicherweise kann man auch diese Aufgabe auch ganz ohne Differentialrechnung lösen:

$$s(t, t) = t^3 \cdot t^5 = t^8 > 0 \quad \text{und} \quad s(t, -t) = t^3 \cdot (-t)^5 = -t^8 < 0$$

für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Wenn wir nun eine noch so kleine Umgebung um $(0, 0)^T$ herum betrachten, dann wird es dort immer Punkte geben, die auf der 1. Winkelhalbierenden liegen und somit einen Funktionswert größer als $s(0, 0) = 0^3 \cdot 0^5 = 0$ haben. Also hat s in $(0, 0)^T$ sicher kein lokales Maximum.

Aber natürlich wird es auch in jeder noch so kleinen Umgebung Punkte von der 2. Winkelhalbierenden geben, also Punkte, bei denen der Funktionswert kleiner als $s(0, 0)$ ist. Also hat s in $(0, 0)^T$ auch kein lokales Minimum.

Daraus folgt: Der Graph von s hat in $(0, 0)^T$ einen Sattelpunkt, da $(\text{grad } s)(0, 0) = (0, 0)^T$ ist.

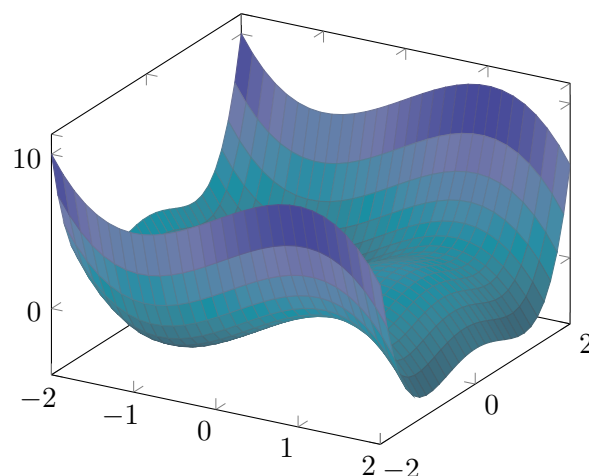


DiffMehrDim/ExtremaOhneNB/Ag_ExtrOhneNB_HeranfuehrungAnDefinitheitsverfahren.tex

Aufgabe 33.191 (Lokale Extremstellen in mehreren Veränderlichen)

Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch $(x, y)^T \mapsto f(x, y) := 3x - x^3 - 2y^2 + y^4$.

Lösung: Zunächst ein Plot der Funktion zur Übersicht:



a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f (also die Nullstellen des Gradienten)!

$$(1, 0)^T, (-1, 0)^T, (1, 1)^T, (-1, 1)^T, (1, -1)^T, (-1, -1)^T$$

Lösung:

Der Gradient von f ist für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$(\text{grad } f)(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x, y) \\ \partial_y f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 3x^2 \\ -4y + 4y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (1 - x^2) \\ 4y \cdot (y^2 - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) \\ 4y \cdot (y - 1) \cdot (y + 1) \end{pmatrix}.$$

Die Nullstellen hiervon sind also genau die Elemente des kartesischen Produkts $\{-1; 1\} \times \{-1; 0; 1\}$. Damit haben wir die folgenden sechs stationären Punkte erhalten:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1)^T &:= (1, -1)^T & (x_2, y_2)^T &:= (1, 0)^T & (x_3, y_3)^T &:= (1, 1)^T \\ (x_4, y_4)^T &:= (-1, -1)^T & (x_5, y_5)^T &:= (-1, 0)^T & (x_6, y_6)^T &:= (-1, 1)^T \end{aligned}$$

- b) Untersuchen Sie, ob im kritischen Punkt $\vec{p} := (1, 0)^T$ ein Hoch-, ein Tief- oder ein Sattelpunkt des Graphen von f vorliegt, indem Sie untersuchen, wie sich die Funktionswerte längs aller Geraden durch diesen Punkt verändern!

Tipp: Eine Gerade durch $\vec{r}$ mit Richtungsvektor $\vec{v}$ ist gegeben durch $\vec{g}_{\vec{r}, \vec{v}}(t) := \vec{r} + t \cdot \vec{v}$. Untersuchen Sie die verkettete Funktion $h_{\vec{r}, \vec{v}} := f \circ \vec{g}_{\vec{r}, \vec{v}}$, die nur noch von *einer* Veränderlichen abhängt.

Der Graph von f hat in $(1, 0, 2)^T$ einen Hochpunkt.

Lösung:

Für alle $\vec{v} = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{R}^2$ mit $\|\vec{v}\|_2 = 1$ seien $\vec{g}_{\vec{p}, \vec{v}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $t \mapsto \vec{g}_{\vec{p}, \vec{v}}(t) := \vec{p} + t \cdot \vec{v} = (1 + tv_1, tv_2)^T$ eine beliebige Gerade durch $\vec{p}$ und $h_{\vec{p}, \vec{v}} := f \circ \vec{g}_{\vec{p}, \vec{v}}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} h_{\vec{p}, \vec{v}}(t) &= 3 \cdot (1 + tv_1) - (1 + tv_1)^3 - 2t^2 \cdot v_2^2 + t^4 \cdot v_2^4, & h_{\vec{p}, \vec{v}}(0) &= f(1, 0) = 2, \\ h'_{\vec{p}, \vec{v}}(t) &= 3v_1 - 3v_1 \cdot (1 + tv_1)^2 - 4t \cdot v_2^2 + 4t^3 \cdot v_2^4, & h'_{\vec{p}, \vec{v}}(0) &= 0, \\ h''_{\vec{p}, \vec{v}}(t) &= -6v_1^2 \cdot (1 + tv_1) - 4v_2^2 + 12t^2 \cdot v_2^4 & \text{und} & \quad h''_{\vec{p}, \vec{v}}(0) = -6v_1^2 - 4v_2^2. \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist für alle $\vec{v} = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{R}^2$ mit $\|\vec{v}\|_2 = 1$ negativ. Deshalb hat für *jede* Gerade $\vec{g}_{\vec{p}, \vec{v}}$ die Funktion $f \circ \vec{g}_{\vec{p}, \vec{v}}$ ein Maximum in 0. Also fallen die Funktionswerte von f immer, wenn man irgendwie vom Punkt $(1, 0)^T$ weggeht. Damit hat der Graph von f in $(1, 0, 2)^T$ einen Hochpunkt.

- c) Rechnen Sie nach, dass für $h_{\vec{r}, \vec{v}} := f \circ \vec{g}_{\vec{r}, \vec{v}}$ mit $\vec{r} = (a, b)^T \in \mathbb{R}^2$, $\vec{v} = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{R}^2$, $\|\vec{v}\| = 1$, $\vec{g}_{\vec{r}, \vec{v}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $t \mapsto \vec{g}_{\vec{r}, \vec{v}}(t) = \vec{r} + t \cdot \vec{v}$ wie im Tipp zu Aufgabenteil b) gilt:

$$h''_{\vec{r}, \vec{v}}(0) = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (\text{Matrixmultiplikation})$$

Lösung:

Für alle $\vec{r} = (a, b)^T \in \mathbb{R}^2$ und alle $\vec{v} = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{R}^2$ mit $\|\vec{v}\|_2 = 1$ seien $\vec{g}_{\vec{r}, \vec{v}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $t \mapsto \vec{g}_{\vec{r}, \vec{v}}(t) := \vec{r} + t \cdot \vec{v} = (a + tv_1, b + tv_2)^T$ eine beliebige Gerade durch $\vec{r}$ und $h_{\vec{r}, \vec{v}} := f \circ \vec{g}_{\vec{r}, \vec{v}}$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} h_{\vec{r}, \vec{v}}(t) &= 3 \cdot (a + tv_1) - (a + tv_1)^3 - 2 \cdot (b + tv_2)^2 + (b + tv_2)^4, \\ h'_{\vec{r}, \vec{v}}(t) &= 3v_1 - 3v_1 \cdot (a + tv_1)^2 - 4v_2 \cdot (b + tv_2) + 4v_2 \cdot (b + tv_2)^3, \\ h''_{\vec{r}, \vec{v}}(t) &= -6v_1^2 \cdot (a + tv_1) - 4v_2^2 + 12v_2^2 \cdot (b + tv_2)^2 \\ \text{und} \quad h''_{\vec{r}, \vec{v}}(0) &= -6av_1^2 + 4v_2^2 \cdot (3b^2 - 1). \end{aligned}$$

In Aufgabenteil a) wurde der Gradient von f bereits berechnet. Durch nochmaliges Ableiten erhalten wir für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ die Hessematrix von f zu

$$H_f(x, y) := \begin{pmatrix} -6x & 0 \\ 0 & -4 + 12y^2 \end{pmatrix}.$$

Für alle $\vec{r} = (a, b)^T \in \mathbb{R}^2$ und alle $\vec{v} = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{R}^2$ mit $\|\vec{v}\|_2 = 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned} (v_1 \ v_2) \cdot H_f(a, b) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= (v_1 \ v_2) \cdot \begin{pmatrix} -6a & 0 \\ 0 & -4 + 12b^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ &= (v_1 \ v_2) \cdot \begin{pmatrix} -6av_1 \\ (-4 + 12b^2) \cdot v_2 \end{pmatrix} = -6av_1^2 + (-4 + 12b^2) \cdot v_2^2 = h''_{\vec{r}, \vec{v}}(0). \end{aligned}$$

d) Untersuchen Sie auch die anderen kritischen Punkte nach der Herangehensweise aus b)!

Tip: Verwenden Sie die Erkenntnis aus Aufgabenteil c), um Rechenarbeit zu sparen.

$$\text{HP: } (1, 0, 2)^T, \text{ SP: } (-1, 0, -2)^T, (1, 1, 1)^T, (1, -1, 1)^T, \text{ TP: } (-1, 1, -3)^T, (-1, -1, -3)^T$$

Lösung:

Für die kritischen Punkte lauten die Hessematrizen

$$\begin{aligned} H_f(1, 1) &= \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, & H_f(1, 0) &= \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, & H_f(1, -1) &= \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \\ H_f(-1, 1) &= \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, & H_f(-1, 0) &= \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} & \text{und} & H_f(-1, -1) &= \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$h'_{\vec{r}, \vec{v}}(0)$ verschwindet in allen kritischen Punkten $\vec{r}$ und allen Richtungen $\vec{v}$.

Die zweiten Ableitungen ergeben sich für alle $\vec{v} = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{R}^2$ mit $\|\vec{v}\|_2 = 1$ zu

$$\begin{aligned} h''_{(1,1)^T, \vec{v}}(0) &= -6v_1^2 + 8v_2^2, & h''_{(1,0)^T, \vec{v}}(0) &= -6v_1^2 - 4v_2^2, & h''_{(1,-1)^T, \vec{v}}(0) &= -6v_1^2 + 8v_2^2, \\ h''_{(-1,1)^T, \vec{v}}(0) &= 6v_1^2 + 8v_2^2, & h''_{(-1,0)^T, \vec{v}}(0) &= 6v_1^2 - 4v_2^2 & \text{und} & h''_{(-1,-1)^T, \vec{v}}(0) &= 6v_1^2 + 8v_2^2. \end{aligned}$$

- Die Punkte $(1, 1, f(1, 1))^T$, $(1, -1, f(1, -1))^T$ und $(-1, 0, f(-1, 0))^T$ sind Sattelpunkte des Graphen von f , denn geht man von diesen Punkten in x -Richtung ($\vec{v} = (1, 0)^T$) weg, so fallen die Funktionswerte, während sie in y -Richtung ($\vec{v} = (0, 1)^T$) steigen.
- Die Punkte $(-1, -1)^T$ und $(-1, 1)^T$ sind Minimalstellen, denn die Funktionswerte steigen in allen Richtungen an.



DiffMehrDim/ExtremaOhneNB/Ag_ExtrOhneNB_HochstensEinKritischerPunkt2D.tex

Aufgabe 33.192 (Extremstellensuche ohne Nebenbedingungen)

Bestimmen Sie die Extremstellen der nachfolgenden reellwertigen Abbildungen mit zwei Variablen!

a) $f(x, y) := x^2 - y^2 - 2x - 2y$

Sattelpunkt bei $(1, -1, 0)^T$

Lösung:

Der Gradient von f ist $(\text{grad } f)(x, y) = (2x - 2, -2y - 2)^T$.

Als einzigen kritischen Punkt erhalten wir $(a, b)^T := (1, -1)^T$.

Wir berechnen die Hesse-Matrix als Transponierte der Jacobi-Matrix des Gradienten und setzen diesen Punkt ein:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{yx}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \implies H_f(1, -1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist indefinit, daher liegt in $(1, -1)^T$ keine Extremstelle vor. Wegen der notwendigen Bedingung gibt es auch sonst keine Extremwerte dieser Funktion.

b) $g(x, y) := x^2 \cdot e^{y-1} + x$

kein stationärer Punkt

Lösung:

Der Gradient von g ist $(\text{grad } g)(x, y) = (2x \cdot e^{y-1} + 1, x^2 \cdot e^{y-1})^T$.

Die zweite Komponente wird nur null, wenn $x = 0$ gilt. Dann wird die erste Komponente $1 \neq 0$.

Also hat diese Funktion keine Extremstellen, weil die notwendige Bedingung verletzt ist.

c) $h(x, y) := e^{x^2+y^2}$

Tiefpunkt bei $(0, 0, 1)^T$

Lösung:

Der Gradient von h ist $(\text{grad } h)(x, y) = (2x \cdot e^{x^2+y^2}, 2y \cdot e^{x^2+y^2})^T$.

Er wird der Nullvektor nur für $x = 0$ und $y = 0$, also im Nullpunkt.

Wir berechnen die Hesse-Matrix als Transponierte der Jacobi-Matrix des Gradienten:

$$H_h(x, y) = \begin{pmatrix} h_{xx}(x, y) & h_{yx}(x, y) \\ h_{xy}(x, y) & h_{yy}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot e^{x^2+y^2} + 4x^2 \cdot e^{x^2+y^2} & 4xy \cdot e^{x^2+y^2} \\ 4xy \cdot e^{x^2+y^2} & 2 \cdot e^{x^2+y^2} + 4y^2 \cdot e^{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Im Nullpunkt ergibt sich $H_h(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Diese Matrix ist positiv definit, also hat h ein Minimum im Punkt $(a, b)^T := (0, 0)^T$.



DiffMehrDim/ExtremaOhneNB/Ag_ExtrOhneNB_PolynomAusKlausurHMIETIT.tex

Aufgabe 33.193 (Differenzialrechnung in $\mathbb{R}^n$, Teilaufgabe einer Klausur für ETIT aus dem Herbst 2012)

Bestimmen Sie alle Stellen lokaler Extrema der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad (x, y)^T \mapsto f(x, y) := 3y^2 - 6xy + 9x - x^3 + 2$$

und entscheiden Sie, ob es sich dabei um Maximal- oder Minimalstellen handelt!

Tiefpunkt in $(-3, -3, -25)^T$, Sattelpunkt in $(1, 1, 7)^T$

Lösung:

Die Jacobi-Matrix von f ergibt sich zu

$$J_f(x, y) = (-6y + 9 - 3x^2 \quad 6y - 6x).$$

Damit ergibt sich $f_y(x, y) = 0 \iff 6y - 6x = 0 \iff x = y$.

Also ist $J_f(x, y) = (0 \quad 0) \iff x = y$ und $-3x^2 - 6x + 9 = 0$.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $-3x^2 - 6x + 9 = -3 \cdot (x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 - 1 - 3) = -3 \cdot ((x+1)^2 - 4) = -3 \cdot (x+1+2) \cdot (x+1-2) = -3 \cdot (x-(-3)) \cdot (x-1)$.

Insgesamt folgt $J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \iff (x, y)^T \in \{(-3, -3)^T; (1, 1)^T\}$

Die Hesse-Matrix von f ist

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -6x & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \det(zI_2 - H_f(-3, -3)) &= \det\left(\begin{pmatrix} z-18 & 6 \\ 6 & z-6 \end{pmatrix}\right) = (z-18) \cdot (z-6) - 6 \cdot 6 \\ &= z^2 - 18z - 6z + 108 - 36 = z^2 - 24z + 72 = (z-12)^2 - 72 \\ &= (z-12)^2 - 72 = \left(z - \left(12 + \sqrt{72}\right)\right) \cdot \left(z - \left(12 - \sqrt{72}\right)\right) \\ \text{und} \quad \det(zI_2 - H_f(1, 1)) &= \det\left(\begin{pmatrix} z+6 & 6 \\ 6 & z-6 \end{pmatrix}\right) = (z+6) \cdot (z-6) - 6 \cdot 6 \\ &= z^2 - 36 - 36 = z^2 - 72 = \left(z - \left(-\sqrt{72}\right)\right) \cdot \left(z - \sqrt{72}\right). \end{aligned}$$

Also ist $H_f(-3, -3)$ wegen $\sqrt{72} < \sqrt{144} = 12$ mit zwei positiven Eigenwerten $12 + \sqrt{72}$ und $12 - \sqrt{72}$ positiv definit und $H_f(1, 1)$ mit den Eigenwerten $\sqrt{72}$ und $-\sqrt{72}$ indefinit.

Es sind $f(-3, -3) = 3 \cdot (-3)^2 - 6 \cdot (-3) \cdot (-3) + 9 \cdot (-3) - (-3)^3 + 2 = 27 - 54 - 27 + 27 + 2 = -25$ und $f(1, 1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 \cdot 1 + 9 \cdot 1 - 1^3 + 2 = 3 - 6 + 9 - 1 + 2 = 7$.

Also hat der Graph von f in $(-3, -3, -25)^T$ einen Tiefpunkt und in $(1, 1, 7)^T$ einen Sattelpunkt.



DiffMehrDim/ExtremaOhneNB/Ag_ExtrOhneNB_SattelpktMitUndOhneHessematrix3D.tex

Aufgabe 33.194 (Die Hesse-Matrix)

Sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y, z)^T \mapsto f(x, y, z) := x^2 - zxe^y$.

$$(\text{grad } f)(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x - ze^y \\ -ze^y \\ -xe^y \end{pmatrix}, H_f(x, y, z) = - \begin{pmatrix} -2 & ze^y & e^y \\ ze^y & zxe^y & xe^y \\ e^y & xe^y & 0 \end{pmatrix}, H_f(0, 0, 0) \text{ indefinit}$$

- a) Bestimmen Sie den Gradienten $\text{grad } f$ und die Hesse-Matrix H_f von f !

Lösung:

Der Gradient der Funktion ist $(\text{grad } f)(x, y, z) = (2x - ze^y \quad -ze^y \quad -xe^y)^T$.

Für die Hessematrix wird der Gradient pro Zeile nach der entsprechenden Variable abgeleitet:

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & -ze^y & -e^y \\ -ze^y & zxe^y & xe^y \\ -e^y & -xe^y & 0 \end{pmatrix}.$$

- b) Der Nullpunkt ist ein stationärer Punkt von f . Prüfen Sie durch Rechnung die Definitheit von H_f im Nullpunkt! Nimmt f dort ein Extremum an?

Lösung:

Die Hessematrix im Nullpunkt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt sich zu $H_f(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Das charakteristische Polynom dieser Matrix ist

$$\begin{aligned} \text{CP}_{H_f(0,0,0)}(\lambda) &= \det\left(\begin{pmatrix} \lambda - 2^+ & 0^- & 1 \\ 0 & \lambda^+ & 0 \\ 1 & 0^- & \lambda^+ \end{pmatrix}\right) = -0 + \lambda \cdot \det\left(\begin{pmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}\right) - 0 \\ &= \lambda \cdot ((\lambda - 2) \cdot \lambda - 1 \cdot 1) = \lambda \cdot (\lambda^2 - 2\lambda - 1) = \lambda \cdot (\lambda^2 - 2 \cdot \lambda \cdot 1 + 1^2 - 1 - 1) \\ &= \lambda \cdot ((\lambda - 1)^2 - 2) = \lambda \cdot (\lambda - 1 + \sqrt{2}) \cdot (\lambda - 1 - \sqrt{2}) \\ &= \lambda \cdot (\lambda - (1 - \sqrt{2})) \cdot (\lambda - (1 + \sqrt{2})). \end{aligned}$$

Es ergeben sich die Eigenwerte 0 , $1 - \sqrt{2} < 0$ und $1 + \sqrt{2} > 0$. Also ist die Hesse-Matrix indefinit und in $(0, 0, 0)^T$ liegt ein Sattelpunkt des Graphen von f vor.

- c) Geben Sie ein von H_f unabhängiges Argument, warum der Nullpunkt keine Maximal- oder Minimalstelle sein kann!

Lösung:

Die gesamte y -Achse (also alle Punkte $(0, t, 0)^T$ mit $t \in \mathbb{R}$) ist stationär.

Für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gilt

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{n^2}, t, \frac{1}{n \cdot e^t}\right) &= \frac{1}{n^4} - \frac{1}{n^2 \cdot n \cdot e^t} \cdot e^t = \frac{1-n}{n^4} < 0 \\ \text{und} \quad f\left(\frac{1}{n^2}, t, \frac{1}{n^3 \cdot e^t}\right) &= \frac{1}{n^4} - \frac{1}{n^2 \cdot n^3 \cdot e^t} \cdot e^t = \frac{n-1}{n^5} > 0. \end{aligned}$$

Mit $f(0, t, 0) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ folgt, dass $(0, t, 0)^T$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ein Sattelpunkt des Graphen von f ist.



DiffMehrDim/ExtremaOhneNB/Ag_ExtrOhneNB_SattelpktMitUndOhneHessematrixEinstieg.tex

Aufgabe 33.195 (Per Hand prüfen)

Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto f(x, y) := x^2 \cdot e^y - y^2$.

- a) Bestimmen Sie die kritischen Punkte (sprich die Nullstellen des Gradienten) von f !

Der einzige kritische Punkt ist der Ursprung.

Lösung:

Der Gradient der Funktion ist $(\text{grad } f)(x, y) = (2x \cdot e^y, x^2 \cdot e^y - 2y)^T$.

Die erste Komponente wird Null nur für $x = 0$. Dann ist die zweite Komponente nur Null, wenn auch $y = 0$ ist. Der einzige kritische Punkt ist also $(0, 0)^T$.

- b) Prüfen Sie mit Hilfe der Hesse-Matrix, ob f in einem kritischen Punkt ein Extremum annimmt!

Im Ursprung liegt kein Extremum von f vor.

Lösung:

Wir berechnen die Hesse-Matrix und setzen diesen Punkt ein:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{yx}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot e^y & 2x \cdot e^y \\ 2x \cdot e^y & x^2 \cdot e^y - 2 \end{pmatrix} \implies H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist indefinit. Also liegt in $(0, 0)^T$ keine Extremstelle vor.

- c) Bestätigen Sie durch Einsetzen von Folgen oder Kurven in f Ihre Ergebnisse aus Aufgabenteil b)!

Lösung:

Im Nullpunkt hat die Funktion den Wert $f(0, 0) = 0$. Um zu zeigen, dass dies kein Extremwert ist, müssen wir zwei Folgen finden, die gegen $(0, 0)^T$ konvergieren, so dass beim Einsetzen in f für die eine Folge positive Werte und für die andere Folge negative Werte herauskommen.

Wir wählen $\left(\left(\frac{1}{k}, 0\right)^T\right)_{k \in \mathbb{N}}$ und $\left(\left(0, \frac{1}{k}\right)^T\right)_{k \in \mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{k}, 0\right) &= \left(\frac{1}{k}\right)^2 \cdot e^0 - 0^2 = \frac{1}{k^2} \cdot 1 - 0 = \frac{1}{k^2} > 0 && \text{für alle } k \in \mathbb{N} \\ \text{und} \quad f\left(0, \frac{1}{k}\right) &= 0^2 \cdot e^{\frac{1}{k}} - \left(\frac{1}{k}\right)^2 = 0 \cdot e^{\frac{1}{k}} - \frac{1}{k^2} = 0 - \frac{1}{k^2} = -\frac{1}{k^2} < 0 && \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Also besitzt f im Nullpunkt keinen Extremwert. Wegen der notwendigen Bedingung hat f auch sonst nirgends Extremwerte.



DiffMehrDim/Geometrisches/Ag_DiffMehrDim_Tangentialebenen.tex

Aufgabe 34.196 (Tangentialebene und Tangente)

VT

a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^3y^2 + 2xy$

(i) Bestimmen Sie die Tangentialebene zu dem Graphen der Funktion f im Punkt $(2, -1)$.

$$z = 4 + 10(x - 2) - 12(y + 1)$$

Lösung:

Die Tangentialebene im Punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ist gegeben durch

$$T_f(x_0, y_0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x_0, y_0) + \langle f'(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle\}.$$

Berechne die notwendigen Größen mit $(x_0, y_0) = (2, -1)$:

$$f(2, -1) = 2^3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot 2 \cdot (-1) = 4$$

$$\partial_x f(x, y) = 3x^2y^2 + 2y$$

$$\implies \partial_x(2, -1) = 3 \cdot 2^2 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) = 10$$

$$\partial_y f(x, y) = 2x^3y + 2x$$

$$\implies \partial_y(2, -1) = 2 \cdot 2^3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = -12$$

$$\implies f'(2, -1) = (\partial_x f(2, -1), \partial_y f(2, -1)) = (10, -12).$$

Gleichung der Tangentialebene:

$$\begin{aligned} z &= f(2, -1) + \langle f'(2, -1), (x - 2, y - (-1)) \rangle \\ &= 4 + \langle (10, -12), (x - 2, y + 1) \rangle \\ &= 4 + 10(x - 2) - 12(y + 1) \end{aligned}$$

bzw. die Tangentialebene selbst:

$$T_f(2, -1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4 + 10(x - 2) - 12(y + 1)\}.$$

(ii) Skizzieren Sie die Höhenlinie zum Niveau $0 = f(x, y)$.

x - und y -Achsen und Graph von $y = -\frac{2}{x^2}$

Lösung:

Suche alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = 0$:

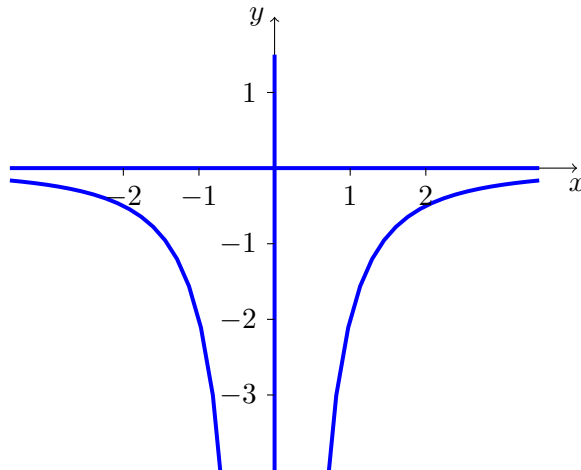
$$0 = x^3y^2 + 2xy \iff 0 = xy(x^2y + 2)$$

$$\iff x = 0 \quad \text{oder} \quad y = 0 \quad \text{oder} \quad x^2y + 2 = 0$$

$$\iff x = 0 \quad \text{oder} \quad y = 0 \quad \text{oder} \quad x^2y = -2$$

$$\iff x = 0 \quad \text{oder} \quad y = 0 \quad \text{oder} \quad y = -\frac{2}{x^2}$$

D.h., die Höhenlinie besteht aus x - und y -Achsen sowie Graphen der Funktion $y = -\frac{2}{x^2}$.



- (iii) Bestimmen und skizzieren Sie die Tangente an die Höhenlinie zum Niveau $0 = f(x, y)$ im Punkt $(-1, -2)$.

$$y = -4x - 6$$

Lösung:

Gleichung der Tangente zu der Höhenlinie im Punkt $(-1, -2)$:

$$\partial_x f(-1, -2) \cdot (x - (-1)) + \partial_y f(-1, -2) \cdot (y - (-2)) = 0.$$

Mit

$$\partial_x f(-1, -2) = 3 \cdot (-1)^2 \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) = 8$$

$$\partial_y f(-1, -2) = 3 \cdot (-1)^3 \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) = 2$$

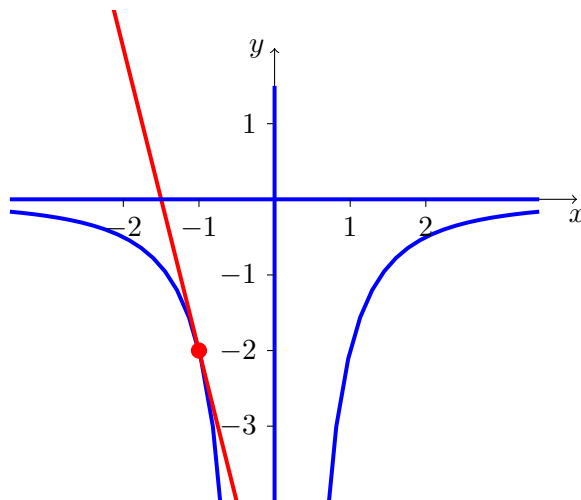
erhalten wir die Gleichung:

$$8(x + 1) + 2(y + 2) = 0$$

$$\iff 4(x + 1) + (y + 2) = 0$$

$$\iff 4x + y + 6 = 0$$

$$\iff y = -4x - 6$$



- (iv) Bestimmen und skizzieren die Richtung des steilsten Anstiegs im Punkt $(-1, -2)$.

$$\text{Richtung } \frac{1}{2\sqrt{17}} (8, 2), \text{ Anstiegsrate } 2\sqrt{17}$$

Lösung:

Die Richtung des steilsten Anstiegs ist

$$\vec{w} = \frac{1}{\|f'(-1, -2)\|} f'(-1, -2)$$

Mit

$$f'(-1, -2) = (\partial_x f(-1, -2), \partial_y f(-1, -2)) = (8, 2)$$

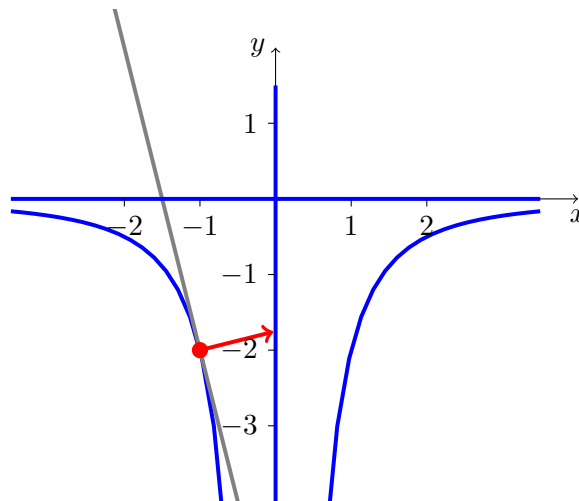
und

$$\|f'(-1, -2)\| = \|(8, 2)\| = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

ist

$$\vec{w} = \frac{1}{2\sqrt{17}}(8, 2).$$

Die Norm der Ableitung $\|f'(-1, 2)\| = 2\sqrt{17}$ ist die Anstiegsrate.



b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2y + x$

(i) Bestimmen Sie die Tangentialebene zu dem Graphen der Funktion f im Punkt $(1, 3)$.

$$z = 4 + 7(x - 1) + 1(y - 3)$$

Lösung:

Die Tangentialebene im Punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ist gegeben durch

$$T_f(x_0, y_0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x_0, y_0) + \langle f'(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle\}.$$

Berechne die notwendigen Größen mit $(x_0, y_0) = (1, 3)$:

$$f(1, 3) = 1^2 \cdot 3 + 1 = 4$$

$$\partial_x f(x, y) = 2xy + 1$$

$$\implies \partial_x(1, 3) = 2 \cdot 1 \cdot 3 + 1 = 7$$

$$\partial_y f(x, y) = x^2$$

$$\implies \partial_y f(1, 3) = 1$$

$$\implies f'(1, 3) = (\partial_x f(1, 3), \partial_y f(1, 3)) = (7, 1).$$

Gleichung der Tangentialebene:

$$\begin{aligned} z &= f(1, 3) + \langle f'(1, 3), (x - 1, y - 3) \rangle \\ &= 4 + \langle (7, 1), (x - 1, y - 3) \rangle \\ &= 4 + 7(x - 1) + 1(y - 3) \end{aligned}$$

bzw. die Tangentialebene selbst:

$$T_f(1, 3) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4 + 7(x - 1) + (y - 3)\}.$$

(ii) Skizzieren Sie die Höhenlinie zum Niveau $0 = f(x, y)$.

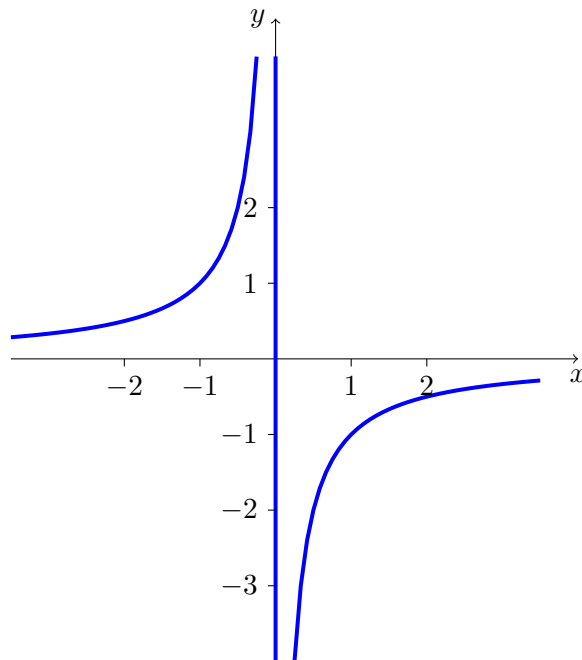
y -Achse und Graph der Funktion $-\frac{1}{x}$

Lösung:

Suche alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = 0$:

$$\begin{aligned} 0 = x^2 y + x &\iff 0 = x(xy + 1) \\ &\iff x = 0 \quad \text{oder} \quad xy + 1 = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{oder} \quad xy = -1 \\ &\iff x = 0 \quad \text{oder} \quad y = -\frac{1}{x} \end{aligned}$$

D.h., die Höhenlinie besteht aus y -Achse sowie Graphen der Funktion $y = -\frac{1}{x}$.



(iii) Bestimmen und skizzieren Sie die Tangente an die Höhenlinie zum Niveau $0 = f(x, y)$ im Punkt $(1, -1)$.

$$y = x - 2$$

Lösung:

Gleichung der Tangente zu der Höhenlinie im Punkt $(1, -1)$:

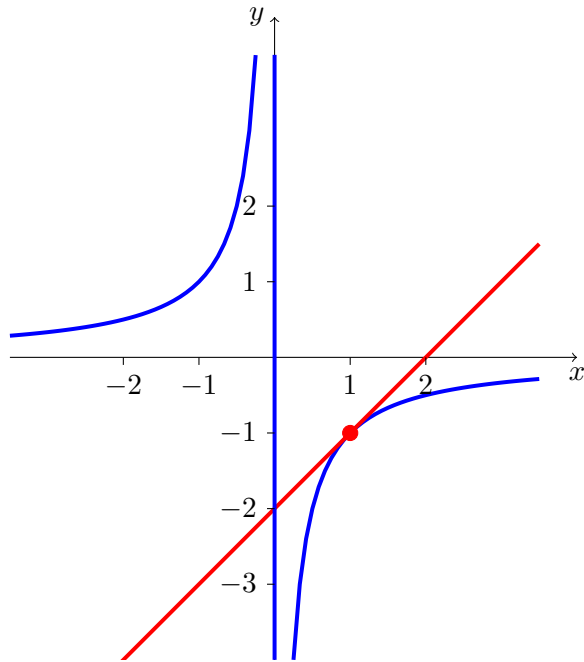
$$\partial_x f(1, -1) \cdot (x - 1) + \partial_y f(1, -1) \cdot (y - (-1)) = 0.$$

Mit

$$\begin{aligned} \partial_x f(1, -1) &= 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 1 = -1 \\ \partial_y f(1, -1) &= 1^2 = 1 \end{aligned}$$

erhalten wir die Gleichung:

$$\begin{aligned} -1(x - 1) + 1(y + 1) &= 0 \\ \iff -x + 1 + y + 1 &= 0 \\ \iff y &= x - 2 \end{aligned}$$



- (iv) Bestimmen und skizzieren die Richtung des steilsten Anstiegs im Punkt $(1, -1)$.

Richtung $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$, Anstiegsrate $\sqrt{2}$

Lösung:Die Richtung des steilsten Anstiegs ist

$$\vec{w} = \frac{1}{\|f'(1, -1)\|} f'(1, -1)$$

Mit

$$f'(1, -1) = (\partial_x f(1, -1), \partial_y f(1, -1)) = (-1, 1)$$

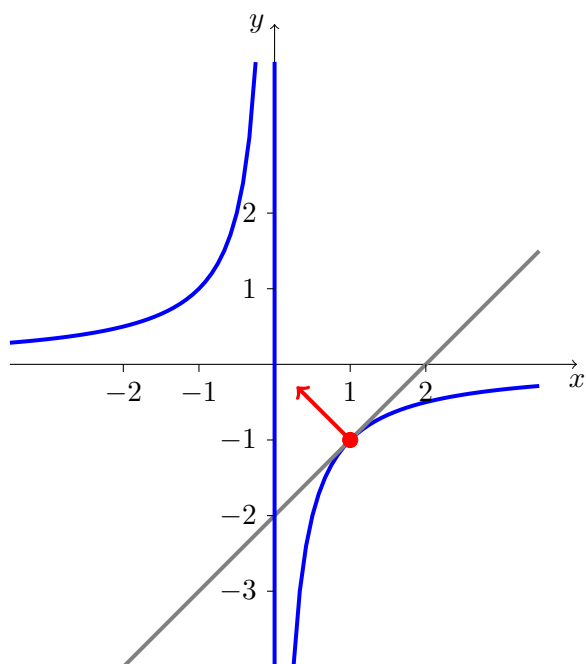
und

$$\|f'(1, -1)\| = \|(-1, 1)\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

ist

$$\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1).$$

Die Norm der Ableitung $\|f'(1, -1)\| = \sqrt{2}$ ist die Anstiegsrate.





DiffMehrDim/HoehereAbl/Ag_DiffMehrDim_WiderspruchDurchSatzVonSchwarz.tex

Aufgabe 35.197 (Gibt es sowas?) te

Man entscheide (mit Beweis), ob es eine differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ geben kann, sodass $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x \cdot (y^2 - x^2)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = y \cdot (y^2 - x^2)$ in jedem Punkt $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ gilt!

Tipp: Schreiben Sie die zugehörige Hesse-Matrix auf und verwenden Sie deren Gestalt.

Es kann keine solche Funktion geben; Widerspruch durch Satz von Schwarz.

Lösung:

Angenommen, es gibt eine Funktion f mit den angegebenen Eigenschaften.

Da die partiellen Ableitungen von f Polynome sind, sind sie unendlich oft stetig partiell differenzierbar.

Diese Eigenschaft muss dann auch auf f zutreffen.

Insbesondere wäre f also zweimal stetig differenzierbar und wir könnten den Satz von Schwarz auf f anwenden. Es gilt jedoch für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ mit $xy \neq 0$:

$$\partial_{xy}f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) = 2xy \neq -2yx = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \partial_{yx}f(x, y).$$

Also kann es kein solches f geben.

Aufgabenblatt 36

DiffMehrDim/ImplDefFktn



DiffMehrDim/ImplDefFktn/Ag_ImplDefFktn_1Dnach1DEinstiegMitXHochDreiGleichYPlusEHochXY.tex

Aufgabe 36.198 (Implizit definierte Funktionen)

Bestimmen Sie, ob durch die Gleichung

$$x^3 - y - e^{xy} = 0$$

in einer Umgebung des Punktes $(a, b)^T := (1, 0)^T$ implizit eine Funktion $y = g(x)$ definiert wird. Falls ja, bestimmen Sie die Ableitung $g'(1)$.

$$g'(1) = \frac{3}{2}$$

Lösung:

Wir bezeichnen die Funktion auf der linken Seite der Gleichung mit F :

$$\text{Sei } F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad (x, y)^T \mapsto F(x, y) := x^3 - y - e^{xy}.$$

Als erstes muss überprüft werden, ob der Punkt $(a, b)^T = (1, 0)^T$ die Gleichung $F(a, b) = 0$ erfüllt:

$$F(a, b) = F(1, 0) = 1^3 - 0 - e^{1 \cdot 0} = 1 - e^0 = 1 - 1 = 0.$$

Überprüfe die Bedingungen des Satzes über implizit definierte Funktionen:

$$F_y(x, y) = -1 - x \cdot e^{xy} \implies F_y(a, b) = F_y(1, 0) = -1 - 1 \cdot e^{1 \cdot 0} = -1 - 1e^0 = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

Damit ist die Existenz einer implizit definierten Funktion $y = g(x)$ in der Umgebung des Punktes $(a, b)^T = (1, 0)^T$ gezeigt worden.

Die Ableitung von g in 1 lässt sich berechnen durch $g'(1) = -\frac{F_x(1, 0)}{F_y(1, 0)}$

Die partielle Ableitung von F in x -Richtung ergibt sich zu

$$F_x(x, y) = 3x^2 - y \cdot e^{xy} \implies F_x(1, 0) = 3 \cdot 1^2 - 0 \cdot e^{1 \cdot 0} = 3$$

Jetzt kann die Ableitung $g'(1)$ direkt berechnet werden:

$$g'(1) = -\frac{F_x(1, 0)}{F_y(1, 0)} = -\frac{3}{-2} = \frac{3}{2}.$$



DiffMehrDim/ImplDefFktn/Ag_ImplDefFktn_1Dnach1DERstDieYsZuZweiFinden.tex

Aufgabe 36.199 (Implizit definierte Funktionen)

SPF

Seien $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto h(x, y) := 3x^3 - 13xy + 2y^3$ und $\mathcal{H}_0 := \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid h(x, y) = 0 \right\}$.

a) Bestimmen Sie $M := \left\{ y \in \mathbb{R} \mid (2, y)^T \in \mathcal{H}_0 \right\}$!

$$\{-4; 1; 3\}$$

Lösung:

Sei $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $y \mapsto p(y) := h(2, y)$. Für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$p(y) = h(2, y) = 3 \cdot 2^3 - 13 \cdot 2 \cdot y + 2y^3 = 2 \cdot (y^3 - 13y + 12).$$

Der Nullstellenratesatz liefert als mögliche rationale Nullstellen von p die Elemente der Menge

$$R := \{-12; -6; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 6; 12\}.$$

Es gilt $p(1) = 2 \cdot (1^3 - 13 \cdot 1 + 12) = 2 \cdot (1 - 13 + 12) = 2 \cdot 0 = 0$.

Eine Polynomdivision liefert für alle $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} h(2, y) = p(y) &= 2 \cdot (y^3 - 13y + 12) = 2 \cdot (y - 1) \cdot (y^2 + y - 12) \\ &= 2 \cdot (y - 1) \cdot \left(y^2 + 2 \cdot y \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} - 12 \right) \\ &= 2 \cdot (y - 1) \cdot \left(\left(y + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{49}{4} \right) \\ &= 2 \cdot (y - 1) \cdot \left(y + \frac{1}{2} + \frac{7}{2} \right) \cdot \left(y + \frac{1}{2} - \frac{7}{2} \right) \\ &= 2 \cdot (y - 1) \cdot (y + 4) \cdot (y - 3). \end{aligned}$$

Also gilt für alle $y \in \mathbb{R}$ $h(2, y) = 0 \iff y \in M = \{-4; 1; 3\}$.

- b) Prüfen Sie für alle $y \in M$, ob es ein $\varepsilon_y \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon_y > 0$ und eine differenzierbare Funktion $g_y: D_y \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D_y \supseteq \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| < \varepsilon_y\}$, $g_y(2) = y$ und $h(x, g_y(x)) = 0$ für alle $x \in D_y$ gibt!

Berechnen Sie $g'_y(2)$ für jede der existierenden implizit definierten Funktionen!

$$g'_{-4}(2) = -\frac{44}{35}$$

$$g'_1(2) = \frac{23}{20}$$

$$g'_3(2) = \frac{3}{28}$$

Lösung:

Nach dem Hauptsatz über implizit definierte Funktionen ist für alle $y \in M$ lediglich zu überprüfen, ob $\frac{\partial h}{\partial y}(2, y) \neq 0$ ist. Für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ ist $\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = -13x + 6y^2$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial y}(2, -4) &= -13 \cdot 2 + 6 \cdot (-4)^2 = -26 + 96 = 70 \neq 0, \\ \frac{\partial h}{\partial y}(2, 1) &= -13 \cdot 2 + 6 \cdot 1^2 = -26 + 6 = -20 \neq 0 \\ \text{und} \quad \frac{\partial h}{\partial y}(2, 3) &= -13 \cdot 2 + 6 \cdot 3^2 = -26 + 54 = 28 \neq 0. \end{aligned}$$

Also existieren ε_y und g_y für alle $y \in M$ und es gilt jeweils $g'_y(x) = -\frac{\frac{\partial h}{\partial x}(x, g_y(x))}{\frac{\partial h}{\partial y}(x, g_y(x))}$ für alle $x \in D_y$.

Für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ ist $\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = 9x^2 - 13y$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x}(2, -4) &= 9 \cdot 2^2 - 13 \cdot (-4) = 36 + 52 = 88, \\ \frac{\partial h}{\partial x}(2, 1) &= 9 \cdot 2^2 - 13 \cdot 1 = 36 - 13 = 23 \\ \text{und} \quad \frac{\partial h}{\partial x}(2, 3) &= 9 \cdot 2^2 - 13 \cdot 3 = 36 - 39 = -3. \end{aligned}$$

Wegen $g_y(2) = y$ für alle $y \in M$ folgt also

$$\begin{aligned} g'_{-4}(2) &= -\frac{\frac{\partial h}{\partial x}(2, -4)}{\frac{\partial h}{\partial y}(2, -4)} = -\frac{88}{70} = -\frac{44}{35}, \\ g'_1(2) &= -\frac{\frac{\partial h}{\partial x}(2, 1)}{\frac{\partial h}{\partial y}(2, 1)} = -\frac{23}{-20} = \frac{23}{20} \\ \text{und} \quad g'_3(2) &= -\frac{\frac{\partial h}{\partial x}(2, 3)}{\frac{\partial h}{\partial y}(2, 3)} = -\frac{-3}{28} = \frac{3}{28}. \end{aligned}$$

- c) Gibt es Punkte in $\mathcal{H}_0$, in denen der Hauptsatz über implizit definierte Funktionen *keine* differenzierbare Funktion g liefert, deren Definitionsbereich eine offene Umgebung von x ist, so dass die Gleichung „ $h(x, y) = 0$ “ via „ $y = g(x)$ “ gelöst wird? Wenn ja, welche?

$$(0, 0)^T \text{ und } \left(\frac{\sqrt[3]{6 \cdot 13}}{9}, \frac{\sqrt[3]{36 \cdot 13}}{18} \right)^T$$

Lösung:

Liegt in einem Punkt $(x, y)^T \in \mathcal{H}_0$ an $\mathcal{H}_0$ eine senkrechte Asymptote an, so liefert der Hauptsatz über implizit definierte Funktionen keine differenzierbare Funktion g mit $g(x) = y$ und $h(t, g(t)) = 0$ für alle t aus einer offenen Umgebung von x .

Die senkrechten Asymptoten erkennt man für $(x, y)^T \in \mathcal{H}_0$ daran, dass dort $\frac{\partial h}{\partial y}(x, y)$ verschwindet. Für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ ist $\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = -13x + 6y^2$. Wir suchen also alle

$$(x, y)^T \in \mathcal{H}_0 \quad \text{mit} \quad -13x + 6y^2 = 0.$$

Das liefert das Gleichungssystem $3x^3 - 13xy + 2y^3 = 0$ und $x = \frac{6}{13} \cdot y^2$.

Setzt man die zweite Gleichung in die erste ein, so folgt

$$3 \cdot \left(\frac{6}{13} \cdot y^2 \right)^3 - 13 \cdot \frac{6}{13} \cdot y^2 \cdot y + 2y^3 = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{8 \cdot 81}{13^3} \cdot y^6 - 6y^3 + 2y^3 = 0, \quad \text{also} \quad \left(\frac{6 \cdot 27}{13^3} \cdot y^3 - 1 \right) \cdot 4y^3 = 0.$$

Der Satz vom Nullprodukt liefert $2y^3 = 0$ oder $\frac{6 \cdot 27}{13^3} \cdot y^3 - 1 = 0$, also

$$y = 0 \quad \text{oder} \quad y = \frac{\sqrt[3]{36 \cdot 13}}{18}.$$

Mit der Gleichung $x = \frac{6}{13} \cdot y^2$ lässt sich dann auch die erste Koordinate berechnen:

$$(y = 0 \text{ und } x = \frac{6}{13} \cdot 0^2 = 0) \quad \text{oder} \quad \left(y = \frac{\sqrt[3]{36 \cdot 13}}{18} \text{ und } x = \frac{6}{13} \cdot \left(\frac{\sqrt[3]{36 \cdot 13}}{18} \right)^2 = \frac{\sqrt[3]{6^4 \cdot 13}}{18 \cdot 3} = \frac{\sqrt[3]{6 \cdot 13}}{9} \right).$$



DiffMehrDim/ImplDefFktn/Ag_ImplDefFktn_1Dnach1DMehrerePunkteProGleichung.tex

Aufgabe 36.200 (Implizit definierte Funktionen: Skalarwertiger Fall)

kr

Überprüfen Sie, ob die Gleichung $F(x, y) = 0$ in einer Umgebung von $(a, b)^T$ lokal eindeutig durch eine implizit definierte Funktion g mit $y = g(x)$ auflösbar ist, und berechnen Sie $g'(a) = \frac{dy}{dx}(a)$.

$$\text{a) } F(x, y) = y + xy^2 - e^{xy} \quad \text{für alle } (a, b)^T \in \left\{ (0, 1)^T; (2, -1)^T; \left(\frac{2}{e}, \frac{e}{2} \right)^T \right\}$$

$$g'_1(0) = 0, g_2 \text{ ex. nicht, } g'_3\left(\frac{2}{e}\right) = \frac{e^2}{4}$$

Lösung:

Die partiellen Ableitungen von F in einem beliebigen Punkt $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ sind

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = y^2 - y \cdot e^{xy} \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 1 + 2xy - x \cdot e^{xy}.$$

Da diese Funktionen stetig sind, ist die Funktion F auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar.

- (i) Es ist $F(0, 1) = 1 + 0 - e^0 = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 1) = 1 + 0 - 0 = 1 \neq 0$. Also ist der Satz über implizit definierte Funktionen für den ersten Punkt anwendbar. Das heißt, es gibt offene Umgebungen $U \subseteq \mathbb{R}$ von 0 und $V \subseteq \mathbb{R}$ von 1 sowie eine stetig differenzierbare Funktion $g_1: U \rightarrow V$ mit

$$F(x, y) = 0 \iff y = g_1(x) \quad \text{für alle } (x, y)^T \in U \times V.$$

Für die Ableitung $g'_1(0)$ erhalten wir wegen $\frac{\partial F}{\partial x}(0, 1) = 1^2 - 1 \cdot e^0 = 0$ mit der Formel aus dem Satz über implizit definierte Funktionen

$$g'_1(0) = - \left(\frac{\partial F}{\partial y}(0, 1) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(0, 1) = 0.$$

- (ii) Wegen $F(2, -1) = -1 + 2 \cdot (-1)^2 - e^{2 \cdot (-1)} = 1 - e^{-2} \neq 0$ ist der Satz über implizit definierte Funktionen für den zweiten Punkt nicht anwendbar.
- (iii) Für den dritten Punkt haben wir $F\left(\frac{2}{e}, \frac{e}{2}\right) = \frac{e}{2} + \frac{2}{e} \cdot \left(\frac{e}{2}\right)^2 - e^{\frac{2}{e} \cdot \frac{e}{2}} = \frac{e}{2} + \frac{e}{2} - e^1 = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{2}{e}, \frac{e}{2}\right) = 1 + 2 \cdot \frac{2}{e} \cdot \frac{e}{2} - \frac{2}{e} \cdot e^{\frac{2}{e} \cdot \frac{e}{2}} = 1 + 2 - 2 = 1 \neq 0$. Also ist der Satz über implizit definierte Funktionen für diesen Punkt anwendbar. Das heißt, es gibt offene Umgebungen $U \subseteq \mathbb{R}$ von $\frac{2}{e}$ und $V \subseteq \mathbb{R}$ von $\frac{e}{2}$ sowie eine stetig differenzierbare Funktion $g_3: U \rightarrow V$ mit

$$F(x, y) = 0 \iff y = g_3(x) \quad \text{für alle } (x, y)^T \in U \times V.$$

Für die Ableitung $g_3'\left(\frac{2}{e}\right)$ erhalten wir wegen $\frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{2}{e}, \frac{e}{2}\right) = \left(\frac{e}{2}\right)^2 - \frac{e}{2} \cdot e^{\frac{2}{e} \cdot \frac{e}{2}} = -\frac{e^2}{4}$ mit der Formel aus dem Satz über implizit definierte Funktionen

$$g_3'\left(\frac{2}{e}\right) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{2}{e}, \frac{e}{2}\right)\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{2}{e}, \frac{e}{2}\right) = -(1)^{-1} \cdot \left(-\frac{e^2}{4}\right) = \frac{e^2}{4}.$$

b) $F(x, y) = xy + \frac{1}{2} - \sin(y) \quad \text{für alle } (a, b)^T \in \left\{\left(0, \frac{\pi}{6}\right)^T; \left(\frac{1}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right)^T\right\}$

$$g_1'(0) = \frac{\pi \cdot \sqrt{3}}{9}, \quad g_2'\left(\frac{1}{\pi}\right) = -\frac{\pi^2}{2}$$

Lösung:

Die partiellen Ableitungen von F in einem beliebigen Punkt $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ sind

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = y \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = x - \cos(y).$$

Da diese Funktionen stetig sind, ist die Funktion F auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar.

- (i) Es ist $F\left(0, \frac{\pi}{6}\right) = 0 \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y}\left(0, \frac{\pi}{6}\right) = 0 - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0$. Also ist der Satz über implizit definierte Funktionen für den ersten Punkt anwendbar. Das heißt, es gibt offene Umgebungen $U \subseteq \mathbb{R}$ von 0 und $V \subseteq \mathbb{R}$ von $\frac{\pi}{6}$ sowie eine stetig differenzierbare Funktion $g_1: U \rightarrow V$ mit

$$F(x, y) = 0 \iff y = g_1(x) \quad \text{für alle } (x, y)^T \in U \times V.$$

Für die Ableitung $g_1'(0)$ erhalten wir wegen $\frac{\partial F}{\partial x}\left(0, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$ mit der Formel aus dem Satz über implizit definierte Funktionen

$$g_1'(0) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\left(0, \frac{\pi}{6}\right)\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}\left(0, \frac{\pi}{6}\right) = -\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-1} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi \cdot \sqrt{3}}{9}.$$

- (ii) Es ist $F\left(\frac{1}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{1}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi} - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi} - 0 = \frac{1}{\pi} \neq 0$. Also ist der Satz über implizit definierte Funktionen für den zweiten Punkt anwendbar. Das heißt, es gibt offene Umgebungen $U \subseteq \mathbb{R}$ von $\frac{1}{\pi}$ und $V \subseteq \mathbb{R}$ von $\frac{\pi}{2}$ sowie eine stetig differenzierbare Funktion $g_2: U \rightarrow V$ mit

$$F(x, y) = 0 \iff y = g_2(x) \quad \text{für alle } (x, y)^T \in U \times V.$$

Für die Ableitung $g_2'\left(\frac{1}{\pi}\right)$ erhalten wir wegen $\frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{1}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ mit der Formel aus dem Satz über implizit definierte Funktionen

$$g_2'\left(\frac{1}{\pi}\right) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{1}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right)\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{1}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right) = -\left(\frac{1}{\pi}\right)^{-1} \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi^2}{2}.$$

**Aufgabe 36.201** (Satz über implizit definierte Funktionen)

Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) &:= x + y - e^{y+2z} + e^{x+y+z} = 0 \\ F_2(x, y, z) &:= x + y + z + 2 \cdot \sin(x + y + z) = 0. \end{aligned}$$

Lösung:

Wir betrachten analog zur Notation des Satzes das Vektorfeld

$$\vec{F}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad (x, y, z)^T \mapsto (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z))^T.$$

- a) Zeigen Sie mittels des Satzes über implizit definierte Funktionen, dass dieses Gleichungssystem in einer Umgebung des Nullpunkts nach $(y, z)^T$ aufgelöst werden kann.

Lösung:

Es sind zwei Voraussetzungen des Satzes nachzuprüfen:

- (i) Als erstes kontrollieren wir, ob der Nullpunkt tatsächlich die Gleichungen erfüllt. Das ist hier der Fall:

$$\begin{aligned} F_1(0, 0, 0) &= 0 + 0 - e^{0+2 \cdot 0} + e^{0+0+0} = -e^0 + e^0 = 0 \\ \text{und} \quad F_2(0, 0, 0) &= 0 + 0 + 0 + 2 \cdot \sin(0 + 0 + 0) = 2 \cdot \sin(0) = 2 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

- (ii) Die Auflösung nach $(y, z)^T$, das heißt, in der Form $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$, ist nach dem Satz über implizit definierte Funktionen möglich, falls die Jacobi-Matrix bezüglich der Variablen $(y, z)^T$ invertierbar ist.

Das ist ebenfalls erfüllt, denn die Ableitungen

$$\begin{aligned} \partial_y F_1(x, y, z) &= 1 - e^{y+2z} + e^{x+y+z} & \partial_z F_1(x, y, z) &= -2 \cdot e^{y+2z} + e^{x+y+z} \\ \partial_y F_2(x, y, z) &= 1 + 2 \cdot \cos(x + y + z) & \partial_z F_2(x, y, z) &= 1 + 2 \cdot \cos(x + y + z) \end{aligned}$$

ausgewertet in der Nullstelle ergeben

$$\partial_y F_1(0, 0, 0) = 1, \quad \partial_z F_1(0, 0, 0) = -1, \quad \partial_y F_2(0, 0, 0) = 3 \quad \text{und} \quad \partial_z F_2(0, 0, 0) = 3,$$

also die Jacobi-Matrix

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial (y, z)}(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Da die Determinante dieser Matrix $1 \cdot 3 - 3 \cdot (-1) = 6 \neq 0$ ist, ist die Matrix invertierbar und dementsprechend kann der Satz über implizite Funktionen angewendet werden, um die Auflösbarkeit nach $(y, z)^T$ in der Nähe des Nullpunkts zu garantieren.

- b) Sei nun $\vec{g}: (-\varepsilon; \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Lösungskurve mit $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $\vec{g}(0) = (0, 0)^T$, $F_1(x, \vec{g}(x)) = 0$ und $F_2(x, \vec{g}(x)) = 0$ für alle $x \in (-\varepsilon; \varepsilon)$.

Bestimmen Sie den Tangentialvektor $\vec{g}'$ der Lösungskurve an der Stelle $x = 0$.

$$\vec{g}'(0) = \left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)^T$$

Lösung:

Der Tangentialvektor der Lösungskurve $\vec{g}$ ist gegeben durch

$$\vec{g}'(x) = - \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial (y, z)}(x, \vec{g}(x)) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial \vec{F}}{\partial x}(x, \vec{g}(x)),$$

$$\text{also } \vec{g}'(0) = - \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial (y, z)}(0, \vec{g}(0)) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial \vec{F}}{\partial x}(0, \vec{g}(0)) = - \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial (y, z)}(0, 0, 0) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial \vec{F}}{\partial x}(0, 0, 0).$$

Die partiellen Ableitungen nach x

$$\partial_x F_1(x, y, z) = 1 + e^{x+y+z} \quad \text{und} \quad \partial_x F_2(x, y, z) = 1 + 2 \cdot \cos(x + y + z)$$

ergeben ausgewertet im Nullpunkt

$$\partial_x F_1(0, 0, 0) = 1 + e^{0+0+0} = 1 + e^0 = 1 + 1 = 2$$

$$\text{und} \quad \partial_x F_2(0, 0, 0) = 1 + 2 \cdot \cos(0 + 0 + 0) = 1 + 2 \cdot \cos(0) = 1 + 2 \cdot 1 = 1 + 2 = 3.$$

In Aufgabenteil a) wurde $\frac{\partial \vec{F}}{\partial (y, z)}(0, 0, 0)$ bereits berechnet, so dass diese Matrix hier invertiert werden kann:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \left\| \begin{array}{l} \cdot (-3) \\ + \end{array} \right. \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 1 \end{array} \right) \left\| \begin{array}{l} + \\ \cdot \frac{1}{6} \end{array} \right. \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{array} \right)$$

Eingesetzt ergibt sich der Tangentialvektor zu

$$\vec{g}'(0) = - \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial (y, z)}(0, 0, 0) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial \vec{F}}{\partial x}(0, 0, 0) = - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2} \\ -1 + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$



DiffMehrDim/ImplDefFktn/Ag_ImplDefFktn_2Dnach1DMehrerePunkteProGleichung.tex

Aufgabe 36.202 (Implizit definierte Funktionen)

kr

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^3$ und $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y, z)^T \mapsto F(x, y, z)$ sowie $(a, b, c)^T \in D$ wie in den Aufgabenteilen angegeben. Überprüfen Sie, ob der Hauptsatz über implizit definierte Funktionen Ihnen für die Gleichung „ $F(x, y, z) = 0$ “ in einer Umgebung von $(a, b, c)^T$ die Existenz einer lokal eindeutigen Funktion g mit $z = g(x, y)$ garantiert, und berechnen Sie gegebenenfalls $g'(a, b)$.

- a) $D := \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) := xy + yz^2 + x^2z - z$ für alle $(a, b, c)^T \in \left\{ (0, 1, 1)^T; (1, 1, 0)^T; (1, 0, 1)^T \right\}$
 $g'_1(0, 1) = (-1, -1)^T$, g_2 ex. nicht, g_3 wird nicht garantiert

Lösung:

Zunächst sei bemerkt, dass die Funktion F auf D stetig differenzierbar ist. Benötigt werden außerdem für alle $(x, y, z)^T \in D$ die ersten Ableitungen von F :

$$F_x(x, y, z) = y + 2xz, \quad F_y(x, y, z) = x + z^2 \quad \text{und} \quad F_z(x, y, z) = 2yz + x^2 - 1.$$

$(a, b, c)^T = (0, 1, 1)^T$: Der Hauptsatz über implizit definierte Funktionen garantiert die Existenz von g wegen

$$F(a, b, c) = F(0, 1, 1) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1^2 + 0^2 \cdot 1 - 1 = 0 + 1 + 0 - 1 = 0$$

$$\text{und} \quad F_z(a, b, c) = F_z(0, 1, 1) = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 0^2 - 1 = 2 + 0 - 1 = 1 \neq 0.$$

Nach dem Hauptsatz gilt außerdem

$$g'(0, 1) = \frac{-1}{F_z(0, 1, 1)} \cdot \begin{pmatrix} F_x(0, 1, 1) \\ F_y(0, 1, 1) \end{pmatrix} = \frac{-1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 + 2 \cdot 0 \cdot 1 \\ 0 + 1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^T = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0})^T: \text{ Da}$$

$$F(a, b, c) = F(1, 1, 0) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0^2 + 1^2 \cdot 0 - 0 = 1 + 0 + 0 - 0 = 1 \neq 0$$

ist, kann eine Funktion mit den geforderten Eigenschaften nicht existieren.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^T = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1})^T: \text{ Da}$$

$$F(a, b, c) = F(1, 0, 1) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1^2 + 1^2 \cdot 1 - 1 = 0 + 0 + 1 - 1 = 0$$

$$\text{und } F_z(a, b, c) = F_z(1, 0, 1) = 2 \cdot 0 \cdot 1 + 1^2 - 1 = 0 + 1 - 1 = 0$$

ist, garantiert der Hauptsatz über implizit definierte Funktionen die Existenz einer entsprechenden Funktion nicht.

$$\text{b) } D := \mathbb{R}^3, F(x, y, z) := z \cdot \sin(x^2 \cdot y) \text{ für alle } (a, b, c)^T \in \left\{ \left(2, \frac{\pi}{2}, 0\right)^T; \left(1, \frac{\pi}{2}, 0\right)^T \right\}$$

$$g_1 \text{ wird nicht garantiert, } g'_2\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = (0, 0)^T$$

Lösung:

Zunächst sei bemerkt, dass die Funktion F auf D stetig differenzierbar ist. Benötigt werden außerdem für alle $(x, y, z)^T \in D$ die ersten Ableitungen von F :

$$F_x(x, y, z) = 2xyz \cdot \cos(x^2 \cdot y), \quad F_y(x, y, z) = x^2 \cdot z \cdot \cos(x^2 \cdot y) \quad \text{und} \quad F_z(x, y, z) = \sin(x^2 \cdot y).$$

$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^T = \left(2, \frac{\pi}{2}, 0\right)^T$: Der Hauptsatz über implizit definierte Funktionen garantiert die Existenz von g nicht wegen

$$F(a, b, c) = F\left(2, \frac{\pi}{2}, 0\right) = 0 \cdot \sin\left(2^2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 0 \cdot \sin(2\pi) = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\text{und } F_z(a, b, c) = F_z\left(2, \frac{\pi}{2}, 0\right) = \sin\left(2^2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin(2\pi) = 0.$$

$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^T = \left(1, \frac{\pi}{2}, 0\right)^T$: Der Hauptsatz über implizit definierte Funktionen garantiert die Existenz von g wegen

$$F(a, b, c) = F\left(1, \frac{\pi}{2}, 0\right) = 0 \cdot \sin\left(1^2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 0 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \cdot 1 = 0$$

$$\text{und } F_z(a, b, c) = F_z\left(1, \frac{\pi}{2}, 0\right) = \sin\left(1^2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \neq 0.$$

Nach dem Hauptsatz gilt außerdem

$$g'\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{F_z\left(1, \frac{\pi}{2}, 0\right)} \cdot \begin{pmatrix} F_x\left(1, \frac{\pi}{2}, 0\right) \\ F_y\left(1, \frac{\pi}{2}, 0\right) \end{pmatrix} = \frac{-1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 0 \cdot \cos\left(1^2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \\ 1^2 \cdot 0 \cdot \cos\left(1^2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{c) } D := \left\{ (r, s, t)^T \in \mathbb{R}^3 \mid t \neq -2s \right\}, F(x, y, z) := \frac{x}{2y+z} - \frac{1}{4} \text{ und } (a, b, c)^T := (1, 1, 2)^T$$

$$g'(1, 1) := (4, -2)^T$$

Lösung:

Zunächst sei bemerkt, dass die Funktion F auf D stetig differenzierbar ist. Benötigt werden außerdem für alle $(x, y, z)^T \in D$ die ersten Ableitungen von F :

$$F_x(x, y, z) = \frac{1}{2y+z}, \quad F_y(x, y, z) = \frac{-2x}{(2y+z)^2} \quad \text{und} \quad F_z(x, y, z) = \frac{-x}{(2y+z)^2}.$$

$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^T = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2})^T$: Der Hauptsatz über implizit definierte Funktionen garantiert die Existenz von g wegen

$$F(a, b, c) = F(1, 1, 2) = \frac{1}{2 \cdot 1 + 2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2+2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

$$\text{und } F_z(a, b, c) = F_z(1, 1, 2) = \frac{-1}{(2 \cdot 1 + 2)^2} = \frac{-1}{(2+2)^2} = \frac{-1}{4^2} = \frac{-1}{16} \neq 0.$$

Nach dem Hauptsatz gilt außerdem

$$g'(1, 1) = \frac{-1}{F_z(1, 1, 2)} \cdot \begin{pmatrix} F_x(1, 1, 2) \\ F_y(1, 1, 2) \end{pmatrix} = \frac{-1}{\frac{-1}{16}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2 \cdot 1 + 2} \\ \frac{-2 \cdot 1}{(2 \cdot 1 + 2)^2} \end{pmatrix} = 16 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{-2}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$



DiffMehrDim/MWS/Ag_DifferentiationMehrdimensional_MWSmitExponentialfunktion.tex

Aufgabe 37.203 (Mittelwertsatz im Mehrdimensionalen)

- a) Seien a und b beliebige Zahlen. Zeigen Sie die Ungleichung $|ab| \leq \frac{1}{2} \cdot (|a|^2 + |b|^2)$!

Lösung:

Mit der zweiten binomischen Formel folgt

$$0 \leq (|a| - |b|)^2 = |a|^2 - 2 \cdot |a| \cdot |b| + |b|^2 = |a|^2 - 2 \cdot |ab| + |b|^2.$$

Addiert man $2 \cdot |ab|$ auf beiden Seiten der Ungleichung und teilt danach durch 2, so erhält man die behauptete Ungleichung.

- b) Es seien $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto f(x, y) := e^{xy}$ und $U_2((0, 0)^T) := \{\vec{w} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\vec{w}\| < 2\}$. Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, dass

$$|f(\vec{u}) - f(\vec{v})| < 2e^2 \cdot \|\vec{u} - \vec{v}\| \quad \text{für alle } \vec{u} \in U_2((0, 0)^T) \text{ und alle } \vec{v} \in U_2((0, 0)^T) \text{ gilt.}$$

Lösung:

Es ist $(\text{grad } f)(x, y) = e^{xy} \cdot (y, x)^T$.

Für alle $\vec{u} \in U_2((0, 0)^T)$ und alle $\vec{v} \in U_2((0, 0)^T)$ gibt es laut dem Mittelwertsatz ein $\vec{\xi} =: (\xi_1, \xi_2)^T \in \{t \cdot \vec{u} + (1-t) \cdot \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \mid t \in (0, 1)\} =: S[\vec{u}; \vec{v}]$ mit $f(\vec{u}) - f(\vec{v}) = \langle (\text{grad } f)(\xi_1, \xi_2), \vec{u} - \vec{v} \rangle$.

Es folgt

$$\|(\text{grad } f)(\xi_1, \xi_2)\| = e^{\xi_1 \cdot \xi_2} \cdot \|(\xi_2, \xi_1)^T\| = e^{\xi_1 \cdot \xi_2} \cdot \|(\xi_1, \xi_2)^T\| \leq e^{|\xi_1 \cdot \xi_2|} \cdot \|\xi\|$$

Wegen $\vec{u} \in U_2((0, 0)^T)$ und $\vec{v} \in U_2((0, 0)^T)$ ist auch $S[\vec{u}; \vec{v}] \subseteq U_2((0, 0)^T)$.

Also ist $\vec{\xi} \in U_2((0, 0)^T)$, was $\|\vec{\xi}\| < 2$ nach sich zieht. Aufgabenteil a) liefert dann

$$\|(\text{grad } f)(\xi_1, \xi_2)\| \leq e^{|\xi_1 \cdot \xi_2|} \cdot \|\xi\| \leq e^{\frac{1}{2} \cdot (|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2)} \cdot \|\xi\| = e^{\frac{1}{2} \cdot \|\xi\|^2} \cdot \|\xi\| \leq e^{\frac{1}{2} \cdot 2^2} \cdot 2 = 2e^2.$$

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erhalten wir schließlich

$$|f(\vec{u}) - f(\vec{v})| = |\langle (\text{grad } f)(\xi_1, \xi_2), \vec{u} - \vec{v} \rangle| \leq \|(\text{grad } f)(\xi_1, \xi_2)\| \cdot \|\vec{u} - \vec{v}\| < 2e^2 \cdot \|\vec{u} - \vec{v}\|.$$

Aufgabenblatt 38

DiffMehrDim/Taylor



DiffMehrDim/Taylor/Ag_DiffMehrDim_Taylor3DLinearMitRestgliedabschaetzung.tex

Aufgabe 38.204 (lineares Taylorpolynom im Mehrdimensionalen)

spf

Seien $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x \ y \ z)^T \mapsto f(x, y, z) := y^2 + z \cdot \sin(x)$ und $\vec{a} := \left(\frac{\pi}{4} \ -1 \ \sqrt{2}\right)^T$.

Geben Sie das Taylorpolynom $T_{1,f,\vec{a}}$ an und zeigen Sie $|f(x, y, z) - T_{1,f,\vec{a}}(x, y, z)| \leq \frac{41}{2000}$ für alle $(x \ y \ z)^T \in D := \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{v} - \vec{a}\| \leq \frac{1}{10}\}$!

$$T_{1,f,\vec{a}}(x, y, z) = -1 - \frac{\pi}{4} + x - 2y + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot z$$

Tipps: Für die „Zwischenstelle“ $\vec{\xi}$ existiert ein $t \in (0; 1)$ mit $\vec{\xi} = \vec{a} + t \cdot \left((x \ y \ z)^T - \vec{a}\right)$.

Vielleicht wollen Sie $\varphi_{t,x} := \frac{\pi}{4} + t \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ als Abkürzung verwenden.

Lösung:

Wegen $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ spielt bei höheren Ableitungen von f die Reihenfolge der Differentiation keine Rolle. Für alle $(x \ y \ z)^T \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= y^2 + z \cdot \sin(x), \\ (\text{grad } f)(x, y, z) &= (z \cdot \cos(x) \ 2y \ \sin(x))^T \\ \text{und} \quad H_f(x, y, z) &= \begin{pmatrix} -z \cdot \sin(x) & 0 & \cos(x) \\ 0 & 2 & 0 \\ \cos(x) & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}, -1, \sqrt{2}\right) &= (-1)^2 + \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + 1 = 2 \\ \text{und} \quad (\text{grad } f)\left(\frac{\pi}{4}, -1, \sqrt{2}\right) &= \left(\sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \ 2 \cdot (-1) \ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^T \\ &= \left(\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \ -2 \ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T = \left(1 \ -2 \ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für alle $(x \ y \ z)^T \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} T_{1,f,\vec{a}}(x, y, z) &= f\left(\frac{\pi}{4}, -1, \sqrt{2}\right) + \left\langle (\text{grad } f)\left(\frac{\pi}{4}, -1, \sqrt{2}\right), \left(x - \frac{\pi}{4} \ y + 1 \ z - \sqrt{2}\right)^T \right\rangle \\ &= 2 + 1 \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + (-2) \cdot (y + 1) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (z - \sqrt{2}) \\ &= 2 + x - \frac{\pi}{4} - 2y - 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot z - 1 \\ &= -1 - \frac{\pi}{4} + x - 2y + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot z. \end{aligned}$$

Für das Restglied existiert ein $t \in (0; 1)$ mit

$$\begin{aligned} R_{1,f,\vec{a}}(x, y, z) &= \frac{1}{2} \cdot \left\langle H_f\left(\varphi_{t,x}, -1 + t \cdot (y + 1), \sqrt{2} + t \cdot (z - \sqrt{2})\right), \begin{pmatrix} x - \frac{\pi}{4} \\ y + 1 \\ z - \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x - \frac{\pi}{4} \\ y + 1 \\ z - \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left\langle \begin{pmatrix} -(\sqrt{2} + t \cdot (z - \sqrt{2})) \cdot \sin(\varphi_{t,x}) \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos(\varphi_{t,x}) \cdot (z - \sqrt{2}) \\ 2 \cdot (y + 1) \\ \cos(\varphi_{t,x}) \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x - \frac{\pi}{4} \\ y + 1 \\ z - \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= -\left(\sqrt{2} + t \cdot (z - \sqrt{2})\right) \cdot \frac{\sin(\varphi_{t,x})}{2} \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\cos(\varphi_{t,x})}{2} \cdot (z - \sqrt{2}) \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\ &\quad + (y + 1)^2 + \frac{\cos(\varphi_{t,x})}{2} \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot (z - \sqrt{2}), \end{aligned}$$

wobei $\varphi_{t,x} := \frac{\pi}{4} + t \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ abgekürzt wurde.

Für alle $(x \ y \ z)^T \in \mathbb{R}^3$ mit $\|(x \ y \ z) - \vec{a}^T\| \leq \frac{1}{10}$ gilt auch $|x - \frac{\pi}{4}| \leq \frac{1}{10}$ und $|z - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{10}$.
Mit der Dreiecksungleichung und $|t| < 1$ ergibt sich wegen $|\sin(\varphi_{t,x})| \leq 1$ und $|\cos(\varphi_{t,x})| \leq 1$

$$\begin{aligned} |R_{1,f,\vec{a}}(x, y, z)| &\leq \left(\sqrt{2} + |t| \cdot |z - \sqrt{2}| \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot |x - \frac{\pi}{4}|^2 + \frac{1}{2} \cdot |z - \sqrt{2}| \cdot |x - \frac{\pi}{4}| \\ &\quad + |y + 1|^2 + \frac{1}{2} \cdot |x - \frac{\pi}{4}| \cdot |z - \sqrt{2}| \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot |x - \frac{\pi}{4}|^2 + |y + 1|^2 + |x - \frac{\pi}{4}| \cdot |z - \sqrt{2}| + \frac{|t|}{2} \cdot |z - \sqrt{2}| \cdot |x - \frac{\pi}{4}|^2 \\ &\leq \underbrace{|x - \frac{\pi}{4}|^2 + |y + 1|^2 + |z - \sqrt{2}|^2}_{=\|(x \ y \ z)^T - \vec{a}\|^2} + |x - \frac{\pi}{4}| \cdot |z - \sqrt{2}| + \frac{|t|}{2} \cdot |z - \sqrt{2}| \cdot |x - \frac{\pi}{4}|^2 \\ &\leq \frac{1}{100} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{100} = \frac{20}{2000} + \frac{20}{2000} + \frac{1}{2000} = \frac{41}{2000}. \end{aligned}$$



DiffMehrDim/Taylor/Ag_DiffMehrDim_TaylorMATEX.tex

Aufgabe 38.205 (Taylorpolynome)

MATeX

Berechnen Sie das Taylor-Polynom $T_{2,f,(x_0,y_0)}((x,y))$ vom Grad 2 für die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ am Entwicklungspunkt (x_0, y_0) :

a) $f(x, y) = 2x^4 + 2x^3y - 2xy^2 - 2y^3,$
 $(x_0, y_0) = (2, -2),$

$$8(x-2) + 8(y+2) + 24(x-2)^2 + 8(y+2)^2 + 32(x-2)(y+2)$$

Lösung:

Das Taylor-Polynom vom Grad 2 einer Funktion $f(x, y)$ bei (x_0, y_0) ist von der allgemeinen Form

$$\begin{aligned} T_{2,f,(x_0,y_0)}(x, y) &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)(y - y_0) \right). \end{aligned}$$

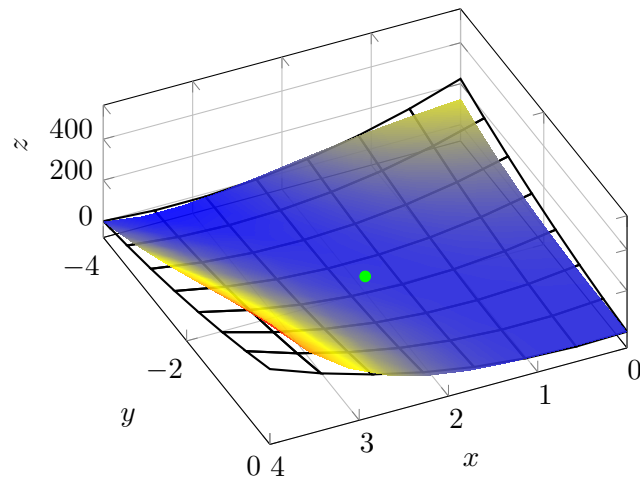
Der Funktionswert im Punkt $(2, -2)$ ist $f(2, -2) = 0$.

Die partiellen Ableitungen von f lauten :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 8x^3 + 6x^2y - 2y^2; & \frac{\partial f}{\partial x}(2, -2) &= 8, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2x^3 - 4xy - 6y^2; & \frac{\partial f}{\partial y}(2, -2) &= 8, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= 24x^2 + 12xy; & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, -2) &= 48, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= -4x - 12y; & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2, -2) &= 16, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= 6x^2 - 4y; & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2, -2) &= 32. \end{aligned}$$

Damit erhält man das Taylor-Polynom von f bei $(x_0, y_0) = (2, -2)$ als

$$\begin{aligned} T_{2,f,(2,-2)}(x, y) &= f(2, -2) + \frac{\partial f}{\partial x}(2, -2) \cdot (x - 2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2, -2) \cdot (y + 2) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, -2) \cdot (x - 2)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2, -2) \cdot (y + 2)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2, -2) \cdot (x - 2)(y + 2) \right) \\ &= 0 + 8 \cdot (x - 2) + 8 \cdot (y + 2) + 24 \cdot (x - 2)^2 + 8 \cdot (y + 2)^2 + 32 \cdot (x - 2) \cdot (y + 2). \end{aligned}$$



Graph der Funktion $f(x, y) = 2x^4 + 2x^3y - 2xy^2 - 2y^3$ (Fläche) und der Taylornäherung der Ordnung 2 am Punkt $(2, -2)$ (Gitter)

b) $f(x, y) = x^3y + x^2y^2 + 2x^3 + 2x^2y - 2xy^2 - 2y^3$,
 $(x_0, y_0) = (2, -2)$,

$$-8(x-2) - 8(y+2) + 12(y+2)^2 + 12(x-2)(y+2)$$

Lösung:

Das Taylor-Polynom vom Grad 2 einer Funktion $f(x, y)$ bei (x_0, y_0) ist von der allgemeinen Form

$$\begin{aligned} T_{2,f,(x_0,y_0)}(x, y) = & f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \\ & + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)^2 \right. \\ & \left. + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)(y - y_0) \right). \end{aligned}$$

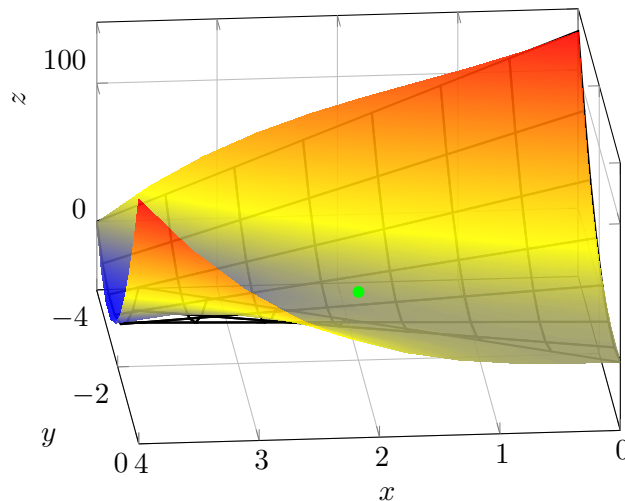
Der Funktionswert im Punkt $(2, -2)$ ist $f(2, -2) = 0$.

Die partiellen Ableitungen von f lauten :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 3x^2y + 2xy^2 + 6x^2 + 4xy - 2y^2; & \frac{\partial f}{\partial x}(2, -2) &= -8, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x^3 + 2x^2y + 2x^2 - 4xy - 6y^2; & \frac{\partial f}{\partial y}(2, -2) &= -8, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= 6xy + 2y^2 + 12x + 4y; & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, -2) &= 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= 2x^2 - 4x - 12y; & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2, -2) &= 24, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= 3x^2 + 4xy + 4x - 4y; & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2, -2) &= 12. \end{aligned}$$

Damit erhält man das Taylor-Polynom von f bei $(x_0, y_0) = (2, -2)$ als

$$\begin{aligned} T_{2,f,(2,-2)}(x, y) &= f(2, -2) + \frac{\partial f}{\partial x}(2, -2) \cdot (x - 2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2, -2) \cdot (y + 2) \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, -2) \cdot (x - 2)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2, -2) \cdot (y + 2)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2, -2) \cdot (x - 2)(y + 2) \right) \\ &= 0 + (-8) \cdot (x - 2) + (-8) \cdot (y + 2) + 12 \cdot (y + 2)^2 + 12 \cdot (x - 2) \cdot (y + 2). \end{aligned}$$



Graph der Funktion $f(x, y) = x^3y + x^2y^2 + 2x^3 + 2x^2y - 2xy^2 - 2y^3$ (Fläche) und der Taylornäherung der Ordnung 2 am Punkt $(2, -2)$ (Gitter)

c) $f(x, y) = \cos(-2x - y)$, $(x_0, y_0) = (-1, 2)$,

$$1 - 2(x+1)^2 - \frac{1}{2}(y-2)^2 - 2(x+1)(y-2)$$

Lösung:

Das Taylor-Polynom vom Grad 2 einer Funktion $f(x, y)$ bei (x_0, y_0) ist von der allgemeinen Form

$$T_{2,f,(x_0,y_0)}(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)(y - y_0) \right).$$

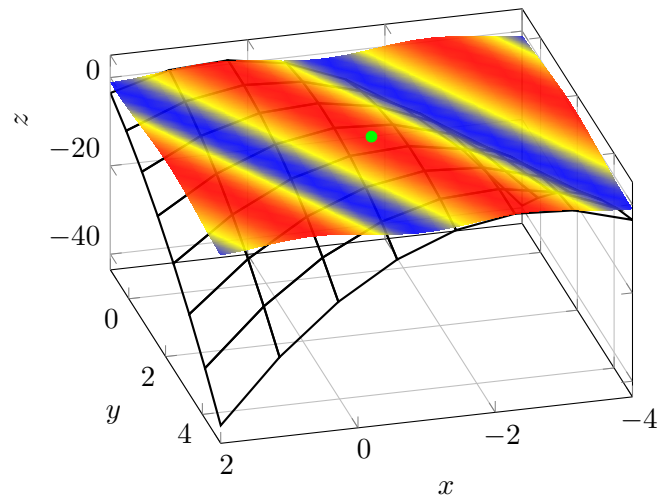
Der Funktionswert im Punkt $(-1, 2)$ ist $f(-1, 2) = 1$.

Die partiellen Ableitungen von f lauten :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2 \sin(-2x - y); & \frac{\partial f}{\partial x}(-1, 2) &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \sin(-2x - y); & \frac{\partial f}{\partial y}(-1, 2) &= 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= -4 \cos(-2x - y); & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, 2) &= -4, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= -\cos(-2x - y); & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, 2) &= -1, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= -2 \cos(-2x - y); & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1, 2) &= -2. \end{aligned}$$

Damit erhält man das Taylor-Polynom von f bei $(x_0, y_0) = (-1, 2)$ als

$$\begin{aligned} T_{2,f,(-1,2)}(x, y) &= f(-1, 2) + \frac{\partial f}{\partial x}(-1, 2) \cdot (x+1) + \frac{\partial f}{\partial y}(-1, 2) \cdot (y-2) \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, 2) \cdot (x+1)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, 2) \cdot (y-2)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1, 2) \cdot (x+1)(y-2) \right) \\ &= 1 + (-2) \cdot (x+1)^2 + \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot (y-2)^2 + (-2) \cdot (x+1) \cdot (y-2). \end{aligned}$$



Graph der Funktion $f(x, y) = \cos(-2x - y)$ (Fläche) und der Taylornäherung der Ordnung 2 am Punkt $(-1, 2)$ (Gitter)

d) $f(x, y) = \cos(y^3 - 2x - 1)$,
 $(x_0, y_0) = (2, 0)$,

$$\cos(5) - 2 \sin(5)(x - 2) - 2 \cos(5)(x - 2)^2$$

Lösung:

Das Taylor-Polynom vom Grad 2 einer Funktion $f(x, y)$ bei (x_0, y_0) ist von der allgemeinen Form

$$\begin{aligned} T_{2,f,(x_0,y_0)}(x, y) = & f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \\ & + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)^2 \right. \\ & \left. + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)(y - y_0) \right). \end{aligned}$$

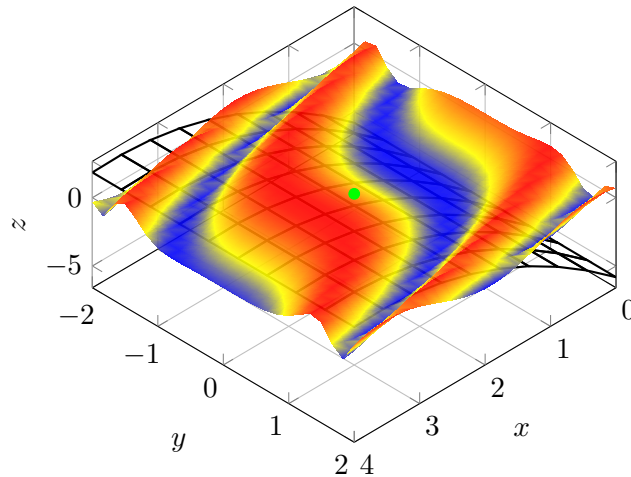
Der Funktionswert im Punkt $(2, 0)$ ist $f(2, 0) = \cos(5)$.

Die partiellen Ableitungen von f lauten :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2 \sin(y^3 - 2x - 1); & \frac{\partial f}{\partial x}(2, 0) &= -2 \sin(5), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -3y^2 \sin(y^3 - 2x - 1); & \frac{\partial f}{\partial y}(2, 0) &= 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= -4 \cos(y^3 - 2x - 1); & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, 0) &= -4 \cos(5), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= -9y^4 \cos(y^3 - 2x - 1) - 6y \sin(y^3 - 2x - 1); & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2, 0) &= 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= 6y^2 \cos(y^3 - 2x - 1); & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Damit erhält man das Taylor-Polynom von f bei $(x_0, y_0) = (2, 0)$ als

$$\begin{aligned} T_{2,f,(2,0)}(x, y) &= f(2, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(2, 0) \cdot (x - 2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2, 0) \cdot (y - 0) \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, 0) \cdot (x - 2)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2, 0) \cdot (y - 0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2, 0) \cdot (x - 2)(y - 0) \right) \\ &= \cos(5) + (-2 \sin(5)) \cdot (x - 2) + (-2 \cos(5)) \cdot (x - 2)^2. \end{aligned}$$



Graph der Funktion $f(x, y) = \cos(y^3 - 2x - 1)$ (Fläche) und der Taylornäherung der Ordnung 2 am Punkt $(2, 0)$ (Gitter)

e) $f(x, y) = e^{(-xy^2+x^2+2y)}$, $(x_0, y_0) = (0, 1)$.

$$e^2 - e^2x + 2e^2(y - 1) + \frac{3}{2}e^2x^2 + 2e^2(y - 1)^2 - 4e^2x(y - 1)$$

Lösung:

Das Taylor-Polynom vom Grad 2 einer Funktion $f(x, y)$ bei (x_0, y_0) ist von der allgemeinen Form

$$\begin{aligned} T_{2,f,(x_0,y_0)}(x, y) = & f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \\ & + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)^2 \right. \\ & \left. + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)(y - y_0) \right). \end{aligned}$$

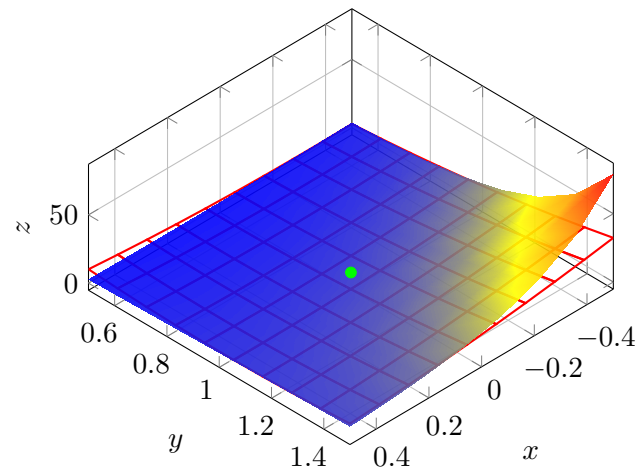
Der Funktionswert im Punkt $(0, 1)$ ist $f(0, 1) = e^2$.

Die partiellen Ableitungen von f lauten :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= -(y^2 - 2x)e^{(-xy^2+x^2+2y)}; & \frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) &= -e^2, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -2(xy - 1)e^{(-xy^2+x^2+2y)}; & \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) &= 2e^2, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= (y^2 - 2x)^2 e^{(-xy^2+x^2+2y)} + 2e^{(-xy^2+x^2+2y)}; & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 1) &= 3e^2, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= 4(xy - 1)^2 e^{(-xy^2+x^2+2y)} - 2xe^{(-xy^2+x^2+2y)}; & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 1) &= 4e^2, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= 2(xy - 1)(y^2 - 2x)e^{(-xy^2+x^2+2y)} - 2ye^{(-xy^2+x^2+2y)}; & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 1) &= -4e^2. \end{aligned}$$

Damit erhält man das Taylor-Polynom von f bei $(x_0, y_0) = (0, 1)$ als

$$\begin{aligned} T_{2,f,(0,1)}(x, y) &= f(0, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) \cdot (x - 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) \cdot (y - 1) \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 1) \cdot (x - 0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 1) \cdot (y - 1)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 1) \cdot (x - 0)(y - 1) \right) \\ &= e^2 + (-e^2) \cdot x + 2e^2 \cdot (y - 1) + \left(\frac{3}{2}e^2 \right) \cdot x^2 + 2e^2 \cdot (y - 1)^2 + (-4e^2) \cdot x \cdot (y - 1). \end{aligned}$$



Graph der Funktion $f(x, y) = e^{(-xy^2 + x^2 + 2y)}$ (Fläche) und der Taylornäherung der Ordnung 2 am Punkt $(0, 1)$ (Gitter)



DiffMehrDim/Umkehrbar/Ag_UmkehrbarMehrDim_Einstieg3D.tex

Aufgabe 39.206 (Umkehrsatz)

Sei $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $(x, y, z)^T \mapsto \vec{f}(x, y, z) := (x + y + z, xy, yz)^T$.

- a) Zeigen Sie, dass $\vec{f}$ in einer Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^3$ des Punktes $(2, 1, 2)^T$ lokal umkehrbar ist!

$$\det(\vec{f}'(2, 1, 2)) = 3$$

Lösung:

Nach dem Umkehrsatz reicht es, wenn die Ableitungsmatrix $\vec{f}'(2, 1, 2)$ regulär ist. Dann ist die Funktion lokal umkehrbar in der Umgebung des Punktes $(2, 1, 2)^T$. Die Ableitungsmatrix ist

$$\vec{f}'(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & x & 0 \\ 0 & z & y \end{pmatrix} \implies \vec{f}'(2, 1, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante ergibt sich zu

$$\det \begin{pmatrix} 1^+ & 1 & 1^+ \\ 1 & 2^+ & 0^- \\ 0 & 2 & 1^+ \end{pmatrix} \stackrel{\text{Laplace 3. Spalte}}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 0 + 2 - 1 = 3 \neq 0$$

und damit ist die Ableitungsmatrix im Punkt $(2, 1, 2)^T$ regulär.

- b) Bestimmen Sie alle $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ mit $\vec{f}(x, y, z) = (5, 2, 2)^T$!

$$(2, 1, 2)^T \text{ und } \left(\frac{1}{2}, 4, \frac{1}{2}\right)^T$$

Lösung:

Die Gleichung $\vec{f}(x, y, z) = (5, 2, 2)^T$ lässt sich in ein nicht-lineares Gleichungssystem übertragen:

$$\vec{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y + z = 5 \\ xy = 2 \\ yz = 2 \end{cases}.$$

Die letzten beiden Gleichungen liefern $x \neq 0$, $y \neq 0$ und $z \neq 0$. Dividiert man beide durch y , so folgt $x = \frac{2}{y} = z$. Setzt man diese Beziehung in die erste Gleichung ein, so folgt

$$\begin{aligned} \frac{2}{y} + y + \frac{2}{y} = 5 &\stackrel{y \neq 0}{\iff} 2 + y^2 + 2 = 5y &\iff y^2 - 5y + 4 = 0 \\ &\iff y^2 - 2 \cdot y \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 4 = 0 &\iff \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = 0 \\ &\iff \left(y - \frac{5}{2} + \frac{3}{2}\right) \cdot \left(y - \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\right) = 0 &\iff (y - 1) \cdot (y - 4) = 0. \end{aligned}$$

Also muss $y = 1$ oder $y = 4$ sein. Mit $x = \frac{2}{y} = z$ ergibt sich also

$$\left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{f}(x, y, z) = (5, 2, 2)^T \right\} = \left\{ (2, 1, 2)^T; \left(\frac{1}{2}, 4, \frac{1}{2}\right)^T \right\}.$$

- c) Berechnen Sie die Ableitung $\left(\vec{f}|_U^{-1}\right)'(5, 2, 2) = J_{\vec{f}|_U^{-1}}(5, 2, 2)$, wobei $\vec{f}|_U$ die Einschränkung von $\vec{f}$ auf den neuen Definitionsbereich U bezeichnet!

$$J_{\vec{f}|_U}^{-1}(5, 2, 2) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Es gilt $\vec{f}(2, 1, 2) = (2 + 1 + 2, 2 \cdot 1, 1 \cdot 2)^T = (5, 2, 2)^T$. Damit gilt nach dem Umkehrsatz

$$\left(\vec{f}|_U^{-1}\right)'(5, 2, 2) = \left(\vec{f}(2, 1, 2)\right)^{-1}.$$

Bemerkung: Es gilt auch $\vec{f}(\frac{1}{2}, 4, \frac{1}{2}) = (5, 2, 2)^T$. Wir betrachten jedoch die Umkehrbarkeit nur in der Umgebung U des Punktes $(2, 1, 2)^T$. Darin ist $(\frac{1}{2}, 4, \frac{1}{2})^T$ nicht enthalten, da $\vec{f}|_U$ bijektiv, also insbesondere injektiv ist.

Invertiere die Matrix $\vec{f}'(2, 1, 2)$ mittels des Gauß-Algorithmus:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left\| \begin{array}{l} \cdot (-1) \\ + \\ \end{array} \right. \iff \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left\| \begin{array}{l} + \\ \cdot (-1) \\ + \end{array} \right. \cdot (-2) \\ & \iff \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -2 & 1 \end{array} \right) \left\| \begin{array}{l} + \\ \\ \cdot (-\frac{2}{3}) \end{array} \right. + \iff \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Damit ist
$$\left(\vec{f}|_U^{-1}\right)'(5, 2, 2) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$



DiffMehrDim/Umkehrbar/Ag_UmkehrbarMehrDim_ErstInvertierenDannEinsetzen2DVierUrbilder.
tex

Aufgabe 39.207 (Umkehrbarkeit)

spf

Sei $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $(x, y)^T \mapsto \vec{f}(x, y) := (2x + y^2, 3xy^2)^T$.

- a) Prüfen Sie, an welchen Stellen $\vec{f}$ nicht lokal umkehrbar mit stetig differenzierbarer Umkehrfunktion ist und zeichnen Sie alle diese Stellen in ein Koordinatensystem ein!

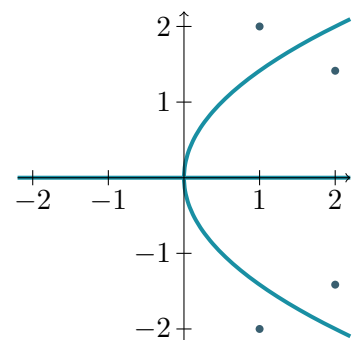
$$\left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \text{ oder } x = \frac{1}{2} \cdot y^2 \right\}$$

Lösung:

Die Komponenten von $\vec{f}$ sind auf $\mathbb{R}^2$ als Polynome stetig differenzierbar. Nach dem Umkehrbarkeitssatz ist $\vec{f}$ überall dort, wo $J_{\vec{f}}$ invertierbar ist, lokal umkehrbar. Für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned} \det(J_{\vec{f}}(x, y)) &= \det \begin{pmatrix} 2 & 2y \\ 3y^2 & 6xy \end{pmatrix} \\ &= 12xy - 6y^3 = -6 \cdot y \cdot (y^2 - 2x) \end{aligned}$$

Also ist $\vec{f}$ für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ mit $y = 0$ oder $x = \frac{1}{2} \cdot y^2$ nicht lokal umkehrbar mit stetig differenzierbarer Umkehrfunktion.



- b) Berechnen Sie dort, wo $\vec{f}$ lokal umkehrbar mit stetig differenzierbarer Umkehrfunktion ist, die Ableitung der Umkehrfunktion!

Hinweis: Sie können $\left(\vec{f}|_U^{-1}\right)'(v, w)$ in Abhängigkeit von x und y mit $(x, y)^T = \vec{f}|_U^{-1}(v, w)$ angeben.

$$J_{\vec{f}}^{-1}(x, y) = \frac{1}{6y \cdot (y^2 - 2x)} \cdot \begin{pmatrix} -6xy & 2y \\ 3y^2 & -2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Um die Ableitung der Umkehrfunktion zu berechnen, kann man die Umkehrfunktion in die Inverse der Ableitung einsetzen.

Wir berechnen also zunächst die Inverse von $J_{\vec{f}}$:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2y & 1 & 0 \\ 3y^2 & 6xy & 0 & 1 \end{array} \right) & \left\| \cdot \frac{-3y^2}{2} \right. \cdot \frac{1}{2} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & y & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 6xy - 3y^3 & \frac{-3y^2}{2} & 1 \end{array} \right) \left\| \cdot \frac{+}{3y^2 - 6x} \right. \cdot \frac{1}{6xy - 3y^3} \\ & \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} - \frac{y^2}{2 \cdot (y^2 - 2x)} & \frac{1}{3 \cdot (y^2 - 2x)} \\ 0 & 1 & \frac{y}{2 \cdot (y^2 - 2x)} & \frac{-1}{3y \cdot (y^2 - 2x)} \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Also ist } J_{\vec{f}}^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{-x}{y^2 - 2x} & \frac{1}{3y^2 - 6x} \\ \frac{y}{2 \cdot (y^2 - 2x)} & \frac{-1}{3y \cdot (y^2 - 2x)} \end{pmatrix} = \frac{1}{6y \cdot (y^2 - 2x)} \cdot \begin{pmatrix} -6xy & 2y \\ 3y^2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Setzt man hier für x die erste Komponente von $\vec{f}|_U^{-1}(v, w)$ und für y die zweite Komponente von $\vec{f}|_U^{-1}(v, w)$ ein, so erhält man $J_{\vec{f}|_U}^{-1}(v, w)$.

- c) Geben Sie für alle möglichen Umkehrfunktionen von $\vec{f}$, deren Definitionsbereich den Punkt $(6, 12)^T$ enthält, die Ableitung der Umkehrfunktion an diesem Punkt an!

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \mp \frac{1}{2} & \pm \frac{1}{12} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{6} \\ \pm \frac{\sqrt{2}}{4} & \mp \frac{\sqrt{2}}{12} \end{pmatrix}$$

Lösung:

Wir bestimmen zunächst alle Punkte $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ mit $\vec{f}(x, y) = (6, 12)^T$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + y^2 & = & 6 \\ 3xy^2 & = & 12 \end{array} \right\} \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y^2 & = & 6 - 2x \\ x \cdot (6 - 2x) & = & 4 \end{array} \right\} \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y^2 & = & 6 - 2x \\ 0 & = & x^2 - 3x + 2 \end{array} \right\}$$

Die zweite Gleichung wird mittels quadratischer Ergänzung gelöst:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \\ &= \left(x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) = (x - 1) \cdot (x - 2). \end{aligned}$$

Für $x = 1$ liefert die erste Gleichung $y^2 = 4$, also $y = 2$ oder $y = -2$. Für $x = 2$ liefert die erste Gleichung $y^2 = 2$, also $y = \sqrt{2}$ oder $y = -\sqrt{2}$. Also gilt

$$\left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{f}(x, y) = (6, 12)^T \right\} = \left\{ (1, -2)^T, (1, 2)^T, (2, -\sqrt{2})^T, (2, \sqrt{2})^T \right\}.$$

In all diesen Punkten lässt sich der lokale Umkehrbarkeitssatz anwenden und es folgt

$$\begin{aligned} J_{\tilde{f}|_U}^{-1}(6, 12) &= \frac{1}{6 \cdot (-2) \cdot ((-2)^2 - 2 \cdot 1)} \cdot \begin{pmatrix} -6 \cdot 1 \cdot (-2) & 2 \cdot (-2) \\ 3 \cdot (-2)^2 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{-12 \cdot 2} \cdot \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ 12 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{oder} \quad J_{\tilde{f}|_U}^{-1}(6, 12) &= \frac{1}{6 \cdot 2 \cdot (2^2 - 2 \cdot 1)} \cdot \begin{pmatrix} -6 \cdot 1 \cdot 2 & 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2^2 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{12 \cdot 2} \cdot \begin{pmatrix} -12 & 4 \\ 12 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{oder} \quad J_{\tilde{f}|_U}^{-1}(6, 12) &= \frac{1}{6 \cdot (-\sqrt{2}) \cdot ((-\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 2)} \cdot \begin{pmatrix} -6 \cdot 2 \cdot (-\sqrt{2}) & 2 \cdot (-\sqrt{2}) \\ 3 \cdot (-\sqrt{2})^2 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{12 \cdot 2} \cdot \begin{pmatrix} 12 \cdot \sqrt{2} & -2 \cdot \sqrt{2} \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{12} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{oder} \quad J_{\tilde{f}|_U}^{-1}(6, 12) &= \frac{1}{6 \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2}^2 - 2 \cdot 2)} \cdot \begin{pmatrix} -6 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} & 2 \cdot \sqrt{2} \\ 3 \cdot \sqrt{2}^2 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{-12 \cdot 2} \cdot \begin{pmatrix} -12 \cdot \sqrt{2} & 2 \cdot \sqrt{2} \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{6} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{12} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



DiffMehrDim/Vektorwertig/Ag_DiffMehrDimKettenregel_Eindimensional.tex

Aufgabe 40.208 („eindimensionale“ Funktionen mit der Kettenregel ableiten)

spf

Berechnen Sie die Ableitung von $f \circ \vec{g}$ einmal, indem Sie die mehrdimensionale Kettenregel verwenden, und einmal, indem Sie $\vec{g}$ in f einsetzen und die sich ergebende Funktion einer Variablen ableiten!

a) $f(x, y) = xy^2, \vec{g}(t) = \begin{pmatrix} t^2 + 1 \\ \sqrt{t} \end{pmatrix}$

$$3t^2 + 1$$

Lösung:

Einsetzen und ableiten liefert

$$f(\vec{g}(t)) = (t^2 + 1) \cdot \sqrt{t}^2 = (t^2 + 1) \cdot t = t^3 + t, \quad \text{also} \quad \frac{d}{dt} f(\vec{g}(t)) = 3t^2 + 1.$$

Die Kettenregel liefert

$$J_f(\vec{g}(t)) \cdot J_{\vec{g}}(t) = \begin{bmatrix} y^2 & 2xy \end{bmatrix}_{x=t^2+1}^{y=\sqrt{t}} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ \frac{1}{2\sqrt{t}} \end{pmatrix} = \sqrt{t}^2 \cdot 2t + 2 \cdot (t^2 + 1) \cdot \sqrt{t} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} = t \cdot 2t + t^2 + 1 = 3t^2 + 1.$$

b) $f(x, y) = \frac{e^x}{y}, \vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 5 \cdot \ln(t) \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix}$

$$6t^5$$

Lösung:

Einsetzen und ableiten liefert

$$f(\vec{g}(t)) = \frac{e^{5 \cdot \ln(t)}}{\frac{1}{t}} = \frac{e^{\ln(t^5)}}{\frac{1}{t}} = t^5 \cdot t = t^6, \quad \text{also} \quad \frac{d}{dt} f(\vec{g}(t)) = 6t^5.$$

Die Kettenregel liefert

$$\begin{aligned} J_f(\vec{g}(t)) \cdot J_{\vec{g}}(t) &= \begin{bmatrix} \frac{e^x}{y} & -\frac{e^x}{y^2} \end{bmatrix}_{x=\ln(t^5)}^{y=\frac{1}{t}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{t} \\ -\frac{1}{t^2} \end{pmatrix} = \frac{e^{\ln(t^5)}}{\frac{1}{t}} \cdot \frac{5}{t} + \frac{-e^{\ln(t^5)}}{\left(\frac{1}{t}\right)^2} \cdot \frac{-1}{t^2} \\ &= t^5 \cdot t \cdot \frac{5}{t} + t^5 \cdot t^2 \cdot \frac{1}{t^2} = 5t^5 + t^5 = 6t^5. \end{aligned}$$

c) $f(x, y) = x^2 + y^2, \vec{g}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) - 2 \end{pmatrix}$

$$-4 \cos(t)$$

Lösung:

Einsetzen liefert

$$f(\vec{g}(t)) = (\cos(t))^2 + (\sin(t) - 2)^2 = (\cos(t))^2 + (\sin(t))^2 - 2 \cdot \sin(t) \cdot 2 + 2^2 = 1 - 4 \cdot \sin(t) + 4,$$

$$\text{also } f(\vec{g}(t)) = 5 - 4 \cdot \sin(t) \text{ und } \frac{d}{dt} f(\vec{g}(t)) = -4 \cdot \cos(t).$$

Die Kettenregel liefert

$$\begin{aligned} J_f(\vec{g}(t)) \cdot J_{\vec{g}}(t) &= \begin{bmatrix} 2x & 2y \end{bmatrix}_{x=\cos(t)}^{y=\sin(t)-2} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = 2 \cdot \cos(t) \cdot (-\sin(t)) + 2 \cdot (\sin(t) - 2) \cdot \cos(t) \\ &= -2 \cdot \cos(t) \cdot \sin(t) + 2 \cdot \sin(t) \cdot \cos(t) - 4 \cdot \cos(t) = -4 \cdot \cos(t). \end{aligned}$$

d) $f(x, y) = \arctan(x) + \arctan(y)$, $\vec{g}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ \frac{1}{t^2} \end{pmatrix}$

0

Lösung:

Einsetzen liefert $f(\vec{g}(t)) = \arctan(t^2) + \arctan(\frac{1}{t^2})$, also mit der eindimensionalen Kettenregel

$$\frac{d}{dt} f(\vec{g}(t)) = \frac{1}{1+(t^2)^2} \cdot 2t + \frac{1}{1+(\frac{1}{t^2})^2} \cdot \frac{-2}{t^3} = \frac{2t}{1+t^4} - \frac{2}{t^3 + \frac{1}{t}} = \frac{2t}{1+t^4} - \frac{2}{\frac{t^4+1}{t}} = 0.$$

Die mehrdimensionale Kettenregel liefert

$$J_f(\vec{g}(t)) \cdot J_{\vec{g}}(t) = \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{1+x^2} & \frac{1}{1+y^2} \end{pmatrix} \right]_{x=t^2}^{y=\frac{1}{t^2}} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ \frac{-2}{t^3} \end{pmatrix} = \frac{1}{1+(t^2)^2} \cdot 2t + \frac{1}{1+(\frac{1}{t^2})^2} \cdot \frac{-2}{t^3} = 0.$$



DiffMehrDim/Vektorwertig/Ag_DiffMehrDimKettenregel_R2NachR2InR2NachR1Einsetzen.tex

Aufgabe 40.209 (Die Kettenregel)

Es sei $F(\vec{z}) := f(\vec{g}(\vec{z}))$ die Verkettung der Funktionen $\vec{g}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Ableitung von F jeweils direkt (erst verketteten, dann ableiten) und durch die Kettenregel:

a) $\vec{g}(x, y) := \begin{pmatrix} x^2 + y \\ y^2 \end{pmatrix}$

$$f(u, v) := u^2 - v$$

$$(4x^3 + 4xy \quad 2x^2)$$

Lösung:

Direktes Einsetzen der Funktionen ergibt

$$F(x, y) = f(\vec{g}(x, y)) = f(x^2 + y, y^2) = (x^2 + y)^2 - y^2 = x^4 + 2x^2y.$$

Die Ableitungsmatrix dieser Funktion $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Einzelzeile

$$F'(x, y) = (4x^3 + 4xy \quad 2x^2).$$

Die Anwendung der Kettenregel führt dagegen auf die folgende Rechnung: Die Ableitungsmatrizen der beteiligten Funktionen sind

$$\vec{g}'(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f'(u, v) = (2u \quad -1).$$

Dabei verwenden wir schon hier andere Variablennamen in f als in $\vec{g}$. Die Kettenregel besagt nun, dass man die innere Funktion in die Ableitungsmatrix der äußeren Funktion einsetzt, und dann (von rechts!) mit der Ableitungsmatrix der inneren Funktion multipliziert:

$$\begin{aligned} F'(x, y) &\stackrel{\text{Regel}}{=} f'(\vec{g}(x, y)) \cdot \vec{g}'(x, y) \stackrel{\text{Ableitungen}}{=} [(2u \quad -1)]_{(u,v)^T = \vec{g}(x,y)} \cdot \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\text{einsetzen}}{=} (2 \cdot (x^2 + y) \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \stackrel{\text{multiplizieren}}{=} (4x^3 + 4xy \quad 2x^2). \end{aligned}$$

$$\text{b) } \vec{g}(x, y) := \begin{pmatrix} \sin(\pi x) \\ \cos(\pi x) \end{pmatrix}$$

$$f(u, v) := u^2 + v^2$$

(0 0)

Lösung:

$$F(x, y) = f(\vec{g}(x, y)) = f(\sin(\pi x), \cos(\pi x)) = (\sin(\pi x))^2 + (\cos(\pi x))^2 = 1.$$

ist eine konstante Funktion, also ist ihre totale Ableitung die Nullmatrix (vom Format 1×2):

$$F'(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Anwendung der Kettenregel führt dagegen auf die folgende Rechnung: Die Ableitungsmatrizen der beteiligten Funktionen sind

$$\vec{g}'(x, y) = \begin{pmatrix} \pi \cdot \cos(\pi x) & 0 \\ -\pi \cdot \sin(\pi x) & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f'(u, v) = \begin{pmatrix} 2u & 2v \end{pmatrix}.$$

An der Ableitungsmatrix von $\vec{g}$ sieht man, dass die zweite Variable y (entspricht der zweiten Spalte) von der Funktion nicht verwendet wird. Anwenden der Kettenregel ergibt nun

$$\begin{aligned} F'(x, y) &\stackrel{\text{Regel}}{=} f'(\vec{g}(x, y)) \cdot \vec{g}'(x, y) \stackrel{\text{Ableitungen}}{=} \begin{bmatrix} 2u & 2v \end{bmatrix}_{(u,v)^T = \vec{g}(x,y)} \cdot \begin{pmatrix} \pi \cdot \cos(\pi x) & 0 \\ -\pi \cdot \sin(\pi x) & 0 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\text{einsetzen}}{=} \begin{pmatrix} 2 \cdot \sin(\pi x) & 2 \cdot \cos(\pi x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \pi \cdot \cos(\pi x) & 0 \\ -\pi \cdot \sin(\pi x) & 0 \end{pmatrix} \stackrel{\text{multiplizieren}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{c) } \vec{g}(x, y) := \begin{pmatrix} 1 \\ 2x - 3y \end{pmatrix}$$

$$f(u, v) := 5uv$$

(10 -15)

Lösung:

Direktes Einsetzen der Funktionen ergibt

$$F(x, y) = f(\vec{g}(x, y)) = f(1, 2x - 3y) = 5 \cdot 1 \cdot (2x - 3y) = 10x - 15y.$$

Das ist eine lineare Funktion mit konstanter Ableitungsmatrix

$$F'(x, y) = \begin{pmatrix} 10 & -15 \end{pmatrix}.$$

Die Anwendung der Kettenregel führt dagegen auf die folgende Rechnung: Die Ableitungsmatrizen der beteiligten Funktionen sind

$$\vec{g}'(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f'(u, v) = \begin{pmatrix} 5v & 5u \end{pmatrix}.$$

Anwenden der Kettenregel ergibt

$$\begin{aligned} F'(x, y) &\stackrel{\text{Regel}}{=} f'(\vec{g}(x, y)) \cdot \vec{g}'(x, y) \stackrel{\text{Ableitungen}}{=} \begin{bmatrix} 5v & 5u \end{bmatrix}_{(u,v)^T = \vec{g}(x,y)} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\text{einsetzen}}{=} \begin{pmatrix} 5 \cdot (2x - 3y) & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \stackrel{\text{multiplizieren}}{=} \begin{pmatrix} 10 & -15 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Aufgabe 40.210** (Kettenregel im komplett mehrdimensionalen Fall)

Seien $\vec{g}: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)^T \mapsto \vec{g}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) := \begin{pmatrix} \alpha\beta + \delta^3 \\ \gamma\delta + \beta^2 - 1 \end{pmatrix}$

und $\vec{h}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ mit $(x, y)^T \mapsto \vec{h}(x, y) := (x^3y^2, xy + x^2, x^2y, x)^T$.

Berechnen Sie jeweils die Ableitungen von $\vec{g} \circ \vec{h}$ und von $\vec{h} \circ \vec{g}$ mit Hilfe der Kettenregel!

Tipp: Benutzen Sie $s := \alpha\beta + \delta^2$ und $t := \gamma\delta + \beta^2 - 1$, um Schreibarbeit zu sparen!

$$J_{\vec{g} \circ \vec{h}}(x, y) = \begin{pmatrix} 5x^4y^2 + 4x^3y^3 + 3x^2 & 2x^5y + 3x^4y^2 \\ 4x^3 + 9x^2y + 2xy^2 & 3x^3 + 2x^2y \end{pmatrix}$$

$$J_{\vec{h} \circ \vec{g}}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \begin{pmatrix} 3\beta s^2 t^2 & s^2 t \cdot (3\alpha t + 4\beta s) & 2\delta s^3 t & s^2 t \cdot (2\gamma s + 9\delta^2 t) \\ 2\beta s + \beta t & (\alpha + \beta) \cdot 2s + \alpha t & \delta s & (\gamma + 6\delta^2) \cdot s + 3\delta^2 t \\ 2\beta s t & 2s \cdot (\alpha t + \beta s) & \delta s^2 & s \cdot (\gamma s + 6\delta^2 t) \\ \beta & \alpha & 0 & 3\delta^2 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha\beta + \delta^2 \\ \gamma\delta + \beta^2 - 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Die Jacobimatrizen von $\vec{g}$ und $\vec{h}$ berechnen sich zu

$$J_{\vec{g}}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \begin{pmatrix} \beta & \alpha & 0 & 3\delta^2 \\ 0 & 2\beta & \delta & \gamma \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J_{\vec{h}}(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2 & 2x^3y \\ y + 2x & x \\ 2xy & x^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Kettenregel liefert

$$J_{\vec{g} \circ \vec{h}}(x, y) = J_{\vec{g}}(\vec{h}(x, y)) \cdot J_{\vec{h}}(x, y) = \begin{pmatrix} xy + x^2 & x^3y^2 & 0 & 3x^2 \\ 0 & 2xy + 2x^2 & x & x^2y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3x^2y^2 & 2x^3y \\ y + 2x & x \\ 2xy & x^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{x,y} & b_{x,y} \\ c_{x,y} & d_{x,y} \end{pmatrix}$$

mit

$$a_{x,y} := (xy + x^2) \cdot 3x^2y^2 + x^3y^2 \cdot (y + 2x) + 0 \cdot 2xy + 3x^2 \cdot 1$$

$$= 3x^3y^3 + 3x^4y^2 + x^3y^3 + 2x^4y^2 + 0 + 3x^2 = 5x^4y^2 + 4x^3y^3 + 3x^2,$$

$$b_{x,y} := (xy + x^2) \cdot 2x^3y + x^3y^2 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 3x^2 \cdot 0$$

$$= 2x^4y^2 + 2x^5y + x^4y^2 + 0 + 0 = 2x^5y + 3x^4y^2,$$

$$c_{x,y} := 0 \cdot 3x^2y^2 + (2xy + 2x^2) \cdot (y + 2x) + x \cdot 2xy + x^2y \cdot 1$$

$$= 0 + 2xy^2 + 4x^2y + 2x^2y + 4x^3 + 2x^2y + x^2y = 4x^3 + 9x^2y + 2xy^2$$

$$\text{und} \quad d_{x,y} := 0 \cdot 2x^3y + (2xy + 2x^2) \cdot x + x \cdot x^2 + x^2y \cdot 0$$

$$= 0 + 2x^2y + 2x^3 + x^3 + 0 = 3x^3 + 2x^2y.$$

Mit $s := \alpha\beta + \delta^2$ und $t := \gamma\delta + \beta^2 - 1$ folgt außerdem

$$J_{\vec{h} \circ \vec{g}}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = J_{\vec{h}}(\vec{g}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)) \cdot J_{\vec{g}}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \begin{pmatrix} 3s^2t^2 & 2s^3t \\ t + 2s & s \\ 2st & s^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta & \alpha & 0 & 3\delta^2 \\ 0 & 2\beta & \delta & \gamma \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3s^2t^2 \cdot \beta + 2s^3t \cdot 0 & 3s^2t^2 \cdot \alpha + 2s^3t \cdot 2\beta & 3s^2t^2 \cdot 0 + 2s^3t \cdot \delta & 3s^2t^2 \cdot 3\delta^2 + 2s^3t \cdot \gamma \\ (t + 2s) \cdot \beta + s \cdot 0 & (t + 2s) \cdot \alpha + s \cdot 2\beta & (t + 2s) \cdot 0 + s \cdot \delta & (t + 2s) \cdot 3\delta^2 + s \cdot \gamma \\ 2st \cdot \beta + s^2 \cdot 0 & 2st \cdot \alpha + s^2 \cdot 2\beta & 2st \cdot 0 + s^2 \cdot \delta & 2st \cdot 3\delta^2 + s^2 \cdot \gamma \\ 1 \cdot \beta + 0 \cdot 0 & 1 \cdot \alpha + 0 \cdot 2\beta & 1 \cdot 0 + 0 \cdot \delta & 1 \cdot 3\delta^2 + 0 \cdot \gamma \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3\beta s^2 t^2 & s^2 t \cdot (3\alpha t + 4\beta s) & 2\delta s^3 t & s^2 t \cdot (2\gamma s + 9\delta^2 t) \\ 2\beta s + \beta t & (\alpha + \beta) \cdot 2s + \alpha t & \delta s & (\gamma + 6\delta) \cdot s + 3\delta^2 t \\ 2\beta s t & 2s \cdot (\alpha t + \beta s) & \delta s^2 & s \cdot (\gamma s + 6\delta^2 t) \\ \beta & \alpha & 0 & 3\delta^2 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 40.211** (Totales Differential)

Berechnen Sie die Ableitungsmatrix (Jacobi-Matrix) von folgenden Funktionen! Schreiben Sie auf, von welchem Raum und in welchen Raum diese Funktionen abbilden:

a) $\vec{g}(x, y) := \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ x^2 - y + 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Die Funktion $\vec{g}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist auf der ganzen Zahlenebene $\mathbb{R}^2$ definiert: es treten keine Nenner oder sonstige Probleme auf, die den Definitionsbereich einschränken würden. Einsetzen der partiellen Ableitungen ergibt

$$J_{\vec{g}}(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -1 \end{pmatrix}.$$

b) $\vec{k}(t) := \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -2\pi \cdot \sin(2\pi t) \\ 2\pi \cdot \cos(2\pi t) \end{pmatrix}$$

Lösung:

Die Funktion $\vec{k}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ bekommt eine reelle Zahl als Eingabe und liefert einen Punkt in der Ebene als Ausgabe. Sie beschreibt also eine Kurve in der Ebene. Ihre Ableitungsmatrix ist einfach die komponentenweise Ableitung, es gibt hier keine partiellen Ableitungen:

$$\frac{d\vec{k}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} -2\pi \cdot \sin(2\pi t) \\ 2\pi \cdot \cos(2\pi t) \end{pmatrix}$$

c) $\vec{h}(x, y, z) := \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y + x \\ 1 - z \\ \sin(\pi xyz) \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \pi yz \cdot \cos(\pi xyz) & \pi xz \cdot \cos(\pi xyz) & \pi xy \cdot \cos(\pi xyz) \end{pmatrix}$$

Lösung:

Die Funktion $\vec{h}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$ bekommt drei Variablen und produziert fünf Werte. Ihre Ableitungsmatrix ist

$$J_{\vec{h}}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \pi yz \cdot \cos(\pi xyz) & \pi xz \cdot \cos(\pi xyz) & \pi xy \cdot \cos(\pi xyz) \end{pmatrix}.$$

Finden Sie, falls möglich, jeweils einen stationären Punkt der Funktion, also einen Punkt, in dem die Ableitung die Nullmatrix ist.

Lösung:

Keine der Jacobimatrizen hat eine Nullstelle: $\partial_y g_2(x, y) = -1 \neq 0$, $\partial_x h_2(x, y, z) = 1 \neq 0$ und für $\vec{k}$ werden sin und cos nicht an ein- und derselben Stelle 0.



DiffMehrDim/Vektorwertig/Ag_Differentiation_Mehrdimensional_Kettenregel3.tex

Aufgabe 40.212 (Kettenregel)

Für die Funktionen $\vec{g}: \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $\vec{h}: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\mathbb{R}_+ := \{t \in \mathbb{R} : t > 0\}$,

$$(x, y, z)^T \mapsto \vec{g}(x, y, z) := \begin{pmatrix} \sin(x) \cdot \cos(y) - z \\ x \cdot \ln(y) + \sin(z) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (u, v)^T \mapsto \vec{h}(u, v) := \begin{pmatrix} \sqrt{u} + v \\ u^2 \cdot v \\ uv \end{pmatrix}.$$

berechnen Sie die Ableitung der Funktion $\vec{f} := \vec{g} \circ \vec{h}$ in dem Sie

- a) die Funktion $\vec{f}$ explizit bestimmen und die Ableitungen berechnen.

Lösung:

$$\vec{f}(u, v) = (\vec{g} \circ \vec{h})(u, v) = \vec{g}(\vec{h}(u, v)) = \vec{g}\left(\begin{pmatrix} \sqrt{u} + v \\ u^2 \cdot v \\ uv \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \sin(\sqrt{u} + v) \cdot \cos(u^2 \cdot v) - uv \\ (\sqrt{u} + v) \cdot \ln(u^2 \cdot v) + \sin(uv) \end{pmatrix}$$

Die partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} \partial_u f_1 &= \frac{\cos(\sqrt{u} + v)}{2 \cdot \sqrt{u}} \cdot \cos(u^2 \cdot v) - 2uv \cdot \sin(\sqrt{u} + v) \cdot \sin(u^2 \cdot v) - v \\ \partial_v f_1 &= \cos(\sqrt{u} + v) \cdot \cos(u^2 \cdot v) - u^2 \cdot \sin(\sqrt{u} + v) \cdot \sin(u^2 \cdot v) - u \\ \partial_u f_2 &= \frac{\ln(u^2 \cdot v)}{2 \cdot \sqrt{u}} + \frac{2 \cdot (\sqrt{u} + v)}{u} + v \cdot \cos(uv) = \frac{\ln(u^2 \cdot v) + 4}{2 \cdot \sqrt{u}} + \frac{2v}{u} + v \cdot \cos(uv) \\ \partial_v f_2 &= \ln(u^2 \cdot v) + \frac{\sqrt{u} + v}{v} + u \cdot \cos(uv) = \ln(u^2 \cdot v) + \frac{\sqrt{u}}{v} + u \cdot \cos(uv) + 1 \end{aligned}$$

- b) die Ableitungen $\vec{g}'$ und $\vec{h}'$ bestimmen und die Kettenregel verwenden.

Lösung:

Bestimme zuerst die partiellen Ableitungen von $\vec{h}(u, v)$

$$\partial_u h_1 = \frac{1}{2\sqrt{u}}, \quad \partial_u h_2 = 2uv, \quad \partial_u h_3 = v, \quad \partial_v h_1 = 1, \quad \partial_v h_2 = u^2 \quad \text{und} \quad \partial_v h_3 = u.$$

Die Ableitungsmatrix ist also $\vec{h}'(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{u}} & 1 \\ 2uv & u^2 \\ v & u \end{pmatrix}.$

Die partiellen Ableitungen von $\vec{g}(x, y, z)$ sind

$$\begin{aligned} \partial_x g_1 &= \cos(x) \cdot \cos(y) & \partial_y g_1 &= -\sin(x) \cdot \sin(y) & \partial_z g_1 &= -1 \\ \partial_x g_2 &= \ln(y) & \partial_y g_2 &= \frac{x}{y} & \partial_z g_2 &= \cos(z) \end{aligned}$$

Ableitungsmatrix: $\vec{g}'(x, y, z) = \begin{pmatrix} \cos(x) \cdot \cos(y) & -\sin(x) \cdot \sin(y) & -1 \\ \ln(y) & \frac{x}{y} & \cos(z) \end{pmatrix}$

Für die Variablen $\vec{h}(u, v)$ eingesetzt:

$$\vec{g}'(h(u, v)) = \vec{g}'\left(\begin{pmatrix} \sqrt{u} + v \\ u^2 \cdot v \\ uv \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{u} + v) \cdot \cos(u^2 \cdot v) & -\sin(\sqrt{u} + v) \cdot \sin(u^2 \cdot v) & -1 \\ \ln(u^2 \cdot v) & \frac{\sqrt{u} + v}{u^2 \cdot v} & \cos(uv) \end{pmatrix}$$

Im letzten Schritt müssen noch die beiden Matrizen multipliziert werden:

$$\begin{aligned} \vec{f}'(u, v) &= \vec{g}'(\vec{h}(u, v)) \cdot \vec{h}'(u, v) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{u} + v) \cdot \cos(u^2 \cdot v) & -\sin(\sqrt{u} + v) \cdot \sin(u^2 \cdot v) & -1 \\ \ln(u^2 \cdot v) & \frac{\sqrt{u} + v}{u^2 \cdot v} & \cos(uv) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{u}} & 1 \\ 2uv & u^2 \\ v & u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das Ergebnis:

- 1. Zeile, 1. Spalte (Ableitung $\partial_u f_1$):

$$\partial_u f_1 = \frac{\cos(\sqrt{u} + v) \cdot \cos(u^2 \cdot v)}{2 \cdot \sqrt{u}} - \sin(\sqrt{u} + v) \cdot \sin(u^2 \cdot v) \cdot 2uv - v$$

- 1. Zeile, 2. Spalte (Ableitung $\partial_v f_1$):

$$\partial_v f_1 = \cos(\sqrt{u} + v) \cdot \cos(u^2 \cdot v) - \sin(\sqrt{u} + v) \cdot \sin(u^2 \cdot v) \cdot u^2 - u$$

- 2. Zeile, 1. Spalte (Ableitung $\partial_u f_2$):

$$\partial_u f_2 = \frac{\ln(u^2 \cdot v)}{2 \cdot \sqrt{u}} + \frac{\sqrt{u} + v}{u^2 \cdot v} \cdot 2uv + \cos(uv) \cdot v = \frac{\ln(u^2 \cdot v) + 4}{2 \cdot \sqrt{u}} + \frac{2v}{u} + v \cdot \cos(uv)$$

- 2. Zeile, 2. Spalte (Ableitung $\partial_v f_2$):

$$\partial_v f_2 = \ln(u^2 \cdot v) + \frac{\sqrt{u} + v}{u^2 \cdot v} \cdot u^2 + \cos(uv) \cdot u = \ln(u^2 \cdot v) + \frac{\sqrt{u}}{v} + u \cdot \cos(uv) + 1$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\cos(\sqrt{u} + v)}{2 \cdot \sqrt{u}} \cdot \cos(u^2 \cdot v) - 2uv \cdot \sin(\sqrt{u} + v) \cdot \sin(u^2 \cdot v) - v & \frac{\ln(u^2 \cdot v) + 4}{2 \cdot \sqrt{u}} + \frac{2v}{u} + v \cdot \cos(uv) \\ \cos(\sqrt{u} + v) \cdot \cos(u^2 \cdot v) - u^2 \cdot \sin(\sqrt{u} + v) \cdot \sin(u^2 \cdot v) - u & \ln(u^2 \cdot v) + \frac{\sqrt{u}}{v} + u \cdot \cos(uv) + 1 \end{pmatrix}^T$$



DiffMehrDim/Vektorwertig/Ag_Differentiation_Mehrdimensional_Klausur_HM2ETIT.tex

Aufgabe 40.213 (Differenzialrechnung in $\mathbb{R}^n$, Teilaufgabe einer Klausur für ETIT aus dem Herbst 2012)

Die Funktion $\vec{g}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $(x, y)^T \mapsto \vec{g}(x, y)$ sei auf $\mathbb{R}^2$ differenzierbar. Die Komponentenfunktionen von $\vec{g}$ werden mit $g_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $g_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet, so dass

$$\vec{g}(x, y) = \begin{pmatrix} g_1(x, y) \\ g_2(x, y) \end{pmatrix} \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

ist. Weiter sei $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto \varphi(t)$ eine differenzierbare Funktion mit

$$g_1 = \varphi \circ g_2 \quad \text{auf } \mathbb{R}^2,$$

d.h. es gilt $g_1(x, y) = \varphi(g_2(x, y))$ für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie

$$\det(D\vec{g}(x, y)) = 0 \quad \text{für alle } (x, y)^T \in \mathbb{R}^2$$

Hinweis zur Notation: $D\vec{g} = \vec{g}' = J_{\vec{g}}$ bezeichnet die Ableitung bzw. Jacobi-Matrix von $\vec{g}$.

Lösung:

Mit der Kettenregel folgt für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$

$$\partial_x \vec{g}(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x g_1(x, y) \\ \partial_x g_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x (\varphi \circ g_2)(x, y) \\ \partial_x g_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'(g_2(x, y)) \cdot (\partial_x g_2(x, y)) \\ \partial_x g_2(x, y) \end{pmatrix}$$

und

$$\partial_y \vec{g}(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_y g_1(x, y) \\ \partial_y g_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y (\varphi \circ g_2)(x, y) \\ \partial_y g_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'(g_2(x, y)) \cdot (\partial_y g_2(x, y)) \\ \partial_y g_2(x, y) \end{pmatrix}.$$

Damit folgt für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} & \det(D\vec{g}(x, y)) \\ &= \det \left(\begin{pmatrix} \varphi'(g_2(x, y)) \cdot (\partial_x g_2(x, y)) & \varphi'(g_2(x, y)) \cdot (\partial_y g_2(x, y)) \\ \partial_x g_2(x, y) & \partial_y g_2(x, y) \end{pmatrix} \right) \\ &= \varphi'(g_2(x, y)) \cdot (\partial_x g_2(x, y)) \cdot (\partial_y g_2(x, y)) - (\partial_x g_2(x, y)) \cdot \varphi'(g_2(x, y)) \cdot (\partial_y g_2(x, y)) \\ &= \varphi'(g_2(x, y)) \cdot (\partial_x g_2(x, y)) \cdot (\partial_y g_2(x, y)) - \varphi'(g_2(x, y)) \cdot (\partial_x g_2(x, y)) \cdot (\partial_y g_2(x, y)) \\ &= 0. \end{aligned}$$



FktAllg/BildUrbild/Ag_BildUrbild_Diskret.tex

Aufgabe 41.214 (Bild und Urbild einer diskreten Abbildung)

Gegeben sei die Abbildung $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ über die Wertetabelle

m	1	2	3	4	5	Sonst
$g(m)$	2	3	1	4	5	6

sowie die Mengen $A = \{0, 2, 6\}$, $B = \mathbb{R}$ und $C = [0, 1]$. Bestimmen Sie die folgenden Mengen:

a) $g(B)$ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Lösung:

Es ist $g(B) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, denn $g(B)$ besteht genau aus den Zahlen in der unteren Zeile der Tabelle.

b) $g(C)$ $\{2, 6\}$

Lösung:

Für jedes $x \in C$ gibt es zwei Möglichkeiten:

- Es ist $x = 1$. Dann ist $g(x) = 2$.
- Es ist $0 \leq x < 1$. Dann trifft die letzte Spalte zu mit $g(x) = 6$.

Also ist $g(C) = \{2, 6\}$.

c) $g^{-1}(A)$ $\mathbb{R} \setminus \{2, 3, 4, 5\}$

Lösung:

Für das Urbild von A prüfen wir, welche Urbilder die einzelnen Elemente von A besitzen:

- Es gibt kein $x \in \mathbb{R}$, so dass $g(x) = 0$ ist, also trägt das Element 0 von A nichts bei.
- $g(x) = 2$ ist nur für $x = 1$ möglich, also liegt 1 in der Urbildmenge.
- $g(x) = 6$ ist für die letzte Spalte erfüllt, dieses Bild entsteht für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 1, 2, 3, 4, 5$.

Vereinigen der drei Fälle ergibt $g^{-1}(A) = \mathbb{R} \setminus \{2, 3, 4, 5\}$.

d) $g^{-1}(B)$ $\mathbb{R}$

Lösung:

Die Urbildmenge von B ist $g^{-1}(B) = \mathbb{R}$, denn für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $g(x) \in B = \mathbb{R}$.

e) $g^{-1}(C)$ $\{3\}$

Lösung:

Es gibt kein $x \in \mathbb{R}$ mit $g(x) < 1$. Weiter ist $g(x) = 1$ nur für $x = 3$ möglich. Also ist $g^{-1}(C) = \{3\}$.



FktAllg/BildUrbild/Ag_BildUrbild_Diskret2.tex

Aufgabe 41.215 (Bild und Urbild einer diskreten Abbildung)

Gegeben sei die Abbildung $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ über die Wertetabelle

m	1	2	3	4	5	Sonst
$g(m)$	2	3	1	4	5	6

sowie die Mengen $A = \{0, 2, 6\}$, $B = \mathbb{R}$ und $C = [0, 1]$. Bestimmen Sie die folgenden Mengen:

a) $g(B)$ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Lösung:

Es ist $g(B) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, denn $g(B)$ besteht genau aus den Zahlen in der unteren Zeile der Tabelle.

b) $g(C)$ $\{2, 6\}$

Lösung:

Für jedes $x \in C$ gibt es zwei Möglichkeiten:

- Es ist $x = 1$. Dann ist $g(x) = 2$.
- Es ist $0 \leq x < 1$. Dann trifft die letzte Spalte zu mit $g(x) = 6$.

Also ist $g(C) = \{2, 6\}$.

c) $g^{-1}(A)$ $\mathbb{R} \setminus \{2, 3, 4, 5\}$

Lösung:

Für das Urbild von A prüfen wir, welche Urbilder die einzelnen Elemente von A besitzen:

- Es gibt kein $x \in \mathbb{R}$, so dass $g(x) = 0$ ist, also trägt das Element 0 von A nichts bei.
- $g(x) = 2$ ist nur für $x = 1$ möglich, also liegt 1 in der Urbildmenge.
- $g(x) = 6$ ist für die letzte Spalte erfüllt, dieses Bild entsteht für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 1, 2, 3, 4, 5$.

Vereinigen der drei Fälle ergibt $g^{-1}(A) = \mathbb{R} \setminus \{2, 3, 4, 5\}$.

d) $g^{-1}(B)$ $\mathbb{R}$

Lösung:

Die Urbildmenge von B ist $g^{-1}(B) = \mathbb{R}$, denn für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $g(x) \in B = \mathbb{R}$.

e) $g^{-1}(C)$ $\{3\}$

Lösung:

Es gibt kein $x \in \mathbb{R}$ mit $g(x) < 1$. Weiter ist $g(x) = 1$ nur für $x = 3$ möglich. Also ist $g^{-1}(C) = \{3\}$.

Bestimmen Sie zudem die Klasseneinteilung/Partitionierung von $\mathbb{R}$ durch die Äquivalenzrelation $a \sim b \Leftrightarrow g(a) \sim g(b)$ sowie die Urbildmengen $g^{-1}([x])$ der Klassen.

Lösung:

Elemente kommen in die gleiche Klasse, wenn sie das gleiche Bild unter g haben. Die Einzelpunkte 1, 2, 3, 4, 5 treten nur jeweils einmal als Bildelement auf, also sind die Klassen dazu einlementig:

$$[1] = \{1\}, [2] = \{2\}, [3] = \{3\}, [4] = \{4\}, [5] = \{5\}$$

weil beispielsweise $g(x) = 2$ nur für $x = 1$ möglich ist, also $g(x) = g(1) = 2$ nur für $x = 1$ (dass der Funktionswert dann 2 ist spielt keine Rolle). Es bleibt der Sonstige-Fall, er muss zwangsläufig alle anderen Elemente enthalten, hier kann man beispielsweise

$$[6] = \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

schreiben aber Vorsicht wegen $[6] = [1/2] = [x]$ für alle $x \neq 1, 2, 3, 4, 5$. Damit sind alle Klassen aufgelistet, denn jede reelle Zahl ist in einer dieser Klassen enthalten. Die Klassenmenge/Faktormenge ist damit

$$\mathbb{R}/\sim = \{[1], [2], \dots, [6]\}.$$

Für die Urbildmengen der Klassen gilt dagegen

$$g^{-1}([1]) = g^{-1}(\{1\}) = \{3\}$$

weil $g(3) = 1$ ist. Analog erhält man die anderen Zuordnungen, und am Schluss

$$g^{-1}([6]) = g^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3, 4, 5\}) = g^{-1}(\mathbb{R}) \setminus g^{-1}(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

weil sich durch Anwendung von g die Reihenfolge der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 ändert, aber nicht die Ziffern. Hier kann man entweder argumentieren, dass man den Restmengenoperator durch das Urbild ziehen darf, oder man argumentiert dass die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 schon in den Urbildmengen der anderen fünf Klassen enthalten sind und die einzige verbleibende Urbildmenge dann die anderen reellen Zahlen enthalten muss.



FktAllg/BildUrbild/Ag_BildUrbild_Parabel.tex

Aufgabe 41.216 (Bild und Urbild einer Parabel)

Gegeben sei die Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := x^2 - x$ sowie die Mengen $A = \{0, 2, 6\}$, $B = \mathbb{R}$ und $C = [0, 1]$.

a) Bestimmen Sie die Bildmengen $f(A)$, $f(B)$ und $f(C)$

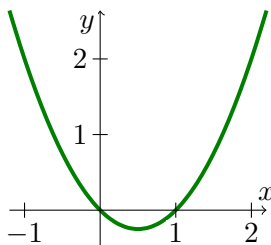
$$f(A) = \{0; 2; 30\}, f(B) = [-\frac{1}{4}; \infty), f(C) = [-\frac{1}{4}; 0]$$

Lösung:

- $f(A) = f(\{0, 2, 6\}) = \{f(0), f(2), f(6)\} = \{0, 2, 30\}$
- $f(B) = f(\mathbb{R}) = \{x^2 - x : x \in \mathbb{R}\} = [-\frac{1}{4}, \infty)$.

Berechnung:

- der Graf der Funktion f ist eine Parabel, die nach oben geöffnet ist (Koeffizient von x^2 ist positiv), also treten beliebig positive Werte auf, die Bildmenge $f(\mathbb{R})$ geht bis ∞ .
- $f(x)$ hat einen Tiefpunkt bei $x = \frac{1}{2}$ und nimmt dort den Wert $f(x) = -\frac{1}{4}$ an, also können nur Werte $y \geq -\frac{1}{4}$ als Werte auftreten.
- Daher $f(\mathbb{R}) = [-\frac{1}{4}, \infty)$.

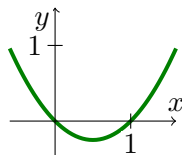


- $f(C) = f([0, 1]) = \{x^2 - x : 0 \leq x \leq 1\} = [-\frac{1}{4}, 0]$.

Dabei berechnet man das Bildbereich für C wie folgt:

- der Graf der Funktion f ist eine Parabel, die nach oben geöffnet ist (Koeffizient von x^2 ist positiv).
- $f(x)$ hat einen Tiefpunkt bei $x = \frac{1}{2}$ und nimmt dort den Wert $f(x) = -\frac{1}{4}$ an, also können nur Werte $y \geq -\frac{1}{4}$ als Werte auftreten.

- Da $f(0) = 0$ und $f(1) = 0$ gerade die Nullstellen der Parabel sind, ist $f([0, 1]) = [-\frac{1}{4}, 0]$.



b) sowie die Urbildmengen $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$ und $f^{-1}(C)$.

$$f^{-1}(A) = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}, f^{-1}(B) = \mathbb{R}, f^{-1}(C) = \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right] \cup \left[1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$$

Lösung:

- $f^{-1}(A)$:

$f(x) = 0$ ist für $x = 0, 1$ erfüllt, $f(x) = 2$ ist für $x = 2, -1$ erfüllt (pq -Formel benutzen) und $f(x) = 6$ für $x = 3, -2$. Zusammenfassen ergibt $f^{-1}(A) = \{0, 1, 2, -1, 3, -2\}$.

- $f^{-1}(B)$:

$f^{-1}(\mathbb{R})$ ist (laut Definition) die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die $f(x) \in \mathbb{R}$ ist. Das sind aber alle, also ist $f^{-1}(B) = \mathbb{R}$.

- $f^{-1}(C)$:

Die Parabel ist nach oben geöffnet und hat Nullstellen bei $x = 0, 1$. Die Gleichung $f(x) = 1$ hat dagegen die Lösungen

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Also nimmt die Parabel Werte in $[0, 1]$ auf dem linken Parabelast für $x_1 \leq x \leq 0$ und auf dem rechten Parabelast für $1 \leq x \leq x_2$ an. Insgesamt also $f^{-1}(C) = [x_1, 0] \cup [1, x_2]$.



FktAllg/BildUrbild/Ag_BildUrbild_ParabelSchoeneZahlen.tex

Aufgabe 41.217 (Bild und Urbild einer Parabel)

Gegeben sei die Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := 4x - x^2$ sowie die Mengen $A = \{0, 3, 4\}$, $B = \mathbb{R}$ und $C = [0, 3]$.

a) Bestimmen Sie die Bildmengen $f(A)$, $f(B)$ und $f(C)$

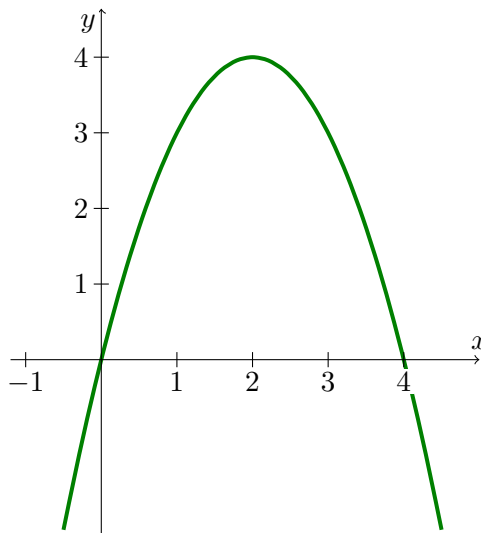
$$f(A) = \{0; 3\}, f(B) = (-\infty; 4], f(C) = [0; 4]$$

Lösung:

- $f(A) = f(\{0, 3, 4\}) = \{f(0)\} \cup \{f(3)\} \cup \{f(4)\} = \{0\} \cup \{3\} \cup \{0\} = \{0; 3\}$
- $f(B) = f(\mathbb{R}) = \{4x - x^2 : x \in \mathbb{R}\} = (-\infty; 4]$.

Berechnung:

- der Graf der Funktion f ist eine Parabel, die nach unten geöffnet ist (Koeffizient von x^2 ist negativ), also treten beliebig negative Werte auf, die Bildmenge $f(\mathbb{R})$ geht bis ∞ .
- $f(x) = 4x - x^2 = x(4 - x)$, also sind $x = 0$ und $x = 4$ die beiden Nullstellen.
- $f(x)$ hat einen Hochpunkt bei $x = 2$ (genau zwischen den beiden Nullstellen) und nimmt dort den Wert $f(2) = 4$ an, also können nur Werte $y \leq 4$ als Werte auftreten.
- Daher $f(\mathbb{R}) = (-\infty; 4]$.



- $f(C) = f([0, 3]) = \{4x - x^2 : 0 \leq x \leq 3\} = [0, 4]$.

Dabei berechnet man das Bildbereich für C wie folgt:

- der Graf der Funktion f ist eine Parabel, die nach unten geöffnet ist (Koeffizient von x^2 ist negativ).
- $f(x)$ hat einen Hochpunkt bei $x = 2$ und nimmt dort den Wert $f(2) = 4$ an, also können nur Werte $y \leq 4$ als Werte auftreten.
- Da $f(0) = 0$ und $f(4) = 0$ gerade die Nullstellen der Parabel sind, ist $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [0, 4]$, insbesondere auch für alle $x \in [0, 3]$. Damit ist $f(C) = [0, 4]$.

b) sowie die Urbildmengen $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$ und $f^{-1}(C)$.

$$f^{-1}(A) = \{0; 1; 2; 3; 4\}, f^{-1}(B) = \mathbb{R}, f^{-1}(C) = [0, 1] \cup [3, 4]$$

Lösung:

- $f^{-1}(A)$:

Löse dafür die Gleichungen (z.B., mittels *abc*-Formel, oder aus dem Graphen in der vorherigen Teilaufgabe ablesen)

$$4x - x^2 = 0 \implies \text{Nullstellen: } 0 \text{ und } 4$$

$$4x - x^2 = 3 \implies \text{Nullstellen: } 1 \text{ und } 3$$

$$4x - x^2 = 4 \implies \text{Nullstelle: } 2$$

Dann ist

$$f^{-1}(A) = f^{-1}\{0; 3; 4\} = f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(\{3\}) \cup f^{-1}(\{4\}) = \{0; 4\} \cup \{1; 3\} \cup \{2\} = \{0; 1; 2; 3; 4\}.$$

- $f^{-1}(B)$:

$f^{-1}(\mathbb{R})$ ist (laut Definition) die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die $f(x) \in \mathbb{R}$ ist. Das sind aber alle, also ist $f^{-1}(B) = \mathbb{R}$.

- $f^{-1}(C)$:

Die Parabel ist nach unten geöffnet und hat Nullstellen bei $x = 0, 4$. Die Gleichung $f(x) = 3$ hat dagegen die Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$.

Also nimmt die Parabel Werte in $[0, 3]$ auf dem linken Parabelast für $0 \leq x \leq x_1 = 1$ und auf dem rechten Parabelast für $3 = x_2 \leq x \leq 4$ an. Insgesamt also $f^{-1}(C) = [0, 1] \cup [3, 4]$.



FktAllg/Eigenschaften/Ag_Abbildungen_Paarabbildungen.tex

Aufgabe 42.218 (Paarabbildungen)

dh

Es seien A und B jeweils Mengen und $f : A \rightarrow A$ sowie $g : B \rightarrow B$ jeweils bijektive Selbstabbildungen. Rechnen Sie nach, dass die Paarabbildung

$$f \times g : A \times B \longrightarrow A \times B, \quad (a, b) \longmapsto (f(a), g(b))$$

ebenfalls bijektiv ist.

Lösung:

Um zu zeigen dass die Abbildung surjektiv ist, müssen wir für jedes Element $(a, b) \in A \times B$ ein Urbild finden. Da $f : A \rightarrow A$ surjektiv ist gibt es ein $x \in A$ mit $f(x) = a$, und da g surjektiv ist gibt es ein $y \in B$ mit $g(y) = b$. Nach Definition der Paarabbildung ist dann $(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y)) = (a, b)$ für das beliebige Paar (a, b) , also ist $f \times g$ ebenfalls surjektiv. Für die Injektivität nehmen wir an, dass

$$(f \times g)(x, y) = (f \times g)(x', y')$$

ist für Elemente $x, x' \in A$ und $y, y' \in B$. Nach Definition der Paarabbildung folgt daraus

$$(f(x), g(y)) = (f(x'), g(y')).$$

Zwei Tupel sind gleich, wenn die Komponenten jeweils gleich sind, also $f(x) = f(x')$ und $g(y) = g(y')$. Da die Abbildungen jeweils injektiv sind folgt $x = x'$ und $y = y'$, damit sind auch die Paare (x, y) und (x', y') gleich. Also ist $f \times g$ injektiv. Damit ist die Paarabbildung bijektiv.

Alternativ kann man Bijektivität über die Existenz der Umkehrabbildung zeigen: Da die Abbildungen für sich jeweils umkehrbar sind gibt es

$$f^{-1} : A \rightarrow A, \quad g^{-1} : B \rightarrow B$$

mit $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{id}_A$ sowie $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = \text{id}_B$. Dann ist wegen der komponentenweisen Auswertung die Paarabbildung $f^{-1} \times g^{-1}$ die Umkehrabbildung zu $f \times g$, denn es ist

$$(f \times g) \circ (f^{-1} \times g^{-1}) = (f \circ f^{-1}) \times (g \circ g^{-1}) = \text{id}_A \times \text{id}_B = \text{id}_{A \times B}$$

und ebenso für die umgekehrte Verkettung. Da $f \times g$ eine Umkehrabbildung besitzt, ist die Paarabbildung bijektiv.



FktAllg/Eigenschaften/Ag_BildUrbild_Schnittoperation.tex

Aufgabe 42.219 (Schnitte von Bildmengen)

dh

Zeigen Sie für Abbildungen $f : A \rightarrow B$, dass $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$ ist, und Gleichheit falls f bijektiv ist (mit Gegenbeispiel, dass im Allgemeinen nicht Gleichheit gilt).

Lösung:

Um die Inklusion $\subseteq$ zu zeigen, müssen wir ein Element der linken Seite nehmen und zeigen, dass es auch in der rechten Seite enthalten ist. Sei also $b \in f(X \cap Y)$, d.h. es gibt ein $x \in X \cap Y$ mit $f(x) = b$. Als Element der Schnittmenge ist $x \in X$ und $x \in Y$ enthalten. Dann ist $f(x) = b$ mit $x \in X$ (also $b \in f(X)$), sowie $f(x) = b$ für das gleiche $x \in Y$ (also $b \in f(Y)$). Da b in beiden Bildmengen enthalten ist, folgt $b \in f(X) \cap f(Y)$. Damit ist die Inklusion gezeigt.

Nun nehmen wir an, dass f bijektiv ist, und zeigen $f(X) \cap f(Y) \subseteq f(X \cap Y)$. Angenommen $b \in f(X) \cap f(Y)$, dann $f(x) = b$ und $f(y) = b$ für $x \in X$ und $y \in Y$. Da f bijektiv (insbesondere injektiv)

ist folgt aus $f(x) = f(y)$ auch $x = y$. Also ist $x \in X \cap Y$ und damit $b \in f(X \cap Y)$. Ein Gegenbeispiel für die Gleichheit der beiden Mengen ist $f(x) = x^2$ auf $\mathbb{R}$ mit $X = (-\infty, 0)$ und $Y = [0, \infty)$. Hier ist $f(X \cap Y) = \emptyset$ wegen $X \cap Y = \emptyset$, aber $f(X) \cap f(Y) = (0, \infty)$.



FktAllg/Eigenschaften/Ag_InjSur_BegriffeAnZweiEndlichenMengenUeben.tex

Aufgabe 42.220 (Injektivität und Surjektivität von Funktionen)

Seien $\Phi := \{\text{Tisch; Hocker; Couch; Bett; Regal}\}$ und $\Omega := \{\text{Deutsch; Englisch; Latein; Spanisch}\}$.

Geben Sie jeweils eine Funktion $f: D \rightarrow W$ mit $x \mapsto f(x)$ und $\{D; W\} = \{\Phi; \Omega\}$ an,

- a) die surjektiv, aber nicht injektiv ist!

Lösung:

Hier muss $D := \Phi$ und $W := \Omega$ gewählt werden, da Ω weniger Elemente hat als Φ , weshalb es keine surjektive Funktion von Ω nach Φ geben kann.

Man kann zum Beispiel $f(\text{Tisch}) := \text{Deutsch}$, $f(\text{Hocker}) := \text{Englisch}$, $f(\text{Couch}) := \text{Latein}$, $f(\text{Bett}) := \text{Spanisch}$ und $f(\text{Regal}) := \text{Deutsch}$ setzen.

- b) die injektiv, aber nicht surjektiv ist!

Lösung:

Hier muss $D := \Omega$ und $W := \Phi$ gewählt werden, da Φ mehr Elemente hat als Ω , weshalb es keine injektive Funktion von Φ nach Ω geben kann.

Man kann zum Beispiel $f(\text{Deutsch}) := \text{Tisch}$, $f(\text{Englisch}) := \text{Hocker}$, $f(\text{Latein}) := \text{Couch}$ und $f(\text{Spanisch}) := \text{Bett}$ setzen.

- c) die weder injektiv noch surjektiv ist!

Lösung:

Hier gibt es sehr viele Möglichkeiten.

Man kann zum Beispiel $D := \Omega$ und $W := \Phi$ mit $f(x) := \text{Tisch}$ für alle $x \in D$ setzen.

- d) Finden Sie eine Menge $\Xi \supseteq \Omega$, so dass es eine bijektive Funktion $g: \Phi \rightarrow \Xi$ mit $t \mapsto g(t)$ gibt! Geben Sie eine solche Funktion g und auch deren Umkehrfunktion an!

Lösung:

Denkbar wäre zum Beispiel die Wahl $\Xi := \Omega \cup \{\text{Französisch}\}$ mit $g(\text{Tisch}) := \text{Deutsch}$, $g(\text{Hocker}) := \text{Englisch}$, $g(\text{Couch}) := \text{Latein}$, $g(\text{Bett}) := \text{Spanisch}$ und $g(\text{Regal}) := \text{Französisch}$.

Dann wäre $h: \Xi \rightarrow \Phi$ mit $s \mapsto h(s)$, $h(\text{Deutsch}) := \text{Tisch}$, $h(\text{Englisch}) := \text{Hocker}$, $h(\text{Latein}) := \text{Couch}$, $h(\text{Spanisch}) := \text{Bett}$ und $h(\text{Französisch}) := \text{Regal}$ die Umkehrfunktion von g .



FktAllg/Eigenschaften/Ag_InjSur_QuadrateUndKartesischesProdukt.tex

Aufgabe 42.221 (Eigenschaften von Abbildungen)

Sei $W := \{0, 2, 4, 6\}$. Entscheiden Sie für jede dieser Abbildungen, ob sie surjektiv/injektiv/bijektiv ist. Geben Sie jeweils einen kleinen Beweis oder ein Gegenbeispiel an, um Ihre Aussagen zu begründen:

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := 2 - 2x$

bijektiv

Lösung:

Die Abbildung f ist surjektiv, denn zu jedem $y \in \mathbb{R}$ können wir ein $x \in \mathbb{R}$ angeben, so dass $f(x) = y$ ist. Dazu löst man die Funktionsgleichung nach x auf:

$$f(x) = y \iff 2 - 2x = y \iff 2 = y + 2x \iff 2 - y = 2x \iff 1 - \frac{y}{2} = x.$$

Für jedes $y \in \mathbb{R}$ ist also $f(x) = y$, wenn man $x = 1 - \frac{y}{2}$ einsetzt. Also ist f surjektiv. Die Abbildung f ist auch injektiv: dazu muss man von der Gleichung $f(x) = f(t)$ ausgehen und $x = t$ nachweisen:

$$f(x) = f(t) \iff 2 - 2x = 2 - 2t \iff -2x = -2t \iff x = t.$$

Also können zwei verschiedene Elemente nicht das gleiche Bild haben und f ist injektiv. Damit ist f auch bijektiv und hat eine Umkehrabbildung. Diese ist $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f^{-1}(x) = 1 - \frac{x}{2}$ (wir haben sie oben schon ausgerechnet).

b) $g: \{1, 2, 3\} \rightarrow W$ mit $g(a) := a^2 - a$

injektiv

Lösung:

Für die Abbildung g können wir alle Abbildungswerte aufschreiben, da der Definitionsbereich endlich ist:

$$g(1) = 0, \quad g(2) = 2 \quad \text{und} \quad g(3) = 6.$$

Also ist $g(\{1, 2, 3\}) = \{0, 2, 6\} \neq W$.

Aus der Liste lesen wir die Eigenschaften ab: 4 ist im Wertebereich W , aber nicht in der Liste. Also ist g nicht surjektiv (kann auch nicht sein, wenn der Wertebereich vier und der Definitionsbereich nur drei Elemente hat).

Andererseits tritt in der Liste jeder Wert nur einmal auf. Also ist g injektiv.

Da die Surjektivität fehlt, ist g nicht bijektiv und es gibt keine Umkehrabbildung.

c) $h: \{0, 1, 3\} \rightarrow W$ mit $h(a) := a^2 - a$

weder noch

Lösung:

Für die Abbildung h können wir alle Abbildungswerte aufschreiben, da der Definitionsbereich endlich ist:

$$h(0) = 0, \quad h(1) = 0 \quad \text{und} \quad h(3) = 6.$$

Also ist $h(\{0, 1, 3\}) = \{0, 6\} \neq W$.

Aus der Liste lesen wir die Eigenschaften ab: Zum Beispiel ist 4 im Wertebereich W , aber nicht in der Liste. Also ist h nicht surjektiv (kann auch nicht sein, wenn der Wertebereich vier und der Definitionsbereich nur drei Elemente hat).

Wegen $0 \neq 1$, aber $h(0) = h(1)$ ist h nicht injektiv.

Die Abbildung ist insbesondere auch nicht bijektiv.

d) $q: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 2]$ mit $q(x, y) := x^2 + y^2$

surjektiv

Lösung:

Die Abbildung q ist nicht ganz einfach zu untersuchen, zumal sich die Intervallgrenzen unterscheiden. Sie ist nicht injektiv, weil beispielsweise $q(0, 1) = q(1, 0) = 1$ ist.

Für die Surjektivität muss man aber etwas mehr arbeiten. Zu jedem $z \in [0, 2]$ müssen wir ein Paar $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ finden mit $q(x, y) = z$. Hierzu machen wir eine Fallunterscheidung.

$z \leq 1$: Für alle $z \in [0, 1]$ gilt $\sqrt{z} \in [0, 1]$ und damit folgt $q(\sqrt{z}, 0) = \sqrt{z}^2 + 0^2 = z + 0 = z$.

$z > 1$: Für alle $z \in (1, 2]$ gilt $z - 1 \in (0, 1]$. Das liefert $\sqrt{z-1} \in (0, 1]$ für alle $z \in (1, 2]$ und damit folgt $q(\sqrt{z-1}, 1) = \sqrt{z-1}^2 + 1^2 = z - 1 + 1 = z$ für alle $z \in (1, 2]$.

Damit ist also für jedes $z \in [0, 2]$ ein Urbild unter q gefunden. Das zeigt die Surjektivität von q .

Da q nicht injektiv ist, ist q auch nicht bijektiv.

e) $z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $z(x) := (x^2, -x)$

injektiv

Lösung:

Die Abbildung z hat $\mathbb{R}$ als Definitionsbereich und das kartesische Produkt $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ als Wertebereich: eine Zahl x wird abgebildet auf das Paar $(x^2, -x)$.

Die Abbildung z ist nicht surjektiv, weil beispielsweise $(-1, 0)$ nicht als Wert auftreten kann (die erste Komponente x^2 ist nie negativ).

Die Abbildung z ist aber trotzdem injektiv, wie folgender Beweis zeigt. Wir fangen wieder bei $z(x) = z(t)$ an und wollen $x = t$ zeigen:

$$z(x) = z(t) \iff (x^2, -x) = (t^2, -t) \stackrel{(*)}{\implies} -x = -t \iff x = t.$$

Also ist z injektiv. Im Schritt $(*)$ wurde verwendet, dass zwei Paare gleich sind, wenn beide Komponenten jeweils übereinstimmen. Wir „vergessen“ nun die erste Komponente und merken uns nur die zweite, deshalb geht der Beweisschritt $(*)$ von links nach rechts, aber nicht von rechts nach links. Die zweite Komponente reicht aus, um $x = t$ nachzuweisen.

Da z nicht surjektiv ist, ist z auch nicht bijektiv.



FktAllg/Eigenschaften/Ag_InjSur_VerschBeweiseVerkettungProdukt.tex

Aufgabe 42.222 (Eigenschaften abstrakt nachweisen)

dh

Zeigen Sie mit einem kleinen Beweis, dass diese Aussagen richtig sind:

a) Sind $g: B \rightarrow C$ und $f: A \rightarrow B$ injektiv, dann ist auch die Verkettung $g \circ f$ injektiv.

Lösung:

Für beliebige $a, a' \in A$ gilt

$$(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a') \stackrel{\text{Definition } \circ}{\implies} g(f(a)) = g(f(a')) \stackrel{g \text{ injektiv}}{\implies} f(a) = f(a') \stackrel{f \text{ injektiv}}{\implies} a = a'.$$

Also ist $g \circ f$ injektiv, weil es nur für gleiche Eingaben den gleichen Funktionswert liefert.

Alternativ kann man umgekehrt argumentieren: Für beliebige $a, a' \in A$ gilt:

$$a \neq a' \stackrel{f \text{ injektiv}}{\implies} f(a) \neq f(a') \stackrel{g \text{ injektiv}}{\implies} g(f(a)) \neq g(f(a')) \stackrel{\text{Definition } \circ}{\implies} (g \circ f)(a) \neq (g \circ f)(a').$$

Da also verschiedene Eingaben immer auf verschiedene Ausgaben von $g \circ f$ führen, ist $g \circ f$ injektiv.

b) Sind $g: B \rightarrow C$ und $f: A \rightarrow B$ bijektiv mit Umkehrabbildungen $g^{-1}: C \rightarrow B$ und $f^{-1}: B \rightarrow A$, dann ist auch $g \circ f$ bijektiv mit $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Lösung:

Es ist zu zeigen, dass $f^{-1} \circ g^{-1}$ die Umkehrabbildung von $g \circ f$ ist. Genauer: $(g \circ f)^{-1}$ ist diejenige Abbildung von C nach A , die $g \circ f$ umkehrt. Dies zeigen wir elementweise: Ist $a \in A$ mit $c = g(f(a))$, dann ist

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(c) \stackrel{\text{Definition } \circ}{=} f^{-1}(g^{-1}(c)) = f^{-1}(g^{-1}(g(f(a)))) \stackrel{g^{-1} \circ g = \text{id}}{=} f^{-1}(f(a)) \stackrel{f^{-1} \circ f = \text{id}}{=} a.$$

Da diese Gleichung für alle $a \in A$ richtig ist, muss $f^{-1} \circ g^{-1}$ die Umkehrabbildung von $g \circ f$ sein, also $f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1}$.

- c) Verkettung ist assoziativ: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (damit macht der Ausdruck $h \circ g \circ f$ erst Sinn).

Lösung:

Einsetzen von Werten $a \in A$ in die Verkettung ergibt

$$(h \circ (g \circ f))(a) \stackrel{\text{Linkes } \circ}{\implies} h((g \circ f)(a)) \stackrel{\text{Def. } \circ}{\implies} h(g(f(a))) \stackrel{\text{Def. } \circ}{\implies} (h \circ g)(f(a)) \stackrel{\text{Def. } \circ}{\implies} ((h \circ g) \circ f)(a).$$

Da die Gleichheit elementweise für jedes $a \in A$ richtig ist, folgt $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ als Gleichheit von Abbildungen.

- d) Ist $f: A \rightarrow B$ irgend eine Abbildung, so ist die Abbildung $A \rightarrow A \times B$, $a \mapsto (a, f(a))$ injektiv. Ist sie auch bijektiv?

Lösung:

Sind $a \neq a'$ aus dem Definitionsbereich A verschieden, so ist $(a, f(a)) \neq (a', f(a'))$ unabhängig von f , weil schon die erste Komponente der Paare verschieden voneinander sind. Also ist die Zuordnung $a \mapsto (a, f(a))$ injektiv. Sie ist aber im Allgemeinen nicht bijektiv/surjektiv. Ein mögliches Gegenbeispiel ist $A = \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$. Das Element $(2, 3) \in \mathbb{R}^2$ hat kein Urbild, weil alle Ausgaben der Form $(a, f(a))$ in diesem Fall die gleichen Komponenten links und rechts im Paar stehen haben.



FktAllg/Eigenschaften/Ag_InjSurj_verschAbbildungen.tex

Aufgabe 42.223 (Abbildungseigenschaften: injektiv, surjektiv, bijektiv)

Entscheiden Sie, welche der Eigenschaften injektiv, surjektiv bzw. bijektiv welcher Abbildung zugeschrieben werden können!

a) $f: \begin{cases} \{0, 1, 2\} & \rightarrow \{0, 1, 2\}, \\ x & \mapsto f(x) := x^2 - x \end{cases}$	-	d) $u: \begin{cases} [\pi, 3\pi] & \rightarrow [-1, 1], \\ x & \mapsto u(x) := \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \end{cases}$	injektiv, surjektiv, bijektiv
b) $g: \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow [0, \infty), \\ x & \mapsto g(x) := \sqrt{x^2} \end{cases}$	surjektiv	e) $v: \begin{cases} \{0, 1\} \times \{a, b\} & \rightarrow \{a, b\} \times \{0, 1\}, \\ (x, y) & \mapsto v(x, y) := (y, x) \end{cases}$	injektiv, surjektiv, bijektiv
c) $h: \begin{cases} \{0, 1, 2\} & \rightarrow \mathbb{R}, \\ x & \mapsto h(x) := \cos\left(\frac{1}{2}\pi x\right) \end{cases}$	injektiv	f) $w: \begin{cases} \{0, 1\} \times \{0, 1\} & \rightarrow \{0, 1\}, \\ (x, y) & \mapsto w(x, y) := y - x \end{cases}$	surjektiv

Lösung:

- Es ist $f(0) = 0$, $f(1) = 0$ und $f(2) = 2$.
Zur Zahl 0 aus dem Zielbereich gibt es zwei Urbilder ($x = 0$ und $x = 1$), daher ist f nicht injektiv.
Zur Zahl 1 aus dem Zielbereich gibt es kein Urbild, daher ist f nicht surjektiv.
 f ist folglich nicht bijektiv.

- Vereinfachung des Funktionsterms liefert $g(x) = \sqrt{x^2} = |x|$.
Wegen $g(-1) = g(1) = 1$ gibt es zum Funktionswert 1 zwei Urbilder, weshalb g nicht injektiv ist.
Zu jeder Zahl $z \in [0, \infty)$ gibt es mindestens ein Urbild, z. B. $x = -z$, weshalb f surjektiv ist.
 g ist folglich nicht bijektiv.
- Die drei Elemente des Definitionsbereichs werden wie folgt abgebildet:
 $h(0) = \cos(0) = 1$, $h(1) = \cos(\frac{1}{2}\pi) = 0$ und $h(2) = \cos(\pi) = -1$.
Zu jeder reellen Zahl aus dem Zielbereich gibt es also höchstens ein Urbild, folglich ist h injektiv.
Zur reellen Zahl 2 beispielsweise gibt es kein Urbild, weshalb h nicht surjektiv ist.
 h ist folglich nicht bijektiv.
- u ist auf dem Intervall $[\pi, 3\pi]$ streng monoton fallend. Zu jeder Zahl aus dem Bildbereich $[-1, 1]$ gibt es deshalb höchstens ein Urbild, d. h. u ist injektiv.
Andererseits wird jede reelle Zahl $z \in [-1, 1]$ tatsächlich als Funktionswert angenommen, nämlich an der Stelle $x = \arcsin(z) + 2\pi$, weshalb u surjektiv ist.
 u ist folglich bijektiv.
- Die Funktion v kann durch eine Wertetabelle dargestellt werden:

Urbild(wert) (= „Eingabe“)	$(0, a)$	$(0, b)$	$(1, a)$	$(1, b)$
Funktionswert (= „Ausgabe“)	$(a, 0)$	$(b, 0)$	$(a, 1)$	$(b, 1)$

Man liest direkt ab, dass v injektiv ist, da in der unteren Zeile kein Element mehrfach auftaucht (es also höchstens ein zugehöriges Urbild gibt) und dass v surjektiv ist, da jedes Element des Wertebereichs in der unteren Zeile auftaucht (es also mindestens ein zugehöriges Urbild gibt).
 v ist folglich bijektiv.

- Wertetabelle für w :

Urbild(wert)	$(0, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 0)$	$(1, 1)$
Funktionswert	0	1	1	0

Man liest ab, dass w nicht injektiv ist, da in der unteren Zeile beide Elemente mehrfach auftauchen (es also zu 0 und 1 mehrere zugehörige Urbilder gibt) und dass w surjektiv ist, da jedes Element des Wertebereichs in der unteren Zeile auftaucht (es also mindestens ein zugehöriges Urbild gibt).
 w ist folglich nicht bijektiv.



FktAllg/Verkettung/Ag_Verkettung_AbbRaumLinksInverse.tex

Aufgabe 43.224 (Abbildungen und Verknüpfungen)

jgl

Sei M die Menge aller Abbildungen von $\{-1, 0, 1\}$ in sich, und $g \in M$ mit $g(x) = -x$ für $x \in \{-1, 0, 1\}$. Weiter werden die Abbildungen $A: M \rightarrow M$ mit $f \mapsto -f$ und $B: M \rightarrow M$ mit $f \mapsto g \cdot f$ betrachtet.

- a) Berechnen Sie die Kompositionen $A \circ A \circ A$ und $B \circ B$. Geben Sie außerdem eine Abbildungen $H: M \rightarrow M$ an, sodass $H \circ A$ die identische Abbildung auf M ist.

Lösung:

Es ist $A \circ A = \text{id}_M$, denn für jedes $f \in M$ ist

$$(A \circ A)(f) = A(A(f)) = -(-f) = f = \text{id}_M(f).$$

Daraus folgt $A \circ A \circ A = A \circ \text{id}_M = A$. Außerdem haben wir die gesuchte Abbildung H gefunden: Mit der Wahl $H := A$ gilt $A \circ H = \text{id}_M$.

- b) Warum gibt es keine Abbildung $K: M \rightarrow M$, sodass $K \circ B$ die identische Abbildung auf M ist?

Lösung:

Für jedes $f \in M$ gilt weiter

$$(B \circ B)(f) = B(B(f)) = B(g \cdot f) = g \cdot (g \cdot f) = g \cdot g \cdot f.$$

Also ist $B \circ B$ die Abbildung von M nach M mit der Vorschrift $f \mapsto g \cdot g \cdot f$. Für die letzte Frage stellen wir zunächst fest, dass für jedes $f \in M$ gilt:

$$(B(f))(0) = (g \cdot f)(0) = g(0) \cdot f(0) = (-0) \cdot f(0) = 0.$$

Das bedeutet, dass jede Funktion im Bild von B zwangsläufig die 0 auf die 0 abbildet. Da das nicht jede Abbildung aus M tut, ist $B(M) \neq M$. Konkret liegt etwa die Funktion $h \in M$ mit $h(0) := 1$, $h(1) := 1$ und $h(-1) := 1$ nicht im Bild von B , da sie die 0 nicht auf 0 abbildet. Somit ist B nicht surjektiv. Da M endlich ist und B eine Abbildung von M nach M ist, ist B auch nicht injektiv. Somit hat B kein Linksinverses. Das heißt, es existiert kein $H \in M$ mit $H \circ B = \text{id}_M$.

$A(f) = -f$, $H := A$; M ist endlich und $B(M) \neq M$, sodass B nicht injektiv ist.



FktAllg/Verkettung/Ag_Verkettung_DiskretHoch100.tex

Aufgabe 43.225 (Abbildungen verketteten)

Es sei $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Abbildung aus Aufgabe 41.215. Bestimmen Sie die Wertetabellen für die folgenden Abbildungen. Dabei wird die Potenz einer Funktion als entsprechend häufige Mehrfachausführung interpretiert:

- a) g^0

$\text{id}_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, m \mapsto m$

Lösung:

Die Abbildung g^0 entsteht durch nullmaliges Anwenden von g . Es ist die identische Abbildung auf $\mathbb{R}$:

m	1	2	3	4	5	Sonst
$g^0(m)$	1	2	3	4	5	m

b) g^1

g

Lösung:

Es ist $g^1 = g$. Die Wertetabelle ist daher die von g :

m	1	2	3	4	5	Sonst
$g(m)$	2	3	1	4	5	6

c) g^2

$1 \mapsto 3, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 2, 4 \mapsto 4, 5 \mapsto 5, \text{Sonst: } 6$

Lösung:

Die Wertetabelle von g^2 stellt man auf, indem man die Wertetabelle von g zweimal durchläuft. Das heißt, man sucht den in der zweiten Zeile erhaltenen Funktionswert in der ersten Zeile:

m	1	2	3	4	5	Sonst
$g^2(m)$	3	1	2	4	5	6

d) g^{100}

g

Lösung:

Nochmaliges Anwenden von g auf die Wertetabelle von g^2 ergibt

m	1	2	3	4	5	Sonst
$g^3(m)$	1	2	3	4	5	6

Wohlgemerkt ist g^3 nicht die identische Abbildung, beispielsweise ist $g^3(10) = 6$ (letzte Spalte) aber $g^0(10) = 10$. Die Wertetabelle für g^{1000} ist die gleiche wie die für g , denn sie wiederholt sich nach jeweils drei Ausführungen von g . Es gilt also $g^1 = g^{1+k \cdot 3}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, und damit ergibt sich

$$g = g^1 = g^4 = g^7 = \dots = g^{994} = g^{997} = g^{1000}.$$



FktAllg/Verkettung/Ag_Verkettung_NotationUeben.tex

Aufgabe 43.226 (Abbildungen verketteten und umkehren)

Seien $\mathbb{R}_0^+ := \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\}$ und $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $z \mapsto p(z) := z^3$. Berechnen Sie für alle $u \in \{f; g; h\}$ jeweils Zuordnungsvorschriften der Abbildungen $u^3 := u \circ u \circ u$, u^{-1} , $u^{-3} := (u^3)^{-1}$ und $p \circ u$:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := 5x$

$$f^3(x) = 125x, f^{-1}(x) = \frac{x}{5}, f^{-3}(x) = \frac{x}{125}, (p \circ f)(x) = 125x^3$$

Lösung:

- $f^3(x) = f(f(f(x))) = f(f(5x)) = f(5 \cdot 5x) = 5 \cdot 5 \cdot 5x = 125x$
- $f^{-1}(x)$: löse die Gleichung $5x = y$ nach x auf: $5x = y \iff x = \frac{1}{5}y$.

Daraus folgt dass $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x$.

- $f^{-3}(x) = f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(x))) = f^{-1}\left(f^{-1}\left(\frac{1}{5}x\right)\right) = f^{-1}\left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}x\right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}x = \frac{1}{125}x$
- $(f(x))^3 = (5x)^3 = 125x^3$

b) $g: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $t \mapsto g(t) := t^2$

$$g^3(t) = t^8, g^{-1}(t) = \sqrt{t}, g^{-3}(t) = \sqrt[8]{t}, (p \circ g)(t) = t^6$$

Lösung:

- $f^3(x) = f(f(f(x))) = f(f(x^2)) = f((x^2)^2) = f(x^4) = (x^4)^2 = x^8$
- Löse die Gleichung $x^2 = y$ nach x auf: $x^2 = y \iff x = \sqrt{y}$. (Beachte, dass hier die Einschränkung des Definitions- und Wertebereiches auf $[0, \infty)$ verwendet wurde!)
Damit ist $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

- $f^{-3}(x) = f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(x))) = f^{-1}(f^{-1}(\sqrt{x})) = f^{-1}(\sqrt{\sqrt{x}}) = \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$
 $= \left(\left(x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{8}}$
- $(f(x))^3 = (x^2)^3 = x^6$

c) $h: \{1; 5; 7\} \rightarrow \{1; 5; 7\}$ mit $1 \mapsto h(1) := 5$, $5 \mapsto h(5) := 1$ und $7 \mapsto h(7) := 7$.

$$h^3 = h^{-1} = h^{-3} = h, p \circ h: \{1; 5; 7\} \rightarrow \{1; 125; 343\} \text{ mit } 1 \mapsto 125, 5 \mapsto 1 \text{ und } 7 \mapsto 343$$

Lösung:

- $f^3(x)$:

$$\begin{aligned} f(f(f(1))) &= f(f(5)) = f(1) = 5 \\ f(f(f(5))) &= f(f(1)) = f(5) = 1 \\ f(f(f(7))) &= f(f(7)) = f(7) = 7 \end{aligned}$$

Daraus folgt dass $f^3(x) = f(x)$.

- f^{-1} :

$$\begin{aligned} f(1) = 5 &\Rightarrow f^{-1}(5) = 1 \\ f(5) = 1 &\Rightarrow f^{-1}(1) = 5 \\ f(7) = 7 &\Rightarrow f^{-1}(7) = 7 \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $f^{-1}(x) = f(x)$.

•

$$\begin{aligned} f^{-3}(x) &= f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(x))) \stackrel{f^{-1}(x)=f(x)}{=} f^{-1}(f^{-1}(f(x))) \\ &\stackrel{f^{-1}(f(x))=x}{=} f^{-1}(x) \stackrel{f^{-1}(x)=f(x)}{=} f(x) \end{aligned}$$

- $(f(x))^3$:

$$\begin{aligned} (f(1))^3 &= 5^3 = 125 \\ (f(5))^3 &= 1^3 = 1 \\ (f(7))^3 &= 7^3 = 343 \end{aligned}$$

Hinweis: Diese Abbildungen sind bijektiv, das brauchen Sie aber nicht zu zeigen.



FktEinDim/EigenschaftenReell/Ag_Funktionen_MengeGraphUmkehrfunktion.tex

Aufgabe 44.227 (Funktion, Umkehrfunktion und Zusammenhänge)

rk

Für jede der folgenden Funktionen führen Sie jeweils folgende Schritte aus:

- bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge sowie die Bildmenge,
- skizzieren Sie den Graph,
- ermitteln Sie die Umkehrfunktion, sofern diese existiert, und
- skizzieren Sie auch deren Graph (im selben Koordinatensystem wie den Graph der Funktion).

a) $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} + 1}$

$$D_f = [0; \infty), W_f = [-4; 1), f^{-1}(x) = \left(\frac{4+x}{1-x}\right)^2$$

Lösung:

Die Funktion $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} + 1}$ ist definiert, falls $x \geq 0$ ist. Dann sind beide Wurzeln erlaubt, und eine Null im Nenner kann wegen $\sqrt{x} \geq 0$ nicht eintreten.

Also ist $D_f := [0; \infty)$ der maximale Definitionsbereich. Umformen des Ausdrucks ergibt

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x} + 1 - 5}{\sqrt{x} + 1} = 1 - \frac{5}{\sqrt{x} + 1}.$$

In dieser Form können wir den Wertebereich schrittweise bestimmen: $\sqrt{x} \in [0; \infty)$, also ist $\sqrt{x} + 1 \in [1; \infty)$. Daraus folgt $\frac{1}{\sqrt{x}+1} \in (0; 1]$, sprich $\frac{5}{\sqrt{x}+1} \in (0; 5]$. Das liefert $-\frac{5}{\sqrt{x}+1} \in [-5; 0)$ und schlussendlich $f(x) = 1 - \frac{5}{\sqrt{x}+1} \in [-4; 1)$.

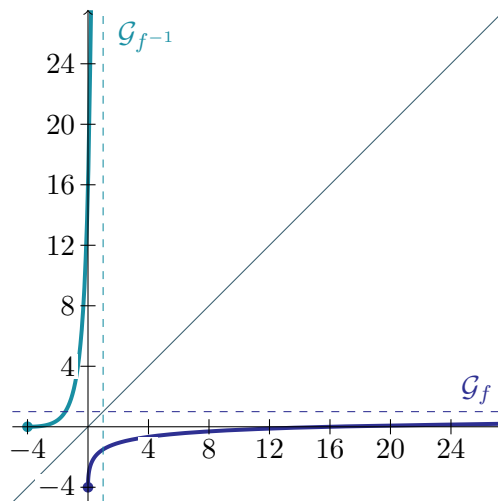
Daher wählen wir $W_f := [-4; 1)$ als Wertebereich und f ist damit surjektiv.

Um die Zuordnungsvorschrift der Umkehrfunktion zu bestimmen, lösen wir die Gleichung $f(x) = y$ nach x auf:

$$\begin{aligned} f(x) = y &\stackrel{\text{s.o.}}{\iff} 1 - \frac{5}{\sqrt{x} + 1} = y && \stackrel{-y + \frac{5}{\sqrt{x}+1}}{\iff} 1 - y = \frac{5}{\sqrt{x} + 1} \\ &\stackrel{\cdot \frac{\sqrt{x}+1}{1-y}}{\iff} \sqrt{x} + 1 = \frac{5}{1-y} && \stackrel{-1}{\iff} \sqrt{x} = \frac{5}{1-y} - 1 \\ &\iff \sqrt{x} = \frac{5 - (1-y)}{1-y} && \iff \sqrt{x} = \frac{4+y}{1-y} && \stackrel{(\cdot)^2}{\iff} x = \left(\frac{4+y}{1-y}\right)^2. \end{aligned}$$

Also ist die Umkehrfunktion f^{-1} von f gegeben durch

$$f^{-1}: [-4; 1) \rightarrow [0; \infty) \quad \text{mit} \quad x \mapsto f^{-1}(x) := \left(\frac{4+x}{1-x}\right)^2.$$



Die Funktionen f auf $[0; \infty)$ sowie f^{-1} auf $[-4; 1)$.

Die Graphen von f und f^{-1} sind an der Diagonalen des Koordinatensystems gespiegelt.

b) $g(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}$

$$D_g = [1; \infty), W_g = [\sqrt{2}; \infty), g^{-1}(x) = \frac{x^4 + 4}{4x^2}$$

Lösung:

Bei dieser Funktion müssen wir $x \geq 1$ voraussetzen, damit die Wurzel $\sqrt{x-1}$ definiert ist. Dann ist auch $\sqrt{x+1}$ definiert. Also setzen wir $D_g := [1; \infty)$.

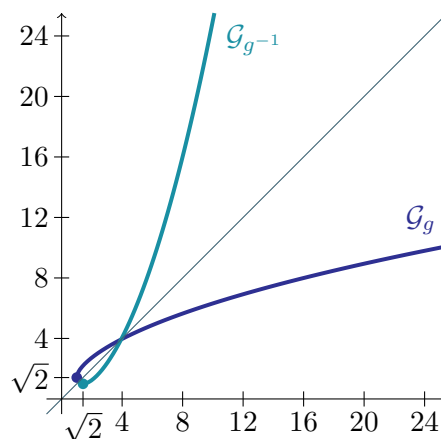
Weil beide Wurzeln nicht negativ sein können, ist $g(x) \geq 0$ für alle $x \in D_g$. Für $x = 1$ wird $g(1) = \sqrt{2}$ erreicht. Die Funktion ist streng monoton wachsend und stetig, also ist der Wertebereich $W_g = [\sqrt{2}; \infty)$. Beachte hierzu $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$.

Auflösen von $g(x) = y$ nach x ergibt:

$$\begin{aligned} g(x) = y &\iff \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} = y & \xLeftrightarrow{-\sqrt{x+1}} \sqrt{x-1} = y - \sqrt{x+1} \\ &\xLeftrightarrow{(\cdot)^2} x-1 = y^2 - 2y \cdot \sqrt{x+1} + x+1 & \xLeftrightarrow{-x+1+2y \cdot \sqrt{x+1}} 2y \cdot \sqrt{x+1} = y^2 + 2 \\ &\xLeftrightarrow{(\cdot)^2} 4y^2 \cdot (x+1) = y^4 + 4y^2 + 4 & \iff 4y^2 \cdot x + 4y^2 = y^4 + 4y^2 + 4 \\ &\xLeftrightarrow{-4y^2} 4y^2 \cdot x = y^4 + 4 & \xLeftrightarrow{\cdot \frac{1}{4y^2}} x = \frac{y^4 + 4}{4y^2}. \end{aligned}$$

Also ist die Umkehrfunktion g^{-1} von g gegeben durch

$$g^{-1}: [\sqrt{2}; \infty) \rightarrow [1; \infty) \quad \text{mit} \quad x \mapsto g^{-1}(x) := \frac{x^4 + 4}{4x^2}.$$



Die Funktionen g auf $[1; \infty)$ sowie g^{-1} auf $[\sqrt{2}; \infty)$.

c) $h(x) = 2^{-3x} + 1$

$$D_h = \mathbb{R}, W_h = (1; \infty), h^{-1}(x) = \frac{-1}{3 \cdot \ln(2)} \cdot \ln(x - 1)$$

Lösung:

Die verallgemeinerte Exponentialfunktion hat keine Definitionslücken auf $\mathbb{R}$. Also ist $D_h := \mathbb{R}$ der Definitionsbereich von h .

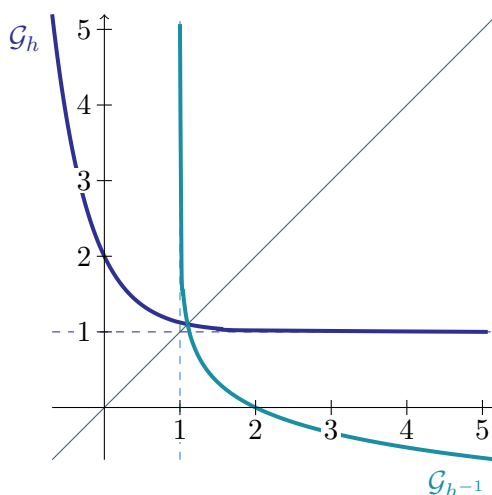
Da die Exponential nur alle nicht-negativen Zahlen annimmt, ergibt sich $W_h = (-1; \infty)$ als Wertebereich von h .

Auflösen von $h(x) = y$ nach x ergibt:

$$\begin{aligned} h(x) = y &\iff 2^{-3x} + 1 = y && \xLeftrightarrow{-1} 2^{-3x} = y - 1 \\ &\xLeftrightarrow{\ln} \ln(2^{-3x}) = \ln(y - 1) && \iff -3x \cdot \ln(2) = \ln(y - 1) \\ &\xLeftrightarrow{\cdot \frac{-1}{3 \cdot \ln(2)}} x = \frac{-1}{3 \cdot \ln(2)} \cdot \ln(y - 1). \end{aligned}$$

Also ist die Umkehrfunktion h^{-1} von h gegeben durch

$$h^{-1}: (1; \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto h^{-1}(x) := \frac{-1}{3 \cdot \ln(2)} \cdot \ln(x - 1).$$



Die Funktionen h auf $\mathbb{R}$ sowie h^{-1} auf $(1; \infty)$.

d) $u(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{x^2}{4}}\right)$

$$D_u = \mathbb{R} \setminus \{0\}, W_u = \mathbb{R}, u^{-1} \text{ existiert nicht}$$

Lösung:

In den Logarithmus dürfen nur positive Zahlen eingesetzt werden. Die Wurzel liefert bereits nicht-negative Zahlen, so dass nur noch die Null als Wert der Wurzel verhindert werden muss.

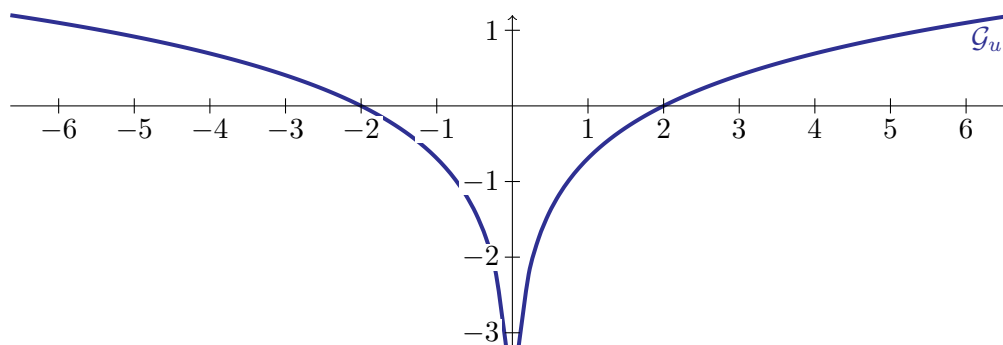
$$\text{Es gilt } \sqrt{\frac{x^2}{4}} = 0 \iff \frac{x^2}{4} = 0 \iff x = 0.$$

Also ist $D_u := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ der Definitionsbereich von u .

Die Logarithmusgesetze liefert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$

$$u(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{x^2}{4}}\right) = \ln\left(\frac{|x|}{2}\right) = \ln(|x|) - \ln(2).$$

Da der Logarithmus alle reelle Zahlen als Wert annimmt, ergibt sich $W_u := \mathbb{R}$ als Wertebereich für u . Da zum Beispiel $u(2) = \ln(|2|) - \ln(2) = \ln(2) - \ln(2) = 0$ und $u(-2) = \ln(|-2|) - \ln(2) = \ln(2) - \ln(2) = 0$ gilt, ist u nicht injektiv und damit nicht umkehrbar.



Die Funktion u auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.



FktEinDim/EigenschaftenReell/Ag_Funktionen_ParameterBestimmenNichtLineareGl.tex

jgl

Aufgabe 44.228 (Funktionsterm spezifizieren)

- a) Bestimmen Sie die Parameter $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R} \setminus \{0; -\frac{1}{2}\}$ einer Funktion

$$f: \left\{ t \in \mathbb{R} \mid (\sin(\pi t))^2 \neq -2c \right\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto f(x) := \frac{a \cdot 4^{bx}}{(\sin(\pi x))^2 + 2c}$$

derart, dass der Graph von f durch die Punkte $(-1; 12)$, $(0; 3)$ und $(\frac{1}{2}; 2)$ verläuft!

$$a = -12, b = -1, c = -2$$

Lösung:

Aus den Bedingungen

$$\begin{aligned} 12 &= f(-1) = \frac{a \cdot 4^{-b}}{(\sin(-\pi))^2 + 2c} = \frac{a \cdot 4^{-b}}{2c} \\ 3 &= f(0) = \frac{a \cdot 4^0}{(\sin(0))^2 + 2c} = \frac{a}{2c} \\ 2 &= f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a \cdot 2^b}{\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 + 2c} = \frac{a \cdot 2^b}{1 + 2c} \end{aligned}$$

folgt, dass a und c aufgrund der zweiten Gleichung ungleich 0 sind (für $c = 0$ wäre 0 nicht im Definitionsbereich von f). Genauso ist $c \neq -\frac{1}{2}$, da sonst $\frac{1}{2}$ nicht im Definitionsbereich von f läge. Multiplikation mit dem jeweiligen Nenner der rechten Seite führt auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} 24c &= a \cdot 4^{-b} \\ 6c &= a \\ 2 + 4c &= a \cdot 2^b \end{aligned}$$

Division der ersten Gleichung durch die zweite liefert

$$4 = 4^{-b} \iff 4^1 = 4^{-b} \iff 1 = -b \iff b = -1.$$

Nach Einsetzen in die dritte Gleichung erhält man mit der zweiten Gleichung

$$6c = a = 4 + 8c,$$

woraus $c = -2$ und $a = -12$ folgt. Damit ergibt sich der Funktionsterm für $a = -12$, $b = -1$ und $c = -2$ zu

$$f(x) = \frac{-12 \cdot 4^{-x}}{(\sin(\pi x))^2 - 4} = -\frac{12}{4^x \cdot ((\sin(\pi x))^2 - 4)} = \frac{3}{4^{x-1} \cdot (4 - (\sin(\pi x))^2)}.$$

- b) Das System der Gleichungen zur Bestimmung der Parameter ist nichtlinear. Begründen Sie dies!

Lösung:

Das System enthält Terme, in denen das Produkt der Variable a mit einem Term, der die Variable b enthält, auftritt. Diese Terme sind nichtlinear und somit auch das System.



FktEinDim/ExpLn/Ag_ExpFkt_AUndBInAMalBHochXAusZweiPktBestimmen.tex

Aufgabe 45.229 (Exponentialfunktionen bestimmen)

SPF

Seien $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ mit $1 \neq b > 0$ und $f_{a;b}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f_{a;b}(x) := a \cdot b^x$. Bestimmen Sie a und b derart, dass die folgenden Mengen eine Teilmenge des Graphen $\mathcal{G}_{f_{a;b}}$ von $f_{a;b}$ bilden!

a) $\{(1; 12)^T; (3; 108)^T\}$

$a = 4, b = 3$

Lösung:

Damit $\{(1; 12)^T; (3; 108)^T\}$ eine Teilmenge von $\mathcal{G}_{f_{a;b}}$ ist, muss $f_{a;b}(1) = 12$ und $f_{a;b}(3) = 108$ gelten. Die Zuordnungsvorschrift von $f_{a;b}$ liefert das nichtlineare Gleichungssystem

$$12 = a \cdot b^1 \quad \text{und} \quad 108 = a \cdot b^3.$$

Dividiert man die zweite Gleichung durch die erste, so ergibt sich

$$9 = \frac{27}{3} = \frac{54}{6} = \frac{108}{12} = \frac{a \cdot b^3}{a \cdot b^1} = b^{3-1} = b^2,$$

sprich $|b| = \sqrt{9} = 3$, was wegen $b > 0$ zu $b = 3$ führt.

Die erste Gleichung des Gleichungssystems ergibt sich damit zu

$$12 = a \cdot 3^1 \iff 12 = a \cdot 3 \iff 4 = a.$$

Also ist $\{(1; 12)^T; (3; 108)^T\}$ eine Teilmenge von $\mathcal{G}_{f_{4;3}}$.

b) $\{(-1; 3)^T; (2; 192)^T\}$

$a = 12, b = 4$

Lösung:

Damit $\{(-1; 3)^T; (2; 192)^T\}$ eine Teilmenge von $\mathcal{G}_{f_{a;b}}$ ist, muss $f_{a;b}(-1) = 3$ und $f_{a;b}(2) = 192$ gelten. Die Zuordnungsvorschrift von $f_{a;b}$ liefert das nichtlineare Gleichungssystem

$$3 = a \cdot b^{-1} \quad \text{und} \quad 192 = a \cdot b^2.$$

Dividiert man die zweite Gleichung durch die erste, so ergibt sich

$$64 = 60 + 4 = \frac{180+12}{3} = \frac{192}{3} = \frac{a \cdot b^2}{a \cdot b^{-1}} = b^{2-(-1)} = b^{2+1} = b^3,$$

sprich $b = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4 \cdot 16} = \sqrt[3]{4 \cdot 4 \cdot 4} = 4$.

Die erste Gleichung des Gleichungssystems ergibt sich damit zu

$$3 = a \cdot 4^{-1} \iff 3 = a \cdot \frac{1}{4} \iff 12 = a.$$

Also ist $\{(-1; 3)^T; (2; 192)^T\}$ eine Teilmenge von $\mathcal{G}_{f_{12;4}}$.

c) $\left\{ \left(\frac{1}{2}; 20\right)^T; (1; 4)^T \right\}$

$$a = 100, b = \frac{1}{25}$$

Lösung:

Damit $\left\{ \left(\frac{1}{2}; 20\right)^T; (1; 4)^T \right\}$ eine Teilmenge von $\mathcal{G}_{f_{a,b}}$ ist, muss $f_{a,b}\left(\frac{1}{2}\right) = 20$ und $f_{a,b}(1) = 4$ gelten. Die Zuordnungsvorschrift von $f_{a,b}$ liefert das nichtlineare Gleichungssystem

$$20 = a \cdot b^{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad 4 = a \cdot b^1.$$

Dividiert man die zweite Gleichung durch die erste, so ergibt sich

$$\frac{1}{5} = \frac{4}{20} = \frac{a \cdot b^1}{a \cdot b^{\frac{1}{2}}} = b^{1-\frac{1}{2}} = b^{\frac{1}{2}},$$

sprich $b = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$.

Die zweite Gleichung des Gleichungssystems ergibt sich damit zu

$$4 = a \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^1 \iff 4 = a \cdot \frac{1}{25} \iff 100 = a.$$

Also ist $\left\{ \left(\frac{1}{2}; 20\right)^T; (1; 4)^T \right\}$ eine Teilmenge von $\mathcal{G}_{f_{100; \frac{1}{25}}}$.

d) $\left\{ \left(0; \frac{5}{2}\right)^T; \left(\frac{5}{2}; 1\right)^T \right\}$

$$a = \frac{5}{2}, b = \frac{\sqrt[5]{500}}{5}$$

Lösung:

Damit $\left\{ \left(0; \frac{5}{2}\right)^T; \left(\frac{5}{2}; 1\right)^T \right\}$ eine Teilmenge von $\mathcal{G}_{f_{a,b}}$ ist, muss $f_{a,b}(0) = \frac{5}{2}$ und $f_{a,b}\left(\frac{5}{2}\right) = 1$ gelten. Die Zuordnungsvorschrift von $f_{a,b}$ liefert das nichtlineare Gleichungssystem

$$\frac{5}{2} = a \cdot b^0 \quad \text{und} \quad 1 = a \cdot b^{\frac{5}{2}}.$$

Dividiert man die zweite Gleichung durch die erste, so ergibt sich

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{a \cdot b^{\frac{5}{2}}}{a \cdot b^0} = b^{\frac{5}{2}-0} = b^{\frac{5}{2}},$$

sprich $b = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt[5]{\frac{2^2}{5^2}} = \sqrt[5]{\frac{4 \cdot 5^3}{5^2 \cdot 5^3}} = \sqrt[5]{\frac{4 \cdot 125}{5^5}} = \frac{\sqrt[5]{500}}{5}.$

Die erste Gleichung des Gleichungssystems liefert direkt

$$\frac{5}{2} = a \cdot b^0 = a \cdot 1 = a.$$

Also ist $\left\{ \left(0; \frac{5}{2}\right)^T; \left(\frac{5}{2}; 1\right)^T \right\}$ eine Teilmenge von $\mathcal{G}_{f_{\frac{5}{2}; \frac{\sqrt[5]{500}}{5}}}$.



FktEinDim/ExpLn/Ag_Exponentialfunktion_GraphenExpLn1_mittel.tex

Aufgabe 45.230 (Graphen von Funktionen, die exp und ln enthalten)

10.1.4

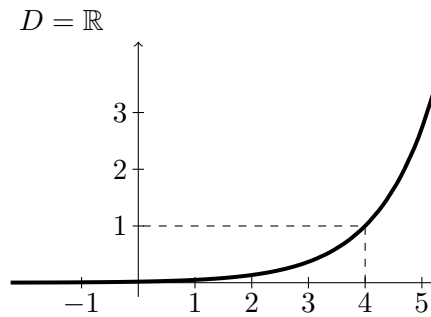
Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich der jeweiligen Funktion und skizzieren Sie den zugehörigen Graphen:

a) $x \mapsto f(x) = e^{x-4}$

$\mathbb{R}$

Lösung:

Diese Funktion ist für alle reellen Zahlen definiert, da Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$ definiert ist.

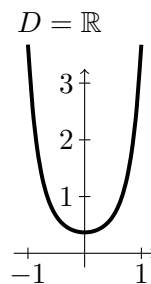


b) $y \mapsto g(y) = \frac{10(y^2)}{e}$

$\mathbb{R}$

Lösung:

Diese Funktion ist für alle reellen Zahlen definiert, da Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$ definiert ist.

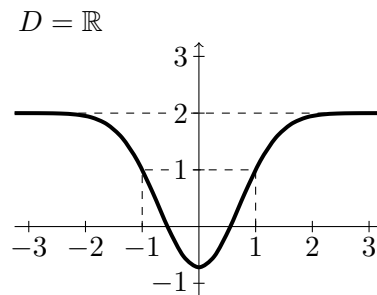


c) $z \mapsto h(z) = 2 - e^{1-z^2}$

$\mathbb{R}$

Lösung:

Diese Funktion ist für alle reellen Zahlen definiert, da Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$ definiert ist.



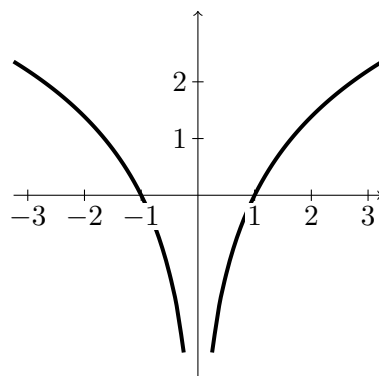
d) $r \mapsto u(r) = \ln(r^2)$

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Lösung:

Der Argument des Logarithmus muss positiv sein, deswegen ist $r = 0$ nicht erlaubt und damit ist $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

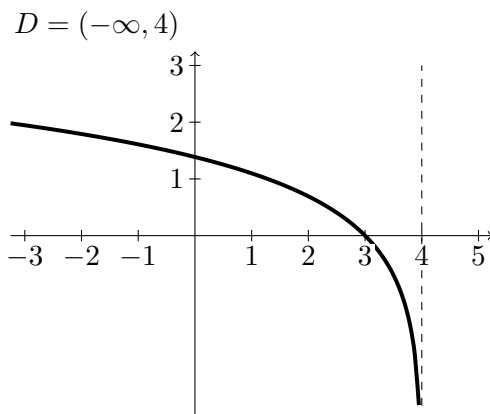


e) $s \mapsto v(s) = \ln(4 - s)$ $(-\infty, 4)$

Lösung:

Der Argument der Logarithmusfunktion muss positiv sein, deswegen muss es gelten dass für jedes $s \in D$:

$$s \in D \iff 4 - s > 0 \iff s < 4 \iff D = (-\infty, 4)$$

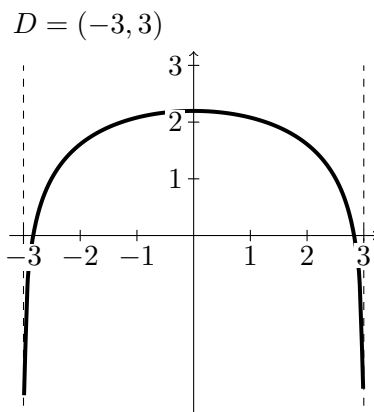


f) $t \mapsto w(t) = \ln(9 - t^2)$ $(-3, 3)$

Lösung:

Der Argument der Logarithmusfunktion muss positiv sein, deswegen gilt für jedes $t \in D$

$$t \in D \iff 9 - t^2 > 0 \iff t^2 < 3^2 \iff |t| < 3 \iff -3 < t < 3 \iff D = (-3, 3).$$



**Aufgabe 45.231** (Grundlagen Exponentialfunktionen) in Anlehnung an: Papula, Mathem. für Ing. u. Naturw., Band 1, S. 280-282

Gegeben ist eine Exponentialfunktion der Form $y = a \cdot b^x$ mit $a \neq 0$ und $b > 0$ (sowie $b \neq 1$, warum? Im Falle $b = 1$ entstünde die konstante Funktion $y = a$, also keine Exponentialfunktion).

- a) Wir setzen $a > 0$ voraus. Geben Sie jeweils ein (Anwendungs)Beispiel für eine wachsende und eine fallende Exponentialfunktionen an und skizzieren Sie die zugehörigen Graphen.

Lösung:

- Die Funktion $K(x) = 3000 \cdot 1.015^x$ würde z. B. das jährliche Wachstum eines Anfangskapitals von 3000 Euro bei einer Verzinsung von 1.5 % beschreiben.
 - Beim radioaktiven Zerfall kann die Anzahl der zum Zeitpunkt t noch nicht zerfallenen Kerne durch die Gleichung $N(t) = N(0) \cdot e^{-\frac{\ln(2)}{T_{1/2}} \cdot t}$ beschrieben werden, in der $N(0)$ die Anzahl der anfangs vorhandenen Kerne angibt und $T_{1/2}$ die für das Isotop charakteristische Halbwertszeit ist.
- b) Wir setzen nun $a < 0$ voraus. Geben Sie wiederum jeweils ein (Anwendungs)Beispiel für eine wachsende und eine fallende Exponentialfunktionen an und skizzieren Sie deren Graphen.

Lösung:

- Die Funktion $u(x) = -0.8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ist streng monoton wachsend,
 - die Funktion $v(x) = -0.8 \cdot 2^x$ hingegen ist streng monoton fallend.
- c) Können Sie a und b derart wählen, dass der Graph von $y = a \cdot b^x$ die x -Achse schneidet? Falls ja, geben Sie ein Beispiel an.

Nein.

Lösung:

Nein! Es ist $b^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Im Falle $a > 0$ verläuft der Graph daher vollständig oberhalb der x -Achse, im Falle $a < 0$ vollständig unterhalb. Der Fall $a = 0$ ist laut Voraussetzung ausgeschlossen.

Alternativ mit Nullproduktsatz: $y = 0 \iff a \cdot b^x = 0 \iff (a = 0 \text{ oder } b^x = 0)$.
Keine der letzten beiden Bedingungen ist jedoch erfüllt.

- d) Können Sie a und b derart wählen, dass der Graph von $y = a \cdot b^x$ eine Gerade ist? Falls ja, geben Sie ein Beispiel an.

Nein.

Lösung:

Nein, denn es ist $b > 0$ mit $b \neq 1$ vorausgesetzt! Der Graph der Abbildung $x \mapsto b^x$ ist dann immer eine gekrümmte Kurve, woran auch eine vertikale Streckung, bedingt durch den Koeffizienten a , nichts ändert.

- e) Der Graph einer Exponentialfunktion verläuft durch die Punkte $P = (0; \frac{5}{2})$ und $Q = (\frac{5}{2}; 1)$. Bestimmen Sie den Koeffizienten a und die Basis b .

$$a = \frac{5}{2}, b = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{5}}$$

Lösung:

Durch Einsetzen der Koordinaten der Punkte in die Gleichung der Exponentialfunktion entsteht ein (nicht-lineares) Gleichungssystem mit zwei Gleichungen für die beiden gesuchten Größen a und b :

$$P: \quad \frac{5}{2} = a \cdot b^0 \iff \frac{5}{2} = a \cdot 1 \iff a = \frac{5}{2}$$

$$Q: \quad 1 = a \cdot b^{\frac{5}{2}} \iff 1 = \frac{5}{2} \cdot b^{\frac{5}{2}} \iff \frac{2}{5} = b^{\frac{5}{2}} \iff b = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{\frac{4}{25}} \approx 0.693$$



FktEinDim/ExpLn/Ag_Exponentialfunktion_WachstumsfunktionenAufstellen_mittel.tex

Aufgabe 45.232 (Exponentialfunktionen aufstellen) in Anlehnung an: Gymnasiale Oberstufe Mathematik, Band Analysis, Cornelsen 2002, S. 154 Aufg. 25

Als *Verdopplungszeit* t_2 bezeichnet man die Zeitspanne, in der sich ein Bestand $B(t)$ verdoppelt. Entsprechend ist die *Halbwertszeit* $t_{1/2}$ bei abnehmendem Bestand definiert:

$$B(t + t_2) = 2 \cdot B(t) \quad \text{bzw.} \quad B\left(t + t_{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot B(t).$$

Bestimmen Sie jeweils eine exponentielle Bestandsfunktion B mit $B(t) = a \cdot b^t$, für die gilt:

Lösung:

Es ist sinnvoll, sich jeweils anhand einer Skizze die Begriffe Verdopplungs- und Halbwertszeit klar zu machen.

a) $B(0) = 10$ und Verdopplungszeit $t_2 = 3$;

$$10 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$$

Lösung:

$$B(0) = 10 \iff a \cdot b^0 = 10 \iff a \cdot 1 = 10 \iff a = 10$$

$$B(0 + 3) = 2 \cdot B(0) \iff a \cdot b^3 = 2 \cdot 10 \iff 10 \cdot b^3 = 2 \cdot 10 \iff b^3 = 2 \iff b = 2^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{Damit:} \quad B(t) = 10 \cdot \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^t = 10 \cdot 2^{\frac{t}{3}}.$$

b) $B(0) = 5$ und 2% Zunahme pro Zeiteinheit;

$$5 \cdot \left(\frac{51}{50}\right)^t$$

Lösung:

$$B(0) = 5 \iff a \cdot b^0 = 5 \iff a \cdot 1 = 5 \iff a = 5$$

$$B(0 + 1) = B(0) + 0.02 \cdot B(0) \iff a \cdot b^1 = 1.02 \cdot a \cdot b^0 \iff 5 \cdot b = 1.02 \cdot 5 \cdot 1 \iff b = 1.02$$

$$\text{Damit:} \quad B(t) = 5 \cdot 1.02^t.$$

c) $B(0) = 15$ und Halbwertszeit $t_{\frac{1}{2}} = 4$;

$$15 \cdot 2^{-\frac{t}{4}}$$

Lösung:

$$B(0) = 15 \iff a \cdot b^0 = 15 \iff a = 15$$

$$B(0+4) = \frac{1}{2} \cdot B(0) \iff a \cdot b^4 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b^0 \iff 15 \cdot b^4 = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 1 \iff b = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\text{Damit: } B(t) = 15 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{4}}.$$

d) $B(0) = 2$ und Verzehnfachung in 5 Zeiteinheiten;

$$2 \cdot 10^{\frac{t}{5}}$$

Lösung:

$$B(0) = 2 \iff a \cdot b^0 = 2 \iff a = 2$$

$$B(0+5) = 10 \cdot B(0) \iff a \cdot b^5 = 10 \cdot a \cdot b^0 \iff 2 \cdot b^5 = 10 \cdot 2 \cdot 1 \iff b = 10^{\frac{1}{5}}$$

$$\text{Damit: } B(t) = 2 \cdot 10^{\frac{t}{5}}.$$

e) $B(0) = 100$ und 15 % Abnahme pro Zeiteinheit.

$$100 \cdot \left(\frac{17}{20}\right)^t$$

Lösung:

$$B(0) = 100 \iff a \cdot b^0 = 100 \iff a = 100$$

$$B(0+1) = B(0) - 0.15 \cdot B(0) \iff a \cdot b^1 = 0.85 \cdot a \cdot b^0 \iff a \cdot b = 0.85 \cdot a \cdot 1 \iff b = 0.85$$

$$\text{Damit: } B(t) = 100 \cdot 0.85^t.$$



FktEinDim/ExpLn/Ag_Logfkt_ExpWachstumsprozesseVergleichen_mittel.tex

Aufgabe 45.233 (Exponentielle Wachstumsprozesse vergleichen) [in Anlehnung an: Gymnasiale Oberstufe Mathematik, Band Analysis, Cornelsen 2002, S. 154 Aufg. 20](#)

Bei drei exponentiellen Wachstumsprozessen mit $B_k(t) = a_k \cdot b_k^t$, wobei $k \in \{1, 2, 3\}$, wurden jeweils zu zwei unterschiedlichen Zeitpunkten Messwerte erfasst:

$$B_1(3) = \frac{1}{2}, B_1(9) = 32; \quad B_2(3) = \frac{1}{3}, B_2(7) = 27; \quad B_3(3) = \frac{3}{2}, B_3(5) = \frac{2}{3}.$$

a) Zu welchem Zeitpunkt wird jeweils die Messwertgrenze von 100 erreicht?

$$\frac{\ln(1600)}{\ln(2)}, \frac{\ln(8100)}{\ln(3)}, -\frac{\ln(1600) - \ln(81)}{\ln(3) - \ln(2)}$$

b) Zu welchem Zeitpunkt hat sich der jeweilige Bestand B_k verdoppelt?

$$1, \frac{\ln(2)}{\ln(3)}, \text{ nie}$$

c) Gibt es einen Zeitpunkt, an dem alle drei Prozesse den gleichen Bestand haben?

$$t = 4$$

Lösung:

Für alle drei Wachstumsprozesse stellt man aus den jeweiligen beiden Messpunkten ein Gleichungssystem (GS) mit zwei Gleichungen für die beiden zu bestimmenden Parameter a_i und b_i auf. Die Lösungen der GS liefern folgende Prozessgleichungen:

$$B_1(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot 2^t \quad ; \quad B_2(t) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot 3^t \quad ; \quad B_3(t) = \left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t$$

a) Zu welchem Zeitpunkt wird jeweils die Messwertgrenze von 100 erreicht?

$$\text{Prozess 1: } B_1(t) = 100 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot 2^t = 100 \quad \Longleftrightarrow \quad t = \frac{\ln(1600)}{\ln(2)} \approx 10.644$$

$$\text{Prozess 2: } B_2(t) = 100 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot 3^t = 100 \quad \Longleftrightarrow \quad t = \frac{\ln(8100)}{\ln(3)} \approx 8.192$$

$$\text{Prozess 3: } B_3(t) = 100 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t = 100 \quad \Longleftrightarrow \quad t \approx -7.358$$

Die Messwertgrenze wird bei Prozess 3 (Abnahmeprozess!) nicht erreicht.

b) Zu welchem Zeitpunkt hat sich der jeweilige Bestand B_k verdoppelt?

$$\text{Prozess 1: } B_1(0 + t_2) = 2 \cdot B_1(0) \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot 2^{t_2} = 2 \cdot \frac{1}{16} \quad \Longleftrightarrow \quad t_2 = 1$$

$$\text{Prozess 2: } B_2(0 + t_2) = 2 \cdot B_2(0) \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot 3^{t_2} = 2 \cdot \frac{1}{81} \quad \Longleftrightarrow \quad t_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \approx 0.631$$

$$\text{Prozess 3: } B_3(0 + t_2) = 2 \cdot B_3(0) \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{t_2} = 2 \cdot \frac{81}{16} \quad \Longleftrightarrow \quad t_2 \approx -1.71$$

Bei Prozess 3 (Abnahmeprozess!) gibt es keine Verdopplungszeit.

c) Gibt es einen Zeitpunkt, an dem alle drei Prozesse den gleichen Bestand haben? Gesucht: τ mit der Eigenschaft $B_1(\tau) = B_2(\tau) = B_3(\tau)$. Aus der ersten Gleichung erhält man $\tau = 4$, welches auch die zweite Gleichung erfüllt. Zum Zeitpunkt $\tau = 4$ haben also alle drei Prozesse denselben Bestand, nämlich $B_i(4) = 1$.



FktEinDim/Fortsetzung/Ag_Fkt_VerschiedenFortsetzen.tex

Aufgabe 46.234 (Fortsetzungen von Funktionen)

SPF

Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x)$, $D \neq \emptyset$ und $-x \in D$ für alle $x \in D$ heißt „gerade“, falls $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D$ gilt und „ungerade“, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D$ gilt.

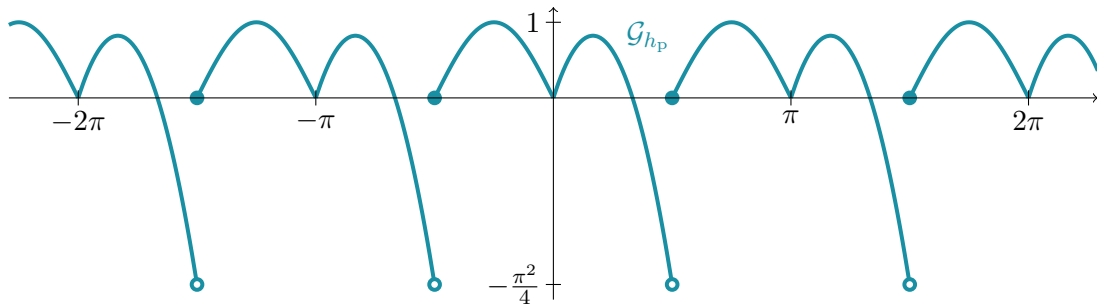
Seien $I := [0; \pi]$ und $h: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto h(x) := \begin{cases} -3x^2 + \pi x, & \text{für } x < \frac{\pi}{2} \\ -\sin(2x), & \text{für } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$. $\lfloor t \rfloor := \max(\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq t\})$

- a) Geben Sie eine π -periodische Funktion h_p mit $h_p|_I = h$ an und skizzieren Sie ihren Graphen!

$$h_p(x) := h\left(x - \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor \cdot \pi\right)$$

Lösung:

Mit der Gauß'schen-GröÙte-Ganze-Funktion $\lfloor \cdot \rfloor: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto \lfloor t \rfloor := \max(\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq t\})$ folgt $h_p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto h_p(x) := h\left(x - \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor \cdot \pi\right)$.

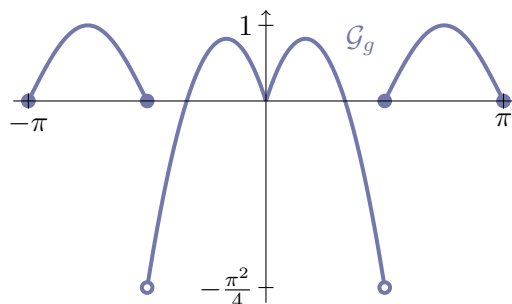


- b) Geben Sie eine gerade Funktion g mit $g|_I = h$ an und skizzieren Sie ihren Graphen!

$$g(x) := h(|x|)$$

Lösung:

$g: [-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto g(x) := h(|x|)$.



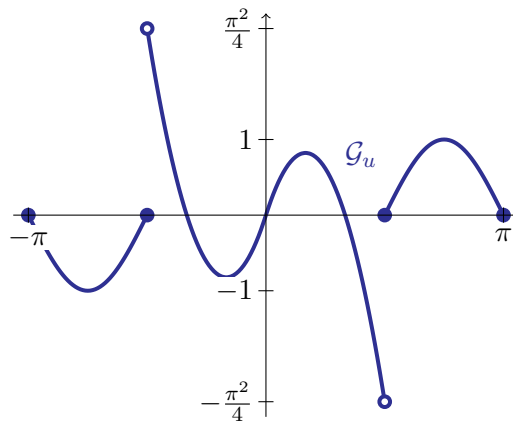
- c) Geben Sie eine ungerade Funktion u mit $u|_I = h$ an und skizzieren Sie ihren Graphen!

$$u(0) := 0 \text{ und für } x \neq 0:$$

$$u(x) := \frac{x}{|x|} \cdot h(|x|)$$

Lösung:

$u: [-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto u(x)$, $u(0) := 0$ und $u(x) := \frac{x}{|x|} \cdot h(|x|)$ für alle $x \in [-\pi; \pi] \setminus \{0\}$.



- d) Geben Sie eine 2π -periodische gerade Funktion g_p mit $g_p|_I = h$ an!

$$g_p(x) := g\left(x - \left\lfloor \frac{x+\pi}{2\pi} \right\rfloor \cdot 2\pi\right)$$

Lösung:

Mit der Gauß'schen-GröÙte-Ganze-Funktion $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto \lfloor t \rfloor := \max(\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq t\})$ folgt $g_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto g_p(x) := g\left(x - \left\lfloor \frac{x+\pi}{2\pi} \right\rfloor \cdot 2\pi\right)$.

- e) Geben Sie eine 2π -periodische ungerade Funktion u_p mit $u_p|_I = h$ an!

$$u_p(x) := u\left(x - \left\lfloor \frac{x+\pi}{2\pi} \right\rfloor \cdot 2\pi\right)$$

Lösung:

Mit der Gauß'schen-GröÙte-Ganze-Funktion $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto \lfloor t \rfloor := \max(\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq t\})$ folgt $u_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto u_p(x) := u\left(x - \left\lfloor \frac{x+\pi}{2\pi} \right\rfloor \cdot 2\pi\right)$.

- f) Welche Voraussetzung muss eine auf I definierte Funktion erfüllen, um ungerade fortgesetzt werden zu können?

$$f(0) = 0$$

Lösung:

Die Funktion muss in 0 den Wert 0 annehmen.

- g) Welche Voraussetzung muss eine auf I definierte Funktion erfüllen, um ungerade und 2π -periodisch fortgesetzt werden zu können?

$$f(0) = f(\pi) = 0$$

Lösung:

Die Funktion muss in 0 und in π jeweils den Wert 0 annehmen.

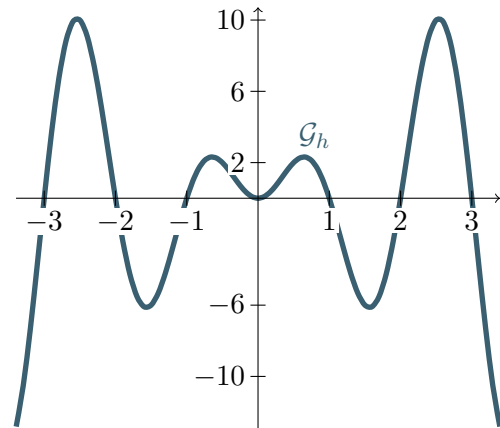
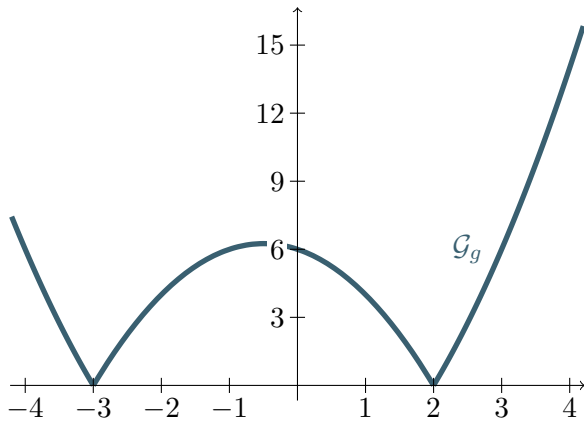


FktEinDim/Graphen/Ag_FktEinDim_GraphTransform.tex

Aufgabe 47.235 (Graphen transformieren)

SPF

Seien $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto g(x)$ und $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto h(x)$ zwei Funktionen, von deren Graphen $\mathcal{G}_g$ und $\mathcal{G}_h$ Sie in den folgenden beiden Schaubildern jeweils einen Ausschnitt sehen.

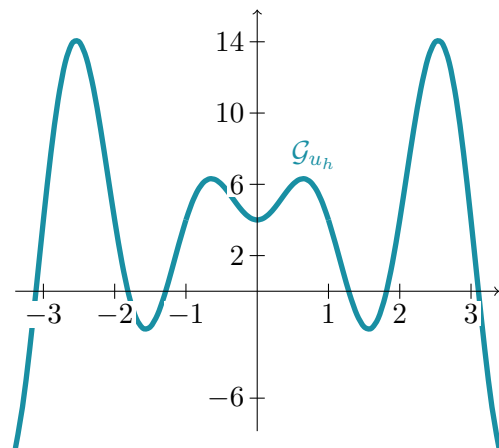
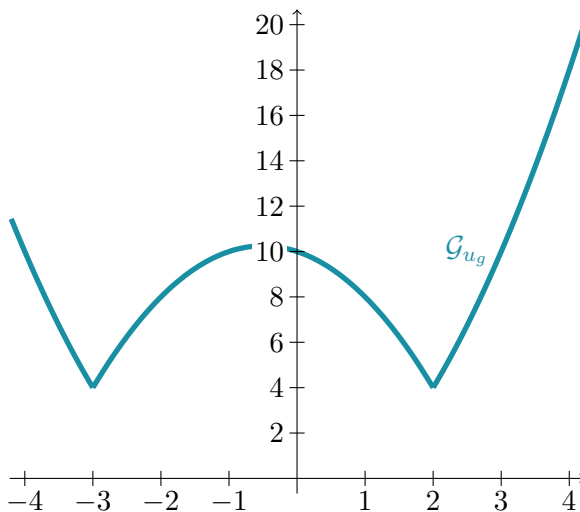


Skizzieren Sie für alle $f \in \{g; h\}$ Ausschnitte der Graphen der folgenden Funktionen!

a) $u_f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) + 4$

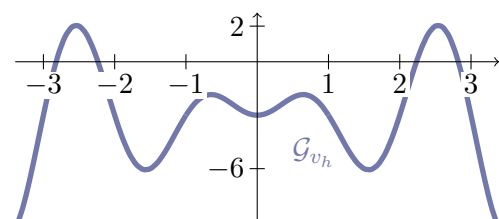
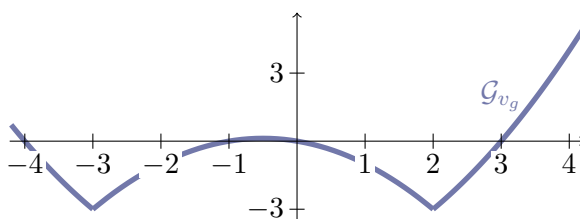
um 4 nach oben schieben

Lösung:



b) $v_f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \frac{1}{2} \cdot f(x) - 3$ von oben und unten auf die Hälfte zusammenpressen, dann um 3 nach unten schieben

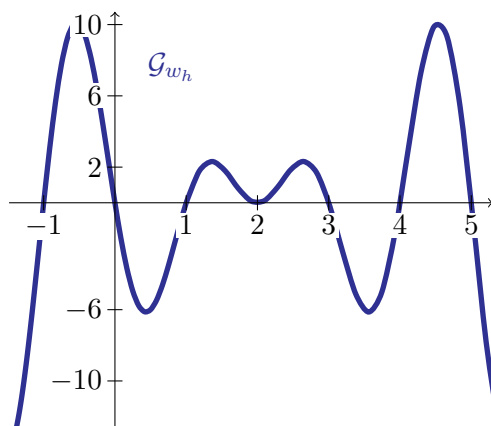
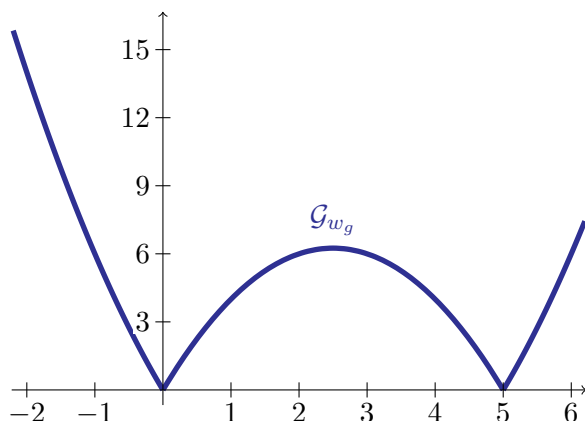
Lösung:



c) $w_f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(2-x)$

an der vertikalen Achse spiegeln, dann um 2 nach rechts schieben

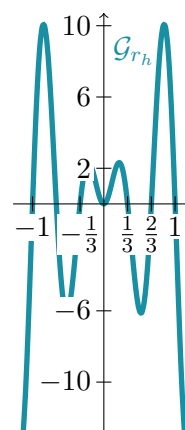
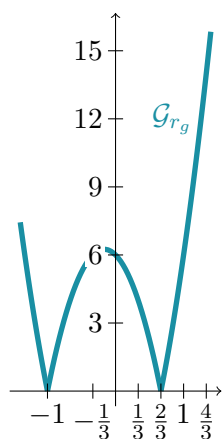
Lösung:



d) $r_f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(3x)$

von links und rechts auf ein Drittel zusammenpressen

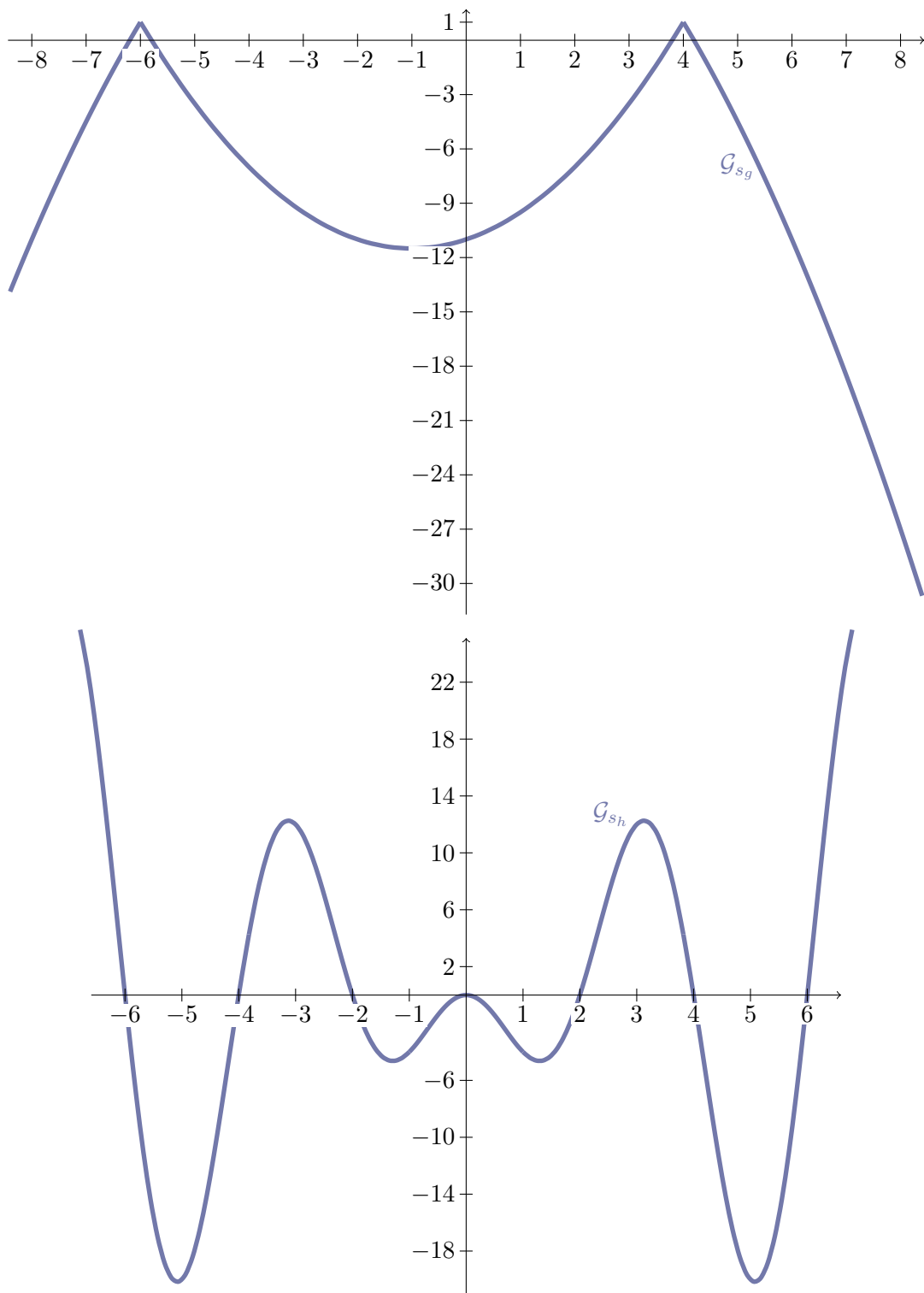
Lösung:



e) $s_f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto -2 \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) + 1$

sowohl von links und rechts als auch von oben und unten auf das Doppelte auseinanderziehen, dann an der horizontalen Achse spiegeln und um 1 nach oben schieben

Lösung:



- f) $t_f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \frac{1}{3} \cdot f(2x + 4) + 2$ von links und rechts auf die Hälfte zusammenpressen, dann um 2 nach links verschieben, von oben und unten auf ein Drittel zusammenpressen und um 2 nach oben verschieben

Lösung:





FktEinDim/Graphen/Ag_Funktionen_DefmengeUndGraphen.tex

Aufgabe 47.236 (Definitionsmengen und Graphen)

12.1.1

Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ der Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x)$, deren Werte sich durch die angegebene Zuordnungsvorschrift berechnen lassen!

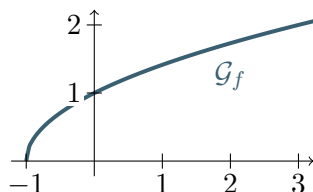
Skizzieren Sie zudem einen passenden Ausschnitt des Graphen $\mathcal{G}_f$ von f !

a) $f(x) := \sqrt{x+1}$

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$

Lösung:

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$

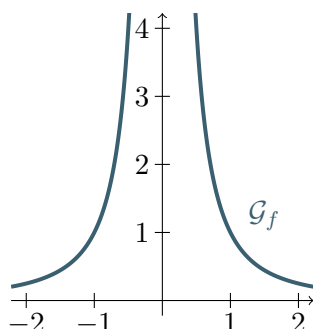


b) $f(x) := \frac{1}{x^2}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Lösung:

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

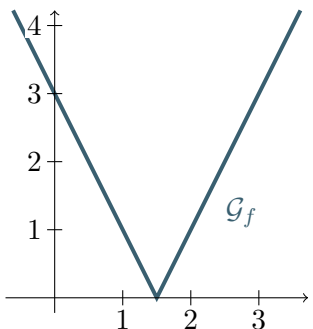


c) $f(x) := |-3 + 2x|$

$D = \mathbb{R}$

Lösung:

$D = \mathbb{R}$

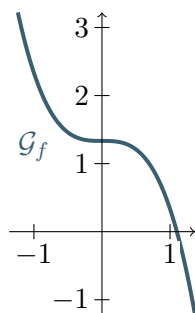


d) $f(x) := -x^3 + \frac{4}{3}$

$D = \mathbb{R}$

Lösung:

$D = \mathbb{R}$

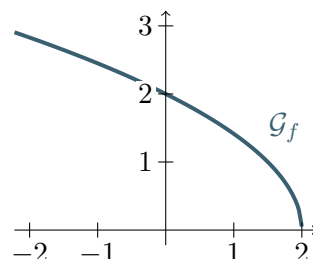


e) $f(x) := \sqrt{4-2x}$

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$

Lösung:

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$

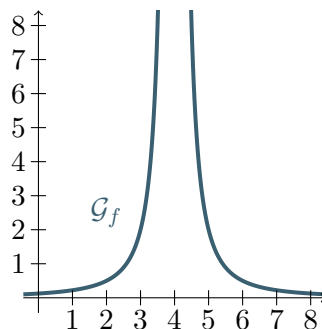


f) $f(x) := \frac{2}{(4-x)^2}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$

Lösung:

$D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$

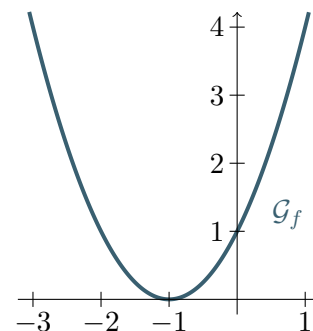


g) $f(x) := |x^2 + 2x + 1|$

$D = \mathbb{R}$

Lösung:

$D = \mathbb{R}$

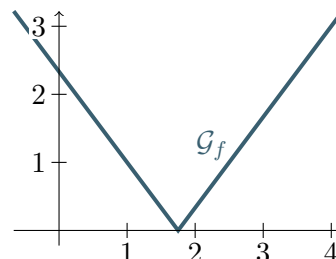


h) $f(x) := \frac{|4x-7|}{3}$

$D = \mathbb{R}$

Lösung:

$D = \mathbb{R}$

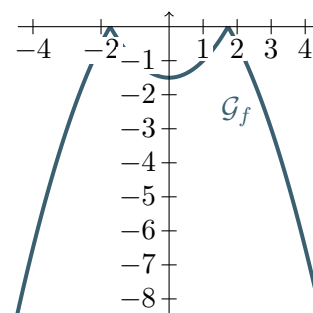


i) $f(x) := \frac{|3-x^2|}{-2}$

$D = \mathbb{R}$

Lösung:

$D = \mathbb{R}$

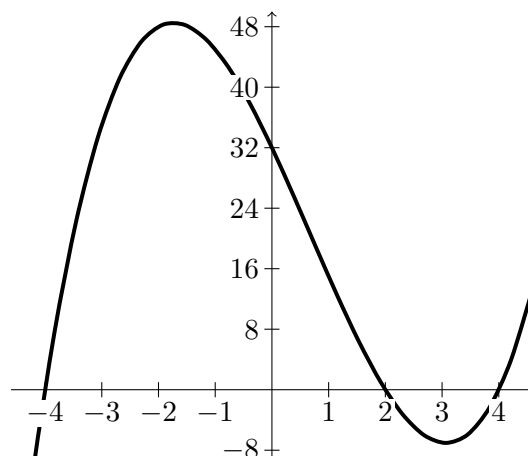
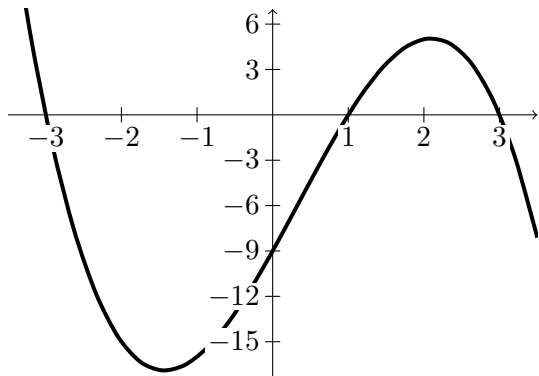


Aufgabe 47.237 (Graphen skizzieren)

Skizzieren Sie die Graphen der durch ihre Gleichungen gegebenen Funktionen nur mit Hilfe der Nullstellen:

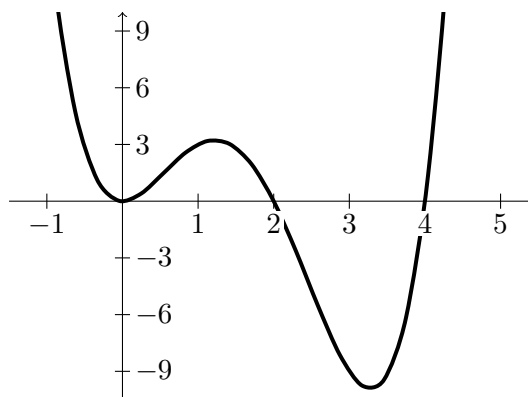
a) $f(x) = -(x^2 - 9) \cdot (x - 1)$

Lösung:



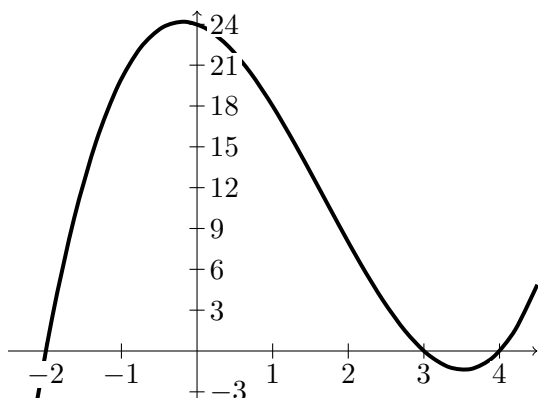
e) $f(x) = x^2 \cdot (x - 2) \cdot (x - 4)$

Lösung:



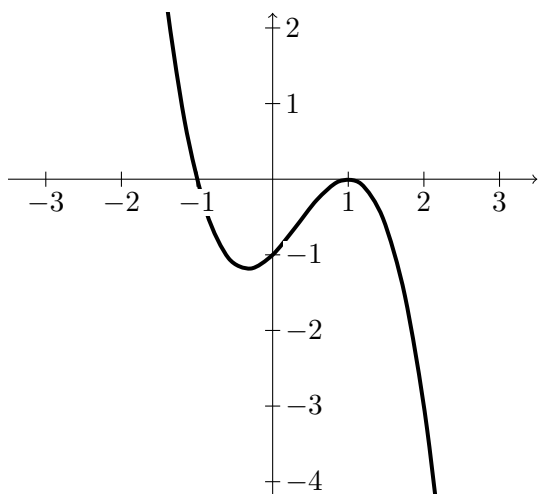
b) $f(x) = (x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4)$

Lösung:



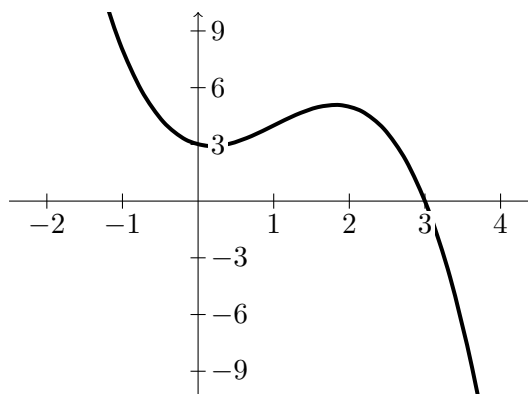
c) $f(x) = (1 - x) \cdot (x^2 - 1)$

Lösung:



f) $f(x) = (3 - x) \cdot (x^2 + 1)$

Lösung:



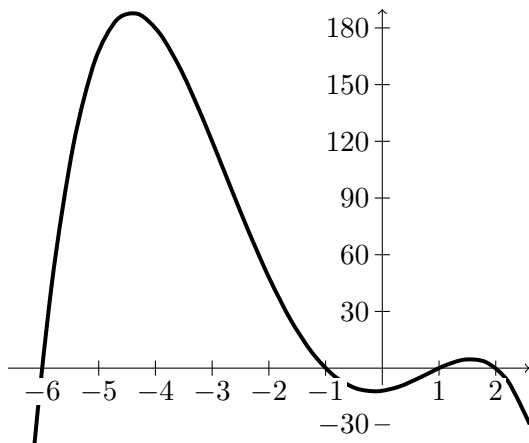
d) $f(x) = (4 - x) \cdot (4 + x) \cdot (2 - x)$

Lösung:

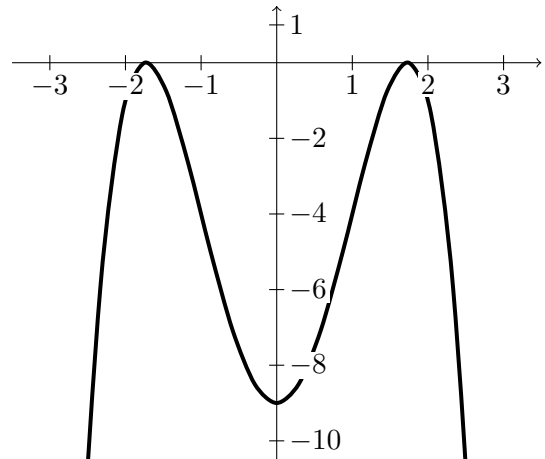
g) $f(x) = (x-1) \cdot (1+x) \cdot (2-x) \cdot (6+x)$

h) $f(x) = (x^2-3) \cdot (3-x^2)$

Lösung:



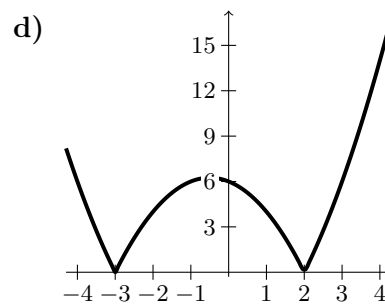
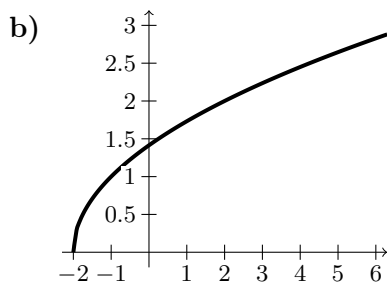
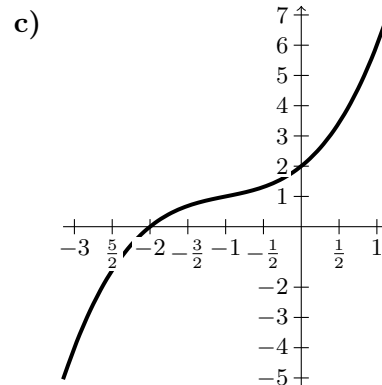
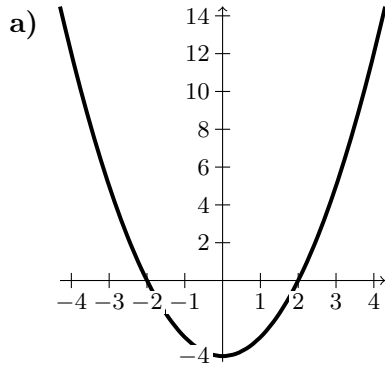
Lösung:



FktEinDim/Graphen/Ag_Funktionen_GraphenTransformieren.tex

Aufgabe 47.238 (Graphen transformieren)

Betrachten Sie die folgenden Schaubilder ...



... jeweils als Graph einer Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$.

Skizzieren Sie zu jeder Funktion unter a) bis d) die Graphen der Funktionen

(i) $f_1: D_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) + 2$

(ii) $f_2: D_2 \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 2 \cdot f(x) - 3$

(iii) $f_3: D_3 \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(-x+1)$

(iv) $f_4: D_4 \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(4x)$

(v) $f_5: D_5 \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f\left(\frac{x}{2}\right) + 1$

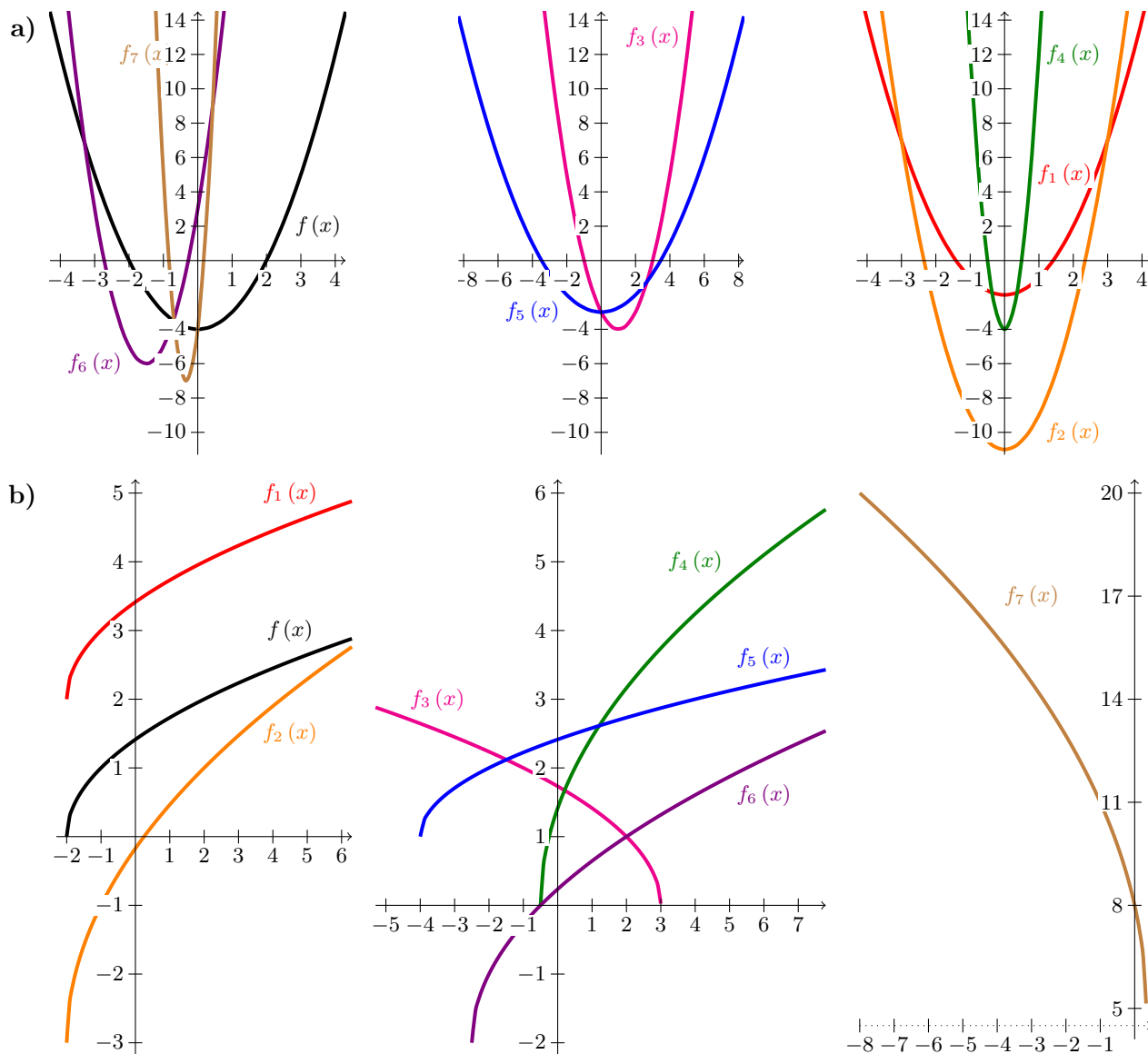
(vi) $f_6 : D_6 \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(2x + 3) - 2$

(vii) $f_7 : D_7 \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 3 \cdot f(-3x - 1) + 5,$

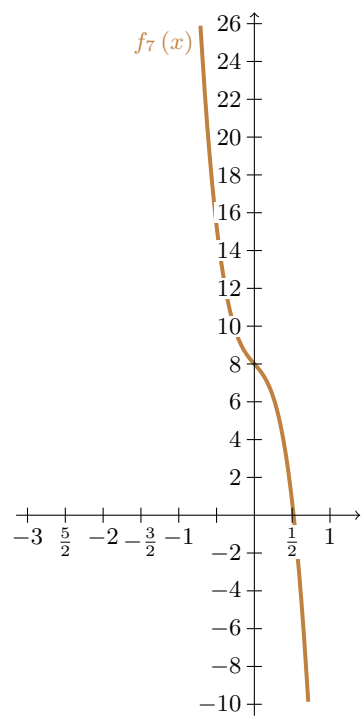
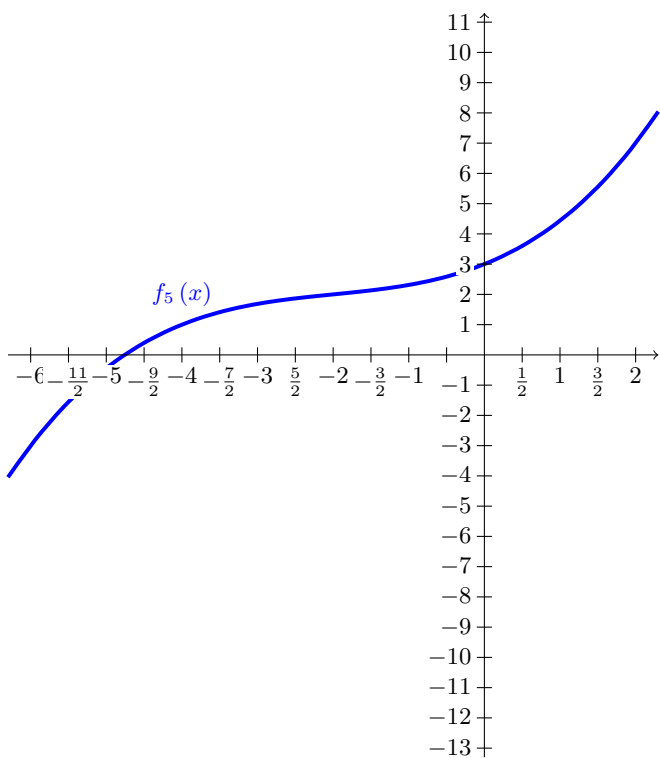
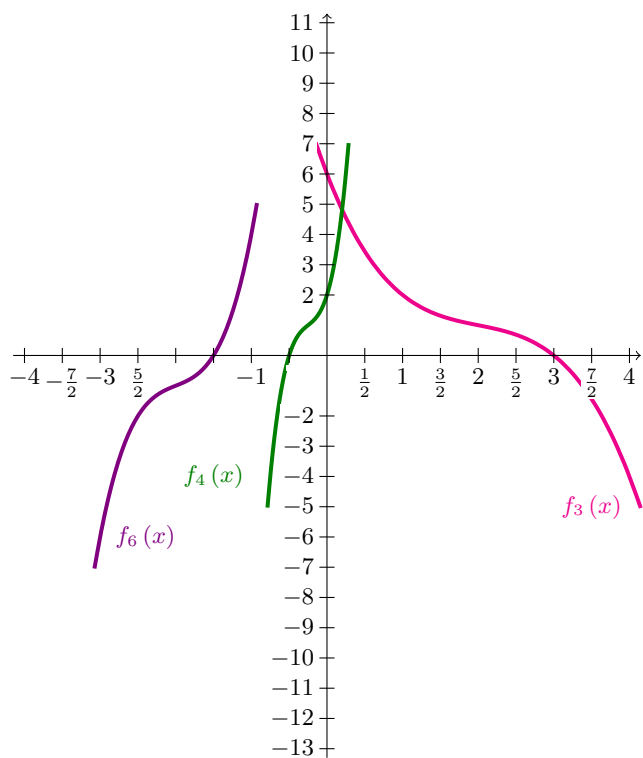
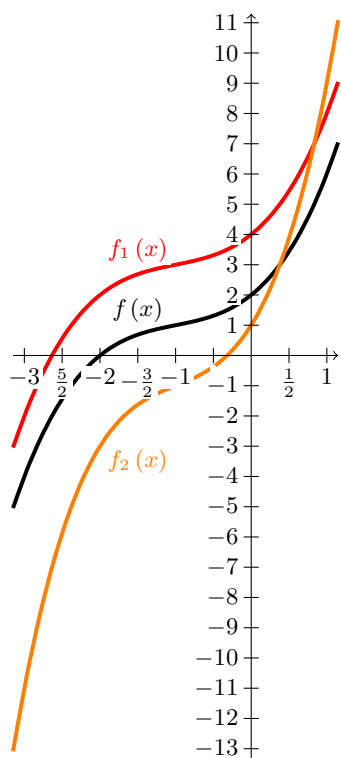
wobei $D_j \subseteq \mathbb{R}$ für alle $j \in \{1, 2, 3, \dots, 7\}$.

Verständnisfrage: Wieviele Graphen sollen Sie skizzieren?

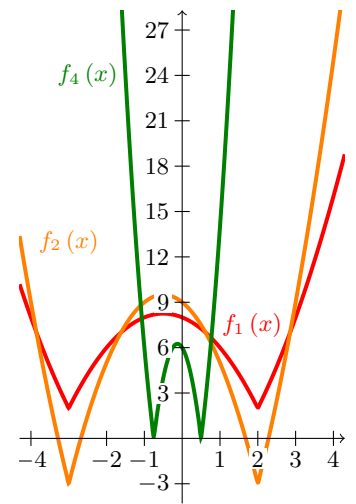
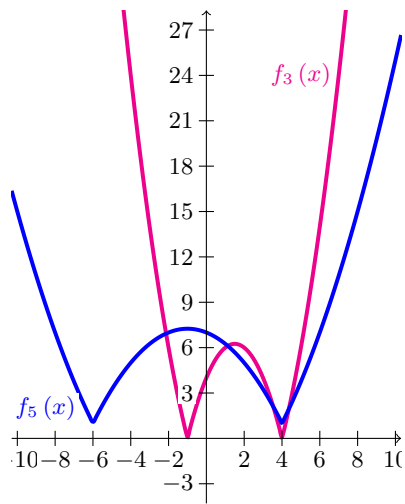
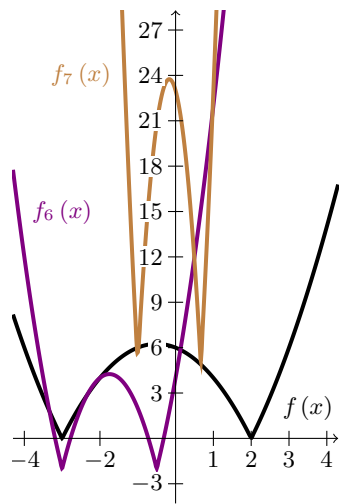
Lösung:



c)



d)





FktEinDim/Hyperb/Ag_HyperbolischeFunktionen_tanh.tex

Aufgabe 48.239 (Umkehrfunktion des tanh)

Zeigen Sie, dass der Tangens hyperbolicus tanh auf seinem Definitionsbereich $\mathbb{R}$ injektiv ist und geben Sie eine Zuordnungsvorschrift der Umkehrfunktion Area Tangens hyperbolicus artanh an.

$$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \tanh(x) &= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x + e^{-x} - e^{-x} - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ &= 1 - \frac{2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 - \frac{2}{e^x \cdot (e^x + e^{-x})} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}. \end{aligned}$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $t \in \mathbb{R}$ folgt damit

$$\begin{aligned} x < t &\iff 2x < 2t \iff e^{2x} < e^{2t} \iff e^{2x} + 1 < e^{2t} + 1 \iff \frac{1}{e^{2t} + 1} < \frac{1}{e^{2x} + 1} \\ &\iff -\frac{2}{e^{2t} + 1} > -\frac{2}{e^{2x} + 1} \iff 1 - \frac{2}{e^{2t} + 1} > 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1} \iff \tanh(t) > \tanh(x). \end{aligned}$$

Also ist tanh streng monoton wachsend und damit injektiv.

Außerdem ergibt sich für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} y = \tanh(x) &\iff y = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1} \iff \frac{2}{e^{2x} + 1} = 1 - y \iff \frac{2}{1 - y} = e^{2x} + 1 \\ &\iff \frac{2}{1 - y} - 1 = e^{2x} \iff \frac{2 - (1 - y)}{1 - y} = e^{2x} \iff \frac{1 + y}{1 - y} = e^{2x} \\ &\iff \ln \left(\frac{1 + y}{1 - y} \right) = 2x \iff \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{1 + y}{1 - y} \right) = x. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$\operatorname{artanh}: \mathbb{R} \setminus [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto \operatorname{artanh}(x) := \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right).$$

Aufgabenblatt 49

FktEinDim/Polynome



FktEinDim/Polynome/Ag_Funktionen_PolynomtermBestimmen.tex

Aufgabe 49.240 (Funktionsterm aufstellen)

jgl

Der Graph einer Polynomfunktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x)$ und $\deg(f) \leq 3$ verläuft durch die Punkte $(-3; 0)$, $(-2; 8)$, $(0; -6)$ und $(-1; 4)$.

Wie lautet der zugehörige Funktionsterm?

$$f(x) = (x+3) \cdot (x^2 - 3x - 2)$$

Lösung:

Es ist -3 eine Nullstelle von f . Damit kann der Funktionsterm in der Form $f(x) = (x+3) \cdot (rx^2 + sx + t)$ angesetzt werden, wobei r , s und t reelle Zahlen sind, sodass

$$8 = f(-2) = (-2+3) \cdot (r \cdot (-2)^2 + s \cdot (-2) + t) = 4r - 2s + t$$

$$4 = f(-1) = (-1+3) \cdot (r \cdot (-1)^2 + s \cdot (-1) + t) = 2 \cdot (r - s + t)$$

$$-6 = f(0) = (0+3) \cdot (r \cdot 0^2 + s \cdot 0 + t) = 3t$$

beziehungsweise nach Multiplikation der zweiten Gleichung mit $\frac{1}{2}$ und der letzten Gleichung mit $\frac{1}{3}$ dann

$$4r - 2s + t = 8, \quad r - s + t = 2 \quad \text{und} \quad t = -2$$

gilt. Subtraktion der letzten Gleichung von den beiden anderen führt auf

$$4r - 2s = 10, \quad r - s = 4 \quad \text{und} \quad t = -2$$

beziehungsweise

$$2r - s = 5, \quad r - s = 4 \quad \text{und} \quad t = -2$$

Subtraktion der zweiten Gleichung von der ersten ergibt

$$r = 1, \quad r - s = 4 \quad \text{und} \quad t = -2$$

Folglich ist $r = 1$, und nach Einsetzen in die zweite Gleichung damit $s = -3$ und $t = -2$. Somit ist

$$f(x) = (x+3) \cdot (x^2 - 3x - 2) = x^3 - 3x^2 - 2x + 3x^2 - 9x - 6 = x^3 - 11x - 6$$

der gesuchte Funktionsterm.

Anmerkung: Ebenso kann vom Ansatz $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ausgegangen werden. Mit den gegebenen Bedingungen ergibt sich $a = 1$, $b = 0$, $c = -11$ und $d = -6$, womit man wiederum den obigen Funktionsterm erhält.



FktEinDim/Polynome/Ag_Polyn_FaktorisierenMitZweiIrreduziblenTermen.tex

Aufgabe 49.241 (Multiplikative Darstellung von Polynomen)

SPF

Geben Sie von den folgenden Polynomen die multiplikative Darstellung an!

a) $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto p(x) := 2x^6 - 5x^5 + 9x^4 - 30x^3 - 45x - 27$

$$2 \cdot (x-3) \cdot (x - (-\frac{1}{2})) \cdot (x^2 + 3)^2$$

Lösung mit Polynomdivision:

Das Absolutglied -27 von p hat die Teilermenge $\{-27; -9; -3; -1; 1; 3; 9; 27\}$.

Der Leitkoeffizient 2 von p hat die Teilermenge $\{-2; -1; 1; 2\}$.

Alle möglichen rationalen Nullstellen von p liegen also in der Menge

$$\left\{ -27; -\frac{27}{2}; -9; -\frac{9}{2}; -3; -\frac{3}{2}; -1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 3; \frac{9}{2}; 9; \frac{27}{2}; 27 \right\}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
 p(1) &= 2 \cdot 1^6 - 5 \cdot 1^5 + 9 \cdot 1^4 - 30 \cdot 1^3 - 45 \cdot 1 - 27 \\
 &= 2 - 5 + 9 - 30 - 45 - 27 = -3 - 21 - 72 = -96 \neq 0, \\
 p(-1) &= 2 \cdot (-1)^6 - 5 \cdot (-1)^5 + 9 \cdot (-1)^4 - 30 \cdot (-1)^3 - 45 \cdot (-1) - 27 \\
 &= 2 + 5 + 9 + 30 + 45 - 27 = 7 + 39 + 18 = 64 \neq 0 \quad \text{und} \\
 p(3) &= 2 \cdot 3^6 - 5 \cdot 3^5 + 9 \cdot 3^4 - 30 \cdot 3^3 - 45 \cdot 3 - 27 \\
 &= 6 \cdot 3^5 - 5 \cdot 3^5 + 9 \cdot 3^4 - 10 \cdot 3^4 - 135 - 27 = 3^5 - 3^4 - 162 = 243 - 81 - 162 = 0.
 \end{aligned}$$

Eine Polynomdivision liefert für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{r}
 2x^6 - 5x^2 + 9x^4 - 30x^3 \quad -45x - 27 = (x-3) \\
 \underline{-(2x^6 - 6x^5)} \qquad \qquad \qquad \cdot (2x^5 + x^4 + 12x^3 + 6x^2 + 18x + 9). \\
 x^5 + 9x^4 - 30x^3 \quad -45x - 27 \\
 \underline{-(x^5 - 3x^4)} \\
 12x^4 - 30x^3 \quad -45x - 27 \\
 \underline{-(12x^4 - 36x^3)} \\
 6x^3 \quad -45x - 27 \\
 \underline{-(6x^3 - 18x^2)} \\
 18x^2 - 45x - 27 \\
 \underline{-(18x^2 - 54x)} \\
 9x - 27 \\
 \underline{-(9x - 27)} \\
 0
 \end{array}$$

Alle Koeffizienten des Restpolynoms $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto r(x) := 2x^5 + x^4 + 12x^3 + 6x^2 + 18x + 9$ sind positiv. Also müssen die reellen Nullstellen von r negativ sein. Es gilt

$$\begin{aligned}
 r(-3) &= 2 \cdot (-3)^5 + (-3)^4 + 12 \cdot (-3)^3 + 6 \cdot (-3)^2 + 18 \cdot (-3) + 9 \\
 &= -2 \cdot 243 + 81 - 12 \cdot 27 + 6 \cdot 9 - 54 + 9 \\
 &= -486 + 81 - 270 - 54 + 54 - 45 = -405 - 315 = -720 \quad \text{und} \\
 r\left(-\frac{1}{2}\right) &= 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^5 + \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + 12 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 18 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 9 \\
 &= -\frac{2}{32} + \frac{1}{16} - \frac{12}{8} + \frac{6}{4} - \frac{18}{2} + 9 = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - 9 + 9 = 0.
 \end{aligned}$$

Eine Polynomdivision liefert für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{r}
 p(x) = (x-3) \cdot (2x^5 + x^4 + 12x^3 + 6x^2 + 18x + 9) = (x-3) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot (2x^4 + 12x^2 + 18). \\
 \underline{-(2x^5 + x^4)} \\
 12x^3 + 6x^2 + 18x + 9 \\
 \underline{-(12x^3 + 6x^2)} \\
 18x + 9 \\
 \underline{-(18x + 9)} \\
 0
 \end{array}$$

Der letzte Faktor ist biquadratisch mit positiven Koeffizienten, hat also keine weiteren Nullstellen.

Die multiplikative Darstellung von p ergibt sich für alle $x \in \mathbb{R}$ zu

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-3) \cdot \left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \cdot (2x^4 + 12x^2 + 18) = (x-3) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot 2 \cdot (x^4 + 6x^2 + 9) \\ &= 2 \cdot (x-3) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot \left((x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 3 + 3^2\right) = 2 \cdot (x-3) \cdot \left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \cdot (x^2 + 3)^2. \end{aligned}$$

Lösung mit dem Hornerschema:

Das Absolutglied -27 von p hat die Teilermenge $\{-27; -9; -3; -1; 1; 3; 9; 27\}$.

Der Leitkoeffizient 2 von p hat die Teilermenge $\{-2; -1; 1; 2\}$.

Alle möglichen rationalen Nullstellen von p liegen also in der Menge

$$\left\{-27; -\frac{27}{2}; -9; -\frac{9}{2}; -3; -\frac{3}{2}; -1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 3; \frac{9}{2}; 9; \frac{27}{2}; 27\right\}.$$

Wir wenden das Horner-Schema an:

1	2	-5	9	-30	0	-45	-27
	↓	2	-3	6	-24	-24	-69
	2	-3	6	-24	-24	-69	-96

3	2	-5	9	-30	0	-45	-27
	↓	6	3	36	18	54	27
	2	1	12	6	18	9	0

-3	2	1	12	6	18	9
	↓	-6	15	-81	225	-729
	2	-5	27	-75	243	-720

-1	2	-5	9	-30	0	-45	-27
	↓	-2	7	-16	46	-46	91
	2	-7	16	-46	46	-91	64

Da alle Koeffizienten des neuen Polynoms positiv sind, müssen weitere mögliche Nullstellen negativ sein.

$-\frac{1}{2}$	2	1	12	6	18	9
	↓	-1	0	-6	0	-9
	2	0	12	0	18	0

Da alle Koeffizienten des neuen Polynoms positiv sind, müssen weitere mögliche Nullstellen negativ sein.

Also gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-3) \cdot \left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \cdot (2x^4 + 12x^2 + 18) = (x-3) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot 2 \cdot (x^4 + 6x^2 + 9) \\ &= 2 \cdot (x-3) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot \left((x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 3 + 3^2\right) = 2 \cdot (x-3) \cdot \left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \cdot (x^2 + 3)^2. \end{aligned}$$

Da $x^2 + 3 \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, ist damit die multiplikative Darstellung von p gefunden.

b) $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto q(t) := 4t^5 - 12t^4 - 9t^3 - 25t^2 - 9t - 12$

Tipps: q hat eine ganzzahlige Nullstelle. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $7t^2 = 4t^2 + 3t^2$.

$$4 \cdot (t-4) \cdot \left(t^2 + \frac{3}{4}\right) \cdot (t^2 + t + 1)$$

Lösung:

Das Absolutglied -12 von q hat die Teilermenge $\{-12; -6; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 6; 12\}$.

Der Leitkoeffizient 4 von q hat die Teilermenge $\{-4; -2; -1; 1; 2; 4\}$.

Alle möglichen rationalen Nullstellen von q liegen also in der Menge

$$\left\{-12; -6; -4; -3; -2; -\frac{3}{2}; -1; -\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; 1; \frac{3}{2}; 2; 3; 4; 6; 12\right\}.$$

Wegen $4^5 = (2^2)^5 = 2^{2 \cdot 5} = 2^{10} = 1\,024$ gilt

$$\begin{aligned}
 q(1) &= 4 \cdot 1^5 - 12 \cdot 1^4 - 9 \cdot 1^3 - 25 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 - 12 \\
 &= 4 - 12 - 9 - 25 - 9 - 12 = -8 - 34 - 21 = -63 \neq 0, \\
 q(-1) &= 4 \cdot (-1)^5 - 12 \cdot (-1)^4 - 9 \cdot (-1)^3 - 25 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) - 12 \\
 &= -4 - 12 + 9 - 25 + 9 - 12 = -16 - 16 - 3 = -35 \neq 0, \\
 q(2) &= 4 \cdot 2^5 - 12 \cdot 2^4 - 9 \cdot 2^3 - 25 \cdot 2^2 - 9 \cdot 2 - 12 = 4 \cdot 32 - 12 \cdot 16 - 9 \cdot 8 - 25 \cdot 4 - 18 - 12 \\
 &= 128 - 160 - 32 - 72 - 100 - 30 = -32 - 104 - 130 = -266 \neq 0, \\
 q(-2) &= 4 \cdot (-2)^5 - 12 \cdot (-2)^4 - 9 \cdot (-2)^3 - 25 \cdot (-2)^2 - 9 \cdot (-2) - 12 \\
 &= -4 \cdot 32 - 12 \cdot 16 + 9 \cdot 8 - 25 \cdot 4 + 18 - 12 \\
 &= -128 - 160 - 32 + 72 - 100 + 6 = -288 + 40 - 94 = -342 \neq 0, \\
 q(3) &= 4 \cdot 3^5 - 12 \cdot 3^4 - 9 \cdot 3^3 - 25 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 - 12 \\
 &= 4 \cdot 3^5 - 4 \cdot 3^5 - 3^5 - 75 \cdot 3 - 27 - 12 = -243 - 225 - 39 = -507, \\
 q(-3) &= 4 \cdot (-3)^5 - 12 \cdot (-3)^4 - 9 \cdot (-3)^3 - 25 \cdot (-3)^2 - 9 \cdot (-3) - 12 \\
 &= -4 \cdot 243 - 4 \cdot 243 + 9 \cdot 27 - 25 \cdot 9 + 27 - 12 \\
 &= -8 \cdot 243 + 2 \cdot 9 + 15 = -1\,600 - 320 - 24 + 18 + 15 = -1\,911 \neq 0 \quad \text{und} \\
 q(4) &= 4 \cdot 4^5 - 12 \cdot 4^4 - 9 \cdot 4^3 - 25 \cdot 4^2 - 9 \cdot 4 - 12 = 4 \cdot 4^5 - 3 \cdot 4^5 - 9 \cdot 64 - 100 \cdot 4 - 36 - 12 \\
 &= 4^5 - 640 + 64 - 400 - 48 = 1\,024 - 1\,040 + 16 = 0.
 \end{aligned}$$

Eine Polynomdivision liefert für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl}
 q(t) = 4t^5 - 12t^4 - 9t^3 - 25t^2 - 9t - 12 & = & (t-4) \cdot (4t^4 + 4t^3 + 7t^2 + 3t + 3) \\
 \underline{-(4t^5 - 16t^4)} & = & (t-4) \cdot (4t^4 + 4t^3 + 4t^2 + 3t^2 + 3t + 3) \\
 4t^4 - 9t^3 - 25t^2 - 9t - 12 & = & (t-4) \cdot (4t^2 \cdot (t^2 + t + 1) + 3 \cdot (t^2 + t + 1)) \\
 \underline{-(4t^4 - 16t^3)} & = & (t-4) \cdot (4t^2 + 3) \cdot (t^2 + t + 1) \\
 7t^3 - 25t^2 - 9t - 12 & = & 4 \cdot (t-4) \cdot (t^2 + \frac{3}{4}) \cdot (t^2 + t + 1) \\
 \underline{-(7t^3 - 28t^2)} & & \\
 3t^2 - 9t - 12 & & \\
 \underline{-(3t^2 - 12t)} & & \\
 3t - 12 & & \\
 \underline{-(3t - 12)} & & \\
 0 & &
 \end{array}$$

Dies ist bereits die multiplikative Darstellung von q , denn für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $t^2 + \frac{3}{4} \neq 0$ und

$$t^2 + t + 1 = t^2 + 2 \cdot t \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \neq 0.$$

Alternative: Berechnungen mit dem Hornerschema:

1		4	-12	-9	-25	-9	-12		-1		4	-12	-9	-25	-9	-12
		↓		4	-8	-17	-42				-51	↓		-4	16	-1
		4	-8	-17	-42	-51	-63				4	-16	7	-32	23	-35
2		4	-12	-9	-25	-9	-12		-2		4	-12	-9	-25	-9	-12
		↓		8	-8	-34	-118				-254	↓		-8	40	-62
		4	-4	-17	-59	-127	-266				4	-20	31	-87	165	-342
3		4	-12	-9	-25	-9	-12		-3		4	-12	-9	-25	-9	-12
		↓		12	0	-27	-156				-495	↓		-12	72	-189
		4	0	-9	-52	-165	-507				4	-24	63	-214	633	-1 911
4		4	-12	-9	-25	-9	-12									
		↓		16	16	28	12				12					
		4	4	7	3	3	0									



FktEinDim/Polynome/Ag_Polyn_FaktorisierenOhneHuerden.tex

Aufgabe 49.242 (Polynome faktorisieren)

SPF

Geben Sie für die folgenden reellen Polynome jeweils eine Menge von möglichen rationalen Nullstellen an! Bestimmen Sie außerdem die multiplikative Darstellung der Polynome!

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := x^3 + 5x^2 - 8x - 12$

$$(x - (-6)) \cdot (x - (-1)) \cdot (x - 2) \quad \{-12; -6; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 6; 12\}$$

Lösung mit Polynomdivision:

Das Absolutglied -12 von f hat die Teilermenge $\{-12; -6; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 6; 12\}$.

Der Leitkoeffizient 1 von f hat die Teilermenge $\{-1; 1\}$.

Alle möglichen rationalen Nullstellen von f liegen also in der Menge

$$\{-12; -6; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 6; 12\}.$$

Es gilt

$$f(1) = 1^3 + 5 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 - 12 = 1 + 5 - 8 - 12 = 6 - 20 = -14 \neq 0$$

$$\text{und } f(-1) = (-1)^3 + 5 \cdot (-1)^2 - 8 \cdot (-1) - 12 = -1 + 5 + 8 - 12 = 4 - 4 = 0.$$

Eine Polynomdivision liefert für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 x^3 + 5x^2 - 8x - 12 &= (x + 1) \cdot (x^2 + 4x - 12) \\
 \underline{-(x^3 + x^2)} &= (x + 1) \cdot (x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 - 4 - 12) \\
 4x^2 - 8x - 12 &= (x + 1) \cdot ((x + 2)^2 - 16) \\
 \underline{-(4x^2 + 4x)} &= (x + 1) \cdot (x + 2 - 4) \cdot (x + 2 + 4) \\
 -12x - 12 &= (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 6) \\
 \underline{-(-12x - 12)} &= (x - (-1)) \cdot (x - 2) \cdot (x - (-6)). \\
 0 &
 \end{aligned}$$

b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto g(t) := 2t^3 - 5t^2 - 94t + 48$

$$2 \cdot (t - (-6)) \cdot (t - \frac{1}{2}) \cdot (t - 8) \quad \{\alpha \cdot \beta \in \mathbb{Q} \mid \alpha \in \{-1; 1\} \text{ und } \beta \in \{\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 48\}\}$$

Lösung mit Polynomdivision:

Das Absolutglied 48 von g hat die Teilermenge

$$\{-48; -24; -16; -12; -8; -6; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 48\}.$$

Der Leitkoeffizient 2 von g hat die Teilermenge $\{-2; -1; 1; 2\}$.

Alle möglichen rationalen Nullstellen von g liegen also in der Menge

$$\{-48; -24; -16; -12; -8; -6; -4; -3; -2; -\frac{3}{2}; -1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 48\}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} g(1) &= 2 \cdot 1^3 - 5 \cdot 1^2 - 94 \cdot 1 + 48 = 2 - 5 - 94 + 48 = -3 - 46 = -49 \neq 0, \\ g(-1) &= 2 \cdot (-1)^3 - 5 \cdot (-1)^2 - 94 \cdot (-1) + 48 = -2 - 5 + 94 + 48 = 135 \neq 0, \\ g(2) &= 2 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2^2 - 94 \cdot 2 + 48 = 8 - 20 - 188 + 48 = -12 - 140 = -152 \neq 0, \\ g(-2) &= 2 \cdot (-2)^3 - 5 \cdot (-2)^2 - 94 \cdot (-2) + 48 = -8 - 20 - 188 + 48 = -168 \neq 0 \\ \text{und } g\left(\frac{1}{2}\right) &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 94 \cdot \frac{1}{2} + 48 = \frac{1}{4} - \frac{5}{4} - 47 + 48 = -1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Eine Polynomdivision liefert für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} 2t^3 - 5t^2 - 94t + 48 & = & (t - \frac{1}{2}) \cdot (2t^2 - 4t - 96) \\ \underline{-(2t^3 - t^2)} & = & (t - \frac{1}{2}) \cdot 2 \cdot (t^2 - 2t - 48) \\ -4t^2 - 94t + 48 & = & 2 \cdot (t - \frac{1}{2}) \cdot (t^2 - 2 \cdot t \cdot 1 + 1^2 - 1 - 48) \\ \underline{-(-4t^2 + 2t)} & = & 2 \cdot (t - \frac{1}{2}) \cdot ((t-1)^2 - 49) \\ -96t + 48 & = & 2 \cdot (t - \frac{1}{2}) \cdot (t-1-7) \cdot (t-1+7) \\ \underline{-(-96t + 48)} & = & 2 \cdot (t - \frac{1}{2}) \cdot (t-8) \cdot (t+6) \\ 0 & = & 2 \cdot (t - (-6)) \cdot (t - \frac{1}{2}) \cdot (t-8). \end{array}$$

c) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi \mapsto h(\varphi) := \varphi^5 - 5\varphi^4 + 5\varphi^3 - \varphi^2 + 24\varphi - 36$

$$(\varphi - 2)^2 \cdot (\varphi - 3) \cdot (\varphi^2 + 2\varphi + 3) \quad \{-36; -18; -12; -9; -6; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36\}$$

Lösung mit Polynomdivision:

Das Absolutglied -36 von h hat die Teilermenge

$$\{-36; -18; -12; -9; -6; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36\}.$$

Der Leitkoeffizient 1 von h hat die Teilermenge $\{-1; 1\}$.

Alle möglichen rationalen Nullstellen von h liegen also in der Menge

$$\{-36; -18; -12; -9; -6; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36\}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} h(1) &= 1^5 - 5 \cdot 1^4 + 5 \cdot 1^3 - 1^2 + 24 \cdot 1 - 36 = 1 - 5 + 5 - 1 + 24 - 36 = -12 \neq 0, \\ h(-1) &= (-1)^5 - 5 \cdot (-1)^4 + 5 \cdot (-1)^3 - (-1)^2 + 24 \cdot (-1) - 36 \\ &= -1 - 5 - 5 - 1 - 24 - 36 = -6 - 6 - 60 = -72 \neq 0, \\ \text{und } h(2) &= 2^5 - 5 \cdot 2^4 + 5 \cdot 2^3 - 2^2 + 24 \cdot 2 - 36 \\ &= 32 - 80 + 40 - 4 + 48 - 36 = -48 + 36 + 12 = 0. \end{aligned}$$

Eine Polynomdivision liefert für alle $\varphi \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{r}
 \varphi^5 - 5\varphi^4 + 5\varphi^3 - \varphi^2 + 24\varphi - 36 = (\varphi - 2) \cdot (\varphi^4 - 3\varphi^3 - \varphi^2 - 3\varphi + 18) . \\
 \underline{-(\varphi^5 - 2\varphi^4)} \\
 -3\varphi^4 + 5\varphi^3 - \varphi^2 + 24\varphi - 36 \\
 \underline{-(-3\varphi^4 + 6\varphi^3)} \\
 -\varphi^3 - \varphi^2 + 24\varphi - 36 \\
 \underline{-(-\varphi^3 + 2\varphi^2)} \\
 -3\varphi^2 + 24\varphi - 36 \\
 \underline{-(-3\varphi^2 + 6\varphi)} \\
 18\varphi - 36 \\
 \underline{-(18\varphi - 36)} \\
 0
 \end{array}$$

Wir suchen die Nullstellen des Restpolynoms $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi \mapsto p(\varphi) := \varphi^4 - 3\varphi^3 - \varphi^2 - 3\varphi + 18$.

Es gilt $p(2) = 2^4 - 3 \cdot 2^3 - 2^2 - 3 \cdot 2 + 18 = 16 - 3 \cdot 8 - 4 - 6 + 18 = 12 - 24 + 12 = 0$.

Eine Polynomdivision liefert für alle $\varphi \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{r}
 \varphi^4 - 3\varphi^3 - \varphi^2 - 3\varphi + 18 = (\varphi - 2) \cdot (\varphi^3 - \varphi^2 - 3\varphi - 9) . \\
 \underline{-(\varphi^4 - 2\varphi^3)} \\
 -\varphi^3 - \varphi^2 - 3\varphi + 18 \\
 \underline{-(-\varphi^3 + 2\varphi^2)} \\
 -3\varphi^2 - 3\varphi + 18 \\
 \underline{-(-3\varphi^2 + 6\varphi)} \\
 -9\varphi + 18 \\
 \underline{-(-9\varphi + 18)} \\
 0
 \end{array}$$

Wir suchen die Nullstellen des Restpolynoms $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi \mapsto q(\varphi) := \varphi^3 - \varphi^2 - 3\varphi - 9$.

Da das Absolutglied -9 ungerade ist, kann weder 2 noch -2 eine Nullstelle sein.

Es gilt $q(3) = 3^3 - 3^2 - 3 \cdot 3 - 9 = 27 - 9 - 9 - 9 = 18 - 18 = 0$.

Eine Polynomdivision liefert für alle $\varphi \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl}
 \varphi^3 - \varphi^2 - 3\varphi - 9 & = & (\varphi - 3) \cdot (\varphi^2 + 2\varphi + 3) \\
 \underline{-(\varphi^3 - 3\varphi^2)} & = & (\varphi - 3) \cdot (\varphi^2 + 2 \cdot \varphi \cdot 1 + 1^2 - 1 + 3) \\
 2\varphi^2 - 3\varphi - 9 & = & (\varphi - 3) \cdot ((\varphi + 1)^2 + 2) . \\
 \underline{-(2\varphi^2 - 6\varphi)} & & \\
 3\varphi - 9 & & \\
 \underline{-(3\varphi - 9)} & & \\
 0 & &
 \end{array}$$

Da also $\varphi^2 + 2\varphi + 3 \neq 0$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt, ergibt sich die multiplikative Darstellung von h für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ zu

$$\begin{aligned}
 h(\varphi) &= \varphi^5 - 5\varphi^4 + 5\varphi^3 - \varphi^2 + 24\varphi - 36 = (\varphi - 2) \cdot (\varphi^4 - 3\varphi^3 - \varphi^2 - 3\varphi + 18) \\
 &= (\varphi - 2) \cdot (\varphi - 2) \cdot (\varphi^3 - \varphi^2 - 3\varphi - 9) = (\varphi - 2)^2 \cdot (\varphi - 3) \cdot (\varphi^2 + 2\varphi + 3) .
 \end{aligned}$$

**Aufgabe 49.243** (Polynome umentwickeln)Entwickeln Sie die folgenden Polynome je einmal um 2 und einmal um -6 !

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := x^3 + 5x^2 - 8x - 12$

$$f(x) = (x-2)^3 + 11 \cdot (x-2)^2 + 24 \cdot (x-2) = (x-(-6))^3 - 13 \cdot (x-(-6))^2 + 40 \cdot (x-(-6))$$

Lösung zur Entwicklung um 2:Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f(t+2) &= (t+2)^3 + 5 \cdot (t+2)^2 - 8 \cdot (t+2) - 12 \\ &= t^3 + 3 \cdot t^2 \cdot 2^1 + 3 \cdot t^2 \cdot 2^2 + 2^3 + 5 \cdot (t^2 + 4t + 4) - 8t - 16 - 12 \\ &= t^3 + 6t^2 + 12t + 8 + 5t^2 + 20t + 20 - 8t - 28 \\ &= t^3 + 11t^2 + 24t. \end{aligned}$$

Damit folgt $f(x) = (x-2)^3 + 11 \cdot (x-2)^2 + 24 \cdot (x-2)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.**Lösung zur Entwicklung um -6 :**Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f(t-6) &= (t-6)^3 + 5 \cdot (t-6)^2 - 8 \cdot (t-6) - 12 \\ &= t^3 + 3 \cdot t^2 \cdot (-6)^1 + 3 \cdot t^2 \cdot (-6)^2 + (-6)^3 + 5 \cdot (t^2 - 12t + 36) - 8t + 48 - 12 \\ &= t^3 - 18t^2 + 108t - 216 + 5t^2 - 60t + 180 - 8t + 36 \\ &= t^3 - 13t^2 + 40t. \end{aligned}$$

Damit folgt $f(x) = (x-(-6))^3 - 13 \cdot (x-(-6))^2 + 40 \cdot (x-(-6))$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto g(t) := 2t^3 - 5t^2 - 94t + 48$

$$g(t) = 2 \cdot (t-2)^3 + 7 \cdot (t-2)^2 - 90 \cdot (t-2) - 144 = 2 \cdot (t-(-6))^3 - 41 \cdot (t-(-6))^2 + 182 \cdot (t-(-6))$$

Lösung zur Entwicklung um 2:Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} g(x+2) &= 2 \cdot (x+2)^3 - 5 \cdot (x+2)^2 - 94 \cdot (x+2) + 48 \\ &= 2 \cdot (x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2^1 + 3 \cdot x^2 \cdot 2^2 + 2^3) - 5 \cdot (x^2 + 4x + 4) - 94x - 188 + 48 \\ &= 2x^3 + 12x^2 + 24x + 16 - 5x^2 - 20x - 20 - 94x - 140 \\ &= 2x^3 + 7x^2 - 90x - 144. \end{aligned}$$

Damit folgt $g(t) = 2 \cdot (t-2)^3 + 7 \cdot (t-2)^2 - 90 \cdot (t-2) - 144$ für alle $t \in \mathbb{R}$.**Lösung zur Entwicklung um -6 :**Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} g(x-6) &= 2 \cdot (x-6)^3 - 5 \cdot (x-6)^2 - 94 \cdot (x-6) + 48 \\ &= 2 \cdot (x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot (-6)^1 + 3 \cdot x^2 \cdot (-6)^2 + (-6)^3) \\ &\quad - 5 \cdot (x^2 - 12x + 36) - 94x + 564 + 48 \\ &= 2x^3 - 36x^2 + 216x - 432 - 5x^2 + 60x - 180 - 94x + 612 \\ &= 2x^3 - 41x^2 + 182x. \end{aligned}$$

Damit folgt $g(t) = 2 \cdot (t-(-6))^3 - 41 \cdot (t-(-6))^2 + 182 \cdot (t-(-6))$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

c) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi \mapsto h(\varphi) := (\varphi - 2)^2 \cdot (\varphi - 3) \cdot (\varphi^2 + 2\varphi + 3)$

$$\begin{aligned} h(\varphi) &= (\varphi - 2)^5 + 5 \cdot (\varphi - 2)^4 + 5 \cdot (\varphi - 2)^3 - 11 \cdot (\varphi - 2)^2 \\ &= (\varphi - (-6))^5 - 35 \cdot (\varphi - (-6))^4 + 485 \cdot (\varphi - (-6))^3 - 3331 \cdot (\varphi - (-6))^2 + 11376 \cdot (\varphi - (-6)) - 15552 \end{aligned}$$

Lösung zur Entwicklung um 2:

Für alle $\psi \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} h(\psi + 2) &= (\psi + 2 - 2)^2 \cdot (\psi + 2 - 3) \cdot ((\psi + 2)^2 + 2 \cdot (\psi + 2) + 3) \\ &= \psi^2 \cdot (\psi - 1) \cdot (\psi^2 + 4\psi + 4 + 2\psi + 4 + 3) \\ &= (\psi^3 - \psi^2) \cdot (\psi^2 + 6\psi + 11) \\ &= \psi^5 + 6\psi^4 + 11\psi^3 - \psi^4 - 6\psi^3 - 11\psi^2 \\ &= \psi^5 + 5\psi^4 + 5\psi^3 - 11\psi^2. \end{aligned}$$

Damit folgt $h(\varphi) = (\varphi - 2)^5 + 5 \cdot (\varphi - 2)^4 + 5 \cdot (\varphi - 2)^3 - 11 \cdot (\varphi - 2)^2$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$.

Lösung zur Entwicklung um -6:

Für alle $\psi \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} h(\psi - 6) &= (\psi - 6 - 2)^2 \cdot (\psi - 6 - 3) \cdot ((\psi - 6)^2 + 2 \cdot (\psi - 6) + 3) \\ &= (\psi^2 - 16\psi + 64) \cdot (\psi - 9) \cdot (\psi^2 - 12\psi + 36 + 2\psi - 12 + 3) \\ &= (\psi^3 - 16\psi^2 + 64\psi - 9\psi^2 + 144\psi - 576) \cdot (\psi^2 - 10\psi + 27) \\ &= (\psi^3 - 25\psi^2 + 208\psi - 576) \cdot (\psi^2 - 10\psi + 27) \\ &= \psi^5 - 25\psi^4 + 208\psi^3 - 576\psi^2 \\ &\quad - 10\psi^4 + 250\psi^3 - 2080\psi^2 + 5760\psi \\ &\quad + 27\psi^3 - 675\psi^2 + 5400\psi + 160\psi + 56\psi - 11520 - 4032 \\ &= \psi^5 - 35\psi^4 + 485\psi^3 - 3331\psi^2 + 11376\psi - 15552. \end{aligned}$$

Damit folgt $h(\varphi) = (\varphi - (-6))^5 - 35 \cdot (\varphi - (-6))^4 + 485 \cdot (\varphi - (-6))^3 - 3331 \cdot (\varphi - (-6))^2 + 11376 \cdot (\varphi - (-6)) - 15552$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$.



FktEinDim/Polynome/Ag_Polynome_HornerSchema_leicht.tex

Aufgabe 49.244 (HornerSchema)

9.1.2

Berechnen Sie mit dem HornerSchema

$$b_n \left[\begin{array}{c|ccc} & k & q & r \\ \hline & \vdots & \vdots & \vdots \\ & 1 & 0 & -1 \\ \hline \end{array} \right] \cdot 2^{ln} \implies p(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j = p(s) + (x - s) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j$$

a) $p(3)$, $p(-1)$ und $p(2)$ für $p(x) = x^4 - x^2 + x - 3$,

$$p(3) = 72, p(-1) = -4, p(2) = 11$$

Lösung:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & - & 3 & 9 & 24 & 75 \\ \hline & 1 & 3 & 8 & 25 & 72 \end{array} \quad \begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & - & -1 & 1 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 0 & 1 & -4 \end{array} \quad \begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & - & 2 & 4 & 6 & 14 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 7 & 11 \end{array}$$

b) $p(5)$, $p(-3)$ und $p(4)$ für $p(x) = x^5 - 6x^4 - 7x^3 + 61x^2 + x - 6$. $p(5) = 24$, $p(-3) = 0$, $p(4) = 14$

Lösung:

$$\begin{array}{c|cccccc} 5 & 1 & -6 & -7 & 61 & 1 & -6 \\ & - & 5 & -5 & -60 & 5 & 30 \\ \hline & 1 & -1 & -12 & 1 & 6 & 24 \end{array} \quad \begin{array}{c|cccccc} -3 & 1 & -6 & -7 & 61 & 1 & -6 \\ & - & -3 & 27 & -60 & -3 & 6 \\ \hline & 1 & -9 & 20 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccc} 4 & 1 & -6 & -7 & 61 & 1 & -6 \\ & - & 4 & -8 & -60 & 4 & 20 \\ \hline & 1 & -2 & -15 & 1 & 5 & 14 \end{array}$$



FktEinDim/Polynome/Ag_Polynome_ParabelnInteressantePunkte_leicht.tex

Aufgabe 49.245 (Eigenschaften von Parabeln)

8.2.1

Berechnen Sie die Scheitelpunkte, Nullstellen und die gemeinsamen Punkte der folgenden Parabeln und zeichnen Sie diese anschließend:

a) $f(x) = 3x^2 + 4x - 2$
 $g(x) = -2x^2 + 6x - 1$

$$f : \left(-\frac{2}{3}; -\frac{10}{3}\right)^T, \left(\frac{-2 \pm \sqrt{10}}{3}; 0\right)^T, g : \left(\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right)^T, \left(\frac{3 \pm \sqrt{7}}{2}; 0\right)^T, f \cap g : \left(\frac{1 \pm \sqrt{6}}{5}; \frac{-9 \pm 26 \cdot \sqrt{6}}{25}\right)^T$$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 + 4x - 2 = 3 \cdot \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) - 3 \cdot \frac{4}{9} - 2 = 3 \cdot \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{10}{3} \\ &= 3 \cdot \left(x + \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{10}}{3}\right) \cdot \left(x + \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{10}}{3}\right) = 3 \cdot \left(x - \frac{-2 - \sqrt{10}}{3}\right) \cdot \left(x - \frac{-2 + \sqrt{10}}{3}\right), \\ g(x) &= -2x^2 + 6x - 1 = -2 \cdot \left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) + 2 \cdot \frac{9}{4} - 1 = -2 \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{2} \\ &= -2 \cdot \left(x - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}\right) = -2 \cdot \left(x - \frac{3 - \sqrt{7}}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{3 + \sqrt{7}}{2}\right). \end{aligned}$$

und

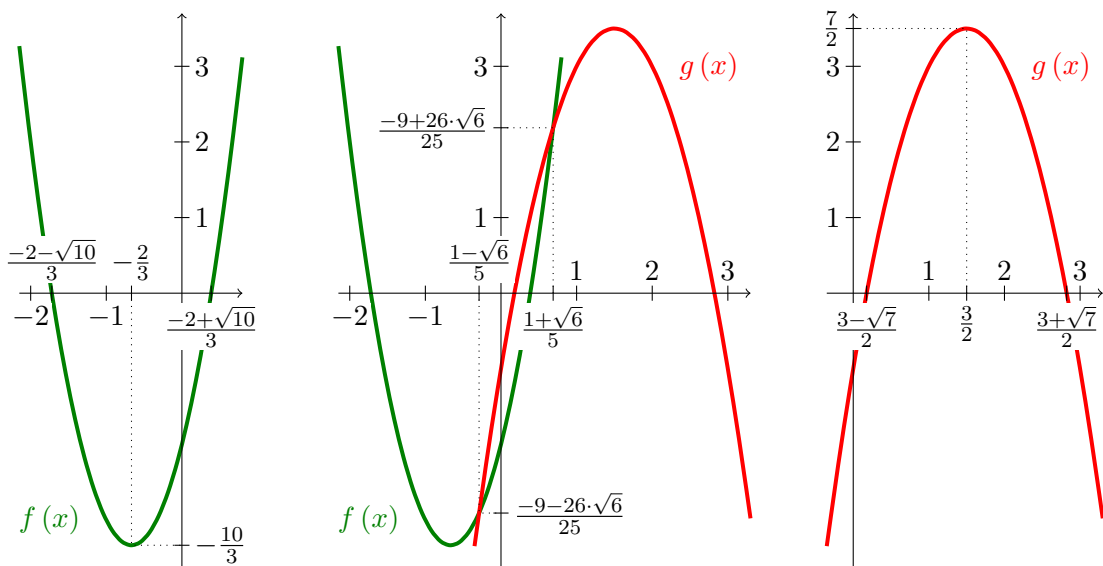
$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= (3x^2 + 4x - 2) - (-2x^2 + 6x - 1) = 5x^2 - 2x - 1 \\ &= 5 \cdot \left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 - \frac{1}{25} - \frac{1}{5}\right) = 5 \cdot \left(\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 - \frac{6}{25}\right) \\ &= 5 \cdot \left(x - \frac{1}{5} + \frac{\sqrt{6}}{5}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{5} - \frac{\sqrt{6}}{5}\right) = 5 \cdot \left(x - \frac{1 - \sqrt{6}}{5}\right) \cdot \left(x - \frac{1 + \sqrt{6}}{5}\right). \end{aligned}$$

Es sind

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1 - \sqrt{6}}{5}\right) &= 3 \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{6}}{5}\right)^2 + 4 \cdot \frac{1 - \sqrt{6}}{5} - 2 = 3 \cdot \frac{1 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{6} + 6}{25} + 4 \cdot \frac{1 - \sqrt{6}}{5} - 2 \\ &= \frac{3 - 6 \cdot \sqrt{6} + 18 + 20 - 20 \cdot \sqrt{6} - 50}{25} = \frac{-9 - 26 \cdot \sqrt{6}}{25} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1 + \sqrt{6}}{5}\right) &= 3 \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{6}}{5}\right)^2 + 4 \cdot \frac{1 + \sqrt{6}}{5} - 2 = 3 \cdot \frac{1 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{6} + 6}{25} + 4 \cdot \frac{1 + \sqrt{6}}{5} - 2 \\ &= \frac{3 + 6 \cdot \sqrt{6} + 18 + 20 + 20 \cdot \sqrt{6} - 50}{25} = \frac{-9 + 26 \cdot \sqrt{6}}{25}. \end{aligned}$$



b) $p(x) = 4x^2 - 10x - 4$
 $q(x) = -3x^2 + 4x - 6$

$$p: \left(\frac{5}{4}; -\frac{41}{4}\right)^T, \left(\frac{5 \pm \sqrt{41}}{4}; 0\right)^T, q: \left(\frac{2}{3}; -\frac{14}{3}\right)^T, \text{ keine Nullstellen, } p \cap q: \left(1 \pm \frac{\sqrt{35}}{7}; \frac{-50 \pm 2 \cdot \sqrt{35}}{7}\right)^T$$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} p(x) &= 4x^2 - 10x - 4 = 4 \cdot \left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{5}{4} + \left(\frac{5}{4}\right)^2\right) - 4 \cdot \frac{25}{16} - 4 = 4 \cdot \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{41}{4} \\ &= 4 \cdot \left(x - \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{41}}{4}\right) \cdot \left(x - \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{41}}{4}\right) = 4 \cdot \left(x - \frac{5 - \sqrt{41}}{4}\right) \cdot \left(x - \frac{5 + \sqrt{41}}{4}\right), \\ q(x) &= -3x^2 + 4x - 6 = -3 \cdot \left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) + 3 \cdot \frac{4}{9} - 6 = -3 \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{14}{3} \\ &= -3 \cdot \left(x - \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{14}}{3} \cdot i\right) \cdot \left(x - \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{14}}{3} \cdot i\right) = -3 \cdot \left(x - \frac{2 - \sqrt{14} \cdot i}{3}\right) \cdot \left(x - \frac{2 + \sqrt{14} \cdot i}{3}\right). \end{aligned}$$

(das heißt, q hat keine reellen Nullstellen) und

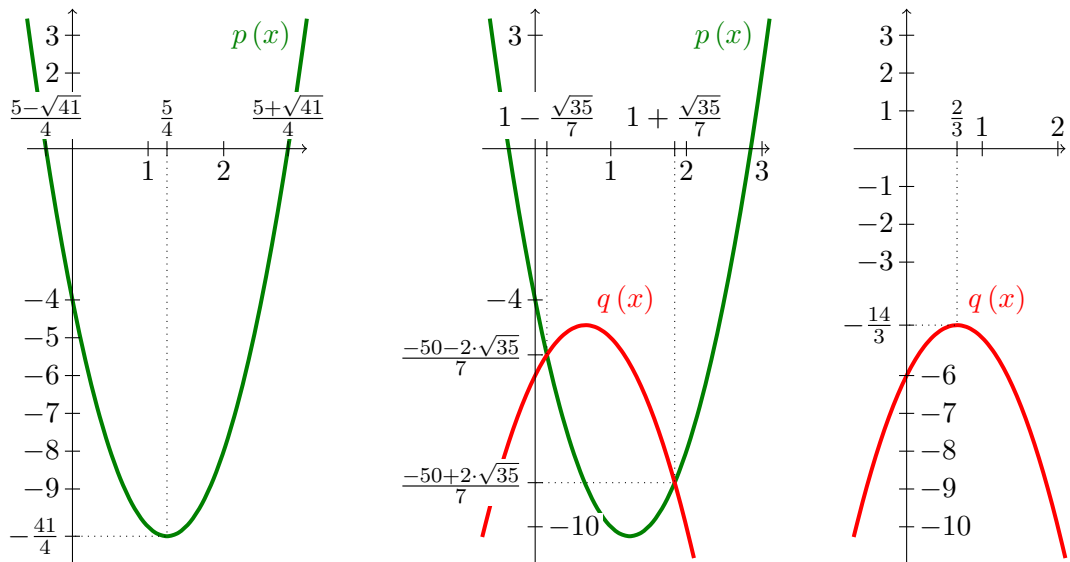
$$\begin{aligned} p(x) - q(x) &= (4x^2 - 10x - 4) - (-3x^2 + 4x - 6) = 7x^2 - 14x + 2 \\ &= 7 \cdot \left(x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 - 1 + \frac{2}{7}\right) = 7 \cdot \left((x - 1)^2 - \frac{5}{7}\right) \\ &= 7 \cdot \left(x - 1 + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}\right) \cdot \left(x - 1 - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}\right) = 7 \cdot \left(x - \left(1 - \frac{\sqrt{35}}{7}\right)\right) \cdot \left(x - \left(1 + \frac{\sqrt{35}}{7}\right)\right). \end{aligned}$$

Es sind

$$\begin{aligned} p\left(1 - \frac{\sqrt{35}}{7}\right) &= 4 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{35}}{7}\right)^2 - 10 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{35}}{7}\right) - 4 = 4 \cdot \left(1 - 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{35}}{7} + \frac{35}{49}\right) - 10 + 10 \cdot \frac{\sqrt{35}}{7} - 4 \\ &= 4 - \frac{8}{7} \cdot \sqrt{35} + \frac{20}{7} - 10 + \frac{10}{7} \cdot \sqrt{35} - 4 = \frac{-50 + 2 \cdot \sqrt{35}}{7} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} p\left(1 + \frac{\sqrt{35}}{7}\right) &= 4 \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{35}}{7}\right)^2 - 10 \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{35}}{7}\right) - 4 = 4 \cdot \left(1 + 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{35}}{7} + \frac{35}{49}\right) - 10 - 10 \cdot \frac{\sqrt{35}}{7} - 4 \\ &= 4 + \frac{8}{7} \cdot \sqrt{35} + \frac{20}{7} - 10 - \frac{10}{7} \cdot \sqrt{35} - 4 = \frac{-50 - 2 \cdot \sqrt{35}}{7} \end{aligned}$$



In den Zeichnungen ist die Achseneinteilung der vertikalen Achse halb so groß wie die der horizontalen Achse.

c) $u(x) = -4x^2 - 2x + 5$
 $v(x) = x^2 - x - 3$

$$u : \left(-\frac{1}{4}; \frac{21}{4}\right)^T, \left(\frac{-1 \pm \sqrt{21}}{4}; 0\right)^T, v : \left(\frac{1}{2}; -\frac{13}{4}\right)^T, \left(\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}; 0\right)^T, u \cap v : \left(\frac{-1 \pm \sqrt{161}}{10}; \frac{-32 \pm 3 \cdot \sqrt{161}}{25}\right)^T$$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} u(x) &= -4x^2 - 2x + 5 = -4 \cdot \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right) + 4 \cdot \frac{1}{16} + 5 = -4 \cdot \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{21}{4} \\ &= -4 \cdot \left(x + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{21}}{4}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{21}}{4}\right) = -4 \cdot \left(x - \frac{-1 - \sqrt{21}}{4}\right) \cdot \left(x - \frac{-1 + \sqrt{21}}{4}\right), \\ v(x) &= x^2 - x - 3 = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 3 = 1 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4} \\ &= \left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right) = \left(x - \frac{1 - \sqrt{13}}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right). \end{aligned}$$

und

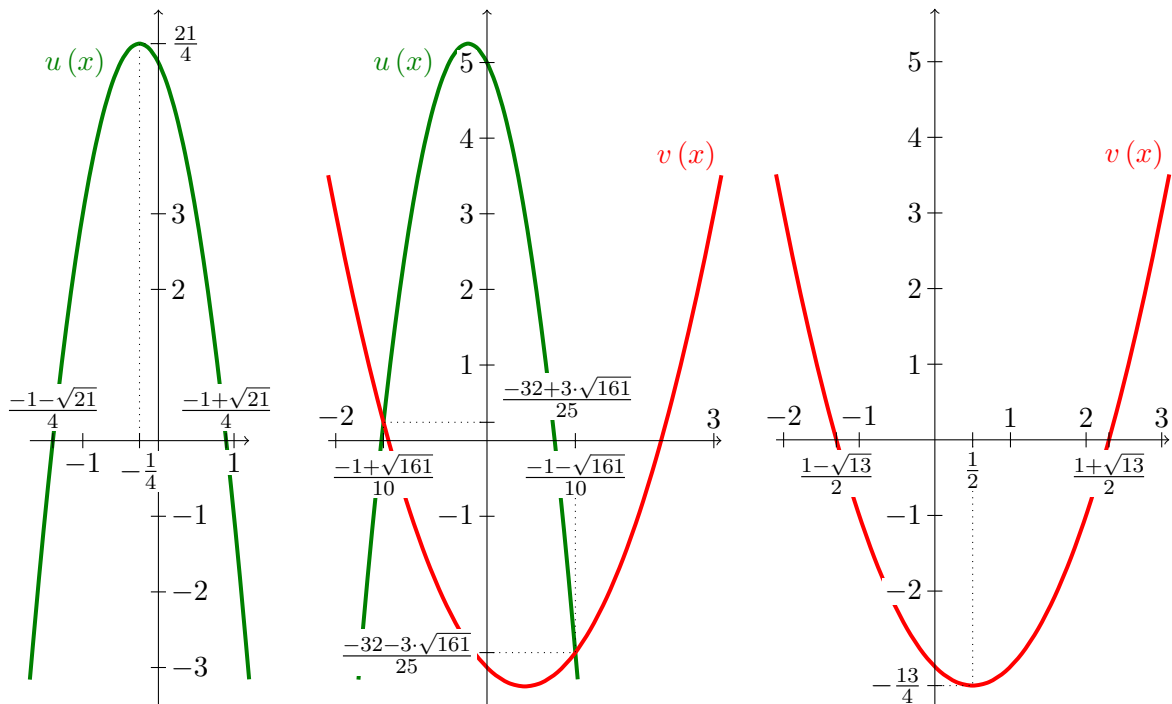
$$\begin{aligned} u(x) - v(x) &= (-4x^2 - 2x + 5) - (x^2 - x - 3) = -5x^2 - x + 8 \\ &= -5 \cdot \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 - \frac{1}{100} - \frac{8}{5}\right) = -5 \cdot \left(\left(x + \frac{1}{10}\right)^2 - \frac{161}{100}\right) \\ &= -5 \cdot \left(x + \frac{1}{10} + \frac{\sqrt{161}}{10}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{10} - \frac{\sqrt{161}}{10}\right) = -5 \cdot \left(x - \frac{-1 - \sqrt{161}}{10}\right) \cdot \left(x - \frac{-1 + \sqrt{161}}{10}\right). \end{aligned}$$

Es sind

$$\begin{aligned} u\left(\frac{-1 - \sqrt{161}}{10}\right) &= -4 \cdot \left(\frac{-1 - \sqrt{161}}{10}\right)^2 - 2 \cdot \frac{-1 - \sqrt{161}}{10} + 5 = -4 \cdot \frac{1 - 2 \cdot (-1) \cdot \sqrt{161} + 161}{100} - \frac{-1 - \sqrt{161}}{5} + 5 \\ &= \frac{-1 - 2 \cdot \sqrt{161} - 161 + 5 + 5 \cdot \sqrt{161} + 125}{25} = \frac{-32 + 3 \cdot \sqrt{161}}{25} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} u\left(\frac{-1 + \sqrt{161}}{10}\right) &= 4 \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{35}}{7}\right)^2 - 10 \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{35}}{7}\right) - 4 = 4 \cdot \left(1 + 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{35}}{7} + \frac{35}{49}\right) - 10 - 10 \cdot \frac{\sqrt{35}}{7} - 4 \\ &= 4 + \frac{8}{7} \cdot \sqrt{35} + \frac{20}{7} - 10 - \frac{10}{7} \cdot \sqrt{35} - 4 = \frac{-50 - 2 \cdot \sqrt{35}}{7} \end{aligned}$$



FktEinDim/Polynome/Ag_Polynome_PolyDivLinearfaktorAbspalten.tex

Aufgabe 49.246 (Linearfaktor abspalten)

9.1.2

Das Polynom $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto p(x) := 3x^3 - 3x^2 - 12x + 12$ besitzt die Nullstelle $x_1 := 1$.

Schreiben Sie p als Produkt zweier Polynome!

Können Sie auch die multiplikative Darstellung von p angeben?

$$p(x) = (x - 1) \cdot (3x^2 - 12) = 3 \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - (-2))$$

Lösung durch Ausklammern:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} 3x^3 - 3x^2 - 12x + 12 &= (3x^3 - 3x^2) - (12x - 12) = 3x^2 \cdot (x - 1) - 12 \cdot (x - 1) \\ &= (x - 1) \cdot (3x^2 - 12) = (x - 1) \cdot 3 \cdot (x^2 - 4) \\ &= 3 \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) = 3 \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - (-2)). \end{aligned}$$

Lösung mit dem HornerSchema:

Wir wenden das HornerSchema an:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -3 & -12 & 12 \\ 1 & \downarrow & 3 & 0 & -12 \\ \hline & 3 & 0 & -12 & 0 \end{array}$$

Aus der letzten Zeile liest man die Koeffizienten des reduzierten Polynoms zu

$$b_2 = 3, \quad b_1 = 0 \quad \text{und} \quad b_0 = -12$$

ab und stellt fest, dass die Division „aufgeht“ (Rest: $p(1) = 0$). Damit folgt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$3x^3 - 3x^2 - 12x + 12 = (x - 1) \cdot (3x^2 + 0x - 12) = (x - 1) \cdot 3 \cdot (x^2 - 4) = 3 \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 2).$$

Lösung mit Polynomdivision:

Eine Polynomdivision liefert für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} 3x^3 - 3x^2 - 12x + 12 & = & (x - 1) \cdot (3x^2 - 12) \\ -(3x^3 - 3x^2) & = & (x - 1) \cdot 3 \cdot (x^2 - 4) \\ \hline -12x + 12 & = & 3 \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) \\ -(-12x + 12) & = & 3 \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - (-2)). \\ \hline 0 & & \end{array}$$

**Aufgabe 49.247** (Polynomdivision)

12.2.2

Führen Sie eine Polynomdivision aus!

a) $\frac{2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 3}{x^2 + x - 2}$

$$2x^2 + x - 1 + \frac{3x-5}{x^2+x-2}$$

Lösung: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 \quad - 3 \\ -(2x^4 + 2x^3 - 4x^2) \\ \hline x^3 \quad - 3 \\ -(x^3 + x^2 - 2x) \\ \hline -x^2 + 2x - 3 \\ -(-x^2 - x + 2) \\ \hline 3x - 5 \end{array}$$

b) $\frac{4u^4 + 15u^3 + \frac{23}{2} \cdot u^2 - u}{u^2 + 4u + 4}$

$$4u^2 - u - \frac{1}{2} + \frac{5u+2}{u^2+4u+4}$$

Lösung: Für alle $u \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{array}{r} 4u^4 + 15u^3 + \frac{23}{2} \cdot u^2 - u \\ -(4u^4 + 16u^3 + 16u^2) \\ \hline -u^3 - \frac{9}{2} \cdot u^2 - u \\ -(-u^3 - 4u^2 - 4u) \\ \hline -\frac{1}{2} \cdot u^2 + 3u \\ -(-\frac{1}{2} \cdot u^2 - 2u - 2) \\ \hline 5u + 2 \end{array}$$

c) $\frac{-\alpha^4 + 2\alpha^3 - 3\alpha + 7}{2\alpha^2 - 8}$

$$-\frac{1}{2} \cdot \alpha^2 + \alpha - 2 + \frac{5\alpha-9}{2\alpha^2-8}$$

Lösung: Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{array}{r} -\alpha^4 + 2\alpha^3 \quad - 3\alpha + 7 \\ -(-\alpha^4 \quad + 4\alpha^2) \\ \hline 2\alpha^3 - 4\alpha^2 - 3\alpha + 7 \\ -(2\alpha^3 \quad - 8\alpha) \\ \hline -4\alpha^2 + 5\alpha + 7 \\ -(-4\alpha^2 \quad + 16) \\ \hline 5\alpha - 9 \end{array}$$

d) $\frac{2t^4 - 5t^3 - 6t^2 + 20t - 8}{t^3 + 2t^2 - 5t - 6}$

$$2t - 9 + \frac{22t^2 - 13t - 62}{t^3 + 2t^2 - 5t - 6}$$

Lösung: Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{array}{r} 2t^4 - 5t^3 - 6t^2 + 20t - 8 = (t^3 + 2t^2 - 5t - 6) \cdot (2t - 9) + (22t^2 - 13t - 62) \\ \hline -(2t^4 + 4t^3 - 10t^2 - 12t) \\ -9t^3 + 4t^2 + 32t - 8 \\ \hline -(-9t^3 - 18t^2 + 45t + 54) \\ \hline 22t^2 - 13t - 62 \end{array}$$



FktEinDim/Polynome/Ag_Polynome_PolyDivMitRestDreiZweiDreiSchritte.tex

Aufgabe 49.248 (Polynomdivision)

SPF

Führen Sie eine Polynomdivision aus!

a) $\frac{6t^4 + 7t^3 - 5t^2 + 22t - 13}{2t^2 + 3t - 4}$

$$3t^2 - t + 5 + \frac{3t+7}{2t^2+3t-4}$$

Lösung: Für alle $t \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{array}{r} 6t^4 + 7t^3 - 5t^2 + 22t - 13 = (2t^2 + 3t - 4) \cdot (3t^2 - t + 5) + (3t + 7) \\ \hline -(6t^4 + 9t^3 - 12t^2) \\ -2t^3 + 7t^2 + 22t - 13 \\ \hline -(-2t^3 - 3t^2 + 4t) \\ \hline 10t^2 + 18t - 13 \\ \hline -(10t^2 + 15t - 20) \\ \hline 3t + 7 \end{array}$$

b) $\frac{2z^4 + 7z^3 - 24z + 4}{z^3 + 2z^2 - 4z}$

$$2z + 3 + \frac{2z^2 - 12z + 4}{z^3 + 2z^2 - 4z}$$

Lösung: Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{array}{r} 2z^4 + 7z^3 - 24z + 4 = (z^3 + 2z^2 - 4z) \cdot (2z + 3) + (2z^2 - 12z + 4) \\ \hline -(2z^4 + 4z^3 - 8z^2) \\ 3z^3 + 8z^2 - 24z + 4 \\ \hline -(3z^3 + 6z^2 - 12z) \\ \hline 2z^2 - 12z + 4 \end{array}$$

c) $\frac{9x^4 - 27x^3 + 29x^2 - 23}{3x^2 - 4x + 6}$

$$3x^2 - 5x - 3 + \frac{18x-5}{3x^2-4x+6}$$

Lösung: Für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{array}{r}
 9x^4 - 27x^3 + 29x^2 \quad - 23 \\
 -(9x^4 - 12x^3 + 18x^2) \\
 \hline
 -15x^3 + 11x^2 \quad - 23 \\
 -(-15x^3 + 20x^2 - 30x) \\
 \hline
 -9x^2 + 30x - 23 \\
 -(-9x^2 + 12x - 18) \\
 \hline
 18x - 5
 \end{array}
 = (3x^2 - 4x + 6) \cdot (3x^2 - 5x - 3) + (18x - 5).$$



FktEinDim/Polynome/Ag_Polynome_PolyDivMitRestZweiBisDreiSchritte.tex

Aufgabe 49.249 (Polynomdivision)

9.1.2

Führen Sie eine Polynomdivision aus!

a) $\frac{2x^3 + x^2 - 6x + 4}{x^2 + 3}$

$$2x + 1 + \frac{-12x+1}{x^2+3}$$

Lösung: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{array}{r}
 2x^3 + x^2 - 6x + 4 \\
 -(2x^3 \quad + 6x) \\
 \hline
 x^2 - 12x + 4 \\
 -(x^2 \quad + 3) \\
 \hline
 -12x + 1
 \end{array}
 = (x^2 + 3) \cdot (2x + 1) - 12x + 1.$$

b) $\frac{z^4 + z^2 - 3z + 1}{z^3 + 3z^2 + z}$

$$z - 3 + \frac{9z^2+1}{z^3+3z^2+z}$$

Lösung: Für alle $z \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{array}{r}
 z^4 \quad + \quad z^2 - 3z + 1 \\
 -(z^4 + 3z^3 + z^2) \\
 \hline
 -3z^3 \quad - 3z + 1 \\
 -(-3z^3 - 9z^2 - 3z) \\
 \hline
 9z^2 \quad + 1
 \end{array}
 = (z^3 + 3z^2 + z) \cdot (z - 3) + 9z^2 + 1.$$

c) $\frac{6t^4 - t^3 + 2t + 4}{2t^2 - t - 3}$

$$3t^2 + t + 5 + \frac{10t+19}{2t^2-t-3}$$

Lösung: Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{array}{r}
 6t^4 - t^3 + 2t + 4 = (2t^2 - t - 3) \cdot (3t^2 + t + 5) + 10t + 19. \\
 \hline
 -(6t^4 - 3t^3 - 9t^2) \\
 \hline
 2t^3 + 9t^2 + 2t + 4 \\
 \hline
 -(2t^3 - t^2 - 3t) \\
 \hline
 10t^2 + 5t + 4 \\
 \hline
 -(10t^2 - 5t - 15) \\
 \hline
 10t + 19
 \end{array}$$



FktEinDim/Polynome/Ag_Polynome_PolynomeAusPunktenBestimmen_leicht.tex

Aufgabe 49.250 (Polynomfunktionen bestimmen)

8.2.2

Es werden jeweils Polynomfunktionen gesucht, zu deren Graphen die angegebenen Punkte gehören. Die Terme der Funktionszuordnung $y = f(x)$ sollen möglichst einfach aufgebaut sein.

a) $P_1 = (1, 2)$ und $P_2 = (2, -3)$

$y = -5x + 7$

Lösung:

Da es sich um zwei Punkte handelt, ist die einfachste zugehörige Polynomfunktion vermutlich linear. Wir suchen also $m \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $y = mx + b$. Dann gilt

$$2 = m \cdot 1 + b \quad \text{und} \quad -3 = m \cdot 2 + b, \quad \text{also} \quad -5 = -3 - 2 = (2m + b) - (m + b) = m.$$

Mit $2 = m + b$ folgt $b = 2 - (-5) = 7$.

b) $P_1 = (3, -1)$ und $P_2 = (1, 0)$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Lösung:

Da es sich um zwei Punkte handelt, ist die einfachste zugehörige Polynomfunktion vermutlich linear. Wir suchen also $m \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $y = mx + b$. Dann gilt

$$-1 = m \cdot 3 + b \quad \text{und} \quad 0 = m \cdot 1 + b, \quad \text{also} \quad -1 = -1 - 0 = (3m + b) - (m + b) = 2m.$$

Es ergibt sich $m = -\frac{1}{2}$ und mit $0 = m + b$ folgt $b = 0 - (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

c) $P_1 = (0, 0)$ und $P_2 = (-7, 6)$

$y = -\frac{6}{7}x$

Lösung:

Da es sich um zwei Punkte handelt, ist die einfachste zugehörige Polynomfunktion vermutlich linear. Wir suchen also $m \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $y = mx + b$. Dann gilt

$$0 = m \cdot 0 + b \quad \text{und} \quad 6 = m \cdot (-7) + b, \quad \text{also} \quad b = 0 \quad \text{und} \quad m = \frac{6-b}{-7} = -\frac{6}{7}.$$

d) $P_1 = (-2, 3)$ und $P_2 = (3, -2)$

$y = -x + 1$

Lösung:

Da es sich um zwei Punkte handelt, ist die einfachste zugehörige Polynomfunktion vermutlich linear. Wir suchen also $m \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $y = mx + b$. Dann gilt

$$3 = m \cdot (-2) + b \quad \text{und} \quad -2 = m \cdot 3 + b, \quad \text{also} \quad -5 = -2 - 3 = (3m + b) - (-2m + b) = 5m.$$

Es ergibt sich $m = -1$ und mit $3 = -2m + b$ folgt $b = 3 + 2 \cdot (-1) = 1$.

e) $P_1 = (\frac{1}{2}, 1)$ und $P_2 = (2, \frac{1}{2})$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{6}$$

Lösung:

Da es sich um zwei Punkte handelt, ist die einfachste zugehörige Polynomfunktion vermutlich linear. Wir suchen also $m \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $y = mx + b$. Dann gilt

$$1 = m \cdot \frac{1}{2} + b \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} = m \cdot 2 + b, \quad \text{also} \quad -\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 1 = (2m + b) - \left(\frac{m}{2} + b\right) = \frac{3}{2} \cdot m.$$

Es ergibt sich $m = -\frac{1}{3}$ und mit $1 = \frac{m}{2} + b$ folgt $b = 1 - \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{7}{6}$.

f) $P_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und $P_2 = (1, \frac{1}{2})$

$$y = \frac{1}{2}$$

Lösung:

Da es sich um zwei Punkte handelt, ist die einfachste zugehörige Polynomfunktion vermutlich linear. Wir suchen also $m \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $y = mx + b$. Dann gilt

$$\frac{1}{2} = m \cdot \frac{1}{2} + b \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} = m \cdot 1 + b, \quad \text{also} \quad 0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = (m + b) - \left(\frac{m}{2} + b\right) = \frac{1}{2} \cdot m.$$

Es ergibt sich $m = 0$ und mit $\frac{1}{2} = \frac{m}{2} + b$ folgt $b = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}$.

g) $P_1 = (1, 2)$, $P_2 = (2, 1)$ und $P_3 = (3, 2)$

$$y = x^2 - 4x + 5$$

Lösung:

Da es sich um drei Punkte handelt, ist die einfachste zugehörige Polynomfunktion vermutlich quadratisch. Wir suchen also $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ mit $y = ax^2 + bx + c$. Dann gilt

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \\ 1 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \\ 2 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \end{array} \right\} \quad \text{also} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 = a + b + c \\ -1 = 1 - 2 = (4a + 2b + c) - (a + b + c) = 3a + b \\ 0 = 1 - 2 = (9a + 3b + c) - (a + b + c) = 8a + 2b \end{array} \right\}$$

Wegen $2 = 0 - 2 \cdot (-1) = (8a + 2b) - 2 \cdot (3a + b) = 2a$ ist $a = 1$ und mit $-1 = 3a + b$ folgt $b = -1 - 3 \cdot 1 = -4$. $a + b + c = 2$ liefert daraus $c = 2 - 1 + 4 = 5$.

h) $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (-2, 1)$ und $P_3 = (2, -1)$

$$y = -\frac{x}{2}$$

Lösung:

Da es sich um drei Punkte handelt, ist die einfachste zugehörige Polynomfunktion vermutlich quadratisch. Wir suchen also $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ mit $y = ax^2 + bx + c$. Dann gilt

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ 1 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \\ -1 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \end{array} \right\} \quad \text{also} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = c \\ 1 = 4a - 2b \\ -2 = (4a + 2b + c) - (4a - 2b + c) = 4b \end{array} \right\}$$

wegen $-2 = -1 - 1$. Also ist $b = -\frac{1}{2}$ und mit $1 = 4a - 2b$ folgt $a = \frac{1}{4} \cdot (1 + 2 \cdot (-\frac{1}{2})) = 0$.

i) $P_1 = (2, -1)$, $P_2 = (1, 1)$ und $P_3 = (-2, -2)$

$$y = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$$

Lösung:

Da es sich um drei Punkte handelt, ist die einfachste zugehörige Polynomfunktion vermutlich quadratisch. Wir suchen also $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ mit $y = ax^2 + bx + c$. Dann gilt

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \\ 1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \\ -2 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \end{array} \right\} \quad \text{also} \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 = a + b + c \\ -1 = 4a + 2b + c \\ -2 = 4a - 2b + c \end{array} \right\}$$

Also ist $4b = (4a + 2b + c) - (4a - 2b + c) = (-1) - (-2) = 1$. Deshalb gilt $b = \frac{1}{4}$.

Außerdem ist $3a = (4a + 2b + c) - (a + b + c) - b = (-1) - 1 - \frac{1}{4} = -\frac{9}{4}$. Damit folgt $a = -\frac{3}{4}$.

Mit $a + b + c = 1$ ergibt sich daraus $c = 1 - \frac{1}{4} - \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{2}$.

j) $P_1 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, $P_2 = (\frac{7}{4}, \frac{21}{8})$ und $P_3 = (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$

$$y = \frac{3}{2} \cdot x$$

Lösung:

Da es sich um drei Punkte handelt, ist die einfachste zugehörige Polynomfunktion vermutlich quadratisch. Wir suchen also $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ mit $y = ax^2 + bx + c$. Dann gilt

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} = a \cdot (\frac{1}{3})^2 + b \cdot \frac{1}{3} + c \\ \frac{21}{8} = a \cdot (\frac{7}{4})^2 + b \cdot \frac{7}{4} + c \\ -\frac{3}{4} = a \cdot (-\frac{1}{2})^2 + b \cdot (-\frac{1}{2}) + c \end{array} \right\} \text{ also } \left\{ \begin{array}{l} \frac{9}{2} = a + 3b + c \\ 42 = 49a + 28b + c \\ -3 = a - 2b + c \end{array} \right\}$$

Also ist $5b = (a + 3b + c) - (a - 2b + c) = \frac{9}{2} - (-3) = \frac{15}{2}$. Deshalb gilt $b = \frac{3}{2}$.

Außerdem ist $48a = (49a + 28b + c) - (a - 2b + c) - 30b = 42 - (-3) - 30 \cdot \frac{3}{2} = 0$.

Damit folgt $a = 0$. Mit $a - 2b + c = -3$ ergibt sich daraus $c = -3 - 0 + 2 \cdot \frac{3}{2} = 0$.



FktEinDim/Polynome/Ag_Polynome_QuadErgDreiEinfuehrungsBspe.tex

Aufgabe 49.251 (quadratische Ergänzung)

SPF

Seien $a \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ und $p_{a,\beta,\gamma}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto p_{a,\beta,\gamma}(x) := a \cdot (x - \beta) \cdot (x - \gamma)$. Bestimmen Sie a , β und γ unter Zuhilfenahme von quadratischer Ergänzung, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $p_{a,\beta,\gamma}(x) = x^2 + 8x - 48$

$$a = 1, \{\beta; \gamma\} = \{-12; 4\}$$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} p_{a,\beta,\gamma}(x) &= x^2 + 8x - 48 = \underbrace{x^2}_{s^2} + 2 \cdot \underbrace{x}_s \cdot \underbrace{4}_t + \underbrace{4^2}_{t^2} - 16 - 48 \\ &\stackrel{1. \text{ BF}}{=} \underbrace{(x+4)^2}_{(s+t)^2} - \underbrace{64}_{(16+48)} \stackrel{3. \text{ BF}}{=} \underbrace{(x+4+8)}_{(u+w)} \cdot \underbrace{(x+4-8)}_{(u-w)} \\ &= (x+12) \cdot (x-4) = 1 \cdot (x - (-12)) \cdot (x - 4). \end{aligned}$$

Also gilt $(a = 1, \beta = -12 \text{ und } \gamma = 4)$ oder $(a = 1, \beta = 4 \text{ und } \gamma = -12)$.

b) $p_{a,\beta,\gamma}(x) = 5x^2 + 20x - 60$

$$a = 5, \{\beta; \gamma\} = \{-6; 2\}$$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} p_{a,\beta,\gamma}(x) &= 5x^2 + 20x - 60 = 5 \cdot (x^2 + 4x - 12) \\ &= 5 \cdot \left(\underbrace{x^2}_{s^2} + 2 \cdot \underbrace{x}_s \cdot \underbrace{2}_t + \underbrace{2^2}_{t^2} - 4 - 12 \right) \stackrel{1. \text{ BF}}{=} 5 \cdot \left(\underbrace{(x+2)^2}_{(s+t)^2} - \underbrace{16}_{(4+12)} \right) \\ &\stackrel{3. \text{ BF}}{=} 5 \cdot \underbrace{(x+2+4)}_{(u+w)} \cdot \underbrace{(x+2-4)}_{(u-w)} = 5 \cdot (x+6) \cdot (x-2) \\ &= 5 \cdot (x - (-6)) \cdot (x - 2). \end{aligned}$$

Also gilt $(a = 5, \beta = -6 \text{ und } \gamma = 2)$ oder $(a = 5, \beta = 2 \text{ und } \gamma = -6)$.

c) $p_{a,\beta,\gamma}(x) = 9x^2 - 30x + 24$

$$a = 9, \{\beta; \gamma\} = \{\frac{4}{3}; 2\}$$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} p_{a,\beta,\gamma}(x) &= 9x^2 - 30x + 24 = \underbrace{(3x)^2}_{s^2} - \overbrace{2 \cdot \underbrace{3x}_s \cdot \underbrace{5}_t}^{=30x} + \overbrace{5^2}_{t^2} - 25 + 24 \\ &\stackrel{2. \text{ BF}}{=} \underbrace{(3x-5)^2}_{(s-t)^2} - \underbrace{1}_{(25-24)} \stackrel{3. \text{ BF}}{=} \overbrace{(3x-5+1)}^{(u+w)} \cdot \overbrace{(3x-5-1)}^{(u-w)} \\ &= (3x-4) \cdot (3x-6) = 9 \cdot (x - \frac{4}{3}) \cdot (x-2). \end{aligned}$$

Also gilt $(a = 9, \beta = \frac{4}{3} \text{ und } \gamma = 2)$ oder $(a = 9, \beta = 2 \text{ und } \gamma = \frac{4}{3})$.



FktEinDim/Polynome/Ag_Polynome_faktorisieren_mittel.tex

Aufgabe 49.252 (Faktorisieren)

10.2.1

Schreiben Sie folgende Polynome als Produkt von Linearfaktoren und gegebenenfalls quadratischen Termen, die keine Nullstellen besitzen.

Lösung:

- Quadratische Polynome lassen sich mit Hilfe der binomischen Formeln (in Kombination mit quadratischer Ergänzung) faktorisieren, sofern sie mindestens eine Nullstelle besitzen.
- Bei Polynomen, deren Grad ≥ 3 ist, kann man versuchen, eine rationale (oder ganzzahlige) Nullstelle zu erraten, sofern es eine solche gibt. Anschließend spaltet man den zugehörigen Linearfaktor per Polynomdivision ab. Auf das reduzierte Polynom wendet man diese beiden Schritte — sofern möglich — wiederholt an.

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

$$(x-1) \cdot (x-2)$$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 2 &= x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \left(x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) = (x-1) \cdot (x-2). \end{aligned}$$

b) $g(x) = -x^3 + 11x$

$$-x \cdot (x + \sqrt{11}) \cdot (x - \sqrt{11})$$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$-x^3 + 11x = -x \cdot (x^2 - 11) = -x \cdot (x^2 - \sqrt{11}^2) = -x \cdot (x + \sqrt{11}) \cdot (x - \sqrt{11}).$$

c) $h(x) = -x^3 - 2x^2 + 4x + 8$

$$-(x-2) \cdot (x+2)^2$$

Lösung:

Wir notieren die Teiler von 8 und von -1 :

$$T_8 = \{-8; -4; -2; -1; 1; 2; 4; 8\} \quad \text{und} \quad T_{-1} = \{-1; 1\}.$$

Als Kandidaten für rationale Nullstellen von h ergeben sich die Elemente der „Testmenge“

$$R = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \mid p \in T_8 \text{ und } q \in T_{-1} \right\} = \{-8; -4; -2; -1; 1; 2; 4; 8\}.$$

Es sind

$$\begin{aligned} h(1) &= -1^3 - 2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 8 = -1 - 2 + 4 + 8 = 9 \neq 0, \\ h(-1) &= -(-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 8 = 1 - 2 - 4 + 8 = 3 \neq 0, \\ h(2) &= -2^3 - 2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 8 = -8 - 8 + 8 + 8 = 0. \end{aligned}$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{array}{rcl} h(x) = & -x^3 - 2x^2 + 4x + 8 & = (x-2) \cdot (-x^2 - 4x - 4) \\ & -(-x^3 + 2x^2) & = -(x-2) \cdot (x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2) = -(x-2) \cdot (x+2)^2. \\ \hline & -4x^2 + 4x + 8 & \\ & -(-4x^2 + 8x) & \\ \hline & -4x + 8 & \\ & -(-4x + 8) & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

d) $p(x) = 3x^3 - 4x^2 + 9x - 12$

$$3 \cdot \left(x - \frac{4}{3}\right) \cdot (x^2 + 3)$$

Lösung:

Wir notieren die Teiler von -12 und die Teiler von 3:

$$T_{-12} = \{-12; -6; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 6; 12\} \quad \text{und} \quad T_3 = \{-3; -1; 1; 3\}.$$

Als Kandidaten für rationale Nullstellen von p ergeben sich die Elemente der „Testmenge“

$$R = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in T_{-12} \text{ und } q \in T_3 \right\} = \{-12; -6; -4; -3; -2; -\frac{4}{3}; -1; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; \frac{4}{3}; 2; 3; 4; 6; 12\}.$$

Es ist $p(-x) = 3 \cdot (-x)^3 - 4 \cdot (-x)^2 + 9 \cdot (-x) - 12 = -(3x^3 + 4x^2 + 9x + 12) \leq -12$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$. Das HornerSchema liefert $p(x) = (x - \frac{4}{3}) \cdot (3x^2 + 9) + 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ wegen

$\begin{array}{r rrrr} & 3 & -4 & 9 & -12 \\ 1 & - & 3 & -1 & 8 \\ \hline & 3 & -1 & 8 & -4 \end{array}$	$\begin{array}{r rrrr} & 3 & -4 & 9 & -12 \\ 2 & - & 6 & 4 & 26 \\ \hline & 3 & 2 & 13 & 14 \end{array}$	$\begin{array}{r rrrr} & 3 & -4 & 9 & -12 \\ 3 & - & 9 & 15 & 72 \\ \hline & 3 & 5 & 24 & 60 \end{array}$
$\begin{array}{r rrrr} & 3 & -4 & 9 & -12 \\ \frac{1}{3} & - & 1 & -1 & \frac{8}{3} \\ \hline & 3 & -3 & 8 & -\frac{28}{3} \end{array}$	$\begin{array}{r rrrr} & 3 & -4 & 9 & -12 \\ \frac{2}{3} & - & 2 & -\frac{4}{3} & \frac{46}{9} \\ \hline & 3 & -2 & \frac{23}{3} & -\frac{62}{9} \end{array}$	$\begin{array}{r rrrr} & 3 & -4 & 9 & -12 \\ \frac{4}{3} & - & 4 & 0 & 12 \\ \hline & 3 & 0 & 9 & 0 \end{array}$

$$\begin{aligned}\text{Für alle } x \in \mathbb{R} \text{ ergibt sich } p(x) &= 3x^3 - 4x^2 + 9x - 12 = \left(x - \frac{4}{3}\right) \cdot (3x^2 + 9) \\ &= 3 \cdot \left(x - \frac{4}{3}\right) \cdot (x^2 + 3) = 3 \cdot \left(x - \frac{4}{3}\right) \cdot (x + \sqrt{3} \cdot i) \cdot (x - \sqrt{3} \cdot i).\end{aligned}$$

$$\text{e) } q(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 \qquad (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x+2) \cdot (x+3)$$

Lösung:

Wir notieren die Teiler von 12 und die Teiler von 1:

$$T_{12} = \{-12; -6; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 6; 12\} \quad \text{und} \quad T_1 = \{-1; 1\}.$$

Als Kandidaten für rationale Nullstellen von q ergeben sich die Elemente der „Testmenge“

$$R = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in T_{12} \text{ und } q \in T_1 \right\} = \{-12; -6; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 6; 12\}.$$

Wir wenden das Hornerschema an:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 2 & -7 & -8 & 12 \\ 1 & - & 1 & 3 & -4 & -12 \\ \hline & 1 & 3 & -4 & -12 & 0 \\ 1 & - & 1 & 4 & 0 & \\ \hline & 1 & 4 & 0 & -12 & \end{array} \quad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -4 & -12 \\ -1 & - & -1 & -2 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & -6 & -6 \end{array} \quad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -4 & -12 \\ 2 & - & 2 & 10 & 12 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0 \end{array}$$

Damit folgt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}q(x) &= x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x^2 + 5x + 6) \\ &= (x-1) \cdot (x-2) \cdot \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 6\right) = (x-1) \cdot (x-2) \cdot \left(\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) \\ &= (x-1) \cdot (x-2) \cdot \left(x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right) = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x+2) \cdot (x+3).\end{aligned}$$

$$\text{f) } u(x) = x^4 - x^3 - 13x^2 + 25x - 12 \qquad (x-1)^2 \cdot (x-3) \cdot (x+4)$$

Lösung:

Wir notieren die Teiler von -12 und die Teiler von 1:

$$T_{-12} = \{-12; -6; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 6; 12\} \quad \text{und} \quad T_1 = \{-1; 1\}.$$

Als Kandidaten für rationale Nullstellen von u ergeben sich die Elemente der „Testmenge“

$$R = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in T_{-12} \text{ und } q \in T_1 \right\} = \{-12; -6; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 6; 12\}.$$

Wir wenden das Hornerschema an:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & -13 & 25 & -12 \\ 1 & - & 1 & 0 & -13 & 12 \\ \hline & 1 & 0 & -13 & 12 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -13 & 12 \\ 1 & - & 1 & 1 & -12 \\ \hline & 1 & 1 & -12 & 0 \end{array}$$

Damit folgt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}u(x) &= x^4 - x^3 - 13x^2 + 25x - 12 = (x-1) \cdot (x^3 - 13x + 12) = (x-1)^2 \cdot (x^2 + x - 12) \\ &= (x-1)^2 \cdot \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - \frac{48}{4}\right) = (x-1)^2 \cdot \left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)\right) \\ &= (x-1)^2 \cdot \left(x + \frac{1}{2} - \frac{7}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{2} + \frac{7}{2}\right) = (x-1)^2 \cdot (x-3) \cdot (x+4).\end{aligned}$$

g) $v(x) = 4x^4 + 4x^3 - 13x^2 - 7x + 6$

$$4 \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x-\frac{1}{2}) \cdot (x-\frac{3}{2})$$

Lösung:

Wir notieren die Teiler von 6 und die Teiler von 4:

$$T_6 = \{-6; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 6\} \quad \text{und} \quad T_4 = \{-4; -2; -1; 1; 2; 4\}.$$

Als Kandidaten für rationale Nullstellen von v ergeben sich die Elemente der „Testmenge“

$$R = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in T_6 \text{ und } q \in T_4 \right\} = \left\{ -6; -4; -3; -2; -\frac{3}{2}; -1; -\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; 1; \frac{3}{2}; 2; 3; 4; 6 \right\}.$$

Wir wenden das Hornerschema an:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & 4 & -13 & -7 & 6 \\ 1 & - & 4 & 8 & -5 & -12 \\ \hline & 4 & 8 & -5 & -12 & -6 \end{array} \quad \begin{array}{r|rrrrr} & 4 & 4 & -13 & -7 & 6 \\ -1 & - & -4 & 0 & 13 & -6 \\ \hline & 4 & 0 & -13 & 6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 0 & -13 & 6 \\ -1 & - & -4 & 4 & 9 \\ \hline & 4 & -4 & -9 & 15 \end{array} \quad \begin{array}{r|rrrr} & 4 & 0 & -13 & 6 \\ 2 & - & 8 & 16 & 6 \\ \hline & 4 & 8 & 3 & 12 \end{array} \quad \begin{array}{r|rrrr} & 4 & 0 & -13 & 6 \\ -2 & - & -8 & 16 & -6 \\ \hline & 4 & -8 & 3 & 0 \end{array}$$

Damit folgt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} v(x) &= 4x^4 + 4x^3 - 13x^2 - 7x + 6 = (x - (-1)) \cdot (x - (-2)) \cdot (4x^2 - 8x + 3) \\ &= 4 \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 - 1 + \frac{3}{4}) = 4 \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot \left((x-1)^2 - \frac{1}{4} \right) \\ &= 4 \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x-1 + \frac{1}{2}) \cdot (x-1 - \frac{1}{2}) = 4 \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x-\frac{1}{2}) \cdot (x-\frac{3}{2}). \end{aligned}$$

h) $w(x) = 3x^4 + 11x^3 - x^2 - 19x + 6$

$$3 \cdot (x-1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) \cdot (x-\frac{1}{3})$$

Lösung:

Wir notieren die Teiler von 6 und die Teiler von 3:

$$T_6 = \{-6; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 6\} \quad \text{und} \quad T_3 = \{-3; -1; 1; 3\}.$$

Als Kandidaten für rationale Nullstellen von w ergeben sich die Elemente der „Testmenge“

$$R = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in T_6 \text{ und } q \in T_3 \right\} = \left\{ -6; -4; -3; -2; -\frac{4}{3}; -1; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; \frac{4}{3}; 2; 3; 4; 6 \right\}.$$

Wir wenden das Hornerschema an:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 11 & -1 & -19 & 6 \\ 1 & - & 3 & 14 & 13 & -6 \\ \hline & 3 & 14 & 13 & -6 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{r|rrrr} & 3 & 14 & 13 & -6 \\ 1 & - & 3 & 17 & 30 \\ \hline & 3 & 17 & 30 & 24 \end{array} \quad \begin{array}{r|rrrr} & 3 & 14 & 13 & -6 \\ -1 & - & -3 & -11 & -2 \\ \hline & 3 & 11 & 2 & -8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 14 & 13 & -6 \\ 2 & - & 6 & 40 & 106 \\ \hline & 3 & 20 & 53 & 100 \end{array} \quad \begin{array}{r|rrrr} & 3 & 14 & 13 & -6 \\ -2 & - & -6 & -16 & 6 \\ \hline & 3 & 8 & -3 & 0 \end{array}$$

Damit folgt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} w(x) &= 3x^4 + 11x^3 - x^2 - 19x + 6 = (x-1) \cdot (x-(-2)) \cdot (3x^2 + 8x - 3) \\ &= 3 \cdot (x-1) \cdot (x+2) \cdot \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{4}{3} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{16}{9} - 1 \right) = 3 \cdot (x-1) \cdot (x+2) \cdot \left(\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{25}{9} \right) \\ &= 3 \cdot (x-1) \cdot (x+2) \cdot \left(x + \frac{4}{3} + \frac{5}{3}\right) \cdot \left(x + \frac{4}{3} - \frac{5}{3}\right) = 3 \cdot (x-1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right). \end{aligned}$$



FktEinDim/Polynome/Text_LGS_PolynomfktKleinstenGradesDurchGegebenePkte.tex

In \MagSPfadLA/LGS/ReelleEindeutigeLsg/Ag_LGS_PolynomfktKleinstenGradesDurchGegebenePkte findet sich eine weitere Aufgabe zu Polynomen.



FktEinDim/Rational/Ag_Funktionen_DefmengeUndGraphen2.tex

Aufgabe 50.253 (Definitionsmengen und Graphen)

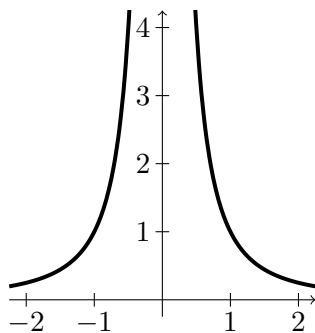
Betrachten Sie die nachstehenden Zuordnungsvorschriften und bestimmen Sie derart die maximale Definitionsmenge in $\mathbb{R}$, dass sich jeweils eine Funktion in die reellen Zahlen ergibt. Skizzieren Sie zudem einen passenden Ausschnitt des Graphen.

a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Lösung:

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

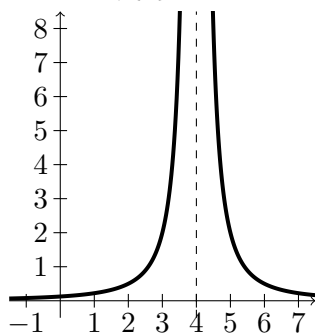


b) $f(x) = \frac{2}{(x-4)^2}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$

Lösung:

$D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$



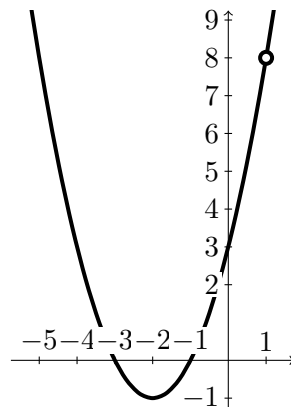
c) $f(x) = \frac{x^3 - x + 3x^2 - 3}{x - 1}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Lösung:

$f(x) = x^2 + 4x + 3$

$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$



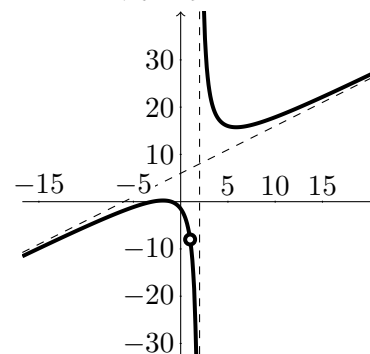
d) $f(x) = \frac{x^3 - x + 3x^2 - 3}{(x-1) \cdot (x-2)}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$

Lösung:

$f(x) = x + 6 + \frac{15}{x-2}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$

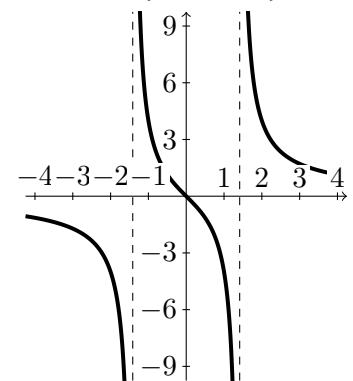


e) $f(x) = \frac{4x}{x^2 - 2}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

Lösung:

$D = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$



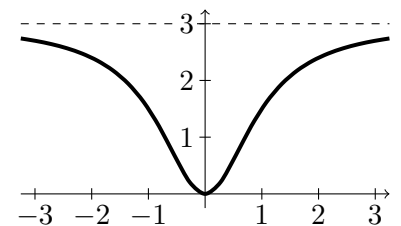
f) $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + 1}$

$D = \mathbb{R}$

Lösung:

$f(x) = 3 - \frac{3}{x^2 + 1}$

$D = \mathbb{R}$





FktEinDim/Trig/Ag_ArkusFkt_GraphenUndIneinanderUmrechnen.tex

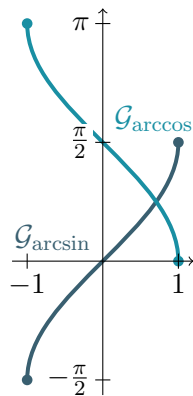
Aufgabe 51.254 (Umrechnungsformeln für die Arkus-Funktionen)

SPF

In dieser Aufgabe soll untersucht werden, wie die Arkus-Funktionen miteinander zusammenhängen.

- a) Zeichnen Sie die Graphen von $\arcsin$ und $\arccos$ mit unterschiedlichen Farben!

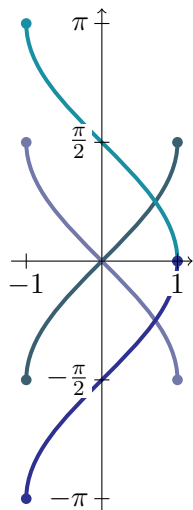
Lösung:



- b) Spiegeln Sie die beiden Graphen an der horizontalen Achse! Was stellen Sie fest?

Die Spiegelungen sind vertikale Verschiebungen der jeweils anderen ursprünglichen Graphen um $-\frac{\pi}{2}$.

Lösung:



Die gespiegelten Graphen von $\arcsin$ und $\arccos$ gehen aus den Graphen der jeweils anderen Funktion durch Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ nach unten hervor.

- c) Setzen Sie in eine Umrechnungsformel von $\sin$ zu $\cos$ eine geeignete Arkus-Funktion ein, um eine Umrechnungsformel von $\arcsin$ zu $\arccos$ zu erhalten!

$$\arcsin(t) = \frac{\pi}{2} - \arccos(t)$$

Tipp: Verwenden Sie eine Umrechnungsformel, bei welcher Argumente des Sinus, die aus dem Wertebereich des Arkus Sinus kommen, in Argumente des Kosinus aus dem Wertebereich des Arkus Kosinus verwandelt werden!

Lösung über $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos(\varphi)$:

Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos(\varphi)$.

Das liefert für alle $t \in [-1; 1]$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(t)\right) = \cos(\arccos(t)) = t.$$

Außerdem gilt für alle $\varphi \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \varphi \leq \pi \iff 0 \geq -\varphi \geq -\pi \iff \frac{\pi}{2} \geq \frac{\pi}{2} - \varphi \geq -\frac{\pi}{2}.$$

Mit $\arccos(t) \in [0; \pi]$ für alle $t \in [-1; 1]$ folgt $\frac{\pi}{2} - \arccos(t) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ und deshalb liefert eine Anwendung von $\arcsin$ auf die oben gewonnene Darstellung von t

$$t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(t)\right) \iff \arcsin(t) = \frac{\pi}{2} - \arccos(t).$$

Lösung über $\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\varphi)$:

Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt $\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\varphi)$.

Das liefert für alle $t \in [-1; 1]$

$$\sin\left(\arccos(t) - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\arccos(t)) = -t.$$

Außerdem gilt für alle $\varphi \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \varphi \leq \pi \iff -\frac{\pi}{2} \leq \varphi - \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Mit $\arccos(t) \in [0; \pi]$ für alle $t \in [-1; 1]$ folgt $\arccos(t) - \frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ und deshalb liefert eine Anwendung von $\arcsin$ auf die oben gewonnene Darstellung von $-t$

$$-t = \sin\left(\arccos(t) - \frac{\pi}{2}\right) \iff \arcsin(-t) = \arccos(t) - \frac{\pi}{2}.$$

Da $\arcsin$ eine ungerade Funktion ist, folgt damit $-\arcsin(t) = \arccos(t) - \frac{\pi}{2}$.

Lösung über $\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\varphi)$:

Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt $\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\varphi)$.

Das liefert für alle $t \in [-1; 1]$

$$\sin\left(\arccos(t) + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\arccos(t)) = t.$$

Außerdem gilt für alle $\varphi \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \varphi \leq \pi \iff \frac{\pi}{2} \leq \varphi + \frac{\pi}{2} \leq \frac{3\pi}{2}.$$

Mit $\arccos(t) \in [0; \pi]$ für alle $t \in [-1; 1]$ folgt $\arccos(t) + \frac{\pi}{2} \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. In den Wertebereich des $\arcsin$ bewegt sich also $\pi - \left(\arccos(t) + \frac{\pi}{2}\right)$ und mit der für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gültigen Symmetrieformel $\sin(\varphi) = \sin(\pi - \varphi)$ liefert eine Anwendung von $\arcsin$ auf die oben gewonnene Darstellung von t

$$\begin{aligned} t &= \sin\left(\arccos(t) + \frac{\pi}{2}\right) & \iff & t = \sin\left(\pi - \left(\arccos(t) + \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ \iff t &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(t)\right) & \iff & \arcsin(t) = \frac{\pi}{2} - \arccos(t). \end{aligned}$$

(Dasselbe Ergebnis erhält man, wenn man die Verschiebformel $\sin(\varphi - \pi) = -\sin(\varphi)$ und die Symmetrie des $\arcsin$ statt der Symmetrieformel $\sin(\pi - \varphi) = \sin(\varphi)$ verwendet.)

Lösung über andere Umrechnungsformeln:

Es sind auch noch Wege über andere Umrechnungsformeln denkbar. Vermutlich nutzen sie alle die hier vorgestellten Ideen in leicht modifizierter Art und Weise.

- d) Entwickeln Sie aus den für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gültigen Umrechnungsformeln $\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \cos(\varphi)$ und $\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \cos(\varphi)$ eine Umrechnungsformel zwischen Tangens und Kotangens!

Gewinnen Sie hieraus eine Umrechnungsformel zwischen Arkus Tangens und Arkus Kotangens!

$$\tan(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \cot(\varphi) \text{ und } \arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot}(x)$$

Lösung:

Für alle $\varphi \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ gilt

$$\tan(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi)}{\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi)} = \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)} = \cot(\varphi).$$

Das liefert für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\tan(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot}(x)) = \cot(\operatorname{arccot}(x)) = x.$$

Außerdem gilt für alle $\varphi \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \varphi \leq \pi \iff 0 \geq -\varphi \geq -\pi \iff \frac{\pi}{2} \geq \frac{\pi}{2} - \varphi \geq -\frac{\pi}{2}.$$

Mit $\operatorname{arccot}(x) \in [0; \pi]$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot}(x) \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ und deshalb liefert eine Anwendung von $\arctan$ auf die oben gewonnene Darstellung von x

$$t = \tan(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot}(x)) \iff \arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot}(x).$$



FktEinDim/Trig/Ag_ArkusFkt_NegativeArgumente.tex

Aufgabe 51.255 (Negative Argumente in den Arkusfunktionen)

SPF

Zur Lösung von Gleichungen der Form $\sin(\varphi) = t$, $\cos(\varphi) = t$, $\tan(\varphi) = x$ oder $\cot(\varphi) = x$ mit vorgegebenen $t \in [-1; 0]$ und $x \in (-\infty; 0)$ ist es hilfreich, $\arcsin(-t)$, $\arccos(-t)$, $\arctan(-x)$ und $\operatorname{arccot}(-x)$ mit Hilfe von $\arcsin(t)$, $\arccos(t)$, $\arctan(x)$ und $\operatorname{arccot}(x)$ darzustellen.

- a) Finden Sie für alle $t \in [-1; 1]$ eine Darstellung von $\arcsin(-t)$ durch $\arcsin(t)$, indem Sie $\arcsin(t)$ in die Symmetriengleichung $\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ einsetzen!

$$\arcsin(-t) = -\arcsin(t)$$

Lösung:

Für alle $t \in [-1; 1]$ gilt $\arcsin(t) \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

Die für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gültige Symmetriengleichung $\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$ liefert damit

$$\sin(-\arcsin(t)) = -\sin(\arcsin(t)) \iff \sin(-\arcsin(t)) = -t.$$

Da für alle $t \in [-1; 1]$ auch $-t \in [-1; 1]$ gilt, ist $\arcsin(-t) \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

Da auch $-\arcsin(t) \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ liegt, ergibt sich durch Anwenden der bijektiven Funktion $\arcsin$ auf beide Seiten der letzten Gleichung

$$\sin(-\arcsin(t)) = -t \iff -\arcsin(t) = \arcsin(-t).$$

- b) Gehen Sie analog für $\arctan$, $\arccos$ und arccot vor!

$$\arctan(-x) = -\arctan(x)$$

$$\arccos(-t) = \pi - \arccos(t)$$

$$\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot}(x)$$

Lösung:

arctan: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\arctan(x) \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Die für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gültigen Symmetriergleichungen $\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$ und $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$ liefern via

$$\tan(-\varphi) = \frac{\sin(-\varphi)}{\cos(-\varphi)} = \frac{-\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = -\frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = -\tan(\varphi)$$

eine Symmetriergleichung für den Tangens. Mit dieser ergibt sich

$$\tan(-\arctan(x)) = -\tan(\arctan(x)) \iff \tan(-\arctan(x)) = -x.$$

Da für alle $x \in \mathbb{R}$ auch $-x \in \mathbb{R}$ gilt, ist $\arctan(-x) \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

Da auch $-\arctan(x) \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ liegt, ergibt sich durch Anwenden der bijektiven Funktion $\arctan$ auf beide Seiten der letzten Gleichung

$$\tan(-\arctan(x)) = -x \iff -\arctan(x) = \arctan(-x).$$

arccos: Für alle $t \in [-1; 1]$ gilt $\arccos(t) \in [0; \pi]$.

Die für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gültige Symmetriergleichung $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$ hilft hier nicht weiter, da beide Seiten der Gleichung dasselbe Vorzeichen haben. Die ebenfalls für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gültige Symmetriergleichung $\cos(\pi - \varphi) = -\cos(\varphi)$ hat unterschiedliche Vorzeichen und liefert

$$\cos(\pi - \arccos(t)) = -\cos(\arccos(t)) \iff \cos(\pi - \arccos(t)) = -t.$$

Da für alle $t \in [-1; 1]$ auch $-t \in [-1; 1]$ gilt, ist $\arccos(-t) \in [0; \pi]$.

Da auch $\pi - \arccos(t) \in [0; \pi]$ liegt, ergibt sich durch Anwenden der bijektiven Funktion $\arccos$ auf beide Seiten der letzten Gleichung

$$\cos(\pi - \arccos(t)) = -t \iff \pi - \arccos(t) = \arccos(-t).$$

arccot: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\operatorname{arccot}(x) \in (0; \pi)$. Wir verwenden die für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gültigen Symmetriergleichungen $\sin(\pi - \varphi) = \sin(\varphi)$ und $\cos(\pi - \varphi) = -\cos(\varphi)$, um mit

$$\cot(\pi - \varphi) = \frac{\cos(\pi - \varphi)}{\sin(\pi - \varphi)} = \frac{-\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)} = -\frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)} = -\cot(\varphi)$$

eine Symmetriergleichung für den Kotangens zu erhalten. Mit dieser ergibt sich

$$\cot(\pi - \operatorname{arccot}(x)) = -\cot(\operatorname{arccot}(x)) \iff \cot(\pi - \operatorname{arccot}(x)) = -x.$$

Da für alle $x \in \mathbb{R}$ auch $-x \in \mathbb{R}$ gilt, ist $\operatorname{arccot}(-x) \in (0; \pi)$.

Da auch $-\operatorname{arccot}(x) \in (0; \pi)$ liegt, ergibt sich durch Anwenden der bijektiven Funktion arccot auf beide Seiten der letzten Gleichung

$$\cot(\pi - \operatorname{arccot}(x)) = -x \iff \pi - \operatorname{arccot}(x) = \operatorname{arccot}(-x).$$



FktEinDim/Trig/Ag_Funktionen_Additionstheoreme.tex

Aufgabe 51.256 (Additionstheoreme)

spf

- a) Zerlegen Sie $6 \cdot \sin(3u + \frac{7\pi}{6})$ für alle $u \in \mathbb{R}$ in einen Sinus- und einen Kosinusterm! $-3 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin(3u) - 3 \cdot \cos(3u)$

Lösung:

Für alle $u \in \mathbb{R}$ ergibt sich aus $\cos(\frac{7\pi}{6}) = -\cos(\frac{7\pi}{6} - \pi) = -\cos(\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin(\frac{7\pi}{6}) = -\sin(\frac{7\pi}{6} - \pi) = -\sin(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$ und den Additionstheoremen

$$\begin{aligned} 6 \cdot \sin(3u + \frac{7\pi}{6}) &= 6 \cdot (\sin(3u) \cdot \cos(\frac{7\pi}{6}) + \cos(3u) \cdot \sin(\frac{7\pi}{6})) \\ &= 6 \cdot (\sin(3u) \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2}) + \cos(3u) \cdot (-\frac{1}{2})) \\ &= -3 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin(3u) - 3 \cdot \cos(3u). \end{aligned}$$

- b) Zerlegen Sie $2 \cdot \cos\left(2v - \frac{5\pi}{6}\right)$ für alle $v \in \mathbb{R}$ in einen Sinus- und einen Kosinusterm! $-\sqrt{3} \cdot \cos(2v) + \sin(2v)$

Lösung:

Für alle $v \in \mathbb{R}$ ergibt sich aus $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\cos\left(-\frac{5\pi}{6} + \pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\left(-\frac{5\pi}{6} + \pi\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ und den Additionstheoremen

$$\begin{aligned} 2 \cdot \cos\left(2v - \frac{5\pi}{6}\right) &= 2 \cdot \left(\cos(2v) \cdot \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) - \sin(2v) \cdot \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right) \\ &= 2 \cdot \left(\cos(2v) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \sin(2v) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= -\sqrt{3} \cdot \cos(2v) + \sin(2v). \end{aligned}$$

- c) Beweisen Sie $\sin(4x) = 4 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) - 8 \cdot \cos(x) \cdot (\sin(x))^3$ für alle $x \in \mathbb{R}$!

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \sin(4x) &= \sin(2x + 2x) = \sin(2x) \cdot \cos(2x) + \cos(2x) \cdot \sin(2x) = 2 \cdot \sin(x+x) \cdot \cos(x+x) \\ &= 2 \cdot (\sin(x) \cdot \cos(x) + \cos(x) \cdot \sin(x)) \cdot (\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot \sin(x)) \\ &= 4 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) \cdot \left((\cos(x))^2 - (\sin(x))^2\right) \\ &= 4 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) \cdot \left(1 - (\sin(x))^2 - (\sin(x))^2\right) \\ &= 4 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) - 8 \cdot \cos(x) \cdot (\sin(x))^3. \end{aligned}$$

- d) Beweisen Sie $\cos(4t) = 8 \cdot (\cos(t))^4 - 8 \cdot (\cos(t))^2 + 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$!

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \cos(4t) &= \cos(2t + 2t) = \cos(2t) \cdot \cos(2t) - \sin(2t) \cdot \sin(2t) = (\cos(2t))^2 - (\sin(2t))^2 \\ &= (\cos(2t))^2 - \left(1 - (\cos(2t))^2\right) = 2 \cdot (\cos(2t))^2 - 1 \\ &= 2 \cdot (\cos(t) \cdot \cos(t) - \sin(t) \cdot \sin(t))^2 - 1 = 2 \cdot \left((\cos(t))^2 - (\sin(t))^2\right)^2 - 1 \\ &= 2 \cdot \left((\cos(t))^2 - \left(1 - (\cos(t))^2\right)\right)^2 - 1 = 2 \cdot \left(2 \cdot (\cos(t))^2 - 1\right)^2 - 1 \\ &= 2 \cdot \left(4 \cdot (\cos(t))^4 - 4 \cdot (\cos(t))^2 + 1\right) - 1 = 8 \cdot (\cos(t))^4 - 8 \cdot (\cos(t))^2 + 1. \end{aligned}$$

- e) Beweisen Sie $\sin(y) + \sin(z) = 2 \cdot \sin\left(\frac{y+z}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{y-z}{2}\right)$ für alle $y \in \mathbb{R}$ und alle $z \in \mathbb{R}$!

Lösung:

Für alle $y \in \mathbb{R}$ und alle $z \in \mathbb{R}$ gilt wegen der Additionstheoreme

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sin\left(\frac{y+z}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{y-z}{2}\right) &= 2 \cdot \left(\sin\left(\frac{y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{z}{2}\right) + \cos\left(\frac{y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{z}{2}\right)\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{y}{2}\right) \cdot \cos\left(-\frac{z}{2}\right) - \sin\left(\frac{y}{2}\right) \cdot \sin\left(-\frac{z}{2}\right)\right) \\ &= 2 \cdot \sin\left(\frac{y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{z}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{z}{2}\right) + 2 \cdot \sin\left(\frac{y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{z}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{z}{2}\right) \\ &\quad + 2 \cdot \cos\left(\frac{y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{z}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{z}{2}\right) + 2 \cdot \cos\left(\frac{y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{z}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{z}{2}\right) \\ &= 2 \cdot \sin\left(\frac{y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{y}{2}\right) \cdot \left((\cos\left(\frac{z}{2}\right))^2 + (\sin\left(\frac{z}{2}\right))^2\right) \\ &\quad + 2 \cdot \sin\left(\frac{z}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{z}{2}\right) \cdot \left((\sin\left(\frac{y}{2}\right))^2 + (\cos\left(\frac{y}{2}\right))^2\right) \\ &= 2 \cdot \sin\left(\frac{y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{y}{2}\right) + 2 \cdot \sin\left(\frac{z}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{z}{2}\right) = \sin\left(2 \cdot \frac{y}{2}\right) + \sin\left(2 \cdot \frac{z}{2}\right) = \sin(y) + \sin(z). \end{aligned}$$

- f) Finden Sie ein $(C, p, \psi)^T \in \mathbb{R}^3$ mit $3 \cdot \sin(4s) - \sqrt{3} \cdot \cos(4s) = C \cdot \sin(ps + \psi)$ für alle $s \in \mathbb{R}$!
 $2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin(4s - \frac{\pi}{6})$

Lösung:

Da der Vorfaktor vor den beiden Variablen s in beiden Termen eine 4 ist, wird $p = 4$ gewählt.

Mit den Additionstheoremen ergibt sich die rechte Seite für alle $s \in \mathbb{R}$ zu

$$\begin{aligned} C \cdot \sin(ps + \psi) &= C \cdot (\sin(4s) \cdot \cos(\psi) + \cos(4s) \cdot \sin(\psi)) \\ &= C \cdot \cos(\psi) \cdot \sin(4s) + C \cdot \sin(\psi) \cdot \cos(4s). \end{aligned}$$

Wir suchen also noch ein $C \in \mathbb{R}$ und ein $\psi \in \mathbb{R}$ mit $C \cdot \cos(\psi) = 3$ und $C \cdot \sin(\psi) = -\sqrt{3}$.

Teilt man die zweite Gleichung durch die erste, so ergibt sich als erste Bedingung $\tan(\psi) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, also $\psi \in \{-\frac{\pi}{6} + k\pi \in \mathbb{R} : k \in \mathbb{Z}\}$. Will man zusätzlich $C > 0$ erreichen, so ergibt sich als zweite Bedingung aus der zweiten Gleichung $\sin(\psi) < 0$, weshalb sich also $\psi = -\frac{\pi}{6}$ wählen lässt.

Setzt man das in die erste Gleichung ein, so folgt $C \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$, also $C = 2 \cdot \sqrt{3}$.

Insgesamt ergibt sich für alle $s \in \mathbb{R}$

$$3 \cdot \sin(4s) - \sqrt{3} \cdot \cos(4s) = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin(4s - \frac{\pi}{6}).$$

- g) Finden Sie ein $(D, q, \vartheta)^T \in \mathbb{R}^3$ mit $\sin(w) + 3 \cdot \cos(w) = D \cdot \sin(qw + \vartheta)$ für alle $w \in \mathbb{R}$!
 $\sqrt{10} \cdot \sin(w + \arctan(3))$

Lösung:

Da der Vorfaktor vor den beiden Variablen w in beiden Termen eine 1 ist, wird $q = 1$ gewählt.

Mit den Additionstheoremen ergibt sich die rechte Seite für alle $w \in \mathbb{R}$ zu

$$\begin{aligned} D \cdot \sin(qw + \vartheta) &= D \cdot (\sin(w) \cdot \cos(\vartheta) + \cos(w) \cdot \sin(\vartheta)) \\ &= D \cdot \cos(\vartheta) \cdot \sin(w) + D \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(w). \end{aligned}$$

Wir suchen also noch ein $D \in \mathbb{R}$ und ein $\vartheta \in \mathbb{R}$ mit $D \cdot \cos(\vartheta) = 1$ und $D \cdot \sin(\vartheta) = 3$.

Teilt man die zweite Gleichung durch die erste, so ergibt sich als erste Bedingung $\tan(\vartheta) = 3$, also $\vartheta \in \{\arctan(3) + k\pi \in \mathbb{R} : k \in \mathbb{Z}\}$. Will man zusätzlich $D > 0$ erreichen, so ergibt sich als zweite Bedingung wegen $\arctan(3) \in (0; \frac{\pi}{2})$ aus der zweiten Gleichung $\sin(\vartheta) > 0$, weshalb sich also $\vartheta = \arctan(3)$ wählen lässt.

Quadriert man beide Gleichungen, so erhält man nach Addition der Ergebnisse $D^2 = (D \cdot \cos(\vartheta))^2 + (D \cdot \sin(\vartheta))^2 = 1^2 + 3^2 = 10$, was mit $D > 0$ zu $D = \sqrt{10}$ führt.

Insgesamt ergibt sich für alle $w \in \mathbb{R}$

$$\sin(w) + 3 \cdot \cos(w) = \sqrt{10} \cdot \sin(w + \arctan(3)).$$

- h) Finden Sie ein $(E, r, \chi)^T \in \mathbb{R}^3$ mit $\sin(\pi t) - \cos(\pi t + \frac{\pi}{4}) = E \cdot \sin(rt + \chi)$ für alle $t \in \mathbb{R}$!
 $\sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \sin(\pi t - \frac{\pi}{8})$

Tipp: Es ist $\tan(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{2} - 1$.

Lösung:

Da der Vorfaktor vor den beiden Variablen t in beiden Termen ein π ist, wird $r = \pi$ gewählt.

Mit den Additionstheoremen ergibt sich die rechte Seite für alle $t \in \mathbb{R}$ zu

$$\begin{aligned} E \cdot \sin(rt + \chi) &= E \cdot (\sin(\pi t) \cdot \cos(\chi) + \cos(\pi t) \cdot \sin(\chi)) \\ &= E \cdot \cos(\chi) \cdot \sin(\pi t) + E \cdot \sin(\chi) \cdot \cos(\pi t). \end{aligned}$$

Die linke Seite vereinfacht sich für alle $t \in \mathbb{R}$ zu

$$\begin{aligned}\sin(\pi t) - \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) &= \sin(\pi t) - \left(\cos(\pi t) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin(\pi t) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \sin(\pi t) - \cos(\pi t) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin(\pi t) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \sin(\pi t) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos(\pi t).\end{aligned}$$

Wir suchen also noch ein $E \in \mathbb{R}$ und ein $\chi \in \mathbb{R}$ mit $E \cdot \cos(\chi) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $E \cdot \sin(\chi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Teilt man die zweite Gleichung durch die erste, so ergibt sich als erste Bedingung

$$\tan(\chi) = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2} \cdot (2 - \sqrt{2})}{4 - 2} = -\frac{2 \cdot \sqrt{2} - 2}{2} = -(\sqrt{2} - 1),$$

also $\chi \in \left\{-\frac{\pi}{8} + k\pi \in \mathbb{R} : k \in \mathbb{Z}\right\}$. Will man zusätzlich $E > 0$ erreichen, so ergibt sich als zweite Bedingung aus der zweiten Gleichung $\sin(\chi) < 0$, weshalb sich also $\chi = -\frac{\pi}{8}$ wählen lässt.

Quadriert man beide Gleichungen, so erhält man nach Addition der Ergebnisse $E^2 = (E \cdot \cos(\chi))^2 + (E \cdot \sin(\chi))^2 = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 + \sqrt{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 + \sqrt{2}$, was mit $E > 0$ zu $E = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ führt.

Insgesamt ergibt sich für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\sin(\pi t) - \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \sin\left(\pi t - \frac{\pi}{8}\right).$$



FktEinDim/Trig/Ag_TrigFkt_AddTheoFuerDoppelteWinkelNachweisen.tex

Aufgabe 51.257 (Doppelte Winkel)

Verwenden Sie in dieser Aufgabe für Ihre Nachweise nur die Additionstheoreme

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta), \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \\ \text{und} \quad 1 &= (\cos(\alpha))^2 + (\sin(\alpha))^2 \quad !\end{aligned}$$

a) Zeigen Sie $\cos(x) \cdot \sin(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin(2x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$!

Lösung:

Aus $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$ folgt mit $\alpha := \beta := x$ sofort

$$\begin{aligned}\sin(2x) &= \sin(x + x) = \sin(x) \cdot \cos(x) + \cos(x) \sin(x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) \\ \iff \frac{1}{2} \cdot \sin(2x) &= \sin(x) \cdot \cos(x).\end{aligned}$$

b) Zeigen Sie $\cos(2\varphi) = 2 \cdot (\cos(\varphi))^2 - 1$ für alle Winkel $\varphi \in \mathbb{R}$!

Lösung:

Aus $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$ folgt mit $\alpha := \beta := \varphi$ sofort

$$\cos(2\varphi) = \cos(\varphi + \varphi) = \cos(\varphi) \cdot \cos(\varphi) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\varphi) = (\cos(\varphi))^2 - (\sin(\varphi))^2.$$

Der trigonometrische Pythagoras $1 = (\cos(\varphi))^2 + (\sin(\varphi))^2$ liefert daraus

$$\cos(2\varphi) = (\cos(\varphi))^2 - \left(1 - (\cos(\varphi))^2\right) = 2 \cdot (\cos(\varphi))^2 - 1.$$

c) Welche reellen Zahlen x erfüllen die Gleichung $\cos(x) = \cos(2x)$?

Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis aus Aufgabenteil b)!

$$\frac{2\ell\pi}{3} \text{ für alle } \ell \in \mathbb{Z}$$

Lösung:

Mit Aufgabenteil b) folgt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x) = \cos(2x) \iff \cos(x) = 2 \cdot (\cos(x))^2 - 1 \iff 0 = (\cos(x))^2 - \frac{1}{2} \cdot \cos(x) - \frac{1}{2}.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in der Variable $\cos(x)$.

Eine quadratische Ergänzung liefert für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \cos(x) = \cos(2x) &\iff 0 = (\cos(x))^2 - 2 \cdot \cos(x) \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - \frac{1}{2} \\ &\iff 0 = (\cos(x) - \frac{1}{4})^2 - \frac{9}{16} \\ &\iff 0 = (\cos(x) - \frac{1}{4} - \frac{3}{4}) \cdot (\cos(x) - \frac{1}{4} + \frac{3}{4}) \\ &\iff 0 = (\cos(x) - 1) \cdot (\cos(x) + \frac{1}{2}) \\ &\iff \cos(x) \in \{1; -\frac{1}{2}\} \\ &\iff x = k \cdot 2\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \\ &\quad \text{oder } x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \\ &\quad \text{oder } x = -\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \\ &\iff x = \ell \cdot \frac{2\pi}{3} \text{ für ein } \ell \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$



FktEinDim/Trig/Ag_TrigFkt_FormelnFuerDieWeierstrassSubstitution.tex

Aufgabe 51.258 (Formeln für die Weierstraß-Substitution)

12.2.1

Ermitteln Sie jeweils den Definitionsbereich der folgenden trigonometrischen Beziehungen und verifizieren Sie jede der Beziehungen durch eine Rechnung!

a) $(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1,$

$\mathbb{R}$

Hinweis: Was ist $\cos(x-x)$?

Lösung:

Diese Identität gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, denn mit dem Additionstheorem für den Kosinus folgt

$$\begin{aligned} 1 &= \cos(0) = \cos(x-x) = \cos(x) \cdot \cos(-x) - \sin(x) \cdot \sin(-x) \\ &= \cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x)) = (\cos(x))^2 + (\sin(x))^2. \end{aligned}$$

b) $\frac{1}{(\cos(x))^2} = 1 + (\tan(x))^2$

$$\mathbb{R} \setminus \{(2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Lösung:

Diese Identität gilt nicht in den Nullstellen des Kosinus und den Definitionslücken des Tangens. Diese beiden Mengen stimmen überein und enthalten genau die ungeradzahlgigen Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$. Ausgehend von der rechten Seite der Gleichung formen wir für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ mit Hilfe von Aufgabenteil a) um zu

$$1 + (\tan(x))^2 = 1 + \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 = 1 + \frac{(\sin(x))^2}{(\cos(x))^2} = \frac{(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2}{(\cos(x))^2} = \frac{1}{(\cos(x))^2}.$$

$$\text{c) } \sin(x) = \frac{2 \cdot \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}$$

$$\mathbb{R} \setminus \{(2k+1) \cdot \pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Lösung:

Für diese Identität muss jeweils das Doppelte der Definitionslücken des Tangens ausgeschlossen werden. Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1) \cdot \pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ liefert die Formel aus Aufgabenteil b)

$$\frac{2 \cdot \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2} = \frac{2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}{\frac{1}{\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}} = 2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 = 2 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

Dasselbe Ergebnis liefert das Additionstheorem für den Sinus auf der anderen Seite

$$\sin(x) = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

$$\text{d) } \cos(x) = \frac{1 - \left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{1 + \left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}$$

$$\mathbb{R} \setminus \{(2k+1) \cdot \pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Lösung:

Für diese Identität muss jeweils das Doppelte der Definitionslücken des Tangens ausgeschlossen werden. Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1) \cdot \pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ liefert die Formel aus Aufgabenteil b)

$$\frac{1 - \left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{1 + \left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2} = \frac{1 - \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2}{\frac{1}{\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}} = \left(1 - \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 = (\cos(x))^2 - (\sin(x))^2.$$

Dasselbe Ergebnis liefert das Additionstheorem für den Kosinus auf der anderen Seite

$$\cos(x) = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) = (\cos(x))^2 - (\sin(x))^2.$$



FktEinDim/Trig/Ag_TrigFkt_GraphenPeriodischerFunktionen.tex

Aufgabe 51.259 (Graphen periodischer Funktionen)

12.2.2

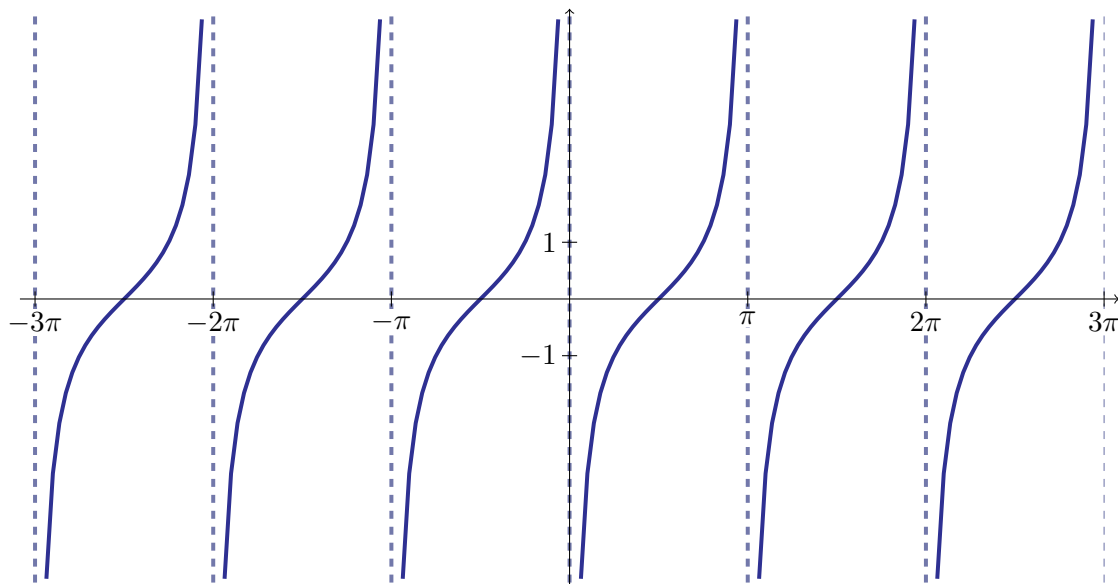
Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen mit den nachstehenden Zuordnungsvorschriften!

$$\text{a) } x \mapsto \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Tangens um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts verschieben

Lösung:

Der Graph von $x \mapsto \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ ergibt sich aus dem des Tangens, indem dieser um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts verschoben wird.

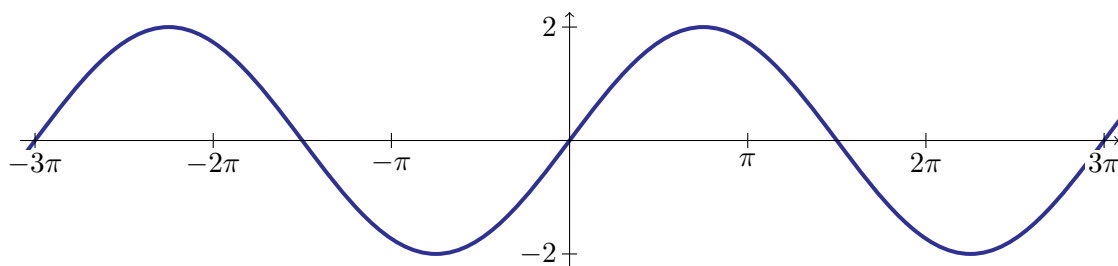


b) $y \mapsto 2 \cdot \sin\left(\frac{2}{3} \cdot y\right)$

Sinus horizontal mit Faktor $\frac{3}{2}$ und vertikal mit Faktor 2 strecken

Lösung:

Der Graph von $y \mapsto 2 \sin\left(\frac{2}{3} \cdot y\right)$ ergibt sich aus dem des Sinus, indem dieser um $\frac{3}{2}$ in horizontaler Richtung und um 2 in vertikaler Richtung gestreckt wird.



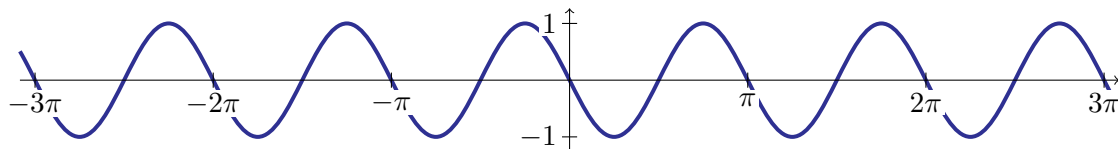
c) $z \mapsto \sin(2z + \pi)$

Sinus von links und rechts auf die Hälfte stauchen und dann um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschieben

Lösung:

Für alle $z \in \mathbb{R}$ gilt $\sin(2z + \pi) = \sin\left(2 \cdot \left(z + \frac{\pi}{2}\right)\right)$.

Damit ergibt sich der gesuchte Graph aus dem des Sinus, indem dieser um $\frac{1}{2}$ in z -Richtung gestaucht (also um 2 gestaucht) und anschließend um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschoben wird.

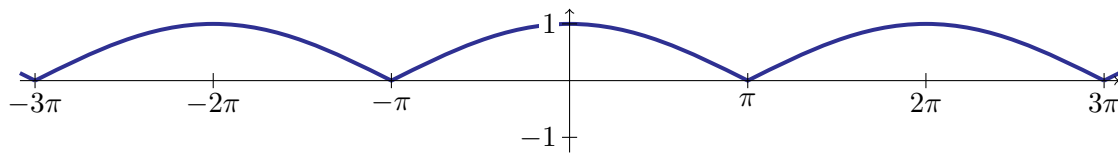


d) $r \mapsto \left|\cos\left(\frac{r}{2}\right)\right|$

Kosinus horizontal mit Faktor 2 strecken und alles unterhalb der horizontalen Achse nach oben klappen

Lösung:

Der Graph von $r \mapsto \left|\cos\left(\frac{r}{2}\right)\right|$ ergibt sich aus dem des Kosinus, indem dieser um 2 in r -Richtung gestreckt und negative Graphenteile (aufgrund des Betrags) an der r -Achse gespiegelt werden.



e) $t \mapsto \sin(t) \cdot \cos(t)$

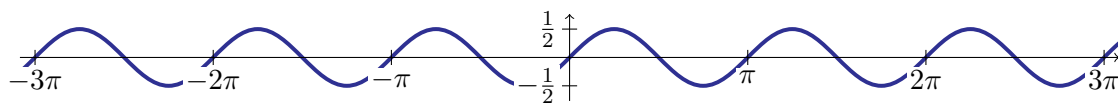
Sinus horizontal und vertikal mit Faktor $\frac{1}{2}$ stauchen

Lösung:

Mit dem Additionstheorem für doppelte Winkel im Sinus

$$\sin(2t) = \sin(t+t) = \sin(t) \cdot \cos(t) + \cos(t) \cdot \sin(t) = 2 \cdot \sin(t) \cdot \cos(t)$$

ergibt sich der Graph von $t \mapsto \sin(t) \cdot \cos(t) = \frac{1}{2} \cdot \sin(2t)$ somit aus dem Graphen der Sinusfunktion durch Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ sowohl in horizontaler als auch in vertikaler Richtung.



f) $s \mapsto \sin(s) + \cos(s)$

Sinus vertikal mit Faktor $\sqrt{2}$ strecken und um $\frac{\pi}{4}$ nach links verschieben

Lösung:

Mit dem Additionstheorem

$$\sin(s+t) = \sin(s) \cdot \cos(t) + \cos(s) \cdot \sin(t)$$

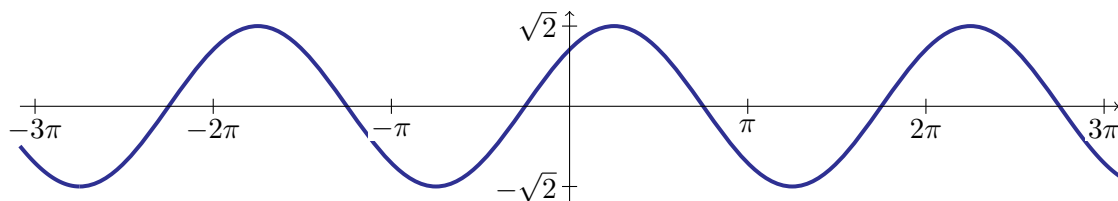
ergibt sich im Spezialfall $t = \frac{\pi}{4}$, dass

$$\sin\left(s + \frac{\pi}{4}\right) = \sin(s) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos(s) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin(s) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos(s) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\sin(s) + \cos(s))$$

und folglich

$$\sqrt{2} \cdot \sin\left(s + \frac{\pi}{4}\right) = \sin(s) + \cos(s).$$

Der Graph von $s \mapsto \sin(s) + \cos(s)$ ergibt sich aus dem Graphen der Sinusfunktion durch Verschiebung um $\frac{\pi}{4}$ nach links und Streckung um $\sqrt{2}$ in vertikaler Richtung.



Hinweis: Falls erforderlich, können Sie jeweils eine Wertetabelle aufstellen. Alle geforderten Graphen gehen aus den Graphen von Sinus, Kosinus oder Tangens durch Verschiebungen, Streckungen und Spiegelungen hervor. Wie genau lässt sich in den Aufgabenteilen e) und f) mit Hilfe der Additionstheoreme ermitteln.



FktEinDim/Trig/Ag_TrigFkt_KotangensFuerDoppelteWinkel.tex

Aufgabe 51.260 (Doppelwinkel-Additionstheorem für den Kotangens)

12.2.1

Drücken Sie $\cot(2x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ mittels eines Terms aus, der $\cot(x)$ enthält!

$$\cot(2x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\cot(x) - \frac{1}{\cot(x)} \right)$$

Hinweis: Benutzen Sie dazu die Additionstheoreme!

Lösung:

Unter Verwendung der Additionstheoreme kann man wie folgt umformen

$$\begin{aligned}\cot(2x) &= \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)} = \frac{\cos(x+x)}{\sin(x+x)} = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot \sin(x)}{\sin(x) \cdot \cos(x) + \cos(x) \cdot \sin(x)} = \frac{(\cos(x))^2 - (\sin(x))^2}{2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\cot(x) - \frac{1}{\frac{\cos(x)}{\sin(x)}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\cot(x) - \frac{1}{\cot(x)} \right).\end{aligned}$$



FktEinDim/Trig/Ag_TrigFkt_TangensUndKotangensVonPiAchtelAusSinusBerechnen.tex

Aufgabe 51.261 (Trigonometrische Funktionen ineinander umrechnen)

SPF

Verwendet man den trigonometrischen Pythagoras $(\cos(\alpha))^2 + (\sin(\alpha))^2 = 1$ für ein konkretes $\alpha \in \mathbb{R}$ zur Berechnung von $\sin(\alpha)$ oder $\cos(\alpha)$, so ist stets zu prüfen, welches Vorzeichen das Ergebnis hat.

Berechnen Sie $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ und $\cot\left(\frac{\pi}{8}\right)$ nur unter Zuhilfenahme von $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ und geben Sie die Werte in einer Darstellung ohne Wurzeln im Nenner an!

$$\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1 \text{ und } \cot\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} + 1$$

Lösung:

Für $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ sind $0 < \sin(\alpha) < 1$ und $0 < \cos(\alpha) < 1$. Mit dem trigonometrischen Pythagoras folgt

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}{+\sqrt{1 - (\sin\left(\frac{\pi}{8}\right))^2}} = \frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2 \cdot \sqrt{1 - \frac{2-\sqrt{2}}{4}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{4 - (2-\sqrt{2})}} \\ &= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}^2} = \frac{\sqrt{(2-\sqrt{2}) \cdot (2+\sqrt{2})}}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4-2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2} \cdot (2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2}) \cdot (2-\sqrt{2})} = \frac{2 \cdot \sqrt{2} - 2}{4-2} = \frac{2 \cdot \sqrt{2} - 2}{2} = \sqrt{2} - 1.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich auch

$$\cot\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1) \cdot (\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{1} = \sqrt{2} + 1.$$



FktEinDim/Trig/Ag_TrigFkt_UmrechnungenUndSymmetriformeln.tex

Aufgabe 51.262 (Umrechnungsformeln für trigonometrische Funktionen)

SPF

Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gelten $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$ und $\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$.

Verwenden Sie die Additionstheoreme, um die folgenden Ausdrücke zu vereinfachen!

Lösung:

Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und alle $\beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \quad \text{und} \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta).$$

a) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

$$\cos(\alpha)$$

Lösung: Das Additionstheorem für die Sinusfunktion liefert

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(-\alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin(-\alpha) = 1 \cdot \cos(\alpha) + 0 \cdot (-\sin(\alpha)) = \cos(\alpha).$$

b) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

$$\sin(\alpha)$$

Lösung: Das Additionstheorem für die Kosinusfunktion liefert

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(-\alpha) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin(-\alpha) = 0 \cdot \cos(\alpha) - 1 \cdot (-\sin(\alpha)) = \sin(\alpha).$$

c) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$

$$\cos(\alpha)$$

Lösung: Das Additionstheorem für die Sinusfunktion liefert

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\alpha) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(\alpha) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin(\alpha) \cdot 0 + \cos(\alpha) \cdot 1 = \cos(\alpha).$$

d) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$

$$-\sin(\alpha)$$

Lösung: Das Additionstheorem für die Kosinusfunktion liefert

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\alpha) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(\alpha) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos(\alpha) \cdot 0 - \sin(\alpha) \cdot 1 = -\sin(\alpha).$$

e) $\sin(\pi - \alpha)$

$$\sin(\alpha)$$

Lösung: Das Additionstheorem für die Sinusfunktion liefert

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\pi) \cdot \cos(-\alpha) + \cos(\pi) \cdot \sin(-\alpha) = 0 \cdot \cos(\alpha) + (-1) \cdot (-\sin(\alpha)) = \sin(\alpha).$$

f) $\cos(\pi - \alpha)$

$$-\cos(\alpha)$$

Lösung: Das Additionstheorem für die Kosinusfunktion liefert

$$\cos(\pi - \alpha) = \cos(\pi) \cdot \cos(-\alpha) - \sin(\pi) \cdot \sin(-\alpha) = (-1) \cdot \cos(\alpha) + 0 \cdot (-\sin(\alpha)) = -\cos(\alpha).$$

g) $\sin(\alpha + \pi)$

$$-\sin(\alpha)$$

Lösung: Das Additionstheorem für die Sinusfunktion liefert

$$\sin(\alpha + \pi) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\pi) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\pi) = \sin(\alpha) \cdot (-1) + \cos(\alpha) \cdot 0 = -\sin(\alpha).$$

h) $\cos(\alpha + \pi)$

$$-\cos(\alpha)$$

Lösung: Das Additionstheorem für die Kosinusfunktion liefert

$$\cos(\alpha + \pi) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\pi) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\pi) = \cos(\alpha) \cdot (-1) - \sin(\alpha) \cdot 0 = -\cos(\alpha).$$

i) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$

$$\sqrt{2} \cdot \sin(\alpha)$$

Lösung: Das Additionstheorem für die Sinusfunktion liefert mit $\beta = \frac{\pi}{4}$ bzw. $\beta = -\frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} & \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sin(\alpha) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos(\alpha) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin(\alpha) \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos(\alpha) \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sin(\alpha) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos(\alpha) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin(\alpha) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos(\alpha) \cdot \left(-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos(\alpha) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos(\alpha) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 = \sqrt{2} \cdot \sin(\alpha). \end{aligned}$$



FktEinDim/Trig/Ag_TrigGlgln_EinstiegInLoesungsmethodeOhneArkus.tex

Aufgabe 51.263 (Trigonometrische Gleichungen)

Bestimmen Sie alle reellwertigen Lösungen der folgenden Gleichungen!

Lösung:

Trigonometrische Gleichungen der Form

$$\sin(x) = t \quad \text{bzw.} \quad \cos(x) = t \quad \text{haben}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| > 1$ keine Lösung,

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| = 1$ genau eine Lösung $x \in [0; 2\pi)$ und

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| < 1$ genau zwei Lösungen $x \in [0; 2\pi)$.

Hat man eine der beiden gefunden, so findet man die zweite mit Hilfe der Formeln

$$\sin(\pi - x) = \sin(x) \quad \text{bzw.} \quad \cos(-x) = \cos(x).$$

Zu jeder Lösung der Gleichung kann man beliebige Vielfache von 2π addieren, um weitere Lösungen zu erhalten.

Trigonometrische Gleichungen der Form

$$\tan(x) = t \quad \text{bzw.} \quad \cot(x) = t \quad \text{haben}$$

genau eine Lösung auf $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ bzw. $(0; \pi)$, da Tangens bzw. Kotangens dort streng monoton sind. Die weiteren Lösungen erhält man durch Addieren beliebiger Vielfacher von π .

a) $\sin(x) = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$

$$\left\{ -\frac{\pi}{2} + (-1)^\ell \cdot \frac{\pi}{4} + 2k\pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z} \text{ und } \ell \in \{0; 1\} \right\}$$

Lösung:

Bekannt ist, dass $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ gilt. Da die Sinusfunktion eine ungerade Funktion ist, folgt sofort

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}.$$

Also ist $-\frac{\pi}{4}$ eine Lösung der gegebenen Gleichung. Wie oben gesehen, erhält man als zweite Lösung $\pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$.

Diese Lösungen kann man noch um beliebige Vielfache von 2π verschieben und erhält also

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \right\} = \left\{ -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

b) $\cos(2\varphi + 5) = 0.5$

$$\left\{ \frac{(-1)^\ell \cdot \pi - 15}{6} + k\pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z} \text{ und } \ell \in \{0; 1\} \right\}$$

Lösung:

Löst man die Gleichung $\cos(\psi) = 0.5$ nach ψ auf, so kennt man als *erste* Lösung $\frac{\pi}{3}$. Wie oben gesehen folgt daraus

$$\left\{ \psi \in \mathbb{R} \mid \cos(\psi) = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \right\} = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Um die Ursprungsgleichung zu lösen, muss man nun lediglich noch die Gleichung $2\varphi + 5 = \psi$ nach φ umstellen. Für ψ verwenden wir natürlich alle Lösungen der Gleichung $\cos(\psi) = 0.5$:

$$\begin{aligned} \cos(2\varphi + 5) &= 0.5 \\ \iff 2\varphi + 5 &= \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \quad \text{oder} \quad 2\varphi + 5 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \\ \xrightarrow{-5} 2\varphi &= \frac{\pi-15}{3} + 2k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \quad \text{oder} \quad 2\varphi = \frac{-\pi-15}{3} + 2k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \\ \xrightarrow{\cdot \frac{1}{2}} \varphi &= \frac{\pi-15}{6} + k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \quad \text{oder} \quad \varphi = \frac{-\pi-15}{6} + k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

c) $\sin(t) \cdot \cos(t) = 0$

$$\left\{ k \cdot \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Lösung:

Hier kann man den Satz vom Nullprodukt anwenden:

$$\begin{aligned} \sin(t) \cdot \cos(t) &= 0 \\ \iff \sin(t) &= 0 \quad \text{oder} \quad \cos(t) = 0 \\ \iff t &= \ell\pi \text{ für ein } \ell \in \mathbb{Z} \quad \text{oder} \quad t = \frac{\pi}{2} + \ell\pi \text{ für ein } \ell \in \mathbb{Z} \\ \iff t &= 2\ell \cdot \frac{\pi}{2} \text{ für ein } \ell \in \mathbb{Z} \quad \text{oder} \quad t = (2\ell + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \text{ für ein } \ell \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Sämtliche Lösungen der gegebenen Gleichung werden also erfasst durch die Formel

$$t = k \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}.$$

d) $(\sin(\omega))^2 = \frac{1}{4}$

$$\left\{ \frac{(-1)^\ell \cdot \pi}{6} + k\pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z} \text{ und } \ell \in \{0; 1\} \right\}$$

Lösung:

Hier wird zunächst die quadratische Gleichung $x^2 = \frac{1}{4}$ gelöst und dann die Gleichung $\sin(\omega) = x$ nach ω aufgelöst:

$$(\sin(\omega))^2 = \frac{1}{4} \iff \sin(\omega) = \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad \sin(\omega) = -\frac{1}{2}$$

Eine Lösung der ersten Gleichung ist bekannt: $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

Da der Sinus eine ungerade Funktion ist, erhält man daraus sofort *eine* Lösung der zweiten Gleichung: $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

Wie oben gesehen sind dann auch $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ eine Lösung der ersten und $\pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ eine Lösung der zweiten Gleichung.

Die 2π -Periodizität des Sinus liefert

$$\begin{aligned}\sin(\omega) = \frac{1}{2} &\iff \omega = \frac{\pi}{6} + \ell \cdot 2\pi \text{ für ein } \ell \in \mathbb{Z} \text{ oder } \omega = \frac{5\pi}{6} + \ell \cdot 2\pi \text{ für ein } \ell \in \mathbb{Z} \text{ und} \\ \sin(\omega) = -\frac{1}{2} &\iff \omega = -\frac{\pi}{6} + \ell \cdot 2\pi \text{ für ein } \ell \in \mathbb{Z} \text{ oder } \omega = \frac{7\pi}{6} + \ell \cdot 2\pi \text{ für ein } \ell \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Fasst man in der Gesamtlösung je zwei Fälle zusammen, so passt sich die Struktur der Lösungsdarstellung auch der π -Periodizität der Funktion $(\sin)^2$ an:

$$\begin{aligned}(\sin(\omega))^2 &= \frac{1}{4} \\ \iff \omega &= \frac{\pi}{6} + 2\ell \cdot \pi \text{ für ein } \ell \in \mathbb{Z} \text{ oder } \omega = -\frac{\pi}{6} + (2\ell + 1) \cdot \pi \text{ für ein } \ell \in \mathbb{Z} \\ \text{oder } \omega &= -\frac{\pi}{6} + 2\ell \cdot \pi \text{ für ein } \ell \in \mathbb{Z} \text{ oder } \omega = \frac{\pi}{6} + (2\ell + 1) \cdot \pi \text{ für ein } \ell \in \mathbb{Z} \\ \iff \omega &= \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \text{ oder } \omega = -\frac{\pi}{6} + k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

e) $\cot(\alpha) = -\sqrt{3}$

$$\left\{ -\frac{\pi}{6} + k\pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Lösung:

Bekannt ist $\cot\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$. Da die Kotangensfunktion eine ungerade Funktion ist, folgt

$$\cot\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\cot\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}.$$

Wie oben gesehen ist das die einzige Lösung auf $(-\pi; 0)$. Die weiteren Lösungen ergeben sich aus der π -Periodizität der Kotangensfunktion zu

$$\alpha = -\frac{\pi}{6} + k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}.$$

f) $\tan(2 \cdot (z + 1)) = 1$

$$\left\{ \frac{\pi-8}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Lösung:

Löst man die Gleichung $\tan(\chi) = 1$ nach χ auf, so kennt man eine *erste* Lösung im Intervall $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ als $\frac{\pi}{4}$. Wie oben gesehen ergeben sich dann alle Lösungen aus der Periode π :

$$\{\chi \in \mathbb{R} \mid \tan(\chi) = 1\} = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Alle Lösungen der gegebenen Gleichung können nun durch Auflösen von $2 \cdot (z + 1) = \chi$ mit einer beliebigen Lösung von $\tan(\chi) = 1$ angegeben werden via

$$\begin{aligned}\tan(2 \cdot (z + 1)) &= 1 &\iff & 2 \cdot (z + 1) = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \\ & &\stackrel{\cdot \frac{1}{2}}{\iff} & z + 1 = \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2} \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \\ & &\stackrel{-1}{\iff} & z = \frac{\pi-8}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2} \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Hinweise: Hierzu bietet es sich an, zunächst die Graphen der Funktionen zu betrachten.

Falls Sie Näherungswerte mit einem Taschenrechner berechnen wollen (was in der Aufgabe *nicht* gefordert ist), müssen Sie Bogenmaß (radian) einstellen. Warum?



FktEinDim/Trig/Ag_TrigGln_GlnUmstellenMitEtwasAufwand.tex

Aufgabe 51.264 (Trigonometrische Gleichungen)

Bestimmen Sie alle reellwertigen Lösungen der folgenden Gleichungen!

a) $4 \cdot (\sin(x))^2 + 3 \cdot \cos(x) = \frac{9}{2}$

$$\{x_0 + 2k\pi \in \mathbb{R} \mid x_0 \in \{-\arccos(\frac{1}{4}); -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \arccos(\frac{1}{4})\} \text{ und } k \in \mathbb{Z}\}$$

Lösung:

Ersetzt man die Sinus- durch die Kosinusfunktion mithilfe des trigonometrischen Pythagoras $(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$, so ergibt sich eine quadratische Gleichung in $\cos(x)$:

$$\begin{aligned} & 4 \cdot (\sin(x))^2 + 3 \cdot \cos(x) = \frac{9}{2} \\ \iff & 4 \cdot (1 - (\cos(x))^2) + 3 \cdot \cos(x) = \frac{9}{2} \\ \iff & 0 = (2 \cdot \cos(x))^2 - 2 \cdot (2 \cdot \cos(x)) \cdot \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{9}{2} - 4 \\ \iff & 0 = (2 \cdot \cos(x) - \frac{3}{4})^2 - \frac{1}{16} \\ \iff & 0 = (2 \cdot \cos(x) - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}) \cdot (2 \cdot \cos(x) - \frac{3}{4} - \frac{1}{4}) \\ \iff & 0 = (2 \cdot \cos(x) - \frac{1}{2}) \cdot (2 \cdot \cos(x) - 1) \\ \iff & 0 = 2 \cdot \cos(x) - \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad 0 = 2 \cdot \cos(x) - 1 \\ \iff & \cos(x) = \frac{1}{4} \quad \text{oder} \quad \cos(x) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Der Arkus Kosinus liefert je eine Lösung im Intervall $[0; \pi]$, sprich $\arccos(\frac{1}{4})$ und $\arccos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$ lösen die Ausgangsgleichung. Die Symmetrie der Kosinusfunktion liefert dann, dass $-\arccos(\frac{1}{4})$ und $-\frac{\pi}{3}$ weitere Lösungen im Intervall $(-\pi; \pi]$ sind. Alle Lösungen der Gleichung sammeln sich wegen der 2π -Periodizität des Kosinus in der Menge

$$\{x_0 + 2k\pi \in \mathbb{R} \mid x_0 \in \{-\arccos(\frac{1}{4}); -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \arccos(\frac{1}{4})\} \text{ und } k \in \mathbb{Z}\}.$$

b) $\sin(t) = \sqrt{1 - (\sin(t))^2}$

$$\left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{(-1)^\ell \cdot \pi}{4} + 2k\pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z} \text{ und } \ell \in \{0; 1\} \right\}$$

Lösung:

Ersetzt man die Sinus- durch die Kosinusfunktion mithilfe des trigonometrischen Pythagoras $(\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 = 1$, so ergibt sich die deutlich einfachere Gleichung

$$\sin(t) = \sqrt{1 - (\sin(t))^2} = \sqrt{(\cos(t))^2} = |\cos(t)|.$$

Die kleinste gemeinsame Periode auf beiden Seiten ist 2π . Wir lösen die Gleichung also zunächst auf $(-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$. Um die Betragsstriche aufzulösen, machen wir eine Fallunterscheidung.

Fall 1 ($t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$): Für $t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ ist $\cos(t) > 0$. Damit folgt für alle $t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

$$\begin{aligned} \sin(t) = |\cos(t)| & \iff \sin(t) = \cos(t) & \iff \frac{\sin(t)}{\cos(t)} = 1 \\ & \iff \tan(t) = 1 & \stackrel{t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})}{\iff} t = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Fall 2 ($t = \frac{\pi}{2}$): Wegen $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ und $|\cos(\frac{\pi}{2})| = |0| = 0$ ist $\frac{\pi}{2}$ keine Lösung der Gleichung.

Fall 3 ($t \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2})$): Für $t \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2})$ ist $\cos(t) < 0$. Damit folgt für alle $t \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2})$

$$\begin{aligned} \sin(t) = |\cos(t)| & \iff \sin(t) = -\cos(t) & \iff \frac{\sin(t)}{\cos(t)} = -1 \\ & \iff \tan(t) = -1 & \stackrel{t \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2})}{\iff} t = -\frac{\pi}{4} + \pi. \end{aligned}$$

Fall 4 ($t = \frac{3\pi}{2}$): Wegen $\sin(\frac{3\pi}{2}) = -1$ und $|\cos(\frac{3\pi}{2})| = |0| = 0$ löst $\frac{3\pi}{2}$ die Gleichung nicht.

Die 2π -Periodizität liefert dann

$$\left\{ t \in \mathbb{R} \mid \sin(t) = \sqrt{1 - (\sin(t))^2} \right\} = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

c) $\cos(2\varphi) + 1 = \cot(\varphi)$

$$\left\{ \frac{3\pi}{8} + \frac{(-1)^\ell \pi}{8} + k\pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z} \text{ und } \ell \in \{0; 1\} \right\}$$

Lösung:

Die Definitionsmenge der Gleichung entspricht der Definitionsmenge $D := \mathbb{R} \setminus \{k\pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ des Kotangens. Das Additionstheorem für doppelte Winkel im Kosinus

$$\cos(2\varphi) = \cos(\varphi + \varphi) = \cos(\varphi) \cdot \cos(\varphi) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\varphi) = (\cos(\varphi))^2 - (\sin(\varphi))^2$$

liefert gemeinsam mit dem trigonometrischen Pythagoras $(\sin(\varphi))^2 + (\cos(\varphi))^2 = 1$

$$\cos(2\varphi) + 1 = (\cos(\varphi))^2 - (\sin(\varphi))^2 + 1 = (\cos(\varphi))^2 - (1 - (\cos(\varphi))^2) + 1 = 2 \cdot (\cos(\varphi))^2.$$

Das liefert für alle $\varphi \in D$ $\cos(2\varphi) + 1 = \cot(\varphi) \iff 2 \cdot (\cos(\varphi))^2 = \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)}.$

Hier bietet sich eine Fallunterscheidung an.

Fall 1 ($\cos(\varphi) = 0$): Für alle $\varphi \in \mathbb{L}_1 := \{\frac{\pi}{2} + k\pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z}\} \subseteq D$ ist $\cos(\varphi) = 0$. Also verschwinden beide Seiten der Gleichung und damit ist φ eine Lösung der Gleichung.

Fall 2 ($\cos(\varphi) \neq 0$): Für alle $\varphi \in D \setminus \mathbb{L}_1$ ist $\cos(\varphi) \neq 0$. Eine Multiplikation mit $\frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$ liefert

$$\cos(2\varphi) + 1 = \cot(\varphi) \iff 2 \cdot (\cos(\varphi))^2 = \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)} \xrightarrow{\varphi \in D \setminus \mathbb{L}_1} 2 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) = 1.$$

Das Additionstheorem für doppelte Winkel im Sinus

$$\sin(2\varphi) = \sin(\varphi + \varphi) = \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) + \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi) = 2 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi)$$

vereinfacht diese Gleichung weiter zu

$$\cos(2\varphi) + 1 = \cot(\varphi) \xrightarrow{\varphi \in D \setminus \mathbb{L}_1} 2 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) = 1 \iff \sin(2\varphi) = 1.$$

Der Sinus nimmt auf $(-\pi; \pi]$ nur einmal den Wert 1 an:

$$\cos(2\varphi) + 1 = \cot(\varphi) \xrightarrow{\varphi \in D \setminus \mathbb{L}_1} \sin(2\varphi) = 1 \iff 2\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}.$$

Division durch 2 liefert $\mathbb{L}_2 := \{\frac{\pi}{4} + k\pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z}\} \subseteq D$.

Insgesamt folgt

$$\{\varphi \in D \mid \cos(2\varphi) + 1 = \cot(\varphi)\} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$



FktEinDim/Trig/Ag_TrigGlg_n_Glg_nUmstellenUndMitArkusLoesen.tex

Aufgabe 51.265 (Trigonometrische Gleichungen)

Lösen Sie die folgenden Gleichungen allgemein!

a) $3 \cdot \sin(x) + 2 \cdot \cos(x) = 0$

$$\left\{ -\arctan\left(\frac{2}{3}\right) + k\pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Lösung: Da wir gerne durch $\cos(x)$ dividieren wollen, ist eine Fallunterscheidung notwendig.

Fall 1: $x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ und $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, also

$$3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 3 + 0 = 3 \neq 0.$$

Fall 2: $x \in \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt $\sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ und $\cos\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, also

$$3 \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + 2 \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = -3 + 0 = -3 \neq 0.$$

Fall 3: $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \ell\pi \in \mathbb{R} \mid \ell \in \mathbb{Z} \right\}$ Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \ell\pi \in \mathbb{R} \mid \ell \in \mathbb{Z} \right\}$ gilt $\cos(x) \neq 0$ und man kann die Ursprungsgleichung äquivalent umformen zu

$$3 \cdot \sin(x) + 2 \cdot \cos(x) = 0 \quad \xLeftrightarrow{-2 \cdot \cos(x)} \quad 3 \cdot \sin(x) = -2 \cdot \cos(x) \quad \xLeftrightarrow{\frac{1}{3 \cdot \cos(x)}} \quad \tan(x) = -\frac{2}{3}.$$

Der Tangens ist π -periodisch und streng monoton wachsend (also umkehrbar) auf $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Die Umkehrfunktion $\arctan$ ist wie $\tan$ eine ungerade Funktion. Der Wert $\arctan\left(\frac{2}{3}\right)$ ist kein charakteristischer Wert, den man auswendig kennt.

Damit folgt also für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \ell\pi \in \mathbb{R} \mid \ell \in \mathbb{Z} \right\}$

$$\begin{aligned} 3 \cdot \sin(x) + 2 \cdot \cos(x) = 0 & \iff \tan(x) = -\frac{2}{3} \\ & \iff x = \arctan\left(-\frac{2}{3}\right) + k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \\ & \iff x = -\arctan\left(\frac{2}{3}\right) + k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Da in den ersten beiden Fällen keine Lösung der Gleichung hinzugekommen ist, ergibt sich also

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 3 \cdot \sin(x) + 2 \cdot \cos(x) = 0\} = \left\{ -\arctan\left(\frac{2}{3}\right) + k\pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

b) $\sin(2t) + \cos(t) = 0$

$$\{t_0 + 2k\pi \in \mathbb{R} \mid t_0 \in \left\{ -\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right\} \text{ und } k \in \mathbb{Z} \}$$

Lösung: Für alle $t \in \mathbb{R}$ erlaubt das Additionstheorem $\sin(2t) = 2 \cdot \sin(t) \cdot \cos(t)$ die Umformulierung der Gleichung zu

$$\begin{aligned} \sin(2t) + \cos(t) = 0 & \iff 2 \cdot \sin(t) \cdot \cos(t) + \cos(t) = 0 \\ & \iff (2 \cdot \sin(t) + 1) \cdot \cos(t) = 0. \end{aligned}$$

Mit dem Satz vom Nullprodukt folgt also für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\sin(2t) + \cos(t) = 0 \iff \sin(t) = -\frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad \cos(t) = 0.$$

Die Nullstellenmenge des Kosinus ist bekannt als

$$\{t \in \mathbb{R} \mid \cos(t) = 0\} = \left\{ \frac{\pi}{2} + \ell\pi \in \mathbb{R} \mid \ell \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Es bleiben also alle $t \in \mathbb{R}$ mit $\sin(t) = -\frac{1}{2}$ zu bestimmen.

Bekannt ist $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$. Da der Sinus eine ungerade Funktion ist, gilt damit auch $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$. Die zweite Lösung im Intervall $[-\pi; \pi]$ ergibt sich über die Achsensymmetrie des Sinus zur Parallelen der vertikalen Achse durch $\frac{\pi}{2}$ über

$$-\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{6} - 2\pi\right) = \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right).$$

Alle $t \in \mathbb{R}$ mit $\sin(t) = -\frac{1}{2}$ ergeben sich aus den beiden Grundlösungen $-\frac{\pi}{6}$ und $-\frac{5\pi}{6}$ und der 2π -Periodizität des Sinus. Insgesamt folgt mit den Nullstellen des Kosinus

$$\{t \in \mathbb{R} \mid \sin(2t) + \cos(t) = 0\} = \{t_0 + 2k\pi \in \mathbb{R} \mid t_0 \in \left\{ -\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right\} \text{ und } k \in \mathbb{Z} \}.$$

c) $6 \cdot (\cos(\varphi))^2 + \sin(\varphi) = 5$

$$\{\varphi_0 + 2k\pi \in \mathbb{R} \mid \varphi_0 \in \{\arcsin(\frac{1}{3}) - \pi; -\arcsin(\frac{1}{3}); \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\} \text{ und } k \in \mathbb{Z}\}$$

Lösung: Der trigonometrische Pythagoras $(\sin(\varphi))^2 + (\cos(\varphi))^2 = 1$ liefert für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ eine äquivalente Umformulierung der Ausgangsgleichung

$$\begin{aligned} 6 \cdot (\cos(\varphi))^2 + \sin(\varphi) = 5 & \iff 6 \cdot (1 - (\sin(\varphi))^2) + \sin(\varphi) = 5 \\ & \iff 6 - 6 \cdot (\sin(\varphi))^2 + \sin(\varphi) = 5 \\ & \iff 0 = 6 \cdot (\sin(\varphi))^2 - \sin(\varphi) - 1. \end{aligned}$$

Somit gibt es genau dann Lösungen $\varphi \in \mathbb{R}$, wenn $t := \sin(\varphi)$ die Gleichung $6t^2 - t - 1 = 0$ löst und $-1 \leq t \leq 1$ gilt.

Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt wegen $24 \cdot 6 = 120 + 24 = 144$

$$\begin{aligned} 6t^2 - t - 1 &= 6 \cdot \left(t^2 - 2 \cdot t \cdot \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{12}\right)^2 - \frac{1}{144} - \frac{1}{6}\right) \stackrel{2. \text{BF}}{=} 6 \cdot \left(\left(t - \frac{1}{12}\right)^2 - \frac{25}{144}\right) \\ &\stackrel{3. \text{BF}}{=} 6 \cdot \left(t - \frac{1}{12} + \frac{5}{12}\right) \cdot \left(t - \frac{1}{12} - \frac{5}{12}\right) = 6 \cdot \left(t + \frac{4}{12}\right) \cdot \left(t - \frac{6}{12}\right) \\ &= 6 \cdot \left(t + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Also gilt für alle $\varphi \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 6 \cdot (\cos(\varphi))^2 + \sin(\varphi) = 5 & \iff 0 = 6 \cdot \left(\sin(\varphi) + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\sin(\varphi) - \frac{1}{2}\right) \\ & \iff \sin(\varphi) = -\frac{1}{3} \quad \text{oder} \quad \sin(\varphi) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Der Arkus Sinus liefert die Lösung von $\sin(\varphi) = -\frac{1}{3}$ im Intervall $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Da er als Umkehrfunktion des Sinus wie dieser eine ungerade Funktion ist, erhalten wir $\arcsin(-\frac{1}{3}) = -\arcsin(\frac{1}{3})$ als Lösung von $\sin(\varphi) = -\frac{1}{3}$ im Intervall $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

Die Lösung von $\sin(\varphi) = \frac{1}{2}$ im Intervall $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ kennt man wegen $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ auswendig.

Die Symmetrie des Graphen der Sinus-Funktion zur Parallelen der vertikalen Achse durch $\varphi = \frac{\pi}{2}$ liefert wie üblich die zweiten Lösungen der Gleichungen im Intervall $[-\pi; \pi]$ zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \quad \text{und} \\ -\frac{1}{3} &= \sin\left(-\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \sin\left(\pi - \left(-\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right)\right) \\ &= \sin\left(\pi + \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \sin\left(\pi + \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) - 2\pi\right) = \sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right) - \pi\right). \end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$\begin{aligned} &\left\{\varphi \in \mathbb{R} \mid 6 \cdot (\cos(\varphi))^2 + \sin(\varphi) = 5\right\} \\ &= \left\{\varphi_0 + 2k\pi \in \mathbb{R} \mid \varphi_0 \in \left\{\arcsin\left(\frac{1}{3}\right) - \pi; -\arcsin\left(\frac{1}{3}\right); \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\} \text{ und } k \in \mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$



FktEinDim/Trig/Ag_Winkelfunktionen_FunktionsgraphZeichnen.tex

Aufgabe 51.266 (Winkelfunktion zeichnen)

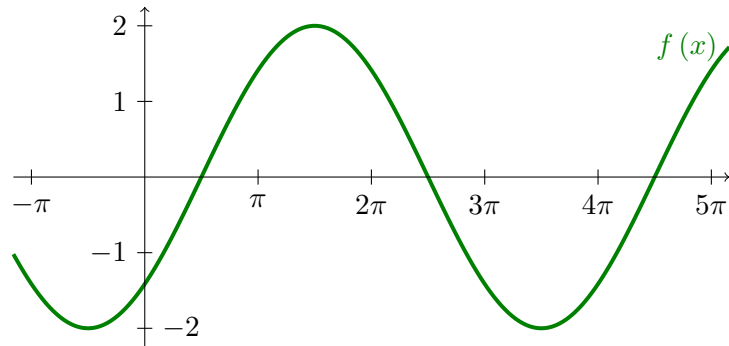
Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto f(x)$ mit $f(x) := 2 \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$.

- Zeichnen Sie den Graphen von f für $-\pi \leq x \leq 5\pi$. Auf der x -Achse sollen drei Zentimeter 2π entsprechen; als Längeneinheit der y -Achse soll ein Zentimeter gewählt werden.
- Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $f(x) = \sqrt{3}$.

$$\frac{\pi}{6} + (4k+1)\pi, \frac{5\pi}{6} + (4k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Lösung: Es wird die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ mit $f(x) := 2 \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$ betrachtet.

a) Zunächst sollte der Graph für $-\pi \leq x \leq 5\pi$ gezeichnet werden.



b) Es werden alle Lösungen der Gleichung $f(x) = \sqrt{3}$ bestimmt, die zu

$$\sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

gleichwertig ist. Es ist $\sin(y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ genau dann, wenn $y = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ oder $y = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$ gilt. Somit muss

$$\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

oder

$$\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

gelten. Damit ist

$$x = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + 4k\pi = \frac{\pi}{6} + (4k+1)\pi$$

oder

$$x = \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + 4k\pi = \frac{5\pi}{6} + (4k+1)\pi$$

für $k \in \mathbb{Z}$.



FktEinDim/Umkehrung/Ag_Fkt_AbschnWeiseUmkehrfktBestimmenFuerParabeln.tex

Aufgabe 52.267 (abschnittsweise definierte Umkehrfunktionen)

JGL+SPF

Seien $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$x \mapsto f(x) := x \cdot |x| \quad \text{und} \quad x \mapsto g(x) := 2x^3 - 6x^2 + 6x - 2.$$

f und g sind bijektive Funktionen.

Geben Sie für beide Funktionen die Zuordnungsvorschrift der Umkehrfunktion an!

$$f^{-1}(t) = \begin{cases} \sqrt{t}, & \text{falls } t \geq 0 \text{ ist} \\ -\sqrt{-t}, & \text{falls } t < 0 \text{ ist} \end{cases} \quad \text{und} \quad g^{-1}(t) = \begin{cases} 1 + \sqrt[3]{\frac{t}{2}}, & \text{falls } t \geq 0 \text{ ist} \\ 1 - \sqrt[3]{\frac{-t}{2}}, & \text{falls } t < 0 \text{ ist} \end{cases}$$

Lösung für f :

Wir stellen zunächst fest, dass f das Vorzeichen erhält:

Fall 1 ($x = 0$): Ist $x = 0$, so gilt auch $f(x) = 0 \cdot |0| = 0$.

Fall 2 ($x > 0$): Ist $x > 0$, so gilt auch $f(x) = x \cdot |x| = x \cdot x = x^2 > 0$.

Fall 3 ($x < 0$): Ist $x < 0$, so gilt auch $f(x) = x \cdot |x| = x \cdot (-x) = -x^2 < 0$.

Zur Bestimmung der Zuordnungsvorschrift stellen wir für $x \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}$ die Beziehung $t = f(x)$ nach x um:

Fall 1 ($t = 0$): Ist $t = 0$, so gilt im Fall $t = f(x)$ wie oben gesehen auch $x = 0$.

Also ist $f^{-1}(0) = 0 = \sqrt{0}$.

Fall 2 ($t > 0$): Ist $t > 0$, so gilt im Fall $t = f(x)$ wie oben gesehen auch $x > 0$. Die Gleichung $t = f(x)$ lässt sich dann folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} t = f(x) &\iff t = x \cdot |x| \xrightarrow{x>0} t = x \cdot x \iff t = x^2 \\ &\xrightarrow{t>0} \sqrt{t} = \sqrt{x^2} \iff \sqrt{t} = |x| \xrightarrow{x>0} \sqrt{t} = x. \end{aligned}$$

Also gilt $f^{-1}(t) = \sqrt{t}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$.

Fall 3 ($t < 0$): Ist $t < 0$, so gilt im Fall $t = f(x)$ wie oben gesehen auch $x < 0$. Die Gleichung $t = f(x)$ lässt sich dann folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} t = f(x) &\iff t = x \cdot |x| \xrightarrow{x<0} t = x \cdot (-x) \iff t = -x^2 \iff -t = x^2 \\ &\xrightarrow{-t>0} \sqrt{-t} = \sqrt{x^2} \iff \sqrt{-t} = |x| \xrightarrow{x<0} \sqrt{-t} = -x \iff -\sqrt{-t} = x. \end{aligned}$$

Also gilt $f^{-1}(t) = -\sqrt{-t}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t < 0$.

Insgesamt folgt $f^{-1}(t) = \begin{cases} \sqrt{t}, & \text{falls } t \geq 0 \text{ ist} \\ -\sqrt{-t}, & \text{falls } t < 0 \text{ ist} \end{cases}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Lösung für g :

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt mit dem binomischen Lehrsatz

$$g(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x - 2 = 2 \cdot (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 2 \cdot (x - 1)^3.$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $t \in \mathbb{R}$ ergibt sich die Äquivalenzkette

$$t = g(x) \iff t = 2 \cdot (x - 1)^3 \iff \frac{t}{2} = (x - 1)^3.$$

Hier wird wegen der Definition der dritten Wurzel eine Fallunterscheidung nötig:

Fall 1 ($t \geq 0$): Für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t \geq 0$ ergibt sich

$$t = g(x) \iff \frac{t}{2} = (x-1)^3 \xLeftrightarrow{\frac{t}{2} \geq 0} \sqrt[3]{\frac{t}{2}} = x-1 \iff \sqrt[3]{\frac{t}{2}} + 1 = x.$$

Also gilt $g^{-1}(t) = 1 + \sqrt[3]{\frac{t}{2}}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t \geq 0$.

Fall 2 ($t < 0$): Für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t < 0$ ergibt sich

$$t = g(x) \iff \frac{t}{2} = (x-1)^3 \xLeftrightarrow{\frac{t}{2} < 0} -\sqrt[3]{-\frac{t}{2}} = x-1 \iff -\sqrt[3]{-\frac{t}{2}} + 1 = x.$$

Also gilt $g^{-1}(t) = 1 - \sqrt[3]{-\frac{t}{2}}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t < 0$.

Insgesamt folgt
$$g^{-1}(t) = \begin{cases} 1 + \sqrt[3]{\frac{t}{2}}, & \text{falls } t \geq 0 \text{ ist} \\ 1 - \sqrt[3]{-\frac{t}{2}}, & \text{falls } t < 0 \text{ ist} \end{cases} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$



FktEinDim/Umkehrung/Ag_Fkt_UmkehrfktBestimmenUndZeichen.tex

Aufgabe 52.268 (Umkehrfunktion bestimmen)

13.2.1

Geben Sie jeweils einen möglichst großen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ und einen passenden Zielbereich $W \subseteq \mathbb{R}$ an, für welche die Funktionen $f: D \rightarrow W$ mit $x \mapsto f(x)$ und den folgenden Zuordnungsvorschriften bijektiv sind!

Bilden Sie anschließend jeweils die Umkehrfunktion f^{-1} von f und skizzieren Sie die Graphen von f und f^{-1} im selben Diagramm!

a) $f(x) := 4 - \sqrt{x}$

$$f^{-1}(x) := (x-4)^2$$

Lösung:

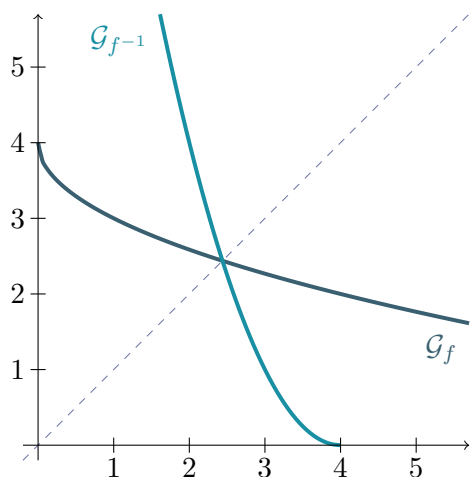
Unter der Wurzel dürfen genau die nicht-negativen reellen Zahlen stehen. Also ist $D := [0; \infty)$.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$ ist $f(x) = 4 - \sqrt{x} \leq 4$. Also ist $W := (-\infty; 4]$.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$ und alle $y \in \mathbb{R}$ mit $y \leq 4$ gilt

$$y = 4 - \sqrt{x} \iff \sqrt{x} = 4 - y \iff x = (4 - y)^2 \iff x = (y - 4)^2.$$

Damit folgt $f^{-1}: (-\infty; 4] \rightarrow [0; \infty)$ mit $x \mapsto f^{-1}(x) := (x-4)^2$.



b) $f(x) := \frac{x+1}{x-1}$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

Lösung:

In den Bruch dürfen alle reellen Zahlen außer der 1 eingesetzt werden. Als ist $D := \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Da Bestimmung von W im allgemeinen sehr schwierig ist, widmen wir uns zunächst der Zuordnungsvorschrift der Umkehrfunktion.

Fall 1 ($y \neq 1$): Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 1$ und alle $y \in \mathbb{R}$ mit $y \neq 1$ gilt

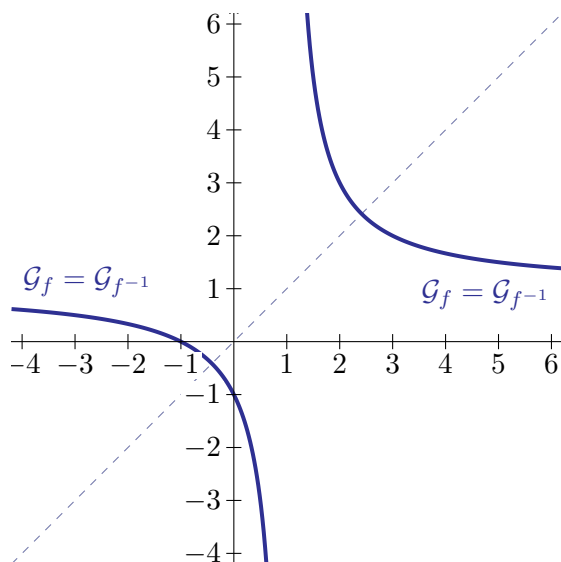
$$y = \frac{x+1}{x-1} \iff xy - y = x + 1 \iff x \cdot (y-1) = y+1. \iff x = \frac{y+1}{y-1}.$$

Fall 2 ($y = 1$): Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 1$ gilt

$$1 = \frac{x+1}{x-1} \iff x-1 = x+1 \iff 0 = 2. \nexists$$

Damit ist gezeigt: $W = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $f^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$ mit $x \mapsto f^{-1}(x) := \frac{x+1}{x-1}$.

Die Funktion f ist also selbstinvers.



c) $f(x) := 2^x + 1$

$$f^{-1}(x) = \frac{\ln(x-1)}{\ln(2)}$$

Lösung:

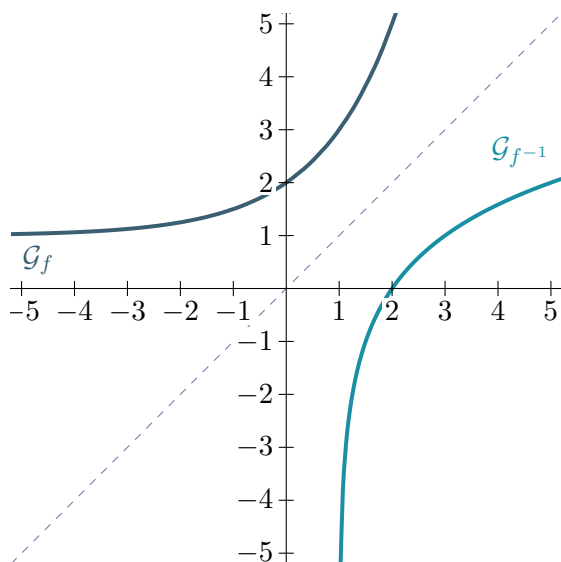
In die Exponentialfunktion darf jede reelle Zahl eingesetzt werden. Also ist $D := \mathbb{R}$.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x) = 2^x + 1 > 1$. Damit folgt $W := (1; \infty)$.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $y \in \mathbb{R}$ mit $y > 1$ gilt

$$y = 2^x + 1 \iff y - 1 = 2^x \iff \log_2(y-1) = x \iff x = \frac{\ln(y-1)}{\ln(2)}.$$

Damit folgt $f^{-1}: (1; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f^{-1}(x) := \frac{\ln(x-1)}{\ln(2)}$.



d) $f(x) := 1 - e^x$

$$f^{-1}(x) = \ln(1 - x)$$

Lösung:

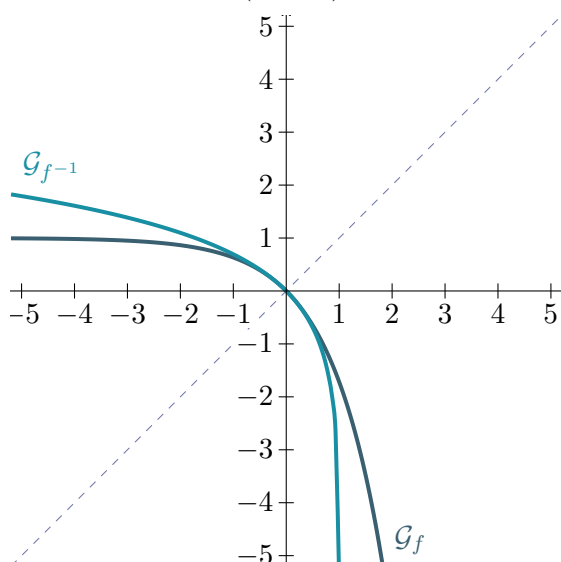
In die Exponentialfunktion darf jede reelle Zahl eingesetzt werden. Also ist $D := \mathbb{R}$.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x) = 1 - e^x < 1 - 0 = 1$. Also ist $W := (-\infty; 1)$.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $y \in \mathbb{R}$ mit $y < 1$ gilt

$$y = 1 - e^x \iff e^x = 1 - y \iff x = \ln(1 - y).$$

Damit folgt $f^{-1}: (-\infty; 1) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f^{-1}(x) := \ln(1 - x)$.



e) $f(x) := 2$

$$f^{-1}(x) = \xi \text{ beliebig}$$

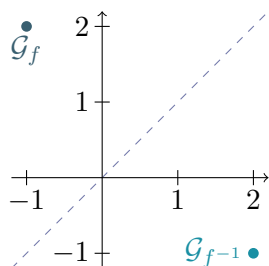
Lösung:

Offensichtlich ist $W := \{2\}$.

In die konstante Funktion kann prinzipiell jede reelle Zahl eingesetzt werden. Damit die Funktion injektiv wird, muss sie aber einelementig werden. Seien also $\xi \in \mathbb{R}$ beliebig und $D := \{\xi\}$.

Dann gilt $f^{-1}: \{2\} \rightarrow \{\xi\}$ mit $2 \mapsto f^{-1}(2) := \xi$.

Für die Skizze verwenden wir $\xi := -1$ als Beispiel.



f) $f(x) := \ln(x^2)$

$$f^{-1}(x) = e^{\frac{x}{2}} \text{ oder } -e^{\frac{x}{2}}$$

Lösung:

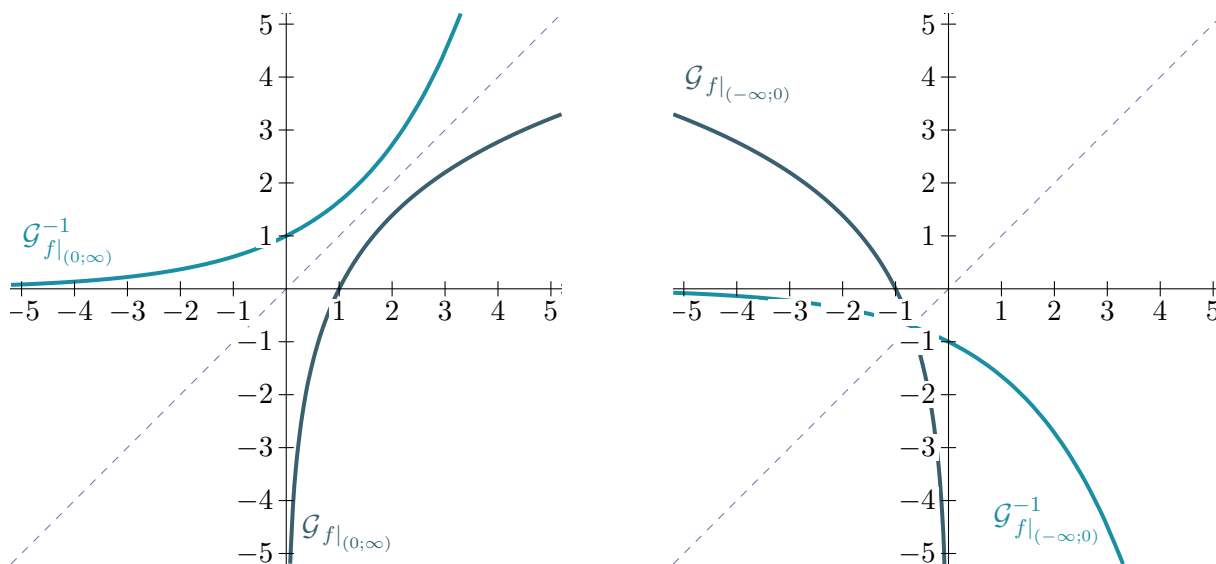
In diese Funktion lassen sich nur $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ einsetzen. Allerdings ist die Funktion mit Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nicht injektiv. Die beiden Einschränkungen $f|_{(0;\infty)}$ und $f|_{(-\infty;0)}$ sind injektiv. Also wählt man entweder $D := (0;\infty)$ oder $D := (-\infty;0)$.

Für beide Wahlen von D liefert die Quadratfunktion das Intervall $(0;\infty)$ als Bildmenge. Dieses ist die Definitionsmenge von $\ln$, so dass die Wertemenge von f mit der Wertemenge des $\ln$ übereinstimmt. Es gilt also $W := \mathbb{R}$.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ und alle $y \in \mathbb{R}$ gilt

$$y = \ln(x^2) \iff e^y = x^2 \iff \sqrt{e^y} = |x| \iff |x| = e^{\frac{y}{2}}.$$

Damit folgt $f|_{(0;\infty)}^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (0;\infty)$ mit $x \mapsto f|_{(0;\infty)}^{-1}(x) := e^{\frac{x}{2}}$ und $f|_{(-\infty;0)}^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (-\infty;0)$ mit $x \mapsto f|_{(-\infty;0)}^{-1}(x) := -e^{\frac{x}{2}}$.





FktMehrDim/Grenzwerte/Ag_GWMehrDim_Elf2DUndEin3D.tex

Aufgabe 53.269 (viele Grenzwerte berechnen)

spf

Seien $\vec{c} := (-1, 2)^T$ und $\vec{d} := (0, 3)^T$. Berechnen Sie die angegebenen Grenzwerte!

a) $\lim_{(x,y)^T \rightarrow (2,3)^T} \frac{x^2 + 3y - xy}{2y^2 + xy - 5x}$

$\frac{1}{2}$

Lösung: Es gilt $\lim_{(x,y)^T \rightarrow (2,3)^T} \frac{x^2 + 3y - xy}{2y^2 + xy - 5x} = \frac{2^2 + 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3}{2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - 5 \cdot 2} = \frac{4 + 9 - 6}{18 + 6 - 10} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$.

b) $\lim_{(v,w)^T \rightarrow \vec{0}} \frac{3w^2 - (\sqrt{3} \cdot vw)^2}{vw^2 + 2w^2}$

$\frac{3}{2}$

Lösung: Es gilt

$$\frac{3w^2 - (\sqrt{3} \cdot vw)^2}{vw^2 + 2w^2} = \frac{3w^2 - 3v^2 \cdot w^2}{vw^2 + 2w^2} = \frac{3w^2 \cdot (1 - v^2)}{w^2 \cdot (v + 2)} = \frac{3 \cdot (1 - v^2)}{v + 2} \xrightarrow{(v,w)^T \rightarrow \vec{0}} \frac{3 \cdot (1 - 0^2)}{0 + 2} = \frac{3}{2}.$$

c) $\lim_{(a,b)^T \rightarrow \vec{c}} \frac{b^2 + ab^2}{ab - a^3 + b - a^2}$

4

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{b^2 + ab^2}{ab - a^3 + b - a^2} &= \frac{b^2 \cdot (1 + a)}{b + ab - (a^2 + a^3)} = \frac{b^2 \cdot (1 + a)}{b \cdot (1 + a) - a^2 \cdot (1 + a)} = \frac{b^2 \cdot (1 + a)}{(b - a^2) \cdot (1 + a)} \\ &= \frac{b^2}{b - a^2} \xrightarrow{(a,b)^T \rightarrow (-1,2)^T} \frac{2^2}{2 - (-1)^2} = \frac{4}{2 - 1} = 4. \end{aligned}$$

d) $\lim_{(s,t)^T \rightarrow \vec{0}} \frac{st^2}{s^2 + t^2}$

0

Lösung: Wegen $s^2 \geq 0$ für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt $0 \leq \left| \frac{st^2}{s^2 + t^2} \right| = \frac{|s| \cdot t^2}{s^2 + t^2} \leq \frac{|s| \cdot t^2}{0 + t^2} = |s| \xrightarrow{(s,t)^T \rightarrow \vec{0}} 0$.

Mit dem Sandwichlemma folgt $\lim_{(s,t)^T \rightarrow \vec{0}} \frac{st^2}{s^2 + t^2} = 0$.

e) $\lim_{(\alpha,\beta)^T \rightarrow \vec{0}} \frac{|4\alpha + 8\beta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$

div.

Lösung: Wegen $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{|4\alpha + 8\beta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{|4\alpha|}{\sqrt{\alpha^2}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{4 \cdot |\alpha|}{|\alpha|} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} 4 = 4$ und $\lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{|4\alpha + 8\beta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{|8\beta|}{\sqrt{\beta^2}} = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{8 \cdot |\beta|}{|\beta|} = \lim_{\beta \rightarrow 0} 8 = 8$ existiert $\lim_{(\alpha,\beta)^T \rightarrow \vec{0}} \frac{|4\alpha + 8\beta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ nicht.

f) $\lim_{(p,q)^T \rightarrow (0,1)^T} \frac{p^2 \cdot (q-1)}{pq^2 + p - 2pq}$

div.

Lösung: Für alle $(p, q)^T \in \mathbb{R}^2$ gilt $\frac{p^2 \cdot (q-1)}{pq^2 + p - 2pq} = \frac{p^2 \cdot (q-1)}{p \cdot (q^2 - 2q + 1)} = \frac{p \cdot (q-1)}{(q-1)^2} = \frac{p}{q-1}$.

Seien $p_n := \frac{1}{n}$ und $q_n := 1 + \frac{1}{n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} (p_n, q_n)^T = (0, 1)^T$ und

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n^2 \cdot (q_n - 1)}{p_n \cdot q_n^2 + p_n - 2p_n \cdot q_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2} - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$. Somit existiert $\lim_{(p,q)^T \rightarrow (0,1)^T} \frac{p^2 \cdot (q-1)}{pq^2 + p - 2pq}$ nicht (ist aber auch nicht ∞ , siehe z.B. $(\varphi_n, \psi_n)^T := (\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n})^T$).

g) $\lim_{(\varphi, \psi)^T \rightarrow \vec{d}} \frac{|\varphi| \cdot (\psi - 1)}{\sqrt{|\varphi| + \psi^2} - \psi}$

12

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{|\varphi| \cdot (\psi - 1)}{\sqrt{|\varphi| + \psi^2} - \psi} &= \frac{|\varphi| \cdot (\psi - 1) \cdot \left(\sqrt{|\varphi| + \psi^2} + \psi \right)}{\left(\sqrt{|\varphi| + \psi^2} - \psi \right) \cdot \left(\sqrt{|\varphi| + \psi^2} + \psi \right)} = \frac{|\varphi| \cdot (\psi - 1) \cdot \left(\sqrt{|\varphi| + \psi^2} + \psi \right)}{|\varphi| + \psi^2 - \psi^2} \\ &= (\psi - 1) \cdot \left(\sqrt{|\varphi| + \psi^2} + \psi \right) \xrightarrow{(\varphi, \psi)^T \rightarrow (0, 3)^T} (3 - 1) \cdot \left(\sqrt{|0| + 3^2} + 3 \right) = 12. \end{aligned}$$

h) $\lim_{(r,s,t)^T \rightarrow \vec{0}} \frac{rs^2 + t^2}{\sqrt{r^2 + s^4 + t^2}}$

0

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \frac{rs^2 + t^2}{\sqrt{r^2 + s^4 + t^2}} \right| = \frac{|rs^2 + t^2|}{\sqrt{r^2 + s^4 + t^2}} \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \frac{|r| \cdot s^2 + t^2}{\sqrt{r^2 + s^4 + t^2}} \leq \frac{|r| \cdot s^2}{\sqrt{s^4}} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2}} \\ &= |r| + |t| \xrightarrow{(r,s,t)^T \rightarrow \vec{0}} 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Mit dem Sandwichlemma folgt $\lim_{(r,s,t)^T \rightarrow \vec{0}} \frac{rs^2 + t^2}{\sqrt{r^2 + s^4 + t^2}} = 0$.

i) $\lim_{(x,y)^T \rightarrow \vec{0}} \frac{x^6 \cdot y^4 + x^{12} + y^{14}}{x^{10} + y^{12}}$

div.

Lösung:

Mit $x_n := \frac{1}{n}$, $y_n := \frac{1}{n}$ und $\xi_n := \frac{2}{n}$ ergibt sich $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n)^T = \lim_{n \rightarrow \infty} (\xi_n, y_n)^T = \vec{0}$,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^6 \cdot y_n^4 + x_n^{12} + y_n^{14}}{x_n^{10} + y_n^{12}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^4 + \left(\frac{1}{n}\right)^{12} + \left(\frac{1}{n}\right)^{14}}{\left(\frac{1}{n}\right)^{10} + \left(\frac{1}{n}\right)^{12}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^{10}} + \frac{1}{n^{12}} + \frac{1}{n^{14}}}{\frac{1}{n^{10}} + \frac{1}{n^{12}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}}{1 + \frac{1}{n^2}} = 1 \quad \text{und} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_n^6 \cdot y_n^4 + \xi_n^{12} + y_n^{14}}{\xi_n^{10} + y_n^{12}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{n}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^4 + \left(\frac{2}{n}\right)^{12} + \left(\frac{1}{n}\right)^{14}}{\left(\frac{2}{n}\right)^{10} + \left(\frac{1}{n}\right)^{12}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{64}{n^{10}} + \frac{4096}{n^{12}} + \frac{1}{n^{14}}}{\frac{1024}{n^{10}} + \frac{1}{n^{12}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{64 + \frac{4096}{n^2} + \frac{1}{n^4}}{1024 + \frac{1}{n^2}} = \frac{64}{1024} = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

Also existiert $\lim_{(x,y)^T \rightarrow \vec{0}} \frac{x^6 \cdot y^4 + x^{12} + y^{14}}{x^{10} + y^{12}}$ nicht.

j) $\lim_{(v,w)^T \rightarrow \vec{0}} \frac{vw}{\cos(v) - 1}$

div.

Lösung: Mit $u_n := 0$, $v_n := \frac{1}{n}$ und $w_n := \frac{1}{n}$ ergibt sich $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n, u_n)^T = \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n, w_n)^T = \vec{0}$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n \cdot u_n}{\cos(v_n) - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \cdot 0}{\cos(\frac{1}{n}) - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$ und mit der Regel von de l'Hospital

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n \cdot w_n}{\cos(v_n) - 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1} \stackrel{0/0}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{-2}{n^3}}{\frac{-1}{n^2} \cdot \left(-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{-2}{n}}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} \stackrel{0/0}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{-1}{n^2} \cdot \cos\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)} = -2. \end{aligned}$$

Also existiert $\lim_{(v,w)^T \rightarrow \vec{0}} \frac{vw}{\cos(v) - 1}$ nicht.

k) $\lim_{(p,q)^T \rightarrow \vec{0}} \frac{q^3 + pq^2}{p^2 + 2pq + 2q^2}$

0

Lösung: Es gilt $0 \leq \left| \frac{q^3 + pq^2}{p^2 + 2pq + 2q^2} \right| = \frac{|q^2 \cdot (q+p)|}{(p+q)^2 + q^2} \leq \frac{q^2 \cdot |q+p|}{q^2} = |q+p| \xrightarrow{(p,q)^T \rightarrow \vec{0}} 0$.

Mit dem Sandwichlemma folgt $\lim_{(p,q)^T \rightarrow \vec{0}} \frac{q^3 + pq^2}{p^2 + 2pq + 2q^2} = 0$.

l) $\lim_{(\varrho, \tau)^T \rightarrow \vec{0}} \frac{\cos(\varrho - \tau) - 1}{\varrho^2 + \tau^2}$

div.

Lösung: Mit $\varrho_n := \frac{1}{n}$, $\tau_n := \frac{1}{n}$ und $t_n := 0$ ergibt sich $\lim_{n \rightarrow \infty} (\varrho_n, \tau_n)^T = \lim_{n \rightarrow \infty} (\varrho_n, t_n)^T = \vec{0}$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(\varrho_n - \tau_n) - 1}{\varrho_n^2 + \tau_n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}) - 1}{(\frac{1}{n})^2 + (\frac{1}{n})^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(0) - 1}{\frac{2}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$ und mit der Regel von de l'Hospital

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(\varrho_n - t_n) - 1}{\varrho_n^2 + t_n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{n} - 0\right) - 1}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + (0)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1}{\frac{1}{n^2}} \stackrel{0/0}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{-1}{n^2} \cdot \left(-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\frac{-2}{n^3}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{-2}{n}} \stackrel{0/0}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{-1}{n^2} \cdot \cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{2}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{-2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Also existiert $\lim_{(\varrho, \tau)^T \rightarrow \vec{0}} \frac{\cos(\varrho - \tau) - 1}{\varrho^2 + \tau^2}$ nicht.



FktMehrDim/Grenzwerte/Ag_GWMehrDim_PolynomBruchDefBereichBeachten.tex

Aufgabe 53.270 (Variablen gewichten und gemeinsame Potenz rausteilen)

Seien $D_f := \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0 \right\}$ und $D_g := \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 0 \text{ und } |2x| \leq |y| \leq 3 \right\}$.

a) Skizzieren Sie D_g !

$$D_g = \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid \left(-\frac{3}{2} \leq x < 0 \text{ und } -2x \leq y \leq 3 \right) \text{ oder } \left(0 < x \leq \frac{3}{2} \text{ und } -3 \leq y \leq -2x \right) \right\}$$

Lösung:

Sei $(x, y)^T \in D_g$. Wegen $xy < 0$ muss $x \neq 0$ gelten.

Fall 1: $x < 0$ Ist $x < 0$, so folgt wegen $xy < 0$, dass $y > 0$ sein muss.

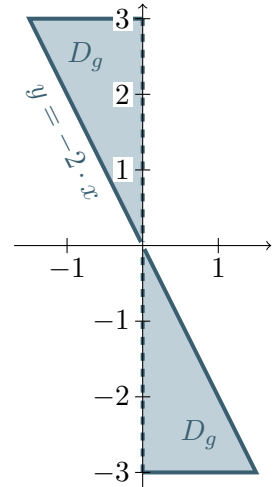
Das liefert $|2x| = -2x$ und $|y| = y$, also $-2x \leq y \leq 3$, sprich

$$-\frac{3}{2} \leq x < 0 \quad \text{und} \quad -2x \leq y \leq 3.$$

Fall 2: $x > 0$ Ist $x > 0$, so folgt wegen $xy < 0$, dass $y < 0$ sein muss.

Das liefert $|2x| = 2x$ und $|y| = -y$, also $2x \leq -y \leq 3$, sprich

$$0 < x \leq \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad -3 \leq y \leq -2x.$$



Zeigen Sie durch Einsetzen von Folgen $\left((x_k, y_k)^T \right)_{k \in \mathbb{N}}$ und $\left((r_k, s_k)^T \right)_{k \in \mathbb{N}}$ oder Kurven $\vec{\gamma}: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $I \subseteq \mathbb{R}$ und $\vec{\delta}: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $J \subseteq \mathbb{R}$, dass die Funktionen $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto f(x, y)$ und $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto g(x, y)$ keinen Grenzwert im Nullpunkt besitzen:

b) $f(x, y) := \frac{(x+y)^3}{x^2 \cdot y^2}$

Lösung:

Seien $x_k := \frac{1}{k}$ und $y_{k,c} := \frac{c}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann folgt

$$f(x_k, y_{k,c}) = \frac{(x_k + y_{k,c})^3}{x_k^2 \cdot y_{k,c}^2} = \frac{(k^{-1} + ck^{-1})^3}{k^{-2} \cdot c^2 \cdot k^{-2}} = \frac{(1+c)^3 \cdot k^{-3}}{c^2 \cdot k^{-4}} = k \cdot \frac{(1+c)^3}{c^2}$$

Für $c = 1$ divergiert diese Folge für $k \rightarrow \infty$ gegen ∞ , für $c = -1$ hingegen konvergiert sie gegen 0.

Da $\left((x_k, y_{k,c})^T \right)_{k \in \mathbb{N}}$ für alle $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (also insbesondere auch für $c = 1$ und $c = -1$) gegen $(0, 0)^T$ konvergiert, hat die Funktion f im Nullpunkt keinen Grenzwert.

c) $g(x, y) := \frac{x^2 - y^2}{3x^2 - y^2 + 2xy + x^5}$

Lösung:

Seien $x_k := \frac{1}{k}$ und $y_{k,c} := \frac{c}{k}$ für alle $(c, k)^T \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ mit $c \leq -2$ und $k^{-3} \neq c^2 - 2c - 3$.

Dann folgt für alle $(c, k)^T \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ mit $c \leq -2$ und $k^{-3} \neq c^2 - 2c - 3$

$$\begin{aligned} g(x_k, y_{k,c}) &= \frac{x_k^2 - y_{k,c}^2}{3x_k^2 - y_{k,c}^2 + 2x_k y_{k,c} + x_k^5} = \frac{k^{-2} - c^2 \cdot k^{-2}}{3k^{-2} - c^2 \cdot k^{-2} + 2ck^{-2} + k^{-5}} \\ &= \frac{(1 - c^2) \cdot k^{-2}}{(3 - c^2 + 2c) \cdot k^{-2} + k^{-5}} = \frac{(1 - c) \cdot (1 + c)}{(3 - c) \cdot (1 + c) + k^{-3}} \end{aligned}$$

wegen $c^2 - 2c - 3 = c^2 - 2 \cdot c \cdot 1 + 1^2 - 1 - 3 = (c - 1)^2 - 4 = (c - 1 - 2) \cdot (c - 1 + 2)$.

Für $c = 3$ divergiert diese Folge gegen $-\infty$ und für $c = -1$ konvergiert sie gegen 0.

Für $c \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$ hingegen ergibt sich $\frac{1-c}{3-c}$ als Grenzwert. Dieser Wert hängt aber von unserer Wahl von $c \in (-\infty; -2]$ ab. Man erhält für $c = -3$ beispielsweise den Grenzwert $\frac{2}{3}$ und für $c = -4$ den Grenzwert $\frac{5}{7}$.

Da $\left((x_k, y_{k,c})^T\right)_{k \in \mathbb{N}}$ für alle $c \in \mathbb{R}$ mit $c \leq -2$ in D_g verläuft und gegen $(0, 0)^T$ konvergiert, hat die Funktion g im Nullpunkt keinen Grenzwert.

Tipp: Setzen Sie die Folgen $a_k := \frac{1}{k}$ und $b_{c,k} := \frac{c}{k}$ bzw. die Kurve $\vec{\alpha}_c(t) := (t, ct)^T$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ ein! Welche c werden von D_f bzw. D_g erlaubt? Welche der erlaubten c sind hilfreich?



FktMehrDim/Grenzwerte/Ag_Grenzwerte_Mehrdimensional_einfach.tex

Aufgabe 53.271 (Einfache Bausteine)

Zeigen Sie durch einfache Umformungen und Grenzwertregeln, dass diese Bausteine einen Grenzwert im Punkt $(x, y) = (0, 0)$ besitzen:

$$\text{a) } f(x, y) := (y + 1) \cdot \frac{e^x - y}{e^x} \quad \text{b) } g(x, y) := \frac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \quad \text{c) } h(x, y) := \frac{xy^2 + x^2y}{xy}$$

Lösung:

Wir formen um und verwenden, dass x und y jeweils gegen Null konvergieren:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \underbrace{(y + 1)}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{e^x - y}{e^x}}_{\rightarrow \frac{1-0}{1}} \rightarrow 1. \\ g(x, y) &= \frac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{(x - y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{x - y} = \underbrace{\sqrt{x}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\sqrt{y}}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0. \\ h(x, y) &= \frac{xy^2 + x^2y}{xy} = \frac{xy^2}{xy} + \frac{x^2y}{xy} = y + x \rightarrow 0. \end{aligned}$$



FktMehrDim/Grenzwerte/Ag_Grenzwerte_Mehrdimensional_gemischt.tex

Aufgabe 53.272 (Verschiedene Grenzwerte)

Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren, und bestimmen Sie ggf. auch deren Wert.

$$\text{a) } \lim_{(x,y)^T \rightarrow (5,-2)^T} \frac{x^5 + 4x^3y}{-5xy^2}$$

$$-\frac{85}{4}$$

Lösung:

$$\lim_{(x,y)^T \rightarrow (5,-2)^T} \frac{x^5 + 4x^3y}{-5xy^2} = \frac{5^5 + 4 \cdot 5^3 \cdot (-2)}{-5 \cdot 5 \cdot (-2)^2} = \frac{5^3 - 8 \cdot 5}{-4} = \frac{125 - 40}{-4} = -\frac{85}{4}.$$

$$\text{b) } \lim_{(x,y)^T \rightarrow (6,3)^T} xy \cdot \cos(x - 2y)$$

18

Lösung:

$$\lim_{(x,y)^T \rightarrow (6,3)^T} xy \cdot \cos(x - 2y) = 6 \cdot 3 \cdot \cos(6 - 2 \cdot 3) = 18 \cdot \cos(0) = 18$$

c) $\lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} \frac{y^4}{x^4 + 3y^4}$

div.

Lösung:

Wir zeigen, dass der Grenzwert nicht existiert. Wir nehmen zwei Folgen:

- Für $(x_k, y_k)^T = (0, \frac{1}{k})^T$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{y_k^4}{x_k^4 + 3y_k^4} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{k}\right)^4}{0^4 + 3 \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^4} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{0 + 3} = \frac{1}{3}.$$

- Für $(x_k, y_k)^T = \left(\frac{1}{k}, 0\right)^T$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{y_k^4}{x_k^4 + 3y_k^4} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{0^4}{\left(\frac{1}{k}\right)^4 + 3 \cdot 0^4} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{0}{\frac{1}{k^4}} = \lim_{k \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

Da die beiden erhaltenen Grenzwerte unterschiedlich sind, existiert der gesuchte Grenzwert nicht.

d) $\lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} \frac{x^2 + (\sin(y))^2}{2x^2 + y^2}$

div.

Lösung:

Wir zeigen, dass der Grenzwert nicht existiert. Wir nehmen zwei Folgen:

- Für $(x_k, y_k)^T = (0, \frac{1}{k})^T$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k^2 + (\sin(y_k))^2}{2x_k^2 + y_k^2} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{0^2 + \left(\sin\left(\frac{1}{k}\right)\right)^2}{0^2 + \left(\frac{1}{k}\right)^2} = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k}} \right)^2 \\ &\stackrel{\text{l'Hospital}}{=} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{k}\right) \cdot \frac{-1}{k^2}}{\frac{-1}{k^2}} \right)^2 = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{1}{k}\right) \right)^2 = 1^2 = 1. \end{aligned}$$

- Für $(x_k, y_k)^T = \left(\frac{1}{k}, 0\right)^T$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k^2 + (\sin(y_k))^2}{2x_k^2 + y_k^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k^2} + (\sin(0))^2}{2 \cdot \frac{1}{k^2} + 0^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k^2}}{2 \cdot \frac{1}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Da die beiden erhaltenen Grenzwerte unterschiedlich sind, existiert der gesuchte Grenzwert nicht.

e) $\lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} \frac{xy \cdot \cos(y)}{3x^2 + y^2}$

div.

Lösung:

Wir zeigen, dass der Grenzwert nicht existiert. Wir nehmen zwei Folgen:

- Für $(x_k, y_k)^T = (0, \frac{1}{k})^T$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k y_k \cdot \cos(y_k)}{3x_k^2 + y_k^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{0 \cdot \frac{1}{k} \cdot \cos\left(\frac{1}{k}\right)}{3 \cdot 0^2 + \frac{1}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{0}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

- Für $(x_k, y_k)^T = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)^T$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k y_k \cdot \cos(y_k)}{3x_k^2 + y_k^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k} \cdot \cos\left(\frac{1}{k}\right)}{3 \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\frac{1}{k}\right)^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \cdot \cos\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{4}.$$

Da die beiden erhaltenen Grenzwerte unterschiedlich sind, existiert der gesuchte Grenzwert nicht.

f) $\lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} \frac{6x^3 y}{2x^4 + y^4}$

div.

Lösung:

Wir zeigen, dass der Grenzwert nicht existiert. Wir nehmen zwei Folgen:

- Für $(x_k, y_k)^T = \left(0, \frac{1}{k}\right)^T$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{6x_k^3 y_k}{2x_k^4 + y_k^4} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{6 \cdot 0^3 \cdot \frac{1}{k}}{2 \cdot 0^4 + \left(\frac{1}{k}\right)^4} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{0}{\frac{1}{k^4}} = \lim_{k \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

- Für $(x_k, y_k)^T = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)^T$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{6x_k^3 y_k}{2x_k^4 + y_k^4} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{6 \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^3 \cdot \frac{1}{k}}{2 \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^4 + \left(\frac{1}{k}\right)^4} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{6 \cdot \frac{1}{k^4}}{2 \cdot \frac{1}{k^4} + \frac{1}{k^4}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{6}{2+1} = \frac{6}{2+1} = \frac{6}{3} = 2.$$

Da die beiden erhaltenen Grenzwerte unterschiedlich sind, existiert der gesuchte Grenzwert nicht.

g) $\lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

0

Lösung:

In diesem Beispiel konvergiert der Zähler schneller gegen Null („klein $\times$ klein“) als der Nenner. Erwarte deshalb, dass der Grenzwert existiert. Berechnung: Für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R} \setminus \left\{(0, 0)^T\right\}$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \stackrel{\min\{x^2; y^2\} \geq 0}{\leq} \frac{|xy|}{\sqrt{\max\{x^2; y^2\}}} = \frac{|x| \cdot |y|}{\max\{\sqrt{x^2}; \sqrt{y^2}\}} \\ &= \frac{\max\{|x|; |y|\} \cdot \min\{|x|; |y|\}}{\max\{|x|; |y|\}} = \min\{|x|; |y|\}. \end{aligned}$$

Mit $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \min\{|x|; |y|\} = 0 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$ und dem Sandwichlemma/Einschnürungssatz/Einschließungstheorem folgt $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$;

h) $\lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} \frac{x^2 \cdot (\sin(y))^2}{x^2 + 2y^2}$

0

Lösung:

Für kleine y -Werte verhält sich $\sin(y)$ ähnlich wie y . Die Funktion ist deshalb in der Nähe des Nullpunktes ähnlich wie die Funktion $\frac{x^2 y^2}{x^2 + 2y^2}$. Auch in diesem Beispiel konvergiert der Zähler

schneller gegen Null (quadratisch mal quadratisch) als der Nenner (quadratisch plus quadratisch).
Erwarte deshalb, dass der Grenzwert existiert.

Für $x = 0$ und $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ergibt sich

$$\frac{x^2 \cdot (\sin(y))^2}{x^2 + 2y^2} = \frac{0^2 \cdot (\sin(y))^2}{0^2 + 2y^2} = \frac{0}{2y^2} = 0 \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0.$$

Weiterhin gelten für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die folgenden Abschätzungen:

$$0 \leq \frac{x^2 \cdot (\sin(y))^2}{x^2 + 2y^2} \stackrel{2y^2 \geq 0}{\leq} \frac{x^2 \cdot (\sin(y))^2}{x^2} = (\sin(y))^2$$

Da $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (\sin(y))^2 = 0 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$ gilt, folgt $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \cdot (\sin(y))^2}{x^2 + 2y^2} = 0$ nach dem Sandwichlemma/Einschnürungssatz/Einschließungstheorem.

i) $\lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$

div.

Lösung:

Wir zeigen, dass der Grenzwert nicht existiert. Wir nehmen zwei Folgen:

- Für $(x_k, y_k)^T = (0, \frac{1}{k})^T$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2x_k^2 y_k}{x_k^4 + y_k^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 0^2 \cdot \frac{1}{k}}{0^4 + \left(\frac{1}{k}\right)^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{0}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

- Für $(x_k, y_k)^T = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2})^T$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2x_k^2 y_k}{x_k^4 + y_k^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^2 \cdot \frac{1}{k^2}}{\left(\frac{1}{k}\right)^4 + \left(\frac{1}{k^2}\right)^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{k^4}}{\frac{1}{k^4} + \frac{1}{k^4}} = \lim_{k \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

Da die beiden erhaltenen Grenzwerte unterschiedlich sind, existiert der gesuchte Grenzwert nicht.

j) $\lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} \frac{xy^4}{x^2 + y^8}$

div.

Lösung:

Wir zeigen, dass der Grenzwert nicht existiert. Wir nehmen zwei Folgen:

- Für $(x_k, y_k)^T = (0, \frac{1}{k})^T$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k y_k^4}{x_k^2 + y_k^8} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{0 \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^4}{0^2 + \left(\frac{1}{k}\right)^8} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{0}{\frac{1}{k^8}} = \lim_{k \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

- Für $(x_k, y_k)^T = (\frac{1}{k^4}, \frac{1}{k})^T$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k y_k^4}{x_k^2 + y_k^8} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k^4} \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^4}{\left(\frac{1}{k^4}\right)^2 + \left(\frac{1}{k}\right)^8} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k^8}}{\frac{1}{k^8} + \frac{1}{k^8}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Da die beiden erhaltenen Grenzwerte unterschiedlich sind, existiert der gesuchte Grenzwert nicht.

$$\text{k)} \quad \lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$$

2

Lösung:

In diesem Beispiel kann die Singularität des Nenners eliminiert werden:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 + y^2) \cdot (\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1)}{x^2 + y^2 + 1 - 1} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 + y^2) (\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1)}{x^2 + y^2} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1) = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1} + 1 = 2 \end{aligned}$$

$$\text{l)} \quad \lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$$

0

Lösung:

Hier kann mit Hilfe der binomischen Formeln gekürzt werden:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 - y^2) \cdot (x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 - y^2) = 0^2 - 0^2 = 0.$$

$$\text{m)} \quad \lim_{(x,y,z)^T \rightarrow (0,0,0)^T} \frac{xy + yz^2 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^4}$$

div.

Lösung:

Wir zeigen, dass der Grenzwert nicht existiert. Wir nehmen zwei Folgen:

- Für $(x_k, y_k, z_k)^T = (0, \frac{1}{k}, 0)^T$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k y_k + y_k z_k^2 + x_k z_k^2}{x_k^2 + y_k^2 + z_k^4} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{0 \cdot \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \cdot 0^2 + 0 \cdot 0^2}{0^2 + \left(\frac{1}{k}\right)^2 + 0^4} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{0}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

- Für $(x_k, y_k, z_k)^T = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, 0)^T$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k y_k + y_k z_k^2 + x_k z_k^2}{x_k^2 + y_k^2 + z_k^4} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \cdot 0^2 + \frac{1}{k} \cdot 0^2}{\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\frac{1}{k}\right)^2 + 0^4} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Da die beiden erhaltenen Grenzwerte unterschiedlich sind, existiert der gesuchte Grenzwert nicht.

$$\text{n)} \quad \lim_{(x,y,z)^T \rightarrow (0,0,0)^T} \frac{x^2 + 2y^2 + 3z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

div.

Lösung:

Wir zeigen, dass der Grenzwert nicht existiert. Wir nehmen zwei Folgen:

- Für $(x_k, y_k, z_k)^T = (0, \frac{1}{k}, 0)^T$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k^2 + 2y_k^2 + 3z_k^2}{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{0^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^2 + 3 \cdot 0^2}{0^2 + \left(\frac{1}{k}\right)^2 + 0^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} 2 = 2.$$

- Für $(x_k, y_k, z_k)^T = (\frac{1}{k}, 0, 0)^T$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k^2 + 2y_k^2 + 3z_k^2}{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{k}\right)^2 + 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0^2}{\left(\frac{1}{k}\right)^2 + 0^2 + 0^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

Da die beiden erhaltenen Grenzwerte unterschiedlich sind, existiert der gesuchte Grenzwert nicht.



FktMehrDim/Grenzwerte/Ag_Grenzwerte_Mehrdimensional_vorbereitung.tex

Aufgabe 53.273 (Funktionen und Folgen)

vr

Gegeben seien die drei Folgen

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \quad (u_n, v_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right), \quad (p_n, q_n) = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right)$$

und zwei Funktionen

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad g(x, y) = \frac{y^4}{x^4 + 3y^4}.$$

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, v_n)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} (p_n, q_n)$ Alle konvergieren nach $(0, 0)$

Lösung:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, & \lim_{n \rightarrow \infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, & \lim_{n \rightarrow \infty} p_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, & \lim_{n \rightarrow \infty} v_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0, & \lim_{n \rightarrow \infty} q_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (0, 0) & &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, v_n) = (0, 0) & &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (p_n, q_n) = (0, 0) \end{aligned}$$

- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n, v_n)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f(p_n, q_n)$ Alle konvergieren gegen 0

Lösung:

$$\begin{aligned} f(x_n, y_n) &= \frac{\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ f(u_n, v_n) &= \frac{\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2} = \frac{\frac{4}{n^3}}{\frac{5}{n^2}} = \frac{4}{5n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ f(p_n, q_n) &= \frac{\frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n^4 \left(\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{1 + n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Entlang aller drei Folgen konvergieren Funktionswerte zu dem gleichen Wert 0. Das heißt, es kann *keine Aussage* über den Grenzwert $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ der Funktion getroffen werden.

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n, y_n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} g(u_n, v_n)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} g(p_n, q_n)$

$\frac{1}{4}$, $\frac{16}{49}$ und $\frac{1}{3}$

Lösung:

$$\begin{aligned}g(x_n, y_n) &= \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^4}{\left(\frac{1}{n}\right)^4 + 3 \left(\frac{1}{n}\right)^4} = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{4}{n^4}} = \frac{1}{4} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \\g(u_n, v_n) &= \frac{\left(\frac{2}{n}\right)^4}{\left(\frac{1}{n}\right)^4 + 3 \left(\frac{2}{n}\right)^4} = \frac{\frac{16}{n^4}}{\frac{49}{n^4}} = \frac{16}{49} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{16}{49} \\g(p_n, q_n) &= \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^4}{\left(\frac{1}{n^2}\right)^4 + 3 \left(\frac{1}{n}\right)^4} = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^8} + \frac{3}{n^4}} = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4} \left(\frac{1}{n^4} + 3\right)} = \frac{1}{\frac{1}{n^4} + 3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Also wir erhalten für jede Folge einen unterschiedlichen Grenzwert der Funktion. Damit existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$ nicht.

Fällt Ihnen etwas auf?



FktMehrDim/Hoehenlinien/Ag_FunktionenMehrdimensional_Hoehenlinien.tex

Aufgabe 54.274 (Funktionen in $\mathbb{R}^2$)

Bestimmen und skizzieren Sie den natürlichen Definitionsbereich sowie die Höhenlinien zur Höhen $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ und $c_3 = -1$.

a) $f(x, y) = (y - 2x)^2$

$D_f = \mathbb{R}^2$; Gerade $y = 2x$; Geraden $y = 2x \pm 1$; $\emptyset$

Lösung:Die Funktion ist für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ definiert, damit ist $D_f = \mathbb{R}^2$.

Höhenlinien:

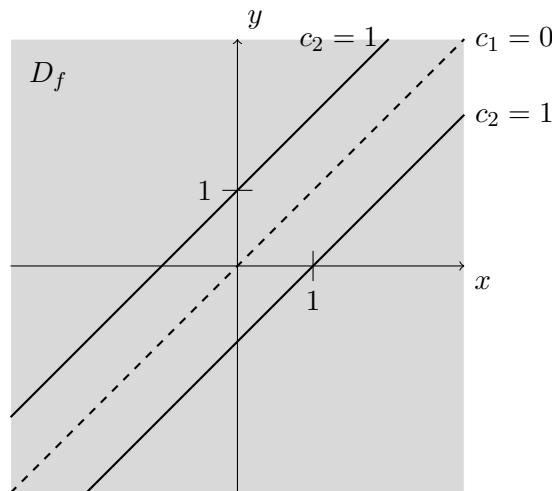
- $c_1 = 0$: Löse $(y - 2x)^2 = 0$ nach y auf:

$$(y - 2x)^2 = 0 \Leftrightarrow y - 2x = 0 \Leftrightarrow y = 2x$$

- $c_2 = 1$: Löse $(y - 2x)^2 = 1$ nach y auf:

$$(y - 2x)^2 = 1 \Leftrightarrow y - 2x = \pm 1 \Leftrightarrow y = 2x \pm 1$$

- $c_2 = -1$: Da die Funktion für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ nichtnegativ ist, ist diese Höhenlinie eine leere Menge.



b) $f(x, y) = y - \ln x$

$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, Kurve $y = \ln x$; Kurve $y = \ln x + 1$, Kurve $y = \ln x - 1$

Lösung:Die Logarithmusfunktion ist nur für positive Argumente definiert. Deswegen ist der Definitionsbereich $D_f\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.

Höhenlinien:

- $c_1 = 0$. Löse $y - \ln x = 0$ nach y auf:

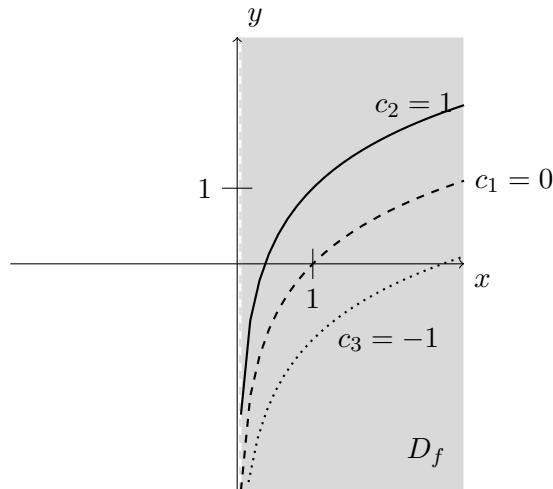
$$y - \ln x = 0 \Leftrightarrow y = \ln x$$

- $c_2 = 1$. Löse $y - \ln x = 1$ nach y auf:

$$y - \ln x = 1 \Leftrightarrow y = \ln x + 1$$

- $c_3 = -1$. Löse $y - \ln x = -1$ nach y auf:

$$y - \ln x = -1 \Leftrightarrow y = \ln x - 1$$



c) $f(x, y) = ye^x$

$D_f = \mathbb{R}^2$; Gerade $y = 0$; Kurve $y = e^{-x}$; Kurve $y = -e^{-x}$

Lösung: Die Funktion ist für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ definiert; damit ist $D_f = \mathbb{R}^2$.

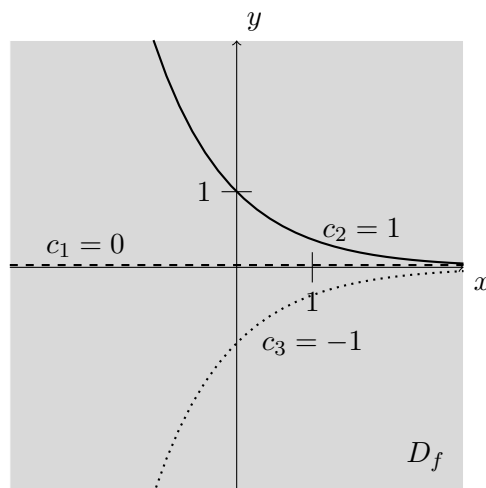
Höhenlinien:

- $c_1 = 0$. Löse $ye^x = 0$ nach y auf. Da e^x immer positiv ist, muss $y = 0$ sein.
- $c_2 = 1$. Löse $ye^x = 1$ nach y auf.

$$ye^x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e^x} \Leftrightarrow y = e^{-x}$$

- $c_3 = -1$. Löse $ye^x = -1$ nach y auf.

$$ye^x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{e^x} \Leftrightarrow y = -e^{-x}$$



d) $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^2}$

$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \geq |x|\}$; Geraden $y = \pm x$; Kurven $y = \pm\sqrt{1+x^2}$; $\emptyset$

Lösung: Die Wurzelfunktion ist nur für nichtnegative Argumente definiert. Deswegen muss $y^2 - x^2 \geq 0$ gelten:

$$y^2 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \geq x^2 \Leftrightarrow |y| \geq |x|$$

Damit ist $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \geq |x|\}$.

Höhenlinien:

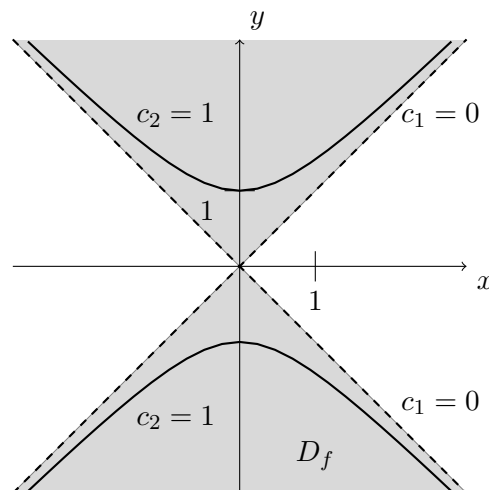
- $c_1 = 0$: Löse $\sqrt{y^2 - x^2} = 0$ nach y auf:

$$\sqrt{y^2 - x^2} = 0 \Leftrightarrow y^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow y^2 = x^2 \Leftrightarrow y = \pm x$$

- $c_1 = 1$: Löse $\sqrt{y^2 - x^2} = 1$ nach y auf:

$$\sqrt{y^2 - x^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 - x^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{x^2 + 1}$$

- $c_2 = -1$: da die Wurzelfunktion immer nichtnegativ ist, ist diese Höhenlinie eine leere Menge.



e) $f(x, y) = x^3 - y$

$D_f = \mathbb{R}^2$; Kurve $y = x^3$; Kurve $y = x^3 - 1$; Kurve $y = x^3 + 1$

Lösung: Die Funktion ist für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ definiert. Damit ist $D_f = \mathbb{R}^2$.

Höhenlinien:

- $c_1 = 0$. Löse $x^3 - y = 0$ nach y auf:

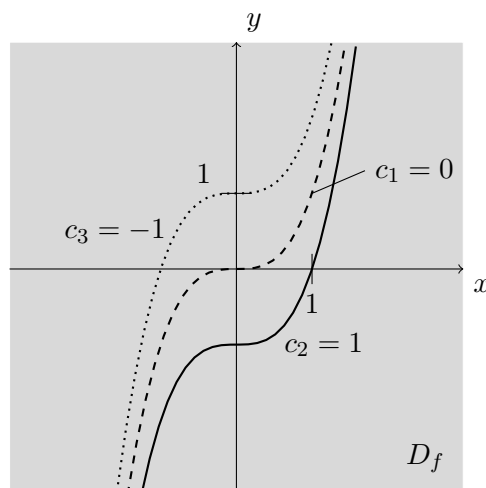
$$x^3 - y = 0 \Leftrightarrow y = x^3$$

- $c_2 = 1$. Löse $x^3 - y = 1$ nach y auf:

$$x^3 - y = 1 \Leftrightarrow y = x^3 - 1$$

- $c_3 = -1$. Löse $x^3 - y = -1$ nach y auf:

$$x^3 - y = -1 \Leftrightarrow y = x^3 + 1$$



f) $f(x, y) = e^{\frac{y}{x}}$

$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}; \emptyset; \text{Gerade } y = 0 \text{ (ohne Nullpunkt)}; \emptyset$

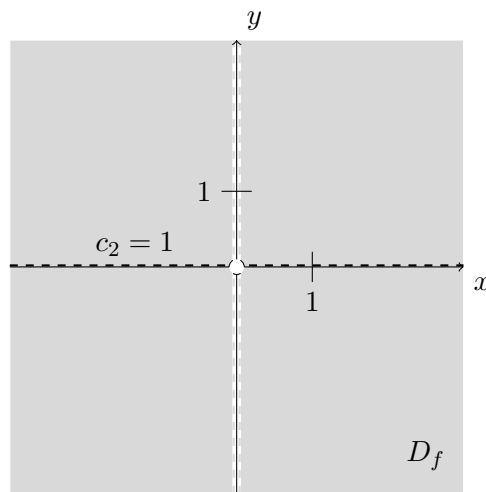
Lösung:Die Exponentialfunktion ist für alle reellen Zahlen definiert. Der Nenner in der Bruch darf jedoch nicht Null sein. Dementsprechend ist $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$.

Höhenlinien:

- $c_1 = 0$: Da die Exponentialfunktion immer positiv ist, ist die entsprechende Höhenlinie eine leere Menge.
- $c_2 = 1$. Löse $e^{\frac{y}{x}} = 1$ nach y auf:

$$e^{\frac{y}{x}} = 1 \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \ln 1 = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

- $c_3 = -1$: Da die Exponentialfunktion immer positiv ist, ist die entsprechende Höhenlinie eine leere Menge.



g) $f(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$; Gerade $y = 0$; Kreis mit $R = \frac{1}{2}$ und Mittelpunkt in $(0, \frac{1}{2})$; Kreis mit $R = \frac{1}{2}$ und Mittelpunkt in $(0, -\frac{1}{2})$; alle ohne Nullpunkt

Lösung:Der Nenner darf nicht Null werden. Dementsprechend ist

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Höhenlinien:

- $c_1 = 0$: Löse $\frac{y}{x^2+y^2} = 0$ nach y auf.

$$\frac{y}{x^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

- $c_2 = 1$: Betrachte die Gleichung $\frac{y}{x^2+y^2} = 1$. Unter der Annahme dass $x^2 + y^2 \neq 0$ gilt

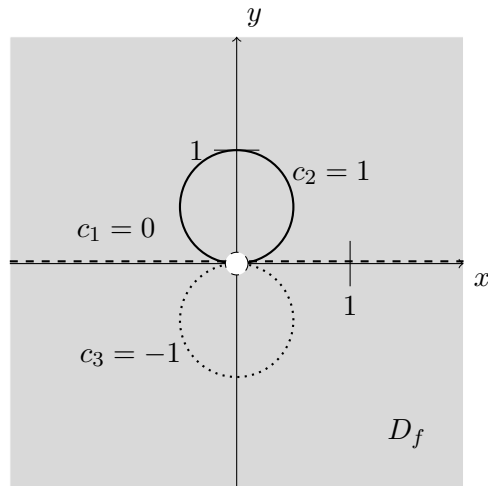
$$\begin{aligned} \frac{y}{x^2+y^2} = 1 &\Leftrightarrow y = x^2 + y^2 \Leftrightarrow y^2 - y + x^2 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + x^2 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Diese Gleichung beschreibt einen Kreis mit Mittelpunkt in $(0, \frac{1}{2})$ und Radius $\frac{1}{2}$.

- $c_3 = -1$: Betrachte die Gleichung $\frac{y}{x^2+y^2} = -1$. Unter der Annahme dass $x^2 + y^2 \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{y}{x^2+y^2} = -1 &\Leftrightarrow y = -x^2 - y^2 \Leftrightarrow y^2 + y + x^2 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + x^2 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Diese Gleichung beschreibt einen Kreis mit Mittelpunkt in $(0, -\frac{1}{2})$ und Radius $\frac{1}{2}$.





FktMehrDim/Stetigkeit/Ag_StetigMehrDim_Drei2DPolynombrueche.tex

Aufgabe 55.275 (Stetige und unstetige Funktionen)

jgl

Prüfen Sie, ob die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto f(x, y)$ in $\vec{a} := (a_x, a_y)^T := (0, 0)^T$ stetig ist!

a) $f(x, y) := \frac{y}{8x}$ für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ und $f(0, z) := 0$ für alle $z \in \mathbb{R}$

nicht stetig

Lösung: f ist in $(0, 0)^T$ nicht stetig, da für $x_n := y_n := \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ dann

$$|f(x_n, y_n) - f(0, 0)| = \left| \frac{\frac{1}{n}}{8 \cdot \frac{1}{n}} - 0 \right| = \left| \frac{1}{8} \right| = \frac{1}{8} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{8} \neq 0$$

trotz $(x_n, y_n)^T \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0)^T$ gilt.

b) $f(x, y) := \frac{x^3 \cdot y^3}{x^2 + 4y^2}$ für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ oder $y \neq 0$ und $f(0, 0) := 0$

stetig

Lösung: f ist in $(0, 0)^T$ stetig, da für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}$ mit $y \neq 0$ dann

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = \left| \frac{x^3 \cdot y^3}{x^2 + 4y^2} - 0 \right| = \frac{|x^3 \cdot y^3|}{x^2 + 4y^2} \leq \frac{|x^2 \cdot x \cdot y^2 \cdot y|}{4y^2} = \frac{x^2}{4} \cdot |xy|$$

beziehungsweise für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ dann

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = \left| \frac{x^3 \cdot y^3}{x^2 + 4y^2} - 0 \right| = \frac{|x^3 \cdot y^3|}{x^2 + 4y^2} \leq \frac{|x^2 \cdot x \cdot y^2 \cdot y|}{x^2} = y^2 \cdot |xy|$$

gelten. Insgesamt folgt für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ oder $y \neq 0$ also

$$0 \leq |f(x, y) - f(0, 0)| \leq \max\left(\left\{\frac{x^2}{4}; y^2\right\}\right) \cdot |xy|.$$

Wegen $0 \xrightarrow{(x, y)^T \rightarrow (0, 0)^T} 0$ und $\max\left(\left\{\frac{x^2}{4}; y^2\right\}\right) \cdot |xy| \xrightarrow{(x, y)^T \rightarrow (0, 0)^T} 0$ liefert das Sandwichlemma

$|f(x, y) - f(0, 0)| \xrightarrow{(x, y)^T \rightarrow (0, 0)^T} 0$, sprich die Stetigkeit von f in $(0, 0)^T$.

c) $f(x, y) := \frac{xy}{x-y}$ für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}$ mit $x \neq y$ und $f(z, z) := 0$ für alle $z \in \mathbb{R}$

nicht stetig

Lösung: f ist in $(0, 0)^T$ nicht stetig, da für $x_n := \frac{1}{n}$ und $y_n := \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ dann

$$|f(x_n, y_n) - f(0, 0)| = \left| \frac{\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)} - 0 \right| = \left| \frac{\frac{1}{n^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} \right| = \left| 1 - \frac{1}{n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |1 - 0| = 1 \neq 0$$

trotz $(x_n, y_n)^T \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0)^T$ gilt.

**Aufgabe 55.276** (Stetigkeit in $\mathbb{R}^2$)

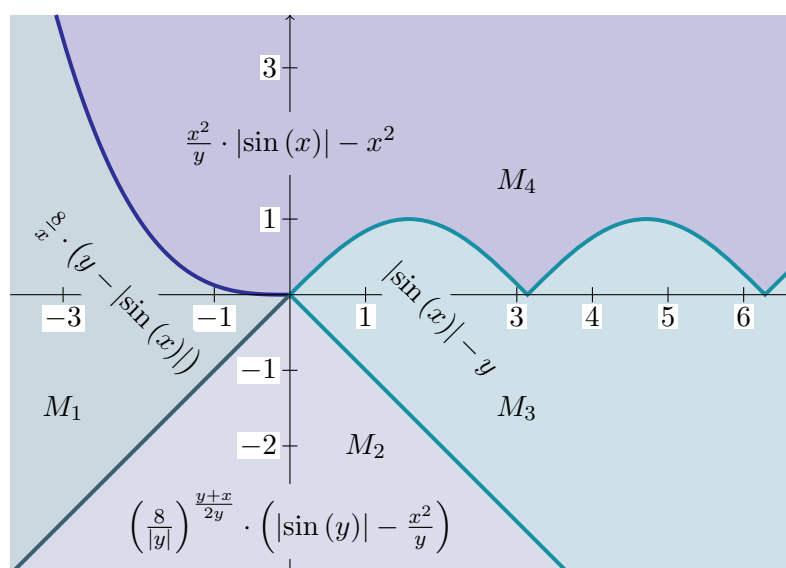
Seien $M_1 := \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y < -\frac{x^3}{8} \right\}$, $M_2 := \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y < -|x| \right\}$,

$M_3 := \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid -x \leq y \leq |\sin(x)| \right\}$ und $M_4 := \mathbb{R}^2 \setminus (M_1 \cup M_2 \cup M_3)$.

Sei nun $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x, y) := \begin{cases} \frac{8}{x} \cdot (y - |\sin(x)|), & \text{für } (x, y)^T \in M_1 \\ \left(\frac{8}{|y|} \right)^{\frac{y+x}{2y}} \cdot \left(|\sin(y)| - \frac{x^2}{y} \right), & \text{für } (x, y)^T \in M_2 \\ |\sin(x)| - y, & \text{für } (x, y)^T \in M_3 \\ \frac{x^2}{y} \cdot |\sin(x)| - x^2, & \text{für } (x, y)^T \in M_4 \end{cases}$.

- a) Skizzieren Sie die Mengen M_1 , M_2 , M_3 und M_4 in ein Koordinatensystem und notieren Sie in den entsprechenden Bereichen die jeweilige Zuordnungsvorschrift von f !

Lösung:



- b) Untersuchen Sie f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ auf Stetigkeit!

f ist stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{ (k\pi, 0)^T \in \mathbb{R}^2 \mid k \in \mathbb{N}_0 \right\}$ und unstetig auf $\left\{ (k\pi, 0)^T \in \mathbb{R}^2 \mid k \in \mathbb{N} \right\}$.

Tipp: Was passiert, wenn Sie sich den Abschnittsgrenzpunkten, die auf der positiven horizontalen Achse liegen, senkrecht von oben nähern?

Lösung:

Da $x \neq 0$ für alle $(x, y)^T \in M_1$ gilt (andernfalls müsste $0 \leq y < -\frac{0^3}{8} = 0$ gelten), ist f auf M_1 als Komposition stetiger Funktionen stetig.

Für alle $(x, y)^T \in M_2$ gilt $y \neq 0$, da sonst $0 < -|x|$, sprich $|x| < 0$ wäre, und deshalb ist f auf M_2 als Komposition stetiger Funktionen stetig.

f ist auf M_3 als Komposition stetiger Funktionen stetig.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x < 0$ ist $-\frac{x^3}{8} > 0$, so dass $\left\{ (x, 0)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0 \right\} \subseteq M_1$ ist. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$ ist $-x \leq 0 \leq |\sin(x)|$, weshalb $\left\{ (x, 0)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \right\} \subseteq M_3$ ist. Also ist $y \neq 0$ für alle $(x, y)^T \in M_4$ und somit ist f auf M_4 als Komposition stetiger Funktionen stetig.

Zu prüfen ist die Stetigkeit damit nur noch an den Abschnittsgrenzen abgesehen vom Ursprung.

M_1 und M_2 treffen sich auf $\left\{ (t, t)^T \in \mathbb{R}^2 \mid t < 0 \right\} \subseteq M_1$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t < 0$ gilt also

$$\lim_{\substack{(x,y)^T \rightarrow (t,t)^T \\ y \geq x}} f(x, y) \stackrel{\text{Stetigkeit auf } M_1}{=} f(t, t) = \frac{8}{t} \cdot (t - |\sin(t)|).$$

Außerdem gilt auch $\lim_{\substack{(x,y)^T \rightarrow (t,t)^T \\ y < x}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)^T \rightarrow (t,t)^T \\ y < x}} \left(\frac{8}{|y|}\right)^{\frac{y+x}{2y}} \cdot \left(|\sin(y)| - \frac{x^2}{y}\right) = \left(\frac{8}{|t|}\right)^{\frac{t+t}{2t}} \cdot \left(|\sin(t)| - \frac{t^2}{t}\right) = \left(\frac{8}{|t|}\right)^1 \cdot (|\sin(t)| - t) = \frac{8}{t} \cdot (t - |\sin(t)|)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t < 0$.

Also ist f für alle $\vec{z} \in \{(t,t)^T \in \mathbb{R}^2 \mid t < 0\}$ stetig in $\vec{z}$.

M_2 und M_3 treffen sich auf $\{(t,-t)^T \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\} \subseteq M_3$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$ gilt also

$$\lim_{\substack{(x,y)^T \rightarrow (t,-t)^T \\ y \geq -x}} f(x,y) \stackrel{\text{Stetigkeit auf } M_3}{=} f(t,-t) = |\sin(t)| - (-t) = |\sin(t)| + t.$$

Außerdem gilt auch $\lim_{\substack{(x,y)^T \rightarrow (t,-t)^T \\ y < -x}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)^T \rightarrow (t,-t)^T \\ y < -x}} \left(\frac{8}{|y|}\right)^{\frac{y+x}{2y}} \cdot \left(|\sin(y)| - \frac{x^2}{y}\right) = \left(\frac{8}{|t|}\right)^{\frac{t-t}{2 \cdot (-t)}} \cdot \left(|\sin(t)| - \frac{t^2}{-t}\right) = \left(\frac{8}{|t|}\right)^0 \cdot (|\sin(t)| + t) = |\sin(t)| + t$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$.

Also ist f für alle $\vec{z} \in \{(t,-t)^T \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\}$ stetig in $\vec{z}$.

M_3 und M_4 treffen sich auf $\{(t, |\sin(t)|)^T \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\} \subseteq M_3$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$ gilt

$$\text{also } \lim_{\substack{(x,y)^T \rightarrow (t, |\sin(t)|)^T \\ y \leq |\sin(x)|}} f(x,y) \stackrel{\text{Stetigkeit auf } M_3}{=} f(t, |\sin(t)|) = |\sin(t)| - |\sin(t)| = 0.$$

Außerdem gilt auch für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$ und $\sin(t) \neq 0$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y)^T \rightarrow (t, |\sin(t)|)^T \\ y > |\sin(x)|}} f(x,y) &= \lim_{\substack{(x,y)^T \rightarrow (t, |\sin(t)|)^T \\ y > |\sin(x)|}} \left(\frac{x^2}{y} \cdot |\sin(x)| - x^2\right) \\ &= \frac{t^2}{|\sin(t)|} \cdot |\sin(t)| - t^2 = t^2 - t^2 = 0. \end{aligned}$$

Für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$ und $\sin(t) = 0$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $t = k\pi$.

Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $|\sin(k\pi)| = 0$ und

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow |\sin(k\pi)|^+} f(k\pi, y) &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{(k\pi)^2}{y} \cdot |\sin(k\pi)| - (k\pi)^2\right) \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{k^2\pi^2}{y} \cdot 0 - k^2\pi^2\right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} (-k^2\pi^2) = -k^2\pi^2 \neq 0 = f(k\pi, 0). \end{aligned}$$

Also ist f für alle $\vec{z} \in \{(t, |\sin(t)|)^T \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\} \setminus \{(k\pi, 0)^T \in \mathbb{R}^2 \mid k \in \mathbb{N}\}$ stetig in $\vec{z}$ und für alle $\vec{z} \in \{(k\pi, 0)^T \in \mathbb{R}^2 \mid k \in \mathbb{N}\}$ unstetig in $\vec{z}$.

M_4 und M_1 treffen sich auf $\left\{\left(t, -\frac{t^3}{8}\right)^T \in \mathbb{R}^2 \mid t < 0\right\} \subseteq M_4$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t < 0$ gilt also

$$\lim_{\substack{(x,y)^T \rightarrow \left(t, -\frac{t^3}{8}\right)^T \\ y \geq -\frac{x^3}{8}}} f(x,y) \stackrel{\text{Stetigkeit auf } M_4}{=} f\left(t, -\frac{t^3}{8}\right) = \frac{t^2}{-\frac{t^3}{8}} \cdot |\sin(t)| - t^2 = -\frac{8}{t} \cdot |\sin(t)| - t^2.$$

Außerdem gilt mit $\vec{v}(t) := \left(t, -\frac{t^3}{8}\right)^T$ auch für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t < 0$

$$\lim_{\substack{(x,y)^T \rightarrow \vec{v}(t) \\ y < -\frac{x^3}{8}}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)^T \rightarrow \vec{v}(t) \\ y < -\frac{x^3}{8}}} \frac{8}{x} \cdot (y - |\sin(x)|) = \frac{8}{t} \cdot \left(-\frac{t^3}{8} - |\sin(t)|\right) = -t^2 - \frac{8}{t} \cdot |\sin(t)|.$$

Also ist f für alle $\vec{z} \in \left\{\left(t, -\frac{t^3}{8}\right)^T \in \mathbb{R}^2 \mid t < 0\right\}$ stetig in $\vec{z}$.

M_1 und M_3 sowie M_2 und M_4 stoßen nur am Ursprung aneinander.

Also ist f stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{ (k\pi, 0)^T \in \mathbb{R}^2 \mid k \in \mathbb{N}_0 \right\}$ und unstetig auf $\left\{ (k\pi, 0)^T \in \mathbb{R}^2 \mid k \in \mathbb{N} \right\}$.

c) Ist f im Ursprung stetig?

f ist unstetig im Ursprung.

Lösung:

Wegen $\vec{0} \in M_3$ gilt $f(0, 0) = |\sin(0)| - 0 = |0| = 0$.

Wegen $\lim_{t \rightarrow 0^-} (t, 0)^T = \vec{0}$ und

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t, 0) &\stackrel{(t,0)^T \in M_1}{=} \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{8}{t} \cdot (0 - |\sin(t)|) \stackrel{\text{für } t \geq -\pi}{=} \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{8}{t} \cdot (-(-\sin(t))) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} 8 \cdot \frac{\sin(t)}{t} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^-} 8 \cdot \frac{\cos(t)}{1} = 8 \cdot \cos(0) = 8 \cdot 1 = 8 \neq 0 = f(0, 0) \end{aligned}$$

ist f also unstetig im Ursprung.

Wegen $\lim_{t \rightarrow 0^+} (0, t)^T = \vec{0}$ und

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(0, t) \stackrel{(0,t)^T \in M_4}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{0^2}{t} \cdot |\sin(0)| - 0^2 \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (0 \cdot |0| - 0) = 0 \neq 8 = \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t, 0)$$

existiert $\lim_{(x,y)^T \rightarrow \vec{0}} f(x, y)$ nicht.



FktMehrDim/Stetigkeit/Ag_StetigMehrDim_EinstiegAltklausurBau.tex

Aufgabe 55.277 (Stetigkeit in $\mathbb{R}^2$)

[AltklausurenBauIng](#)

Die folgenden Aufgaben sind Altklausuren der Mathematik II für Bauingenieurwesen entnommen.

a) Untersuchen Sie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{für } x = y = 0 \\ \frac{2 \cdot |x| \cdot y}{x^2 + y^2}, & \text{sonst} \end{cases}$ auf Stetigkeit!

Unstetig im Nullpunkt, sonst überall stetig

Lösung:

Außerhalb des Nullpunkts ist f als Komposition unendlich oft differenzierbarer Funktionen unendlich oft differenzierbar, also insbesondere stetig.

Um f auf Stetigkeit im Nullpunkt zu untersuchen, betrachten wir die beiden Folgen

$$\left((r_n, s_n)^T \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ und } \left((r_n, t_n)^T \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad r_n := s_n := \frac{1}{n} \text{ und } t_n := -\frac{1}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Damit gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (r_n, s_n)^T = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right)^T = (0, 0)^T,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (r_n, t_n)^T = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n} \right)^T = (0, 0)^T,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n, s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \left| \frac{1}{n} \right| \cdot \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n} \right)^2 + \left(\frac{1}{n} \right)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

$$\text{und } \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n, t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \left| \frac{1}{n} \right| \cdot \left(-\frac{1}{n} \right)}{\left(\frac{1}{n} \right)^2 + \left(-\frac{1}{n} \right)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{2}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1) = -1.$$

Also existiert $\lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} f(x, y)$ nicht und deshalb ist f unstetig im Nullpunkt.

- b) Untersuchen Sie $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto g(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{für } x = y = 0 \\ \frac{xy \cdot \sin(y)}{x^2 + y^2}, & \text{sonst} \end{cases}$ auf Stetigkeit!

Stetig auf $\mathbb{R}^2$

Lösung:

Außerhalb des Nullpunkts ist g als Komposition unendlich oft differenzierbarer Funktionen unendlich oft differenzierbar, also insbesondere stetig.

Um g auf Stetigkeit im Nullpunkt zu untersuchen, benutzen wir das Sandwichlemma:

Fall 1 ($y \neq 0$): Für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$\begin{aligned} 0 \leq |g(x, y)| &= \left| \frac{xy \cdot \sin(y)}{x^2 + y^2} \right| = \frac{|xy \cdot \sin(y)|}{x^2 + y^2} \\ &\leq \frac{|x| \cdot |y| \cdot |\sin(y)|}{0^2 + y^2} \stackrel{|\sin(y)| \leq |y|}{\leq} \frac{|x| \cdot |y| \cdot |y|}{y^2} = \frac{|x| \cdot |y|^2}{|y|^2} = |x|. \end{aligned}$$

Fall 2 ($y = 0$): Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und alle $y \in \{0\}$ gilt

$$0 \leq |g(x, y)| = \left| \frac{xy \cdot \sin(y)}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{x \cdot 0 \cdot \sin(0)}{x^2 + 0^2} \right| = \left| \frac{0}{x^2} \right| = |0| = 0 \leq |x|.$$

Also gilt die Ungleichung $0 \leq |g(x, y)| \leq |x|$ für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)^T\}$.

Wegen $\lim_{(x, y)^T \rightarrow (0, 0)^T} 0 = 0 = \lim_{(x, y)^T \rightarrow (0, 0)^T} |x|$ liefert das Sandwichlemma die Existenz von $\lim_{(x, y)^T \rightarrow (0, 0)^T} g(x, y)$ mit $\lim_{(x, y)^T \rightarrow (0, 0)^T} g(x, y) = 0 = g(0, 0)$. Also ist g im Nullpunkt stetig.



FktMehrDim/Stetigkeit/Ag_Stetigkeit_Mehrdimensional.tex

Aufgabe 55.278 (Stetige Funktion?)

Überprüfen Sie die folgenden Funktionen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ auf Stetigkeit im Nullpunkt.

a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{2x^2 + y^2}, & \text{für } xy \neq 0 \\ 0, & \text{für } xy = 0 \end{cases}$

stetig

Lösung:

Für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)^T\}$ ist $f(x, y) = \frac{x^2 y^3}{2x^2 + y^2}$.

Überall abseits des Nullpunktes ist die Funktion also stetig als Quotient zweier stetiger Funktionen, da der Nenner nur im Nullpunkt den Wert Null annimmt.

Am Nullpunkt: Damit f im Nullpunkt stetig ist, muss gelten

$$\lim_{(x, y)^T \rightarrow (0, 0)^T} \frac{x^2 y^3}{2x^2 + y^2} \stackrel{!}{=} f(0, 0) = 0.$$

Überprüfe mit dem Sandwich-Theorem, ob das gilt. Setze $m := \min\{|x|; |y|\}$ und $M := \max\{|x|; |y|\}$.

Für $M \neq 0$ folgt wegen $\lim_{(x, y)^T \rightarrow (0, 0)^T} m = \lim_{(x, y)^T \rightarrow (0, 0)^T} M = 0$

$$\begin{aligned} 0 \stackrel{(x, y)^T \rightarrow (0, 0)^T}{\leftarrow} 0 &\leq \left| \frac{x^2 y^3}{2x^2 + y^2} \right| = \frac{x^2 \cdot |y|^3}{2x^2 + y^2} \leq \frac{x^2 \cdot y^2 \cdot |y|}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{m^2 \cdot M^2 \cdot |y|}{m^2 + M^2} \leq \frac{m^2 \cdot M^2 \cdot |y|}{M^2} = m^2 \cdot |y| \stackrel{(x, y)^T \rightarrow (0, 0)^T}{\rightarrow} 0 \end{aligned}$$

Damit gilt auch, dass

$$\lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} \frac{x^2 y^3}{2x^2 + y^2} = 0$$

ist und damit ist die Funktion f stetig.

$$\text{b) } g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + xy + y^2}, & \text{für } xy \neq 0 \\ 0, & \text{für } xy = 0 \end{cases}$$

nicht stetig

Lösung:

Für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)^T\}$ ist $g(x, y) = \frac{xy}{x^2 + xy + y^2}$.

Überprüfe, ob die Stetigkeitsbedingung

$$\lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} \frac{xy}{x^2 + xy + y^2} \stackrel{!}{=} g(0, 0) = 0$$

gilt. Das ist hier nicht der Fall. Wir betrachten die Folgen $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$t_k = \frac{1}{k} \quad \text{und} \quad s_k = 0 \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} (t_k, t_k)^T = (0, 0)^T$, $\lim_{k \rightarrow \infty} (t_k, s_k)^T = (0, 0)^T$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g(t_k, t_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{t_k t_k}{t_k^2 + t_k t_k + t_k^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{t_k^2}{3 \cdot t_k^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g(t_k, s_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{t_k s_k}{t_k^2 + t_k s_k + s_k^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k} \cdot 0}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k} \cdot 0 + 0^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

Damit kann der Grenzwert nicht existieren und die Funktion g ist am Nullpunkt nicht stetig.

$$\text{c) } u(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } 0 \neq x = y^2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

nicht stetig

Lösung:

Wir betrachten die Folgen $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$t_k = \frac{1}{k^2} \quad \text{und} \quad s_k = \frac{1}{k} \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt $0 \neq t_k = s_k^2 \neq t_k^2$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} (t_k, t_k)^T = (0, 0)^T$, $\lim_{k \rightarrow \infty} (t_k, s_k)^T = (0, 0)^T$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u(t_k, t_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} u\left(\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k^2}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} 0 = 0$$

und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u(t_k, s_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} u\left(\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

Damit kann der Grenzwert nicht existieren und die Funktion u ist am Nullpunkt nicht stetig.

$$\text{d) } v(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2+y^4}, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

nicht stetig

Lösung:

Wir betrachten die Folgen $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$t_k = \frac{1}{k^2} \quad \text{und} \quad s_k = \frac{1}{k} \quad \text{und} \quad r_k = 0 \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt $t_k > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} (t_k, s_k)^\top = (0, 0)^\top$, $\lim_{k \rightarrow \infty} (t_k, r_k)^\top = (0, 0)^\top$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u(t_k, s_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2t_k s_k^2}{t_k^2 + s_k^4} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{k^2} \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^2}{\left(\frac{1}{k^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{k}\right)^4} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{k^4}}{\frac{1}{k^4} + \frac{1}{k^4}} = \lim_{k \rightarrow \infty} 1 = 1$$

und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u(t_k, r_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2t_k r_k^2}{t_k^2 + r_k^4} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{k^2} \cdot 0^2}{\left(\frac{1}{k^2}\right)^2 + 0^4} = \lim_{k \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

Damit kann der Grenzwert nicht existieren und die Funktion v ist am Nullpunkt nicht stetig.



FktMehrDim/Stetigkeit/Ag_Stetigkeit_WiWiKlausuraufgaben.tex

Aufgabe 55.279 (Stetigkeit in WiWi Alt-Klausuren)

a) In Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die Funktion

$$f_\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_\alpha(x, y) := \begin{cases} \frac{\sin(x \cdot y)}{y}, & \text{falls } y \neq 0 \\ -2 \cdot \alpha \cdot x, & \text{falls } y = 0, \end{cases}$$

gegeben. Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass f_α auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

$$\alpha = -\frac{1}{2}$$

Lösung:

Lösung mit Folgen

- In einem beliebigen Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $y_0 \neq 0$ ist die Funktion f_α stetig als Komposition stetiger Funktionen für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Untersuche die Stetigkeit in Punkten $(x_0, 0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Für die Stetigkeit muss für jede beliebige Folge $(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (x_0, 0)$, $y_n \neq 0$, gelten

$$|f_\alpha(x_n, y_n) - f_\alpha(x_0, 0)| = \left| \frac{\sin(x_n \cdot y_n)}{y_n} + 2 \cdot \alpha \cdot x_0 \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

– Für $x_0 = 0$ gilt

$$0 \leq \left| \frac{\sin(x_n \cdot y_n)}{y_n} + 2 \cdot \alpha \cdot 0 \right| = \left| \frac{\sin(x_n \cdot y_n)}{y_n} + 0 \right| = \frac{|\sin(x_n \cdot y_n)|}{|y_n|}.$$

Da $(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0)$, kann für den Grenzwert angenommen werden, dass $|x_n \cdot y_n| \leq \pi$, d.h., $|\sin(x_n \cdot y_n)| = \sin(|x_n \cdot y_n|)$. Für nichtnegative Argumente gilt jedoch auch dass $\sin(t) \leq t$. Also gilt weiter die Abschätzung

$$0 \leq \left| \frac{\sin(x_n \cdot y_n)}{y_n} + 2 \cdot \alpha \cdot 0 \right| \leq \frac{|\sin(x_n \cdot y_n)|}{|y_n|} = \frac{\sin(|x_n \cdot y_n|)}{|y_n|} \leq \frac{|x_n \cdot y_n|}{|y_n|} = |x_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Damit ist f_α stetig in Punkt $(0, 0)$ für alle Werte von α .

- Für $x_0 \neq 0$ konvergiert die Folge x_n gegen $x_0 \neq 0$. Also kann für den Grenzwert angenommen werden, dass $x_n \neq 0$ (zumindest ab einem gewissen n_0). Dann darf durch x_n geteilt werden und es gilt die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sin(x_n \cdot y_n)}{y_n} + 2 \cdot \alpha \cdot x_0 \right| &= \left| \frac{x_n \cdot \sin(x_n \cdot y_n)}{x_n \cdot y_n} + 2 \cdot \alpha \cdot x_0 \cdot \frac{x_n}{x_n} \right| \\ &= |x_n| \left| \frac{\sin(x_n \cdot y_n)}{x_n \cdot y_n} - 2 \cdot \alpha \cdot \frac{x_0}{x_n} \right| \end{aligned}$$

Da $x_n \rightarrow x_0 \neq 0$ für $n \rightarrow \infty$, ist es für die Stetigkeit erforderlich, dass

$$\left| \frac{\sin(x_n \cdot y_n)}{x_n \cdot y_n} - 2 \cdot \alpha \cdot \frac{x_0}{x_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Für festes $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = 0$, da $y_n \rightarrow 0$.

Mit $z_n = x_n \cdot y_n$ und $\frac{\sin(z_n)}{z_n} \rightarrow 1$ für $z_n \rightarrow 0$ gilt damit

$$0 \leq \left| \frac{\sin(x \cdot y_n)}{x y_n} + 2 \cdot \alpha \cdot \frac{x_0}{x_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left| 1 - 2 \cdot \alpha \cdot \frac{x_0}{x_0} \right|$$

Dieser Betrag wird nur Null wenn $1 + 2\alpha = 0 \iff \alpha = -\frac{1}{2}$ gilt.

Somit ist f_α nur für $\alpha = -\frac{1}{2}$ stetig für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Lösung ohne Folgen

- In einem beliebigen Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $y_0 \neq 0$ ist die Funktion f_α stetig als Komposition stetiger Funktionen für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.
- In Punkten $(x_0, 0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$: Berechne den Grenzwert

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} |f(x,y) - f(x_0,0)| &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} |f(x,y) + 2 \cdot \alpha \cdot x_0| \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} \left| \frac{\sin(x \cdot y)}{y} + 2 \cdot \alpha \cdot x_0 \right| \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} \left| \frac{x \cdot \sin(x \cdot y)}{x \cdot y} + 2 \cdot \alpha \cdot x_0 \right| \end{aligned}$$

Mit der Substitution $z = x \cdot y$ gilt $z \rightarrow 0$ für $x \rightarrow x_0$ und $y \rightarrow 0$, da x_0 eine feste Zahl ist. Also gilt

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} |f(x,y) - f(x_0,0)| &\stackrel{z=x \cdot y}{=} \lim_{(x,z) \rightarrow (x_0,0)} \left| \frac{x \cdot \sin(z)}{z} + 2 \cdot \alpha \cdot x_0 \right| \\ &= |x_0 \cdot 1 + 2 \cdot \alpha \cdot x_0| = |x_0| \cdot |1 + 2 \cdot \alpha| \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist nur dann für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ Null, wenn

$$1 + 2 \cdot \alpha = 0 \iff \alpha = -\frac{1}{2}$$

gilt. Also ist nur $f_{-\frac{1}{2}}$ stetig überall auf $\mathbb{R}^2$.

b) Gegeben seien die Funktion

$$h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x, y, z) := \begin{cases} x \cdot y \cdot z, & \text{falls } (x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und die Menge

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \cdot y \cdot z = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass h in jedem Punkt aus M stetig ist.

Hinweis: Das Symbol $\mathbb{Q}$ bezeichnet die Menge der rationalen Zahlen.

Lösung:

Für alle beliebigen Folgen mit $(x_n, y_n, z_n) \rightarrow (x_0, y_0, z_0)$ für $n \rightarrow \infty$ und $(x_0, y_0, z_0) \in M$ gilt

$$|h(x_n, y_n, z_n) - h(x_0, y_0, z_0)| = |h(x_n, y_n, z_n) - 0| \leq |x_n y_n z_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |x y z| = 0.$$

Hier wurde benutzt, dass $h(x_0, y_0, z_0) = 0$ für alle $(x_0, y_0, z_0) \in M$ (entweder direkt nach der Definition, falls $(x_0, y_0, z_0) \notin \mathbb{Q}^3$, oder nach der Beschreibung der Menge M). Damit ist h stetig in allen Punkten aus M .

c) Gegeben sei die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) := \begin{cases} \frac{4x^4 - x^2 y^2}{x^3 + y^6}, & x \neq -y^2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Funktion im Punkt $(0, 0)$ unstetig ist.

Lösung:

Finde zwei Folgen $(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0)$ und $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)$ dann ist $f(x, y)$ unstetig im Punkt $(0, 0)$.

- $(x_n, y_n) = (0, \frac{1}{n}) \rightarrow (0, 0)$ für $n \rightarrow \infty$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4x_n^4 - x_n^2 y_n^2}{x_n^3 + y_n^6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 0^4 - 0^2 \left(\frac{1}{n}\right)^2}{0^3 + \left(\frac{1}{n}\right)^6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{\frac{1}{n^6}} = 0$$

- $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = (\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}) \rightarrow (0, 0)$ für $n \rightarrow \infty$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4x_n^4 - x_n^2 y_n^2}{x_n^3 + y_n^6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \frac{1}{n^8} - \frac{1}{n^4} \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^6} + \frac{1}{n^6}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 1}{2} = \infty$$

Damit ist $f(x, y)$ unstetig im Punkt $(0, 0)$.

d) Es sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 \cdot y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Untersuchen Sie die Funktion f auf Stetigkeit.

Lösung:

Für $(x, y) \neq (0, 0)$ ist f stetig als Komposition stetiger Funktionen. Stetigkeit im Nullpunkt muss extra untersucht werden.

Lösung mit Polarkoordinaten:

Mit der Substitution $x = r \cos(\varphi)$ und $y = r \sin(\varphi)$, $r \geq 0$ und φ beliebig, ergibt sich

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0, \varphi \text{ bel.}} \frac{r^2 \cos^2(\varphi) \cdot r \sin(\varphi)}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0, \varphi \text{ bel.}} r \cos^2(\varphi) \sin(\varphi) = 0 = f(0, 0)$$

da $-r \leq r \cos^2(\varphi) \sin(\varphi) \leq r$ und damit die Stetigkeit von f in $(0, 0)$.

Lösung durch Abschätzen:

Für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ gilt die Abschätzung

$$0 \leq |f(x, y) - f(0, 0)| = \left| \frac{x^2 \cdot y}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{x^2 \cdot y}{x^2 \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)} \right| = \left| \frac{y}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \right| \leq \left| \frac{y}{1} \right| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

Damit ist die Funktion auch im Nullpunkt stetig.



FktMehrDim/Stetigkeit/Ag_Stetigkeit_altKlausur_bau_2012_H_A2b.tex

Aufgabe 55.280 (Klausur BauIng August 2012)

In welchen Punkten ist die Funktion $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 \cdot y}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

stetig?

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

Lösung:

In allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $(x, y) \neq (0, 0)$ ist die Funktion h stetig als Komposition stetiger Funktionen auf einer offenen Umgebung von (x, y) . In $(0, 0)$ ist h nicht stetig, denn es ist $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0)$ und

$$h\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{n}{4} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty,$$

also existiert der Grenzwert von h für $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ nicht.



Folgen/Definition/Ag_Folgen_DivergenzNachDef.tex

Aufgabe 56.281 (Divergente Folgen)

jgl

Zeigen Sie durch Widerspruch zu der Definition der Konvergenz, dass die Folgen divergent sind:

a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = 7 - (-1)^n$

Lösung:

Angenommen, die Folge ist konvergent. Dann existiert ein $a \in \mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon \text{ für alle } n > n_0(\varepsilon).$$

Sei jetzt $\varepsilon > 0$, beliebig mit dem entsprechenden $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$. Weiter sei N : die kleinste ungerade Zahl mit $N > n_0(\varepsilon)$

Dann ist

$$a_N = 7 - (-1)^N = 7 - (-1) = 8.$$

Daraus folgt aus der Definition der Konvergenz, dass

$$|a_N - a| < \varepsilon \iff |8 - a| < \varepsilon.$$

Wegen N : ungerade, ist $N + 1$ gerade, und gleichzeitig auch $N + 1 > n_0(\varepsilon)$. Dann ist

$$a_{N+1} = 7 - (-1)^{N+1} = 7 - 1 = 6.$$

Daraus folgt aus der Definition der Konvergenz, dass

$$|a_{N+1} - a| < \varepsilon \iff |6 - a| < \varepsilon.$$

Es gilt also gleichzeitig für beliebige $\varepsilon > 0$, dass

$$|8 - a| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |6 - a| < \varepsilon.$$

Insbesondere folgt mit $\varepsilon = \frac{1}{2}$, dass

$$\begin{aligned} &|8 - a| < \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad |6 - a| < \frac{1}{2} \\ \iff &a \in (8 - \frac{1}{2}, 8 + \frac{1}{2}) \quad \text{und} \quad (6 - \frac{1}{2}, 6 + \frac{1}{2}) \\ \iff &a \in (8 - \frac{1}{2}, 8 + \frac{1}{2}) \cap (6 - \frac{1}{2}, 6 + \frac{1}{2}) \\ \iff &a \in \emptyset \\ \iff &\text{falsch} \end{aligned}$$

D.h., es existiert kein geeignetes $a \in \mathbb{R}$, sodass die Definition der Konvergenz erfüllt ist. Die Folge ist dementsprechend divergent.

b) $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $b_n = 2^n - 3^n$

Lösung:

Angenommen, die Folge ist konvergent. Dann existiert ein $b \in \mathbb{R}$ so dass

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) : |b_n - b| < \varepsilon \text{ für alle } n > n_0(\varepsilon).$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig mit dem entsprechenden $n_0(\varepsilon)$ und N eine natürliche Zahl mit $N > n_0(\varepsilon)$.
Dann gilt nach der Definition der Konvergenz, dass

$$|b_N - b| = |2^N - 3^N - b| < \varepsilon \iff -\varepsilon < 2^N - 3^N - b < \varepsilon.$$

Da $N > n_0(\varepsilon)$ ist auch $N + 1 > n_0(\varepsilon)$. Damit gilt auch

$$|b_{N+1} - b| = |2^{N+1} - 3^{N+1} - b| < \varepsilon \iff -\varepsilon < 2^{N+1} - 3^{N+1} - b < \varepsilon.$$

Insbesondere folgt daraus, dass

$$b > 2^N - 3^N - \varepsilon \quad \text{und} \quad b < 2^{N+1} - 3^{N+1} + \varepsilon \iff 2^N - 3^N - \varepsilon < b < 2^{N+1} - 3^{N+1} + \varepsilon.$$

Aus der letzten Ungleichung kann jetzt ein Widerspruch mit der Annahme, dass $\varepsilon > 0$: beliebig (insbesondere: beliebig klein) hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} 2^N - 3^N - \varepsilon &< b < 2^{N+1} - 3^{N+1} + \varepsilon \\ \implies 2^N - 3^N - \varepsilon &< 2^{N+1} - 3^{N+1} + \varepsilon \\ \iff 2^N - 3^N - 2^{N+1} + 3^{N+1} &< 2\varepsilon \\ \iff 2^N - 3^N - 2 \cdot 2^N + 3 \cdot 3^N &< 2\varepsilon \\ \iff 2 \cdot 3^N - 2^N &< 2\varepsilon \\ \implies \varepsilon &> 3^N - \frac{1}{2} \cdot 2^N \stackrel{3^N > 2^N}{>} 2^N - \frac{1}{2} 2^N = \frac{1}{2} 2^N \stackrel{N \geq 1}{>} \frac{1}{2} \cdot 2 = 1. \end{aligned}$$

D.h., es würde gelten dass $\varepsilon > 1$ ist. Das ist jedoch Widerspruch mit der in der Definition geforderten Eigenschaft $\varepsilon > 0$, beliebig. Damit kann die Folge nicht konvergent sein.

c) $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n = n + 1 + (-1)^n \cdot n$

Lösung:

Angenommen, die Folge ist konvergent. Dann existiert ein $c \in \mathbb{R}$ so dass

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) : |c_n - c| < \varepsilon \text{ für alle } n > n_0(\varepsilon)$$

Sei $N \in \mathbb{N}$: die kleinste gerade Zahl mit $N > n_0(\varepsilon)$. Dann gilt

$$|N + 1 + (-1)^N \cdot N| = N + 1 + N = 2N + 1 < \varepsilon \implies \varepsilon > 1 + 2N \stackrel{N \geq 1}{>} 1 + 2 = 3$$

was ein Widerspruch mit der Annahme $\varepsilon > 0$, beliebig, ist.



Folgen/Definition/Ag_Folgen_KonvergenzEpsilonNKKriterium.tex

Aufgabe 56.282 $((\varepsilon, N_\varepsilon)$ -Kriterium)

[jl](#), [ahs](#)

Beweisen Sie, dass $\frac{1}{3}$ der Grenzwert der Folge $\left(\frac{n^2-1}{3n^2+1}\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist. Verwenden Sie dazu die Definition der Konvergenz.

Lösung: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ mit $N_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$ und damit $\frac{1}{N_\varepsilon} \leq \varepsilon$. Für alle $n \geq N_\varepsilon$ gilt dafür

$$\left| \frac{n^2-1}{3n^2+1} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{3n^2-3-3n^2-1}{(3n^2+1) \cdot 3} \right| = \frac{4}{(3n^2+1) \cdot 3} < \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_\varepsilon} \leq \varepsilon.$$

Deshalb konvergiert die Folgen für $n \rightarrow \infty$ gegen $\frac{1}{3}$.



Folgen/Definition/Ag_Folgen_KonvergenzVerstaendnis.tex

Aufgabe 56.283 $((\varepsilon, N_\varepsilon)$ -Kriterium)

Entscheiden Sie, ob die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unter folgenden Kriterien konvergiert: Es gibt zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N_\varepsilon$ gilt:

a) $|a_n| < 2 \cdot \varepsilon^2$

ja

Lösung:

Für jedes $\delta \in \mathbb{R}$ mit $\delta > 0$ definiere man $\varepsilon(\delta) := \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \delta}$ und $\tilde{N}_\delta := N_{\varepsilon(\delta)}$ (man beachte $\varepsilon(\delta) \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon(\delta) > 0$). Dann folgt für alle $\delta \in \mathbb{R}$ mit $\delta > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq \tilde{N}_\delta (= N_{\varepsilon(\delta)})$

$$|a_n - 0| = |a_n| < 2 \cdot (\varepsilon(\delta))^2 = 2 \cdot \left(\sqrt{\frac{\delta}{2}}\right)^2 = 2 \cdot \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Nach der Definition der Konvergenz muss $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ also gegen 0 konvergieren.

b) $|a_n + a_{n+1}| < \varepsilon$

nein

Lösung:

$((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist divergent und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|a_n + a_{n+1}| = \left|(-1)^n + (-1)^{n+1}\right| = |(-1)^n \cdot (1 + (-1))| = |(-1)^n \cdot 0| = 0 < \varepsilon.$$

c) $|a_n \cdot a_{n+1}| < \varepsilon$

nein

Lösung:

$(1 + (-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist divergent und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|a_n \cdot a_{n+1}| = \left|(1 + (-1)^n) \cdot (1 + (-1)^{n+1})\right| = |2 \cdot 0| = 0 < \varepsilon.$$

d) $|a_n - a_{n+1}| < \varepsilon$

nein

Lösung:

$(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k})_{n \in \mathbb{N}}$ ist divergent und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|a_n - a_{n+1}| = \left|\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\right| = \left|\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \left(\frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)\right| = \left|-\frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N_\varepsilon := \max(\{1\} \cup \{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq \frac{1}{\varepsilon}\})$ folgt damit $|a_n - a_{n+1}| < \varepsilon$.

e) $|a_n \cdot a_m| < \varepsilon$ für alle $m \in \mathbb{N}$

ja

Lösung:

Insbesondere gilt $|a_n^2| < \varepsilon$. Also ist $(a_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Dann ist auch $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge und somit konvergent.

Beweisen Sie Ihre Vermutungen (Beweis oder Gegenbeispiel). Es gilt: $(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k})_{n \in \mathbb{N}}$ ist unbeschränkt.



Folgen/FktnFolgen/Ag_Funktionenfolgen_SinusVonNF.tex

Aufgabe 57.284 (Punktweise und gleichmäßige Konvergenz)

Untersuchen Sie die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ und $x \mapsto f_n(x) := \sin\left(\frac{1}{nx}\right)$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz!

Konvergenz gegen die Nullfunktion, aber nicht gleichmäßig

Lösung:

Aufgrund der Stetigkeit der Sinusfunktion gilt für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{nx}\right) = \sin\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nx}\right) = \sin(0) = 0.$$

Die Grenzfunktion ist demnach $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$. Die Konvergenz ist aber nicht gleichmäßig: Es gibt einen Abstand, beispielsweise $\varepsilon := \frac{1}{2}$ und Funktionsargumente, etwa $x_n := \frac{2}{n\pi}$, so dass, egal wie groß n gewählt wird,

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \left| \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{n \cdot 2}\right) - 0 \right| = 1 \geq \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Aufgabenblatt 58

Folgen/Häufung



Folgen/Häufung/Ag_Folgen_HPMitTricks.tex

Aufgabe 58.285 (Wechselnde Vorzeichen)

dh

Bestimmen Sie die Häufungspunkte und das Konvergenzverhalten der Folge

$$a_n = (-1)^n \cdot n^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \cdot (-1)^n\right)^n \cdot \left(\sqrt{n^2 + 1} + (-1)^n \cdot n\right)$$

indem Sie geeignete Teilfolgen untersuchen.

 $\{+\infty; -\infty\}$

Lösung:

Wir untersuchen die Teilfolgen für $n \equiv 0 \pmod{2}$ (die geraden n , bei denen $(-1)^n = 1$ ist) sowie für $n \equiv 1 \pmod{n}$ (die ungeraden n , bei denen $(-1)^n = -1$ ist).

Teilfolge $n \equiv 0 \pmod{2}$:

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n \cdot n^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}(-1)^n\right)^n \cdot \left(\sqrt{n^2 + 1} + (-1)^n \cdot n\right) \\ &= \underbrace{n^2}_{\rightarrow \infty} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\rightarrow e} \cdot \underbrace{\left(\sqrt{n^2 + 1} + n\right)}_{\rightarrow \infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty. \end{aligned}$$

Damit ist ∞ ein Häufungspunkt der Gesamtfolge.

Teilfolge $n \equiv 1 \pmod{2}$:

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n \cdot n^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}(-1)^n\right)^n \cdot \left(\sqrt{n^2 + 1} + (-1)^n \cdot n\right) \\ &= -n^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(\sqrt{n^2 + 1} - n\right) \\ &= -n^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(\sqrt{n^2 + 1} - n\right) \cdot \frac{\sqrt{n^2 + 1} + n}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \\ &\stackrel{\text{3BF}}{=} -n^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{n^2 + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \\ &= (-1) \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}_{\rightarrow \frac{1}{e}} \cdot \underbrace{\frac{n^2}{\sqrt{n^2 + 1} + n}}_{\rightarrow \infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty. \end{aligned}$$

Damit ist $-\infty$ ein Häufungspunkt der Gesamtfolge.

Insgesamt erhalten wir $\mathbb{H} = \{-\infty, \infty\}$ und (a_n) an sich ist unbestimmt divergent.



Folgen/Häufung/Ag_Folgen_HPVorzeichenSinus.tex

Aufgabe 58.286 (Vorzeichen kombinieren)

dh

Zerlegen Sie diese Folge in sechs Teilfolgen passend zu den wechselnden Vorzeichen in den Termen und bestimmen jeweils Sie die Grenzwerte der Teilfolgen:

$$a_n := \left(2 - (-1)^n\right)^n \cdot \sin\left(\frac{2}{3} \cdot \pi \cdot n\right) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Tipp: $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin(120^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sin(240^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\mathbb{H} = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist weder nach oben noch nach unten beschränkt

Lösung:

Die sechs Teilfolgen ergeben sich zu

Teilfolge	Indexterm	$(-1)^n$	$\sin(\frac{2}{3}\pi)$	Wert von a_n	strebt gegen
0 mod 6	$n = 6k + 0$	+1	0	0	0
1 mod 6	$n = 6k + 1$	-1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$3^n \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$	∞
2 mod 6	$n = 6k + 2$	+1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
3 mod 6	$n = 6k + 3$	-1	0	0	0
4 mod 6	$n = 6k + 4$	+1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
5 mod 6	$n = 6k + 5$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$3^n \cdot (-\frac{1}{2}\sqrt{3})$	$-\infty$

Folglich besitzt die Folge (a_n) die Häufungspunkte $\mathbb{H} = \{-\infty, -\frac{1}{2}\sqrt{3}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{3}, \infty\}$.



Folgen/Haeufung/Ag_Folgen_LiminfLimsupBeispieleHeuser.tex

Aufgabe 58.287 (einfache Häufungswerte)

Heuser, Seite 182

Bestimmen Sie alle Häufungswerte der gegebenen Folgen. Gibt es jeweils einen Limes Inferior und/oder einen Limes Superior?

a) $a_n := \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{für ungerades } n \in \mathbb{N} \\ 1, & \text{für gerades } n \in \mathbb{N} \end{cases}$ 0 und 1

Lösung:

Es gilt $\mathbb{N} = \{2k \in \mathbb{N} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{2k-1 \in \mathbb{N} : k \in \mathbb{N}\}$. Seien $f_k := a_{2k}$ und $g_k := a_{2k-1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann sind $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Teilfolgen von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und es gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} \stackrel{2k \text{ gerade}}{=} 0$.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 1 = 1 \text{ und } \lim_{k \rightarrow \infty} g_k = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k-1} \stackrel{2k-1 \text{ ungerade}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k-1} = 0.$$

Damit ist $\{0; 1\}$ die Menge aller Häufungspunkte von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und es gilt $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ sowie $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

b) $b_n := \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, & \text{für ungerades } n \in \mathbb{N} \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, & \text{für gerades } n \in \mathbb{N} \end{cases}$ e

Lösung:

Es gilt $\mathbb{N} = \{2k \in \mathbb{N} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{2k-1 \in \mathbb{N} : k \in \mathbb{N}\}$. Seien $p_k := b_{2k}$ und $q_k := b_{2k-1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann sind $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Teilfolgen von $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} p_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} b_{2k} \stackrel{2k \text{ gerade}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2k}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{2k} \\ &\stackrel{\ell=2k}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2k}\right) \cdot \lim_{\ell \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\ell}\right)^\ell = 1 \cdot e = e \end{aligned}$$

und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} q_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_{2k-1} \stackrel{2k-1 \text{ ungerade}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2k-1}\right)^{2k-1} \stackrel{\ell=2k-1}{=} \lim_{\ell \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\ell}\right)^\ell = e.$$

Damit ist $\{e\}$ die Menge aller Häufungspunkte von $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und es gilt $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = e$ sowie $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = e$.

c) $c_n := (-1)^n \cdot \sqrt[n]{n} + \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$

-1 und 1

Lösung:

Es gilt $\mathbb{N} = \{2k \in \mathbb{N} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{2k-1 \in \mathbb{N} : k \in \mathbb{N}\}$. Seien $s_k := c_{2k}$ und $t_k := c_{2k-1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann sind $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Teilfolgen von $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} s_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} c_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left((-1)^{2k} \cdot \sqrt[2k]{2k} + \frac{1}{\sqrt[2k]{(2k)!}} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sqrt[2k]{2k} + \frac{1}{\sqrt[2k]{(2k)!}} \right) \\ &\stackrel{\ell=2k}{=} \lim_{\ell \rightarrow \infty} \left(\sqrt[\ell]{\ell} + \frac{1}{\sqrt[\ell]{\ell!}} \right) = 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} t_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} c_{2k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left((-1)^{2k-1} \cdot \sqrt[2k-1]{2k-1} + \frac{1}{\sqrt[2k-1]{(2k-1)!}} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(-\sqrt[2k-1]{2k-1} + \frac{1}{\sqrt[2k-1]{(2k-1)!}} \right) \stackrel{\ell=2k-1}{=} \lim_{\ell \rightarrow \infty} \left(-\sqrt[\ell]{\ell} + \frac{1}{\sqrt[\ell]{\ell!}} \right) = -1 + 0 = -1. \end{aligned}$$

Damit ist $\{-1; 1\}$ die Menge aller Häufungspunkte von $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und es gilt $\liminf_{n \rightarrow \infty} c_n = -1$ sowie $\limsup_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$.

d) $d_n := \begin{cases} 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n, & \text{falls } n = 3k \\ 2 + \frac{n+1}{n}, & \text{falls } n = 3k+1 \\ 2, & \text{falls } n = 3k+2 \end{cases}$ 1, 2 und 3

Lösung:

Es gilt $\mathbb{N}_0 = \{3k \in \mathbb{N}_0 : k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{3k+1 \in \mathbb{N}_0 : k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{3k+2 \in \mathbb{N}_0 : k \in \mathbb{N}_0\}$.

Seien $x_k := d_{3k}$, $y_k := d_{3k+1}$ und $z_k := d_{3k+2}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Dann sind $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, $(y_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ und $(z_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ Teilfolgen von $(d_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} x_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} d_{3k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{3k} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^k \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{1}{8}\right)^k \right) = 1 + 0 = 1, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} y_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} d_{3k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3k+1+1}{3k+1} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(2 + 1 + \frac{1}{3k+1} \right) = 2 + 1 + 0 = 3 \end{aligned}$$

und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \lim_{k \rightarrow \infty} d_{3k+2} = \lim_{k \rightarrow \infty} 2 = 2.$$

Damit ist $\{1; 2; 3\}$ die Menge aller Häufungspunkte von $(d_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und es gilt $\liminf_{n \rightarrow \infty} d_n = 1$ sowie $\limsup_{n \rightarrow \infty} d_n = 3$.



Folgen/Haeufung/Ag_Folgen_vieleHaeufungswerte.tex

Aufgabe 58.288 (Häufungswerte berechnen)

spf

Geben Sie für die folgenden Folgen sämtliche Häufungswerte an!

a) $x_n := (-1)^n \cdot \frac{12n}{6n+7}$

-2 und 2

Lösung:

Es gilt $\mathbb{N} = \{2k \in \mathbb{N} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{2k-1 \in \mathbb{N} : k \in \mathbb{N}\}$. Seien $y_k := x_{2k}$ und $z_k := x_{2k-1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann sind $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Teilfolgen von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und es gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^{2k} \cdot \frac{12 \cdot 2k}{6 \cdot 2k + 7} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{24k}{12k + 7} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{24}{12 + \frac{7}{k}} = \frac{24}{12 + 0} = \frac{24}{12} = 2$$

und

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} z_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^{2k-1} \cdot \frac{12 \cdot (2k-1)}{6 \cdot (2k-1) + 7} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} -\frac{24k-12}{12k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} -\frac{24 - \frac{12}{k}}{12 - \frac{1}{k}} = -\frac{24-0}{12-0} = -\frac{24}{12} = -2.\end{aligned}$$

Damit ist $\{-2; 2\}$ die Menge aller Häufungspunkte von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

b) $y_n := \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$

0

Lösung:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $y_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = (-1)^n \cdot \frac{n+1-n}{n \cdot (n+1)} = \frac{(-1)^n}{n^2+n}$.

Damit folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2+n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2+n} = 0$, wehalb auch $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ gelten muss.

Also ist $\{0\}$ die Menge aller Häufungspunkte von $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

c) $a_n := \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) + 1$

0, 1 und 2

Lösung:

Es gilt $\mathbb{N} = \{2k \in \mathbb{N} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{4k-1 \in \mathbb{N} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{4k-3 \in \mathbb{N} : k \in \mathbb{N}\}$.

Seien $b_k := a_{2k}$, $c_k := a_{4k-1}$ und $d_k := a_{4k-3}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann sind $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Teilfolgen von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} b_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 2k\right) + 1\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\sin(k\pi) + 1) = \lim_{k \rightarrow \infty} (0 + 1) = 0 + 1 = 1, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} c_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} a_{4k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot (4k-1)\right) + 1\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sin\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}\right) + 1\right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 1\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} (-1 + 1) = -1 + 1 = 0\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} d_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} a_{4k+3} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot (4k-3)\right) + 1\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sin\left(2k\pi - \frac{3\pi}{2}\right) + 1\right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + 1\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} (1 + 1) = 1 + 1 = 2.\end{aligned}$$

Damit ist $\{0; 1; 2\}$ die Menge aller Häufungspunkte von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

d) $b_n := \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot n\right)$

$-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1$

Lösung:

Es gilt $\mathbb{N} = \{6k-3 \in \mathbb{N} : k \in \mathbb{N}\} \cup \bigcup_{j \in \{0;1;2;4;5;6;7;8;10;11\}} \{12k-j \in \mathbb{N} : k \in \mathbb{N}\}$.

Seien $p_k := b_{6k-3}$, $q_k := b_{12k}$, $r_k := b_{12k-1}$, $s_k := b_{12k-2}$, $t_k := b_{12k-4}$, $u_k := b_{12k-5}$, $v_k := b_{12k-6}$, $w_k := b_{12k-7}$, $x_k := b_{12k-8}$, $y_k := b_{12k-10}$ und $z_k := b_{12k-11}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann sind $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und

$(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Teilfolgen von $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} p_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} b_{6k-3} = \lim_{k \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot (6k-3)\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \cos\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} 0 = 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} q_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} b_{12k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 12k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \cos(2k\pi) = \lim_{k \rightarrow \infty} 1 = 1, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} r_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} b_{12k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot (12k-1)\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \cos\left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} s_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} b_{12k-2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot (12k-2)\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \cos\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} t_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} b_{12k-4} = \lim_{k \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot (12k-4)\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \cos\left(-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} u_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} b_{12k-5} = \lim_{k \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot (12k-5)\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \cos\left(-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} v_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} b_{12k-6} = \lim_{k \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot (12k-6)\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \cos(-\pi + 2k\pi) = \lim_{k \rightarrow \infty} -1 = -1, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} w_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} b_{12k-7} = \lim_{k \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot (12k-7)\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \cos\left(-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} b_{12k-8} = \lim_{k \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot (12k-8)\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \cos\left(-\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} y_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} b_{12k-10} = \lim_{k \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot (12k-10)\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \cos\left(-\frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_{12k-11} = \lim_{k \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot (12k-11)\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \cos\left(-\frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Damit ist $\left\{-1; -\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right\}$ die Menge aller Häufungspunkte von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

e) $u_1 := 2, u_{n+1} := \frac{1}{u_n}$ $\frac{1}{2}$ und 2

Lösung:

Es gilt $\mathbb{N} = \{2k \in \mathbb{N} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{2k-1 \in \mathbb{N} : k \in \mathbb{N}\}$. Seien $a_k := u_{2k}$ und $b_k := u_{2k-1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann sind $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Teilfolgen von $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Behauptung: Es gilt $a_k = \frac{1}{2}$ und $b_k = 2$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang: Es gilt $b_1 = u_{2 \cdot 1 - 1} = u_1 = 2$ und $a_1 = u_{2 \cdot 1} = u_2 = \frac{1}{u_1} = \frac{1}{2}$.

Induktionsvoraussetzung: Es gibt ein $\ell \in \mathbb{N}$ mit $a_\ell = \frac{1}{2}$ und $b_\ell = 2$.

Induktionsschluss: Dann gilt $a_{\ell+1} = u_{2 \cdot (\ell+1)} = u_{2\ell+2} = \frac{1}{u_{2\ell+1}} = \frac{1}{\frac{1}{u_{2\ell}}} = u_{2\ell} = a_\ell = \frac{1}{2}$ und $b_{\ell+1} = u_{2 \cdot (\ell+1) - 1} = u_{2\ell+1} = \frac{1}{u_{2\ell}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

Insbesondere ist also $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \lim_{k \rightarrow \infty} 2 = 2$.

Damit ist $\left\{\frac{1}{2}; 2\right\}$ die Menge aller Häufungspunkte von $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

f) $v_1 := 2, v_{n+1} := \frac{1}{v_n^2}$ 0

Lösung:

Es gilt $\mathbb{N} = \{2k \in \mathbb{N} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{2k-1 \in \mathbb{N} : k \in \mathbb{N}\}$. Seien $c_k := v_{2k}$ und $d_k := v_{2k-1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann sind $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Teilfolgen von $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Behauptung: Es gilt $c_k = \frac{1}{2^{2k-1}}$ und $d_k = 2^{2^{k-2}}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang: Es gilt $d_1 = v_{2 \cdot 1 - 1} = v_1 = 2 = 2^1 = 2^{2^0} = 2^{2^{1-2}}$ und $c_1 = v_{2 \cdot 1} = v_2 = \frac{1}{v_1^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^{2^1}} = \frac{1}{2^{2^{1-1}}}$.

Induktionsvoraussetzung: Es gibt ein $\ell \in \mathbb{N}$ mit $c_\ell = \frac{1}{2^{2^\ell-1}}$ und $d_\ell = 2^{2^{\ell-2}}$.

Induktionsschluss: Dann gilt $c_{\ell+1} = v_{2 \cdot (\ell+1)} = v_{2\ell+2} = \frac{1}{v_{2\ell+1}^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{v_{2\ell}^2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{v_{2\ell}^4}} = v_{2\ell}^4 = c_\ell^4 =$

$$\left(\frac{1}{2^{2^{2\ell-1}}}\right)^4 = \frac{1^4}{2^{4 \cdot 2^{2\ell-1}}} = \frac{1}{2^{2^{2+2\ell-1}}} = \frac{1}{2^{2^{2 \cdot (\ell+1)-1}}} \text{ und } d_{\ell+1} = v_{2 \cdot (\ell+1)-1} = v_{2\ell+1} = \frac{1}{v_{2\ell}^2} = \frac{1}{c_\ell^2} =$$

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{2^{2^{2\ell-1}}}\right)^2} = \frac{1}{2^{2 \cdot 2^{2\ell-1}}} = 2^{2^{1+2\ell-1}} = 2^{2^{2\ell}} = 2^{2^{2 \cdot (\ell+1)-2}}.$$

Insbesondere ist also $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{2^{2k-1}}} = 0$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} d_k = \lim_{k \rightarrow \infty} 2^{2^{2k-2}} = \infty$.

Damit ist $\{0\}$ die Menge aller Häufungspunkte von $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.



Folgen/Komplex/Ag_Folgen_Sandwichkriterium3.tex

Aufgabe 59.289 (Sandwich-Kriterium (Einschließungssatz))

jgl

Begründen Sie, warum die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit den nachstehenden Folgengliedern konvergieren, und bestimmen Sie den Grenzwert A der Folgen. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte

a) $a_n := \frac{\sin(n) + 5n}{n + 2}$

$$5 - \frac{11}{n+2} = \frac{-1+5n}{n+2} \leq a_n \leq \frac{1+5n}{n+2} = 5 - \frac{9}{n+2}, \quad A = 5$$

b) $a_n := \sqrt[n]{3^n + 1}$

$$3 = \sqrt[n]{3^n} \leq a_n \leq \sqrt[n]{3^n + 3^n} = 3 \sqrt[n]{2}, \quad A = 3$$

c) $a_n := \frac{n \cdot i + \sqrt{n^3}}{4n^2 + 2}$

$$0 \leq |a_n| \leq \frac{n \cdot |i| + \sqrt{n^3}}{4n^2 + 2} \leq \frac{n + n^{\frac{3}{2}}}{4n^2} \leq \frac{2}{4 \cdot \sqrt{n}}, \quad A = 0$$

Aufgabenblatt 60

Folgen/Konvergenz



Folgen/Konvergenz/Ag_Folgen_Divergenz2.tex

Aufgabe 60.290 (Divergente Folgen)

jgl

Begründen Sie, weshalb die nachstehenden Folgen divergent sind:

- a) $(7 - (-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge beschränkt, nicht konstant und periodisch, also divergent, aber nicht bestimmt divergent.
- b) $(2^n - 3^n)_{n \in \mathbb{N}}$ Es gilt $2^n - 3^n \leq -2^n \cdot \frac{1}{2}$, sodass die Folge bestimmt divergent und deshalb auch divergent ist.
- c) $(n + 1 + (-1)^n \cdot n)_{n \in \mathbb{N}}$ Teilfolge $(4k + 1)_{k \in \mathbb{N}}$ unbeschränkt (für $n = 2k$) und $(1)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergent (für $n = 2k + 1$), sodass die Folge divergent, aber nicht bestimmt divergent ist.

Welche der Folgen sind bestimmt divergent, welche nicht?



Folgen/Konvergenz/Ag_Folgen_Divergenz3.tex

Aufgabe 60.291 (Divergente Folgen)

jgl

Begründen Sie, weshalb die nachstehenden Folgen divergent sind:

- a) $((-2)^n)$ Folge alternierend und Teilfolge (2^{2k}) unbeschränkt, also nicht bestimmt divergent.
- b) $(\sin(\frac{n\pi}{6}))$ Folge beschränkt, nicht konstant und periodisch, als divergent, aber nicht bestimmt divergent.
- c) $(n^3 + (-1)^n \cdot n^2)$ Es gilt $n^3 + (-1)^n \cdot n^2 \geq n$, sodass die Folge bestimmt divergent und deshalb auch divergent ist.

Welche der Folgen sind bestimmt divergent, welche nicht?



Folgen/Konvergenz/Ag_Folgen_MengenSchranksFolgen_vkmw.tex

Aufgabe 60.292 (Obere Schranken)

dh

Es sei A_j für $j \in \mathbb{N}$ eine Folge von Teilmengen von $\mathbb{R}$, so dass jedes A_j beschränkt ist. Zeigen Sie, dass der Schnitt $\bigcap A_j$ ebenfalls beschränkt ist, aber dass die analoge Aussage für die Vereinigung im Allgemeinen falsch ist.

Lösung:

Hier ist die Schwierigkeit, dass in der Formulierung aus der Aufgabe erlaubt ist, dass jede der Mengen eine andere Schranke besitzt. In Formeln also $|x| \leq C_j$ für $x \in A_j$ aber die $C_j \in \mathbb{R}$ sind ggf. unendlich viele verschiedene Zahlen. Wir müssen die Definition vom Schnitt und der Vereinigung einsetzen, die auch für unendlich viele Mengen verwendbar ist: Ein $x \in \bigcap A_j$ ist in allen A_j enthalten. Dann aber ist $|x| \leq C_j$ für alle j , insbesondere für C_1 . Damit erfüllen alle $x \in \bigcap A_j$ die Bedingung $|x| \leq C_1$, also ist $\bigcap A_j$ eine beschränkte Menge.

Für die Vereinigung ist die Aussage falsch, beispielsweise ist $A_j = \{j\}$ beschränkt jeweils mit Schranke $C_j = j$. Aber die Vereinigung aller A_j ist $\bigcup A_j = \mathbb{N}$, diese Menge ist unbeschränkt. Genauer: Jedes noch so große C ist keine Schranke, da für die Aufrundung n von C die Teilmenge A_n die Bedingung $|x| \leq C$ nicht erfüllt.

Hier gibt es Punktabzug, wenn man die Aussage nur für einen endlichen Schnitt $A_1 \cap \dots \cap A_n$ zeigt oder ein einfaches Paar $A \cap B$. Dann funktioniert auch das Gegenbeispiel nicht mehr, dafür ist wesentlich dass unendlich viele Mengen beteiligt sind. Es gibt viele alternative Lösungen für das Gegenbeispiel, z.B. kann man eine divergente Folge in die Mengen verpacken.



Folgen/Konvergenz/Ag_Folgen_Mittelwertfolge_vkmw.tex

Aufgabe 60.293 (Folggengrenzwerte)

dh

Es sei (a_n) eine konvergente Zahlenfolge. Leiten Sie her, dass auch die Mittelwertfolge $\frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n)$ konvergent ist. Wie lautet ihr Grenzwert?

Warum sollten Sie in der Klausur nicht die Formel für die Summe von Grenzwerten benutzen?

Lösung:

Das ist eine typische Aufgabe „Mit Begründung“ in der Klausur. Hier ist wichtig, dass man nur elementare Rechenoperationen einsetzt oder Sätze aus der Vorlesung. Die Verwendung vom Satz über die Summe von Grenzwerten $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$ ist hier riskant, denn bis auf den Vorfaktor $\frac{1}{2}$ zeigen wir hier genau diesen Satz. Es ist besser, nur mit der elementaren Definition (ε -Bedingung) zu arbeiten:

- Laut Aufgabenstellung ist (a_n) konvergent, beispielsweise gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$.
- Dann ist auch die Folge (a_{n+1}) konvergent gegen a (ist die gleiche Folge nur ohne a_1 , und Einzelelemente ändern den Grenzwert nicht).
- Wir benutzen wie im Beweis des Summensatzes die Dreiecksungleichung.
- Wir geben ein beliebig kleines $\varepsilon > 0$ vor, und müssen $|\frac{1}{2}(a_n + a_{n+1}) - a| < \varepsilon$ ab einem n_0 erreichen, das n_0 dürfen wir selbst aussuchen.

Wir verwenden, dass die Einzelfolgen konvergent gegen a sind: Für jede Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es einen Startindex n_0 mit der Betragsbedingung:

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |a_{n+1} - a| < \varepsilon.$$

Die gewünschte Abschätzung können wir in die obigen beiden aufteilen. Dazu trennen wir den Mittelwert auf und zerlegen $a = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a$:

$$\left| \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1}) - a \right| = \left| \left(\frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2}a \right) + \left(\frac{1}{2}a_{n+1} - \frac{1}{2}a \right) \right| \stackrel{\text{DÜ}}{\leq} \left| \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2}a \right| + \left| \frac{1}{2}a_{n+1} - \frac{1}{2}a \right| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Für das gleiche n_0 wie für die Einzelfolgen liegt also auch der Abstand der Mittelwertfolge zu a ab n_0 unter ε . Das ε ist nach wie vor beliebig, denn wir haben keine Eigenschaften dieser Zahl im Beweis verwendet. Damit ist die Mittelwertfolge $\frac{1}{2}(a_n + a_{n+1})$ ebenfalls konvergent gegen das gleiche a .



Folgen/Rekursiv/Ag_FktFolge_HermitePolynome.tex

Aufgabe 61.294 (Hermite-Polynome als Rekursion)

Die Hermite-Polynome $H_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sind unter anderem in der Physik von Bedeutung. Eine mögliche Darstellung erfolgt über die Rekursion:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}$$

mit den Startpolynomen $H_0(x) = 1$ und $H_1(x) = 2x$. Werten Sie die Rekursionsvorschrift für $n+1 \leq 3$ aus, um eine explizite Darstellung der ersten Polynome zu erhalten.

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x,$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

Lösung:

$$H_2(x) = H_{1+1}(x) = 2xH_1(x) - 2 \cdot 1H_{1-1}(x) = 2x \cdot 2x - 2 \cdot 1 = 4x^2 - 2$$

$$H_3(x) = H_{2+1}(x) = 2xH_2(x) - 2 \cdot 2H_{2-1}(x) = 2x \cdot (4x^2 - 2) - 4 \cdot 2x = 8x^3 - 4x - 8x = 8x^3 - 12x$$



Folgen/Rekursiv/Ag_FolgenRekursiv_NichtMonoton.tex

Aufgabe 61.295 (Abwechslungsreiche rekursiv dargestellte Folge)

ehh

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch $a_1 \in \mathbb{R}$ und

$$a_{n+1} := -a_n^2 + a_n + 2 = (a_n + 1) \cdot (2 - a_n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

a) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für $a_1 \in \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$ konvergiert.

Die Folgen sind konstant und damit konvergent

Lösung:

Behauptung: Mit den beiden angegebenen Startwerten $\pm\sqrt{2}$ sind die Folgen jeweils konstant.

Induktionsanfang: $a_1 = \pm\sqrt{2}$.

Induktionsvoraussetzung: $a_N = \pm\sqrt{2}$ gelte für ein $N \in \mathbb{N}$.

Induktionsschluss: Zeige: Dann gilt auch $a_{N+1} = \pm\sqrt{2}$. Anwendung der Rekursionsvorschrift liefert

$$a_{N+1} = -\left(\pm\sqrt{2}\right)^2 + a_N + 2 = a_N$$

Damit ist $a_n = \pm\sqrt{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ induktiv gezeigt.

Dies sind auch die einzigen Lösungen der quadratischen „Fixpunktgleichung“

$$a_{n+1} = a_n \iff -a_n^2 + a_n + 2 = a_n \iff 2 = a_n^2.$$

Mit einem Fixpunkt als Startwert ist die Folge konstant und damit konvergent.

b) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im Fall $a_1 = 1$.

0, 2

Lösung:

Für $a_1 = 1$ gilt mit der Rekursionsvorschrift

$$a_2 = (1 + 1)(2 - 1) = 2$$

$$a_3 = (2 + 1)(2 - 2) = 0$$

$$a_4 = (0 + 1)(2 - 0) = 2$$

Behauptung: $a_{2k} = 2$ und $a_{2k+1} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang: $a_{2 \cdot 1} = a_2 = 2$ und $a_{2 \cdot 1 + 1} = a_3 = 0$.

Induktionsvoraussetzung: $a_{2K} = 2$ und $a_{2K+1} = 0$ für ein $K \in \mathbb{N}$.

Induktionsschluss: Anwenden der Rekursionsvorschrift liefert zunächst

$$a_{2(K+1)} = a_{2K+2} = (a_{2K+1} + 1)(2 - a_{2K+1}) = (0 + 1)(2 - 0) = 2$$

Damit liefert die Rekursionsvorschrift weiter

$$a_{2(K+1)+1} = a_{2K+3} = (a_{2K+2} + 1)(2 - a_{2K+2}) = (2 + 1)(2 - 2) = 0$$

und die Behauptung ist gezeigt.

Da die Folge ab $n = 2$ vollständig in zwei jeweils konstante Teilfolgen zerlegt werden kann, sind diese Folgenwerte die einzigen beiden Häufungswerte.

Alternativ können die beiden zusätzlichen Fixpunkte 0 und 2 der mit sich selbst verketteten Rekursionsvorschrift (Polynom vierten Grades) bestimmt werden:

$$a_{n+2} = a_n \Leftrightarrow -a_n^4 + 2a_n^3 + 2a_n^2 - 4a_n = 0 \Leftrightarrow -(a_n^2 - 2) \cdot (a_n - 2) \cdot a_n = 0$$

- c) Begründen Sie, warum die Folge bestimmt divergiert, wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_N < -\sqrt{2}$ gibt.

$(a_n)_{n \geq N}$ kleiner als der kleinste mögliche Grenzwert und monoton fallend, daher divergent und unbeschränkt oder auch bestimmt divergent

Lösung:

Behauptung: $a_n < -\sqrt{2}$ für alle $n \geq N$.

Induktionsanfang: $a_N < -\sqrt{2}$ wird in dieser Teilaufgabe betrachtet.

Induktionsvoraussetzung: $a_{N+k} < -\sqrt{2}$ gelte für ein $k \in \mathbb{N}_0$.

Induktionsschluss: $a_{N+k+1} = -a_{N+k}^2 + a_{N+k} + 2 < -(-\sqrt{2})^2 - \sqrt{2} + 2 < -\sqrt{2}$

womit die Behauptung gezeigt ist.

Für $a_n \in \mathbb{R} \setminus (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ gilt weiterhin die Ungleichung

$$a_{n+1} \leq a_n \Leftrightarrow -a_n^2 + a_n + 2 \leq a_n \Leftrightarrow a_n^2 \geq 2$$

Damit gilt, dass $(a_n)_{n \geq N}$ monoton fällt.

Da $-\sqrt{2}$ der kleinere der beiden möglichen Grenzwerte (Fixpunkte) ist, muss die Folge divergieren.

Die fallende und divergente Folge kann nicht beschränkt sein und divergiert somit bestimmt gegen minus Unendlich.

- d) Sei $a_1 = -\frac{1}{2}$. Zeigen Sie: Die Folge ist weder monoton noch beschränkt durch $-\frac{1}{2}$ und $\sqrt{2}$. Sie können Folgenglieder numerisch berechnen lassen. Bonus: Lassen Sie die ersten fünfzig Folgenglieder numerisch berechnen – welche Vermutung liegt nahe?

$a_3 > \sqrt{2}$, $a_4 < a_3$, $a_{21} < -\frac{1}{2}$. Drei Häufungswerte

Lösung:

Es gilt

$$\begin{aligned}a_1 &= -\frac{1}{2} \\a_2 &= (a_1 + 1)(2 - a_1) = \frac{5}{4} > a_1 \\a_3 &= \left(\frac{5}{4} + \frac{4}{4}\right) \left(\frac{8}{4} - \frac{5}{4}\right) = \frac{27}{16} = 1.6875 > \sqrt{2} \\a_4 &= \left(\frac{27}{16} + \frac{16}{16}\right) \left(\frac{32}{16} - \frac{27}{16}\right) = \frac{43 \cdot 5}{16 \cdot 16} = \frac{215}{256} < 1 < a_3\end{aligned}$$

Die Berechnung von a_3 zeigt also, dass die Folge nicht durch den größeren Fixpunkt beschränkt ist und a_4 zeigt, dass die Folge nicht monoton ist. a_{21} sowie ein Häufungswert, s.u., sind auch kleiner als a_1 .

Hinweis: Diese Aufgabe wurde ersonnen, da ein Kursteilnehmer (vermutlich zurecht) behauptete, dass bei allen bisher von ihm bearbeiteten konvergenten rekursiven Folgen a_2 zwischen a_1 und dem passenden Fixpunkt läge und die Folge somit (gefühlte induktiv) beschränkt, monoton und damit konvergent sei.

Dieses Gegenbeispiel hat allerdings noch die Eigenschaft, dass die ersten vierzig Folgenglieder munter zwischen gut -1 und gut 2 streuen. Danach springen die Folgenglieder in engen Grenzen zwischen drei „Fixpunkten“ hin und her. Die Teilfolgen a_{3n+50} , a_{3n+51} und a_{3n+52} scheinen jeweils monoton zu sein. Die „Fixpunkte“ sind doppelte Nullstellen von $a_{n+3}(a_n) = a_n$ (Polynom achten Grades). Die üblichen Fixpunkte $\pm\sqrt{2}$ sind natürlich auch Fixpunkte von $a_{n+3}(a_n) = a_n$, nach einem Plot offensichtlich einfache Nullstellen. Die Fixpunkte von $a_{n+2}(a_n) = a_n$ sind aufgrund der anderen Periode keine Fixpunkte von $a_{n+3}(a_n) = a_n$. Nach einem Plot sind die neuen Fixpunkte Berührungspunkte, als Nullstellen geraden Grades: $2 + 3 \times 2 = 8$. Zwischen den Extrempunkten von $a_{n+3}(a_n)$ und den Berührungspunkten mit der Identität sind („sehr“ kleine) Bereiche, in denen a_{3n} passend monoton gegen den jeweiligen Fixpunkt ist.

a_1 in der Nähe von $-\sqrt{2}$ führt zunächst von diesem Fixpunkt weg. a_1 in der Nähe von $\sqrt{2}$ kann zu diesem Fixpunkt führen (abwechselnd vor und zurück), falls $a_{n+1}(a_n)$ dort eine flachere Steigung als -1 hat. Die Ableitung der Zuordnungsvorschrift ist $-2a_n + 1$, also bei dem zweiten Fixpunkt $1 - 2\sqrt{2} < -1$. Demnach sollte die Folge nur für die Fixpunkte als a_1 oder a_N (mit passenden Vorgängern) konvergieren.



Folgen/Rekursiv/Ag_FolgenRekursiv_StartwertIstEinhalb.tex

Aufgabe 61.296 (viele rekursiv dargestellte Folgen)

spf

Untersuchen Sie die Folgen mit der angegebenen Rekursionsformel auf Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz! Der Startwert der Folgen sei $\frac{1}{2}$, sofern nicht anders angegeben.

a) $c_{x+1} = 1 + \left(\frac{c_x}{2}\right)^2$

2

Lösung:

Nimmt man an, dass die Folge gegen $C := \lim_{x \rightarrow \infty} c_x = \lim_{x \rightarrow \infty} c_{x+1}$ konvergiert, so lassen sich mit Hilfe eines Grenzübergangs in der Rekursionsformel mögliche Werte für C berechnen:

$$C = 1 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 \iff 0 = \left(\frac{C}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{C}{2} \cdot 1 + 1^2 \iff 0 = \left(\frac{C}{2} - 1\right)^2 \iff C = 2.$$

Behauptung 1 (Beschränktheit): Für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{1}{2} \leq c_x < 2$.

Induktionsanfang: Es gilt $c_1 = \frac{1}{2}$. Also gilt $\frac{1}{2} \leq c_1 < 2$.

Induktionsvoraussetzung: Sei $X \in \mathbb{N}$ eine Zahl, für die $\frac{1}{2} \leq c_X < 2$ bereits gezeigt wurde.

Induktionsschluss:

Wegen $c_X \in \mathbb{R}$ ergibt sich $c_{X+1} = 1 + \left(\frac{c_X}{2}\right)^2 \geq 1 \geq \frac{1}{2}$.

Wegen $2 > c_X \geq \frac{1}{2} > 0$ gilt $0 < \frac{c_X}{2} < 1$, also auch $\left(\frac{c_X}{2}\right)^2 < 1$.

Damit folgt direkt $c_{X+1} = 1 + \left(\frac{c_X}{2}\right)^2 < 2$.

Behauptung 2 (Monotonie): $(c_x)_{x \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend.

Wegen $\left(\frac{c_x}{2} - 1\right)^2 \geq 0$ ist $\left(\frac{c_x}{2}\right)^2 - c_x + 1 \geq 0$ bzw. $c_{x+1} = 1 + \left(\frac{c_x}{2}\right)^2 \geq c_x$ für alle $x \in \mathbb{N}$.

Also ist $(c_x)_{x \in \mathbb{N}}$ monoton und beschränkt. Das liefert die Konvergenz der Folge. Als Grenzwert kommt nur 2 in Frage. Also ist $\lim_{x \rightarrow \infty} c_x = 2$.

b) $w_{k+1} = 2w_k - w_k^2$

1

Lösung:

Nimmt man an, dass die Folge gegen $W := \lim_{k \rightarrow \infty} w_k = \lim_{k \rightarrow \infty} w_{k+1}$ konvergiert, so lassen sich mit Hilfe eines Grenzübergangs in der Rekursionsformel mögliche Werte für W berechnen:

$$W = 2W - W^2 \iff W^2 - W = 0 \iff W \cdot (W - 1) = 0 \iff W = 0 \text{ oder } W = 1.$$

Behauptung 1 (Beschränktheit): Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{1}{2} \leq w_k < 1$.

Induktionsanfang: Es gilt $w_1 = \frac{1}{2}$, also gilt $\frac{1}{2} \leq w_1 < 1$.

Induktionsvoraussetzung: Sei $K \in \mathbb{N}$ eine Zahl, für die $\frac{1}{2} \leq w_K < 1$ bereits gezeigt wurde.

Induktionsschluss:

Dann gilt $w_{K+1} = 2w_K - w_K^2 = w_K \cdot (2 - w_K) \stackrel{0 < w_K < 1}{>} \stackrel{\text{nach IV}}{>} w_K \cdot (2 - 1) = w_K \cdot 1 = w_K \stackrel{\text{IV}}{\geq} \frac{1}{2}$.

Außerdem ist $(w_K - 1)^2 \stackrel{\text{IV}}{>} 0$, was $w_K^2 - 2w_K + 1 > 0$ bzw. $1 > 2w_K - w_K^2 = w_{K+1}$ nach sich zieht.

Behauptung 2 (Monotonie): $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend.

Wegen $w_k < 1$ gilt $-1 < -w_k$, also $1 < 2 - w_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Multipliziert mit $w_k \geq \frac{1}{2} > 0$ ergibt sich $w_k < 2w_k - w_k^2 = w_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Also ist $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ monoton und beschränkt. Das liefert die Konvergenz der Folge. Als Grenzwert kommen nur 0 oder 1 in Frage. Da die Folge bei $\frac{1}{2}$ startet und danach monoton wächst, scheidet 0 als Grenzwert aus und es gilt also $\lim_{k \rightarrow \infty} w_k = 1$.

c) $u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$

1

Lösung:

Nimmt man an, dass die Folge gegen $U := \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}$ konvergiert, so lassen sich mit Hilfe eines Grenzübergangs in der Rekursionsformel mögliche Werte für U berechnen:

$$U = \frac{1}{2-U} \iff 2U - U^2 = 1 \iff 0 = U^2 - 2U + 1 \iff 0 = (U - 1)^2 \iff U = 1.$$

Behauptung 1 (Beschränktheit): Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{1}{2} \leq u_n < 1$.

Induktionsanfang: Es gilt $u_1 = \frac{1}{2}$, also gilt $\frac{1}{2} \leq u_1 < 1$.

Induktionsvoraussetzung: Sie $N \in \mathbb{N}$ eine Zahl, für die $\frac{1}{2} \leq u_N < 1$ bereits gezeigt wurde.

Induktionsschluss:

Es gilt $u_{N+1} = \frac{1}{2-u_N}$.

Wegen $\frac{1}{2} \leq u_N < 1$ ist $-1 < -u_N \leq -\frac{1}{2}$ bzw. $1 < 2 - u_N \leq \frac{3}{2}$. Da alle Seiten positiv sind, kann man Kehrbrüche bilden, wenn man gleichzeitig die Ungleichheitszeichen herumdreht.

Das liefert $1 > \frac{1}{2-u_N} = u_{N+1} \geq \frac{2}{3} \geq \frac{1}{2}$.

Behauptung 2 (Monotonie): $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend.

Es gilt $(u_n - 1)^2 \geq 0$, also $u_n^2 - 2u_n + 1 \geq 0$ bzw. $1 \geq u_n \cdot (2 - u_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Da $u_n < 1$, also $2 - u_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, liefert das $u_n \leq \frac{1}{2-u_n} = u_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Also ist $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton und beschränkt. Das liefert die Konvergenz der Folge. Als Grenzwert kommt nur 1 in Frage. Also ist $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$.

d) $v_{q+1} = \frac{v_q}{v_q+2}$

0

Lösung:

Nimmt man an, dass die Folge gegen $V := \lim_{q \rightarrow \infty} v_q = \lim_{q \rightarrow \infty} v_{q+1}$ konvergiert, so lassen sich mit Hilfe eines Grenzübergangs in der Rekursionsformel mögliche Werte für V berechnen:

$$V = \frac{V}{V+2} \iff V^2 + 2V = V \iff V \cdot (V+1) = 0 \iff V = 0 \text{ oder } V = -1.$$

Behauptung 1 (Beschränktheit): Für alle $q \in \mathbb{N}$ gilt $0 < v_q \leq \frac{1}{2}$.

Induktionsanfang: Es gilt $v_1 = \frac{1}{2}$, also gilt $0 < v_1 \leq \frac{1}{2}$.

Induktionsvoraussetzung: Sei $Q \in \mathbb{N}$ eine Zahl, für die $0 < v_Q \leq \frac{1}{2}$ bereits gezeigt wurde.

Induktionsschluss:

Es gilt $v_{Q+1} = \frac{v_Q}{v_Q+2}$.

Wegen $v_Q > 0$ sind der Zähler und der Nenner positiv. Also gilt auch $v_{Q+1} > 0$.

Wegen $v_Q > 0$ ist der Nenner $v_Q + 2 > 2$.

Da der Zähler $v_Q \leq \frac{1}{2}$ ist, ergibt sich $v_{Q+1} = \frac{v_Q}{v_Q+2} \leq \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$.

Behauptung 2 (Monotonie): $(v_q)_{q \in \mathbb{N}}$ ist monoton fallend.

Wegen $v_q > 0$ gilt $2 < 2 + v_q$, also $\frac{1}{2+v_q} < \frac{1}{2}$ für alle $q \in \mathbb{N}$.

Multipliziert mit $v_q > 0$ ergibt sich $v_q > \frac{v_q}{2+v_q} = v_{q+1}$ für alle $q \in \mathbb{N}$.

Also ist $(v_q)_{q \in \mathbb{N}}$ monoton und beschränkt. Das liefert die Konvergenz der Folge. Als Grenzwert kommen nur 0 und -1 in Frage. Wegen $v_q > 0$ für alle $q \in \mathbb{N}$ ist auch $\lim_{q \rightarrow \infty} v_q \geq 0$ und damit scheidet -1 als Grenzwert aus. Es gilt also $\lim_{q \rightarrow \infty} v_q = 0$.

e) $a_{\ell+1} = \frac{3a_{\ell}+2}{a_{\ell}+2}$

2

Lösung:

Nimmt man an, dass die Folge gegen $A := \lim_{\ell \rightarrow \infty} a_\ell = \lim_{\ell \rightarrow \infty} a_{\ell+1}$ konvergiert, so lassen sich mit Hilfe eines Grenzübergangs in der Rekursionsformel mögliche Werte für A berechnen:

$$\begin{aligned} A = \frac{3A+2}{A+2} &\iff A^2 + 2A = 3A + 2 &\iff A^2 - 2 \cdot A \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2 = 0 \\ &\iff \left(A - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = 0 &\iff \left(A - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) \cdot \left(A - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) = 0 \\ &\iff (A+1) \cdot (A-2) = 0 &\iff A = -1 \text{ oder } A = 2. \end{aligned}$$

Behauptung 1 (Beschränktheit): Für alle $\ell \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{1}{2} \leq a_\ell < 2$.

Induktionsanfang: Es gilt $a_1 = \frac{1}{2}$. Also gilt $\frac{1}{2} \leq a_1 < 2$.

Induktionsvoraussetzung: Sei $L \in \mathbb{N}$ eine Zahl, für die $\frac{1}{2} \leq a_L < 2$ bereits gezeigt wurde.

Induktionsschluss:

Wegen $\frac{1}{2} \leq a_L < 2$ gilt $a_{L+1} = \frac{3a_L+2}{a_L+2} \stackrel{0 < a_L < 2}{>} \frac{3a_L+2}{2+2} \stackrel{\frac{1}{2} \leq a_L}{\geq} \frac{3 \cdot \frac{1}{2} + 2}{4} = \frac{3+4}{2 \cdot 4} = \frac{7}{8} \geq \frac{1}{2}$.

Wegen $2 > a_L$ gilt auch $2a_L + 4 > 3a_L + 2$. Klammert man links die 2 aus, erhält man $2 \cdot (a_L + 2) > 3a_L + 2$. Wegen $a_L > 0$ kann man durch $a_L + 2 > 0$ dividieren und erhält $2 > \frac{3a_L+2}{a_L+2} = a_{L+1}$.

Behauptung 2 (Monotonie): $(a_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend.

Die Monotonie lässt sich wegen $a_\ell + 2 > 0$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ mit der folgenden Ungleichungskette nachweisen:

$$\begin{aligned} a_\ell < a_{\ell+1} &\iff a_\ell < \frac{3a_\ell+2}{a_\ell+2} &\iff a_\ell^2 + 2a_\ell < 3a_\ell + 2 \\ &\iff a_\ell^2 - 2 \cdot a_\ell \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2 < 0 &\iff \left(a_\ell - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} < 0 \\ &\iff \left(a_\ell - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) \cdot \left(a_\ell - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) < 0 &\iff (a_\ell + 1) \cdot (a_\ell - 2) < 0 \\ &\iff -1 < a_\ell < 2. \end{aligned}$$

Da sogar $\frac{1}{2} \leq a_\ell < 2$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ gilt, ist die Monotonie von $(a_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ damit gezeigt.

Also ist $(a_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ monoton und beschränkt. Das liefert die Konvergenz der Folge. Als Grenzwert kommen nur -1 und 2 in Frage. Wegen $a_\ell \geq \frac{1}{2}$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ ist auch $\lim_{\ell \rightarrow \infty} a_\ell \geq \frac{1}{2}$ und damit scheidet -1 als Grenzwert aus. Es gilt also $\lim_{\ell \rightarrow \infty} a_\ell = 2$.

f) $y_{m+1} = 1 - \sqrt{1 - y_m}$

0

Lösung:

Behauptung 1 (Beschränktheit): Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $0 < y_m < 1$.

Induktionsanfang: Es gilt $y_1 = \frac{1}{2}$. Also gilt $0 < y_1 < 1$.

Induktionsvoraussetzung: Sei $M \in \mathbb{N}$ eine Zahl, für die $0 < y_M < 1$ bereits gezeigt wurde.

Induktionsschluss:

Wegen $0 < y_M < 1$ ist $-1 < -y_M < 0$, also $0 < 1 - y_M < 1$. Deshalb ist auch $0 < \sqrt{1 - y_M} < 1$, was $-1 < -\sqrt{1 - y_M} < 0$, also $0 < 1 - \sqrt{1 - y_M} = y_{M+1} < 1$ nach sich zieht.

Behauptung 2 (Monotonie): $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ ist monoton fallend.

Wegen $0 < y_m < 1$ für alle $m \in \mathbb{N}$ ist $-1 < -y_m < 0$, also $0 < 1 - y_m < 1$ und damit auch $0 < \sqrt{1 - y_m} < 1$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

Diese Ungleichung kann man mit $\sqrt{1 - y_m} > 0$ multiplizieren und erhält $1 - y_m < \sqrt{1 - y_m}$ bzw. $y_{m+1} = 1 - \sqrt{1 - y_m} < y_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

Also ist $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ monoton und beschränkt. Das liefert die Konvergenz der Folge.

Setzt man $Y := \lim_{m \rightarrow \infty} y_m = \lim_{m \rightarrow \infty} y_{m+1}$, so gilt wegen $0 < y_m < 1$ für alle $m \in \mathbb{N}$ auch $0 \leq Y = \lim_{m \rightarrow \infty} y_m \leq 1$. Damit lassen sich mit Hilfe eines Grenzübergangs in der Rekursionsformel mögliche Werte für Y berechnen:

$$\begin{aligned} Y = 1 - \sqrt{1 - Y} &\iff \sqrt{1 - Y} = 1 - Y && \text{beide Seiten} \geq 0 && 1 - Y = (1 - Y)^2 \\ &\iff 0 = (1 - Y)^2 - (1 - Y) && && 0 = (1 - Y) \cdot (1 - Y - 1) \\ &\iff 0 = -Y \cdot (1 - Y) && && Y = 0 \text{ oder } Y = 1. \end{aligned}$$

Als Grenzwert kommen also nur 0 und 1 in Frage. Da $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ vom Startwert $y_1 = \frac{1}{2}$ aus monoton fällt, scheidet 1 als Grenzwert aus. Es gilt also $\lim_{m \rightarrow \infty} y_m = 0$.

g) $p_{h+1} = \frac{p_h^2 + 2}{3}$ für jedes $p_1 \in \{\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}\}$

$$|p_1| < 2 : 1$$

$$|p_1| = 2 : 2$$

$$|p_1| > 2 : \infty$$

Teil der Lösung für alle $p_1 \in \mathbb{R}$:

Nimmt man an, dass die Folge gegen $P := \lim_{h \rightarrow \infty} p_h = \lim_{h \rightarrow \infty} p_{h+1}$ konvergiert, so lassen sich mit Hilfe eines Grenzübergangs in der Rekursionsformel mögliche Werte für P berechnen:

$$\begin{aligned} P = \frac{P^2 + 2}{3} &\iff 3P = P^2 + 2 && \iff P^2 - 2 \cdot P \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2 = 0 \\ &\iff \left(P - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 && \iff \left(P - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(P - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0 \\ &\iff (P - 1) \cdot (P - 2) = 0 && \iff P = 1 \text{ oder } P = 2. \end{aligned}$$

Behauptung 1 (Beschränktheit nach unten): Für alle $h \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ist $p_h > 0$.

Für alle $h \in \mathbb{N}$ ist $p_{h+1} = \frac{p_h^2 + 2}{3} \geq \frac{0+2}{3} = \frac{2}{3} > 0$, da $p_h \in \mathbb{R}$ ist.

Behauptung 2 (Monotonie): Ist $\left\{ \begin{array}{l} 1 < p_h < 2 \\ p_h \leq 1 \text{ oder } p_h \geq 2 \end{array} \right\}$, so gilt $\left\{ \begin{array}{l} p_h > p_{h+1} \\ p_h \leq p_{h+1} \end{array} \right\}$.

Für alle $h \in \mathbb{N}$ gilt die folgende Ungleichungskette

$$\begin{aligned} p_h > p_{h+1} &\iff p_h > \frac{p_h^2 + 2}{3} && \iff 3p_h > p_h^2 + 2 \\ &\iff p_h^2 - 2 \cdot p_h \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2 < 0 && \iff \left(p_h - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} < 0 \\ &\iff \left(p_h - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(p_h - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) < 0 && \iff (p_h - 1) \cdot (p_h - 2) < 0 \\ &\iff 1 < p_h < 2. \end{aligned}$$

Lösung für $|p_1| \leq 1$:

Behauptung (Beschränktheit): Für alle $h \in \mathbb{N}$ ist $-1 \leq p_h \leq 1$.

Induktionsanfang: Es gilt $|p_1| \leq 1$, also $-1 \leq p_1 \leq 1$.

Induktionsvoraussetzung: Sei $H \in \mathbb{N}$ eine Zahl, für die $-1 \leq p_H \leq 1$ bereits gezeigt wurde.

Induktionsschluss:

Wegen $-1 \leq p_H \leq 1$ ist $p_H^2 \leq 1$, also $p_H^2 + 2 \leq 3$. Das liefert direkt $p_{H+1} = \frac{p_H^2 + 2}{3} \leq 1$.

Nach Behauptung 1 folgt $p_{H+1} \geq -1$ direkt aus $p_{H+1} > 0$.

Behauptung 2 liefert damit, dass $(p_h)_{h \in \mathbb{N}}$ monoton steigt, sprich wegen der zusätzlichen Beschränktheit konvergiert. Als Grenzwert kommen nur 1 und 2 in Frage. Wegen $p_h \leq 1$ für alle $h \in \mathbb{N}$ ist auch $\lim_{h \rightarrow \infty} p_h \leq 1$ und damit scheidet 2 als Grenzwert aus. Es gilt also $\lim_{h \rightarrow \infty} p_h = 1$.

Lösung für $1 < |p_1| < 2$:

Behauptung (Beschränktheit): Für alle $h \in \mathbb{N}$ ist $1 < |p_h| < 2$.

Induktionsanfang: Es gilt $1 < |p_1| < 2$.

Induktionsvoraussetzung: Sei $H \in \mathbb{N}$ eine Zahl, für die $1 < |p_H| < 2$ bereits gezeigt wurde.

Induktionsschluss:

Wegen $1 < |p_H| < 2$ ist $1 < p_H^2 < 4$, also $3 < p_H^2 + 2 < 6$. Das liefert direkt $1 < p_{H+1} = \frac{p_H^2 + 2}{3} < 2$.

Nach Behauptung 1 folgt sogar $1 < p_h < 2$ für alle $h \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Behauptung 2 liefert damit, dass $(p_h)_{h \in \mathbb{N} \setminus \{1\}}$ monoton fällt, sprich wegen der zusätzlichen Beschränktheit konvergiert. Als Grenzwert kommen nur 1 und 2 in Frage. Da $(p_h)_{h \in \mathbb{N}}$ vom zweiten Folgenglied aus, welches zwischen 1 und 2 liegt, monoton fällt, scheidet 2 als Grenzwert aus. Es gilt also $\lim_{h \rightarrow \infty} p_h = 1$.

Lösung für $|p_1| = 2$:

Behauptung (Quasi-Konstanz): Für alle $h \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ist $p_h = 2$.

Induktionsanfang: Es gilt $p_2 = \frac{p_1^2 + 2}{3} = \frac{|p_1|^2 + 2}{3} = \frac{2^2 + 2}{3} = \frac{4 + 2}{3} = \frac{6}{3} = 2$.

Induktionsvoraussetzung: Sei $H \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ eine Zahl, für die $p_H = 2$ bereits gezeigt wurde.

Induktionsschluss: Das liefert direkt $p_{H+1} = \frac{p_H^2 + 2}{3} = \frac{2^2 + 2}{3} = \frac{4 + 2}{3} = \frac{6}{3} = 2$.

Damit folgt sofort, dass die Folge gegen 2 konvergiert.

Lösung für $|p_1| > 2$:

Behauptung (Beschränktheit nach unten): Für alle $h \in \mathbb{N}$ ist $2 < |p_h|$.

Induktionsanfang: Es gilt $2 < |p_1|$.

Induktionsvoraussetzung: Sei $H \in \mathbb{N}$ eine Zahl, für die $|p_H| > 2$ bereits gezeigt wurde.

Induktionsschluss:

Wegen $|p_H| > 2$ ist $p_H^2 > 4$, also $p_H^2 + 2 > 6$. Das liefert direkt $p_{H+1} = \frac{p_H^2 + 2}{3} > 2$.

Nach Behauptung 1 folgt sogar $p_h > 2$ für alle $h \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Behauptung 2 liefert damit, dass $(p_h)_{h \in \mathbb{N} \setminus \{1\}}$ monoton steigt.

Wenn $(p_h)_{h \in \mathbb{N}}$ konvergieren würde, dann gegen 1 oder 2. Da $(p_h)_{h \in \mathbb{N}}$ sich mit dem zweiten Folgenglied über der 2 befindet und danach monoton steigt, kann die Folge sich weder der 1 noch der 2 annähern. Damit folgt, dass die Folge divergiert. (Die Monotonie liefert dann $\lim_{h \rightarrow \infty} p_h = \infty$.)

h) $b_{j+1} = \frac{1}{1+b_j}$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Lösung:

Nimmt man an, dass die Folge gegen $B := \lim_{j \rightarrow \infty} b_j = \lim_{j \rightarrow \infty} b_{j+1}$ konvergiert, so lassen sich mit Hilfe eines Grenzübergangs in der Rekursionsformel mögliche Werte für B berechnen:

$$\begin{aligned} B = \frac{1}{1+B} &\iff B^2 + B - 1 = 0 &\iff B^2 + 2 \cdot B \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 = 0 \\ &\iff \left(B + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0 &\iff \left(B - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \cdot \left(B - \frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right) = 0 \\ &\iff B = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ oder } B = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}. \end{aligned}$$

Seien $a_j := b_{2j-1}$ und $c_j := b_{2j}$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

Für alle $j \in \mathbb{N}$ folgt $a_{j+1} = b_{2j+1} = \frac{1}{1+b_{2j}} = \frac{1}{1+c_j}$ und $c_{j+1} = b_{2j+2} = \frac{1}{1+b_{2j+1}} = \frac{1}{1+a_{j+1}}$.

Behauptung 1 (Beschränktheit): Für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{1}{2} \leq a_j \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq c_j \leq 1$.

Induktionsanfang: Es gilt $a_1 = b_{2 \cdot 1 - 1} = b_1 = \frac{1}{2}$ und $c_1 = b_{2 \cdot 1} = b_2 = \frac{1}{1+b_1} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$.

Also gilt $\frac{1}{2} \leq a_1 = \frac{1}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{\sqrt{4}-1}{2} \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{\frac{45}{9}}-1}{2} \leq \frac{\sqrt{\frac{49}{9}}-1}{2} = \frac{7-1}{2} = \frac{4}{2} = \frac{2}{3} = c_1 \leq 1$.

Induktionsvoraussetzung:

Sei $J \in \mathbb{N}$ eine Zahl, für die $\frac{1}{2} \leq a_J \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq c_J \leq 1$ bereits gezeigt wurde.

Induktionsschluss:

Wegen $\frac{1}{2} \leq c_J \leq 1$ gilt $0 < c_J + 1 \leq 2$ und damit folgt $a_{J+1} = \frac{1}{1+c_J} \geq \frac{1}{2}$.

Wegen $c_J \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ist $1 + c_J \geq \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, also $a_{J+1} = \frac{1}{1+c_J} \leq \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5}-1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Wegen $a_{J+1} \geq \frac{1}{2} > 0$ gilt $a_{J+1} + 1 > 1$ und damit folgt $c_{J+1} = \frac{1}{1+a_{J+1}} \leq 1$.

Wegen $a_{J+1} \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ist $1 + a_{J+1} \leq \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, also $c_{J+1} = \frac{1}{1+a_{J+1}} \geq \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5}-1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Behauptung 2 (Monotonie): $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und $(c_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ist monoton fallend.

Für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt $a_{j+1} = \frac{1}{1+c_j} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+a_j}} = \frac{1}{\frac{1+a_j+1}{1+a_j}} = \frac{1+a_j}{2+a_j}$ und

$$c_{j+1} = \frac{1}{1+a_{j+1}} = \frac{1}{1+\frac{1+a_j}{2+a_j}} = \frac{1}{\frac{1+c_j+1}{1+c_j}} = \frac{1+c_j}{2+c_j}.$$

Die Frage nach der Monotonie der beiden Folgen lässt sich also beantworten, indem man prüft, für welche $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ welche der Ungleichungen $x \leq \frac{1+x}{2+x}$ bzw. $x \geq \frac{1+x}{2+x}$ gilt.

Wegen $2+x > 0$ lässt sich die erste der beiden Ungleichungen umformen zu

$$\begin{aligned} x \leq \frac{1+x}{2+x} &\iff 2x + x^2 \leq 1 + x &\iff x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 \leq 0 \\ &\iff \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \leq 0 &\iff \left(x - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right) \leq 0 \\ &\iff \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}. \end{aligned}$$

Also gilt $x \leq \frac{1+x}{2+x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $0 < x \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ und $x \geq \frac{1+x}{2+x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Wegen $\frac{1}{2} \leq a_j \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq c_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$ folgt für alle $j \in \mathbb{N}$

$$a_j \leq \frac{1+a_j}{2+a_j} = a_{j+1} \quad \text{und} \quad c_j \leq \frac{1+c_j}{2+c_j} = c_{j+1}.$$

Da $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ und $(c_j)_{j \in \mathbb{N}}$ also monoton und beschränkt sind, konvergieren beide. Als Teilfolgen von $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$ können sie keinen anderen Grenzwert haben als $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$.

Die möglichen Grenzwerte von $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$ waren $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ und $\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$.

Wegen $c_j > a_j > 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt $\lim_{j \rightarrow \infty} c_j \geq \lim_{j \rightarrow \infty} a_j \geq 0$ und mit $\frac{-\sqrt{5}-1}{2} < 0$ folgt wegen $\frac{\sqrt{5}-1}{2} > 0$ also $\lim_{j \rightarrow \infty} c_j = \lim_{j \rightarrow \infty} a_j = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Da jedes Folgenglied von $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$ in einer der beiden Teilfolgen $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ und $(c_j)_{j \in \mathbb{N}}$ auftritt, ergibt sich daraus auch $\lim_{j \rightarrow \infty} b_j = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.



Folgen/Rekursiv/Ag_FolgenRekursiv_StartwertVariabel.tex

Aufgabe 61.297 (Rekursiv dargestellte Folge mit Startwert aus Intervall)

ehh

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch $a_1 \in [-1; \infty)$ und

$$a_{n+1} = \frac{3 \cdot a_n + 2}{a_n + 2} = 3 - 4 \cdot \frac{1}{a_n + 2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

- a) Falls die Folge konvergiert: Welche Grenzwerte sind aufgrund der Rekursionsvorschrift möglich?

−1 und 2

Lösung:

Für die Bestimmung der Nullstellen werden die Summanden auf einen Nenner gebracht. Danach wird das Zählerpolynom beispielsweise mit dem Satz von Vieta faktorisiert:

$$\frac{3 \cdot A + 2 - A \cdot (A + 2)}{A + 2} = -\frac{A^2 - A - 2}{A + 2} = -\frac{(A + 1) \cdot (A - 2)}{A + 2} = 0$$

Fixpunkte und somit mögliche Grenzwerte sind also −1 und 2.

- b) Zeige: Aus $a_1 \in [-1; 2]$ folgt $a_n \in [-1; 2]$ und aus $a_1 \in (2; \infty)$ folgt $a_n \in (2; \infty)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

Der Induktionsanfang $A(1)$ ist jeweils per Aufgabenstellung erfüllt, $a_1 \in (-1, 2)$ beziehungsweise $a_1 \in (2, \infty)$.

Laut Induktionsvoraussetzung gelte $A(n) : -1 < a_n < 2$ beziehungsweise $2 < a_n$ jeweils für ein $n \in \mathbb{N}$.

Durch „Nachbauen“ der Rekursionsvorschrift kann im Induktionsschritt $A(n+1)$ aus $A(n)$ gefolgert werden:

$$\begin{aligned} -1 < a_n < 2 &\Rightarrow 1 < a_n + 2 < 4 \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{a_n + 2} < 1 \Rightarrow -4 < -4 \cdot \frac{1}{a_n + 2} < -1 \\ &\Rightarrow -1 < 3 - 4 \cdot \frac{1}{a_n + 2} < 2 \Rightarrow -1 < a_{n+1} < 2 \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} 2 < a_n &\Rightarrow 4 < a_n + 2 \Rightarrow \frac{1}{a_n + 2} < \frac{1}{4} \Rightarrow -1 < -4 \cdot \frac{1}{a_n + 2} \\ &\Rightarrow 2 < 3 - 4 \cdot \frac{1}{a_n + 2} \Rightarrow 2 < a_{n+1} \end{aligned}$$

- c) Was gilt für Monotonie und Konvergenz von (a_n) ?

$a_n \rightarrow 2$ monoton wachsend für $a_1 \in (-1, 2)$. $a_n \rightarrow 2$ monoton fallend für $a_1 \in (2, \infty)$. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konstant 2 für $a_1 = 2$. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konstant −1 für $a_1 = -1$.

Lösung:

Die Rechenschritte wurden bereits bei der Fixpunktgleichung durchgeführt und liefern

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{(a_n + 1) \cdot (a_n - 2)}{a_n + 2}$$

Das hier allein interessierende Vorzeichen wechselt bei der Polstelle beziehungsweise bei jeder Nullstelle gemäß „ $+\times-0+0-$ “, wobei $\times$ für die Polstelle steht. Das $+$ zwischen den Nullstellen −1 und 2 bedeutet monoton wachsend gegen den Fixpunkt 2, das $-$ ab der zweiten Nullstelle bedeutet monoton fallend gegen 2.



Folgen/Rekursiv/Ag_FolgenRekursiv_StartwertVariabellang.tex

Aufgabe 61.298 (Rekursiv dargestellte Folge mit Startwert aus Intervall)

ehh

Sei $f: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := \frac{3x+2}{x+2} = 3 - 4 \cdot \frac{1}{x+2}$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch $a_1 \in [-1; \infty)$ und

$$a_{n+1} := f(a_n) = \frac{3 \cdot a_n + 2}{a_n + 2} = 3 - 4 \cdot \frac{1}{a_n + 2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

- a) Falls die Folge konvergiert, gilt mit den Rechenregeln für konvergente Folgen:

$$A := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) = f(A).$$

Ist diese sogenannte Fixpunktgleichung $f(A) = A$ unlösbar, kann die Folge nicht konvergieren. Bestimmen Sie für $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ alle Lösungen der Fixpunktgleichung $f(A) - A = 0$.

–1 und 2

Lösung:

Für die Bestimmung der Nullstellen werden die Summanden auf einen Nenner gebracht. Danach wird das Zählerpolynom beispielsweise mit dem Satz von Vieta faktorisiert:

$$\frac{3 \cdot A + 2 - A \cdot (A + 2)}{A + 2} = -\frac{A^2 - A - 2}{A + 2} = -\frac{(A + 1) \cdot (A - 2)}{A + 2} = 0$$

Fixpunkte und somit mögliche Grenzwerte sind also –1 und 2.

- b) Was gilt allgemein, wenn der Startwert a_1 eine Lösung der Fixpunktgleichung ist?

Die Folge ist konstant und somit konvergent, hier $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1$ für $a_1 = -1$ und $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2$ für $a_1 = 2$.

Lösung:

Ist der Startwert a_1 eine Lösung der Fixpunktgleichung, $a_1 = A$, so liefert die Rekursionsvorschrift entsprechend $a_2 = f(a_1) = f(A) = A = a_1$. Induktiv folgt, dass die Folge konstant ist und somit trivialerweise konvergent.

- c) Die Rekursionsvorschrift selbst ergibt hier wegen der Polstelle –2 von f keine Schranken für die Folge. Die Beschränktheit kann demnach nur induktiv gezeigt werden. Zeigen Sie: Aus $a_1 \in [-1; 2]$ folgt $a_n \in [-1; 2]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und aus $a_1 \in (2; \infty)$ folgt $a_n \in (2; \infty)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Tipp: In der zweiten Form von f ist z.B. $a_n \in (-1, 2) \Rightarrow a_{n+1} \in (-1, 2)$ gut zu sehen. Allgemein in zwei Schritten: $a_{n+1} + 1 > 0$ und $a_{n+1} - 2 < 0$, jeweils $a_n \in (-1, 2)$ vorausgesetzt.

Lösung:

Der Induktionsanfang $A(1)$ ist jeweils per Aufgabenstellung erfüllt, $a_1 \in (-1, 2)$ beziehungsweise $a_1 \in (2, \infty)$.

Laut Induktionsvoraussetzung gelte $A(n) : -1 < a_n < 2$ beziehungsweise $2 < a_n$ jeweils für ein $n \in \mathbb{N}$.

Durch „Nachbauen“ der Rekursionsvorschrift kann im Induktionsschritt $A(n+1)$ aus $A(n)$ gefolgert werden:

$$\begin{aligned} -1 < a_n < 2 &\Rightarrow 1 < a_n + 2 < 4 \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{a_n + 2} < 1 \Rightarrow -4 < -4 \cdot \frac{1}{a_n + 2} < -1 \\ &\Rightarrow -1 < 3 - 4 \cdot \frac{1}{a_n + 2} < 2 \Rightarrow -1 < a_{n+1} < 2 \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} 2 < a_n &\Rightarrow 4 < a_n + 2 \Rightarrow \frac{1}{a_n + 2} < \frac{1}{4} \Rightarrow -1 < -4 \cdot \frac{1}{a_n + 2} \\ &\Rightarrow 2 < 3 - 4 \cdot \frac{1}{a_n + 2} \Rightarrow 2 < a_{n+1} \end{aligned}$$

- d) Ist die Beschränktheit der Folge nachgewiesen, liefert ein Beweis von Monotonie die Konvergenz nach dem Monotoniekriterium. Es gilt also, das Vorzeichen von $a_{n+1} - a_n = f(a_n) - a_n$ zu untersuchen (vergleiche Fixpunktgleichung!). Was gilt für Monotonie und Konvergenz von (a_n) ?
Jeweils $a_n \rightarrow 2$, monoton wachsend für $a_1 \in (-1, 2)$ beziehungsweise monoton fallend für $a_1 \in (2, \infty)$

Lösung:

Die Rechenschritte wurden bereits bei der Fixpunktgleichung durchgeführt und liefern

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{(a_n + 1) \cdot (a_n - 2)}{a_n + 2}$$

Das hier allein interessierende Vorzeichen wechselt bei der Polstelle beziehungsweise bei jeder Nullstelle gemäß „ $\times - 0 + 0 -$ “, wobei $\times$ für die Polstelle steht. Das $+$ zwischen den Nullstellen -1 und 2 bedeutet monoton wachsend gegen den Fixpunkt 2 , das $-$ ab der zweiten Nullstelle bedeutet monoton fallend gegen 2 .



Folgen/Rekursiv/Ag_Folgen_RekursiveFolgen_Konvergenz_leicht.tex

Aufgabe 61.299 (Konvergenz rekursiv definierter Folgen)

Zeigen Sie mit dem Monotoniekriterium, dass die rekursiv definierte Folge (c_n) mit $c_1 = 0$ und $c_{n+1} = \sqrt{6 - \sqrt{6 - c_n}}$ konvergent ist.

Berechnen Sie die ersten beiden Folgenglieder und bestimmen Sie dann den Grenzwert dieser Folge.

Tipp: Bei dem auftretenden Polynom vierten Grades sind $x = 2, -3$ einige mögliche Nullstellen.

Lösung:

Die ersten drei Folgenglieder sind

$$c_1 = 0 \text{ Startwert} \quad c_2 = \sqrt{6 - \sqrt{6 - 0}} \approx 1.88 \quad \text{und} \quad c_3 = \sqrt{6 - \sqrt{6 - c_2}} \approx 1.99.$$

Zuerst zeigen wir, dass die Folge monoton wachsend ist:

$$\begin{aligned} c_{n+1} &\geq c_n \\ \Leftrightarrow \sqrt{6 - \sqrt{6 - c_n}} &\geq c_n \\ \Leftrightarrow \text{Quadrieren} \quad 6 - \sqrt{6 - c_n} &\geq c_n^2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{6 - c_n} &\leq 6 - c_n^2 \\ \Leftrightarrow \text{Quadrieren} \quad 6 - c_n &\leq 36 - 12c_n^2 + c_n^4 \\ \Leftrightarrow c_n^4 - 12c_n^2 + c_n + 30 &\geq 0. \end{aligned}$$

Das Quadrieren auf beiden Seiten ist hier eine Äquivalenzumformung, weil die beteiligten Werte nicht negativ sind. Damit die Folge monoton wachsend ist, muss der Polynomwert also immer ≥ 0 sein. Wir untersuchen dazu das Polynom

$$f(x) = x^4 - 12x^2 + x + 30,$$

wie im Tipp gegeben hat es die Nullstellen $x_1 = 2$ und $x_2 = -3$. Durch Polynomdivision erhalten wir

$$f(x) = (x - 2)(x + 3) \cdot (x^2 - x - 5)$$

und mit der pq -Formel erhalten wir die beiden anderen Nullstellen

$$x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{21} \approx -1.79, \quad x_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{21} \approx 2.79.$$

Die Funktion $f(x)$ ist nach oben geöffnet und besitzt vier Nullstellen, wenn wir diese richtig anordnen erhalten wir:

- Auf $(-\infty, -3)$ ist die Funktion positiv,
- auf $(-3, +\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{21})$ ist die Funktion negativ,
- auf $(+\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{21}, 2)$ ist die Funktion positiv (*hier liegt der Startwert*),
- auf $(2, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{21})$ ist die Funktion negativ,
- auf $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{21}, \infty)$ ist die Funktion positiv.



Folgen/Rekursiv/Ag_Folgen_RekursiveFolgen_Konvergenz_wiwi.tex

Aufgabe 61.300 (Quadratische Rekursion)

Es sei (a_n) rekursiv definiert durch

$$a_1 := 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} := 2a_n - \frac{1}{2} \cdot a_n^2 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

- Zeigen Sie, dass $a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (*Tipp: Quadratische Ergänzung*).
- Zeigen Sie per Induktion, dass $a_n \geq 0$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ (dabei dürfen Sie Teil a) verwenden).
- Begründen Sie, dass (a_n) eine konvergente Folge ist und bestimmen Sie ihren Grenzwert über die Testgleichung.

Lösung:

Für a_1 ist die Aussage a) richtig, für die weiteren Folgenglieder a_{n+1} mit $n \in \mathbb{N}$ verwenden wir die Rekursionsvorschrift. Durch quadratische Ergänzung erhalten wir

$$a_{n+1} = 2a_n - \frac{1}{2}a_n^2 = -\frac{1}{2}(a_n - 2)^2 + 2.$$

Da der quadratische Term nicht negativ ist, muss der Gesamtausdruck ≤ 2 sein, unabhängig vom Wert vom Vorgänger a_n .

In Teil b) ist $a_n \geq 0$ für $n = 1$ richtig. Angenommen die Aussage ist für ein n richtig, dann gilt für den Nachfolger

$$a_{n+1} = 2a_n - \frac{1}{2}a_n^2 = \underbrace{a_n}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(2 - \frac{1}{2}a_n)}_{\geq 0} \geq 0.$$

Dabei ist $a_n \geq 0$ die Induktionsannahme und $2 - \frac{1}{2}a_n \geq 0$ eine Folgerung aus Teil a).

Wir wissen schon, dass die Folge wegen $a_n \in [0, 2]$ beschränkt ist, also brauchen wir nur noch Monotonie in eine Richtung nachzuweisen. Ausrechnen der ersten Folgenglieder ergibt $a_n = 1, \frac{3}{2}, \frac{15}{8}, \dots$, wir vermuten also, dass sie monoton steigend ist. Und tatsächlich ergibt der Ansatz mit der Rekursionsvorschrift

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\geq a_n \\ \Leftrightarrow 2a_n - \frac{1}{2}a_n^2 &\geq a_n \\ \Leftrightarrow a_n - \frac{1}{2}a_n^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow a_n \cdot (1 - \frac{1}{2}a_n) &\geq 0 \end{aligned}$$

was eine wahre Aussage ist, weil sowohl $a_n \geq 0$ wegen Teil b) als auch $1 - \frac{1}{2}a_n \geq 0$ wegen Teil a) gelten. Also ist auch die Monotonie $a_{n+1} \geq a_n$ eine wahre Aussage. Nach dem Monotoniekriterium ist

(a_n) also eine konvergente Folge. Wir suchen nun nach Fixpunkten der Funktion $f(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2$ (aus der Rekursionsbedingung), zu lösen ist also die Gleichung $f(x) = x$:

$$\begin{aligned} 2x - \frac{1}{2}x^2 &= x \\ \Leftrightarrow x - \frac{1}{2}x^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x_{1,2} &= 0, 2. \end{aligned}$$

Der Fixpunkt $x_1 = 0$ ist nicht der gesuchte Grenzwert, denn $a_1 = 1$ und die Folge ist monoton wachsend, kann also nicht mehr unter die 1 fallen. Da es aber einen Grenzwert geben muss, bleibt nur

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$$

übrig.



Folgen/Rekursiv/Ag_Folgen_RekursiveFolgen_Monotoniekriterium_mittel.tex

Aufgabe 61.301 (Konvergenz rekursiv definierter Folgen)

Zeigen Sie mit dem Monotoniekriterium, dass die nachstehenden Folgen konvergieren, und bestimmen Sie deren Grenzwert:

- a) Es ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch $a_1 := 6$ und $a_{n+1} := \sqrt{\frac{3}{2} \cdot a_n + 7}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert.

$\frac{7}{2}$

Lösung:

Kennenlernen: Es sind $a_1 = 6$, $a_2 = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot 6 + 7} = \sqrt{9 + 7} = 4$, $a_3 = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot 4 + 7} = \sqrt{6 + 7} = \sqrt{13}$ und $a_4 = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \sqrt{13} + 7}$.

mögliche Grenzwerte: Angenommen, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $A := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Da dann auch $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = A$ gilt, liefert ein Grenzübergang in der Rekursionsformel die Fixpunktgleichung

$$\begin{aligned} A = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot A + 7} &\implies A^2 = \frac{3}{2} \cdot A + 7 \iff A^2 - 2 \cdot A \cdot \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} - \frac{112}{16} = 0 \\ &\iff \left(A - \frac{3}{4}\right) - \frac{121}{16} = 0 \iff \left(A - \frac{3}{4} + \frac{11}{4}\right) \cdot \left(A - \frac{3}{4} - \frac{11}{4}\right) = 0 \\ &\iff \left(A + \frac{8}{4}\right) \cdot \left(A - \frac{14}{4}\right) = 0 \iff A = -2 \text{ oder } A = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Also: Wenn $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, dann gegen -2 oder $\frac{7}{2}$.

Beschränktheit: *Behauptung:* $\frac{7}{2} \leq a_n \leq 6$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang: ($n = 1$): Es gilt $a_1 = 6 \leq 6$ und $a_1 = 6 \geq \frac{7}{2}$.

Induktionsvoraussetzung: ($n = k$):

Sei $k \in \mathbb{N}$ eine Zahl, für die $\frac{7}{2} \leq a_k \leq 6$ bereits gezeigt wurde.

Induktionsschluss: ($n = k + 1$): Dann gilt wegen der Monotonie der Wurzel

$$a_{k+1} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot a_k + 7} \leq \sqrt{\frac{3}{2} \cdot 6 + 7} = \sqrt{9 + 7} = 4 \leq 6$$

und

$$a_{k+1} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot a_k + 7} \geq \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{7}{2} + 7} = \sqrt{\frac{21}{4} + 7} = \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{7}{2}.$$

Monotonie: *Behauptung:* $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang: ($n = 1$): Es gilt $a_2 = 4 \leq 6 = a_1$.

Induktionsvoraussetzung: ($n = k$):

Sei $k \in \mathbb{N}$ eine Zahl, für die $a_{k+1} \leq a_k$ bereits gezeigt wurde.

Induktionsschluss: ($n = k + 1$): Dann gilt wegen der Monotonie der Wurzel

$$a_{(k+1)+1} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot a_{k+1} + 7} \leq \sqrt{\frac{3}{2} \cdot a_k + 7} = a_{k+1}.$$

Zusammenfassung: Da $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend und beschränkt ist, liefert das Monotoniekriterium die Konvergenz der Folge. Als mögliche Grenzwerte kommen nur -2 und $\frac{7}{2}$ in Betracht. Wegen $a_n \geq \frac{7}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist -2 als Grenzwert nicht möglich.

Also ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{7}{2}$.

b) Es ist $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch $b_1 := 2.25$ und $b_{n+1} := \sqrt{b_n - \frac{1}{4}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert.

$\frac{1}{2}$

Lösung:

Kennenlernen: Es sind $b_1 = \frac{9}{4}$, $b_2 = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{8}{4}} = \sqrt{2}$, und $b_3 = \sqrt{\sqrt{2} - \frac{1}{4}}$.

mögliche Grenzwerte: Angenommen, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $B := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Da dann auch $\lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1} = B$ gilt, liefert ein Grenzübergang in der Rekursionsformel die Fixpunktgleichung

$$\begin{aligned} B = \sqrt{B - \frac{1}{4}} &\implies B^2 = B - \frac{1}{4} \iff B^2 - 2 \cdot B \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0 \\ &\iff \left(B - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \iff B = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Also: Wenn $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, dann gegen $\frac{1}{2}$.

Beschränktheit: *Behauptung:* $\frac{1}{2} \leq b_n \leq \frac{9}{4}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang: ($n = 1$): Es gilt $b_1 = \frac{9}{4} \leq \frac{9}{4}$ und $b_1 = \frac{9}{4} \geq \frac{1}{2}$.

Induktionsvoraussetzung: ($n = k$):

Sei $k \in \mathbb{N}$ eine Zahl, für die $\frac{1}{2} \leq b_k \leq \frac{9}{4}$ bereits gezeigt wurde.

Induktionsschluss: ($n = k + 1$): Dann gilt wegen der Monotonie der Wurzel

$$b_{k+1} = \sqrt{b_k - \frac{1}{4}} \leq \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{8}{4}} = \sqrt{2} \leq \frac{9}{4}$$

und

$$b_{k+1} = \sqrt{b_k - \frac{1}{4}} \geq \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Monotonie: *Behauptung:* $b_{n+1} \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang: ($n = 1$): Es gilt $b_2 = \sqrt{2} \leq \frac{9}{4} = b_1$.

Induktionsvoraussetzung: ($n = k$):

Sei $k \in \mathbb{N}$ eine Zahl, für die $b_{k+1} \leq b_k$ bereits gezeigt wurde.

Induktionsschluss: ($n = k + 1$): Dann gilt wegen der Monotonie der Wurzel

$$b_{(k+1)+1} = \sqrt{b_{k+1} - \frac{1}{4}} \leq \sqrt{b_k - \frac{1}{4}} = b_{k+1}.$$

Zusammenfassung: Da $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend und beschränkt ist, liefert das Monotoniekriterium die Konvergenz der Folge. Als möglicher Grenzwert kommt nur $\frac{1}{2}$ in Betracht.

Also ist $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{2}$.



Folgen/Vektorwertig/Ag_Folgen_vieleHaeufungswerte_2D.tex

Aufgabe 62.302 (Häufungswerte berechnen)

vr nach spf

Geben Sie für die folgenden Folgen sämtliche Häufungswerte an!

a) $(x_n, y_n)^T = \left((-1)^n \cdot \frac{12n}{6n+7}, \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \right)^T$

$(-2, 0)^T, (2, 0)^T$

Lösung:

Es gilt $\mathbb{N} = \{2k \in \mathbb{N} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{2k-1 \in \mathbb{N} : k \in \mathbb{N}\}$. Seien $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) := (x_{2k}, y_{2k})$ und $(\hat{x}_k, \hat{y}_k) := (x_{2k-1}, y_{2k-1})$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann sind $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(\hat{x}_k, \hat{y}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Teilfolgen von $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} (\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (x_{2k}, y_{2k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left((-1)^{2k} \cdot \frac{12 \cdot 2k}{6 \cdot 2k + 7}, \frac{(-1)^{2k}}{2k} + \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{24k}{12k+7}, \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{24}{12 + \frac{7}{k}} = \left(\frac{24}{12+0}, 0-0 \right) = (2, 0) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} (\hat{x}_k, \hat{y}_k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (x_{2k-1}, y_{2k-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left((-1)^{2k-1} \cdot \frac{12 \cdot 2k}{6 \cdot (2k-1) + 7}, \frac{(-1)^{2k-1}}{2k-1} + \frac{(-1)^{2k+1-1}}{2k+1-1} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(-\frac{24k-12}{12k+1}, \frac{-1}{2k-1} + \frac{1}{2k} \right) = (-2, 0). \end{aligned}$$

Damit ist $\{(-2, 0); (2, 0)\}$ die Menge aller Häufungspunkte von $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

b) $(x_n, y_n)^T = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) + 1, \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot n\right) \right)^T$

$(2, \frac{\sqrt{3}}{2})^T, (1, \frac{1}{2})^T, (0, 0)^T, (1, -\frac{1}{2})^T, (2, -\frac{\sqrt{3}}{2})^T, (1, -1)^T, (0, -\frac{\sqrt{3}}{2})^T, (2, 0)^T, (0, \frac{\sqrt{3}}{2})^T, (1, 1)^T$

Es gilt

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}n + 2\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(n+4)\right)$$

d.h., die Folge $x_n = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) + 1$ ist 4-periodisch.

Für die Folge (y_n) gilt

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}n\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}n + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}(n+12)\right)$$

d.h., die Folge $y_n = \cos\left(\frac{\pi}{6}n\right)$ ist 12-periodisch.

Damit ist die Folge $(x_n, y_n) = (x_{n+12}, y_{n+12})$ auch 12-periodisch und wir müssen nur die ersten 12 Folgenglieder berechnen um alle Häufungspunkte zu bestimmen.

Es gilt

$$x_1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1\right) + 1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1 = 1 + 1 = 2 = x_5 = x_9 = x_{13} = \dots$$

$$x_2 = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 2\right) + 1 = \sin(\pi) + 1 = 0 + 1 = 1 = x_6 = x_{10} = x_{14} = \dots$$

$$x_3 = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 3\right) + 1 = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 1 = -1 + 1 = 0 = x_7 = x_{11} = x_{15} = \dots$$

$$x_4 = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 4\right) + 1 = \sin(2\pi) + 1 = 0 + 1 = 1 = x_8 = x_{12} = x_{16} = \dots$$

und

$$\begin{aligned}
y_1 &= \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 1\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = y_{13} = \dots \\
y_2 &= \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 2\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} = y_{14} = \dots \\
y_3 &= \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 3\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 = y_{15} = \dots \\
y_4 &= \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 4\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} = y_{16} = \dots \\
y_5 &= \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 5\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = y_{17} = \dots \\
y_6 &= \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 6\right) = \cos(\pi) = -1 = y_{18} = \dots \\
y_7 &= \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 7\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = y_{19} = \dots \\
y_8 &= \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 8\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} = y_{20} = \dots \\
y_9 &= \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 9\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 = y_{21} = \dots \\
y_{10} &= \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 10\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} = y_{22} = \dots \\
y_{11} &= \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 11\right) = \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = y_{23} = \dots \\
y_{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 12\right) = \cos(2\pi) = 1 = y_{24} = \dots
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir die folgenden Häufungspunkte:

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} (x_{12k+1}, y_{12k+1}) &= (x_1, y_1) = \left(2, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) & \lim_{k \rightarrow \infty} (x_{12k+7}, y_{12k+7}) &= (x_7, y_7) = \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
\lim_{k \rightarrow \infty} (x_{12k+2}, y_{12k+2}) &= (x_2, y_2) = \left(1, \frac{1}{2}\right) & \lim_{k \rightarrow \infty} (x_{12k+8}, y_{12k+8}) &= (x_8, y_8) = \left(1, -\frac{1}{2}\right) \\
\lim_{k \rightarrow \infty} (x_{12k+3}, y_{12k+3}) &= (x_3, y_3) = (0, 0) & \lim_{k \rightarrow \infty} (x_{12k+9}, y_{12k+9}) &= (x_9, y_9) = (2, 0) \\
\lim_{k \rightarrow \infty} (x_{12k+4}, y_{12k+4}) &= (x_4, y_4) = \left(1, -\frac{1}{2}\right) & \lim_{k \rightarrow \infty} (x_{12k+10}, y_{12k+10}) &= (x_{10}, y_{10}) = \left(1, \frac{1}{2}\right) \\
\lim_{k \rightarrow \infty} (x_{12k+5}, y_{12k+5}) &= (x_5, y_5) = \left(2, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) & \lim_{k \rightarrow \infty} (x_{12k+11}, y_{12k+11}) &= (x_{11}, y_{11}) = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
\lim_{k \rightarrow \infty} (x_{12k+6}, y_{12k+6}) &= (x_6, y_6) = (1, -1) & \lim_{k \rightarrow \infty} (x_{12k+12}, y_{12k+12}) &= (x_{12}, y_{12}) = (1, 1)
\end{aligned}$$

Die Wiederholungen $((x_8, y_8) = (x_4, y_4))$ und $(x_{10}, y_{10}) = (x_2, y_2))$ müssen noch entfernt werden und damit erhalten wir die Menge der Häufungspunkte

$$\left\{ \left(2, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(1, \frac{1}{2}\right), (0, 0), \left(1, -\frac{1}{2}\right), \left(2, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), (1, -1), \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), (2, 0), \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), (1, 1) \right\}$$

c) $(x_n, y_n)^T$ mit $x_1 := 2$, $x_{n+1} := \frac{1}{x_n}$ und $y_1 := 2$, $y_{n+1} := \frac{1}{y_n}$

$(\frac{1}{2}, 0)^T$

Lösung:

Berechne zuerst einige Folgenglieder:

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) &= (2, 2) \\(x_2, y_2) &= \left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{y_1^2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \\(x_3, y_3) &= \left(\frac{1}{x_2}, \frac{1}{y_2^2}\right) = (2, 4^2) = (2, 16) \\(x_4, y_4) &= \left(\frac{1}{x_3}, \frac{1}{y_3^2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{16^2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{256}\right) \\(x_5, y_5) &= \left(\frac{1}{x_4}, \frac{1}{y_4^2}\right) = (2, 256^2) = (2, 65536)\end{aligned}$$

Vermutung:

- Für alle ungeraden Indizes n ist $x_n = 2$ und $y_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$, n : ungerade.
- Für alle geraden Indizes n ist $x_n = \frac{1}{2}$ und $y_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, n : gerade.

Beweis mittels vollständiger Induktion:

- Zeige, dass für für alle $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$ gilt: $x_{2k-1} = 2$.

IA: $k = 1$: $x_{2 \cdot 1 - 1} = x_1 = 2$

IV: für $k \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest gilt $x_{2k-1} = 2$.

IS: Zeige dass dann auch für $k + 1$ gilt $x_{2(k+1)-1} = x_{2k+1} = 2$:

$$x_{2k+1} = \frac{1}{x_{2k}} = \frac{1}{\frac{1}{x_{2k-1}}} = x_{2k-1} = 2$$

- Zeige, dass für für alle $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ gilt: $x_{2k} = \frac{1}{2}$.

IA: $k = 1$: $x_{2 \cdot 1} = x_2 = \frac{1}{x_1} = \frac{1}{2}$

IV: für $k \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest gilt $x_{2k} = \frac{1}{2}$.

IS: Zeige dass dann auch für $k + 1$ gilt $x_{2(k+1)} = x_{2k+2} = \frac{1}{2}$:

$$x_{2k+2} = \frac{1}{x_{2k+1}} = \frac{1}{\frac{1}{x_{2k}}} = x_{2k} = \frac{1}{2}$$

- Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $y_n = 2^{(-1)^{n+1} \cdot 2^{n-1}}$

IA: Für $n = 1$:

$$y_1 = 2 \stackrel{?}{=} 2^{(-1)^{1+1} \cdot 2^{1-1}} = 2^{1 \cdot 2^0} = 2^1 = 1$$

IV: Für $n \in \mathbb{N}$: beliebig aber fest gilt $y_n = 2^{(-1)^{n+1} \cdot 2^{n-1}}$.

IS: Zeige dass $y_{n+1} = 2^{(-1)^{n+1+1} \cdot 2^{n+1-1}} = 2^{(-1)^{n+2} \cdot 2^n}$.

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= \frac{1}{y_n^2} = y_n^{-2} \stackrel{(IV)}{=} \left(2^{(-1)^{n+1} \cdot 2^{n-1}}\right)^{-2} = 2^{((-1)^{n+1} \cdot 2^{n-1}) \cdot (-2)} \\&= 2^{(-1)^{n+1+1} \cdot 2^{n-1} \cdot 2} = 2^{(-1)^{n+2} \cdot 2^n}\end{aligned}$$

Jetzt können alle Häufungspunkte berechnet werden:

- Für ungerade $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_{2k-1}, y_{2k-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(2, 2^{(-1)^{2k-1+1} \cdot 2^{2k-1-1}}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(2, 2^{1 \cdot 2^{2k-2}}\right) = (2, +\infty)$$

- Für gerade $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_{2k}, y_{2k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}, 2^{(-1)^{2k+1} \cdot 2^{2k-1}} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}, 2^{-1 \cdot 2^{2k-1}} \right) = \left(\frac{1}{2}, 0 \right)$$

Damit ist $\{(2, +\infty), (\frac{1}{2}, 0)\}$ die Menge aller Häufungspunkte.



GWStetig/FktGW/Ag_Asymptoten_Abschaetzungen_vmkw.tex

Aufgabe 63.303 (Abschätzen in Ungleichungen)

dh

Zeigen Sie durch eine Abschätzung, dass es für jedes $x > 0$ und jedes $C > 0$ ein n_0 gibt, ab dem $x^n/n! < C$ für $n \geq n_0$ ist.

Warum sollten Sie nicht die Ungleichungsliste mit den Bausteinen vom Auswendig-Blatt verwenden?

Lösung:

Wir können die Abschätzungsliste nicht verwenden, weil es sich um asymptotische Abschätzungen handelt und wir hier nach einem expliziten endlichen n_0 gefragt sind ab dem die Ungleichung richtig ist. Beim Ausschreiben der Terme in der Ungleichung

$$\frac{x^n}{n!} = \frac{x \cdot x \cdots x}{1 \cdot 2 \cdots n} < C$$

trennen wir die Stelle k , ab der der Faktor im Nenner über dem x im Zähler liegt:

$$\frac{x^n}{n!} = \frac{x \cdot x \cdots x}{1 \cdot 2 \cdots k} \cdot \frac{x \cdot x \cdots x}{(k+1) \cdots n} < C.$$

Die Idee ist jetzt, dass die Terme $\frac{x}{k}$ im zweiten Block kleiner als ein b , und das wieder kleiner als 1 sind, aber beliebig häufig aufmultipliziert werden können durch Steigerung von n . Die k vielen Faktoren im ersten Block bleiben dabei gleich. Damit lässt sich das Produkt aus dem ersten Block dann unter die Schranke C drücken. Dabei ist k fest und wir wählen n so groß, dass die Ungleichung erfüllt wird:

$$\underbrace{\frac{x \cdot x \cdots x}{1 \cdot 2 \cdots k}}_{\text{Feste Zahl } a} \cdot \underbrace{\frac{x \cdot x \cdots x}{(k+1) \cdot (k+2) \cdots n}}_{\text{jeder Bruch kleiner als } b < 1} \leq a \cdot b^{n-k} \stackrel{!}{<} C.$$

Also mit Umformungstechniken für $a = k!$ und $b = \frac{x}{k+1}$

$$ab^{n-k} < C \Leftrightarrow (n-k) \ln(b) < \ln\left(\frac{C}{a}\right) \Leftrightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{C}{a}\right)}{\ln(b)} + k.$$

Im letzten Schritt dreht sich das Ungleichheitszeichen, da $x < k$, folglich $b = x/k < 1$ und $\ln(b)$ negativ. Damit können wir n konkret ausrechnen abhängig davon, wie groß x und wie klein C ist.

Von der Logik her ist der Ablauf dann wie folgt:

- Man bekommt x und C vorgegeben,
- Man wählt k so groß, dass $b = (x/(k+1)) < 1$.
- Man wählt $n > k$ so groß, dass b^{n-k} das a unter C drückt.

Das dient aber nur der Veranschaulichung, die Punkte gibt es für die richtige Definition von a , b und die Abschätzung für n am Schluss.



GWStetig/FktGW/Ag_Asymptoten_RationaleFunktionen.tex

Aufgabe 63.304 (Asymptoten von algebraischen Funktionen)

jgl

Bestimmen Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ und die Gleichung(en) der Asymptote(n) des Graphen der Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit

a) $x \mapsto f(x) := \frac{3}{x+1}$

$$g : x = -1 \ (x \rightarrow -1), \ h : y = 0 \ (x \rightarrow \pm\infty)$$

Lösung:

Es ist $u = -1$ eine Polstelle von f , und es strebt $\frac{3}{x+1} \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$ bzw. $x \rightarrow -\infty$. Asymptoten sind deshalb $g : x = -1 \ (x \rightarrow -1)$ und $h : y = 0 \ (x \rightarrow \pm\infty)$.

b) $x \mapsto f(x) := \frac{6x^2}{x^2-4}$

$$g_1 : x = -2 \ (x \rightarrow -2), \ g_2 : x = 2 \ (x \rightarrow 2), \ h : y = 6 \ (x \rightarrow \pm\infty)$$

Lösung:

Es sind $u_1 = -2$ und $u_2 = 2$ Polstellen von f , und es strebt $\frac{6x^2}{x^2-4} = 6 + \frac{24}{x^2-4} \rightarrow 6$ für $x \rightarrow \infty$ bzw. $x \rightarrow -\infty$. Asymptoten sind deshalb $g_1 : x = -2 \ (x \rightarrow -2)$, $g_2 : x = 2 \ (x \rightarrow 2)$ und $h : y = 6 \ (x \rightarrow \pm\infty)$.

c) $x \mapsto f(x) := \frac{p(x)}{4x^2+4},$

$$h : y = 2x - \frac{1}{4} \ (x \rightarrow \pm\infty)$$

Lösung:

Mit der Polynomdivision

$$8x^3 - x^2 + 12x + 11 = (4x^2 + 4) \cdot \left(2x - \frac{1}{4}\right) + 4x + 12$$

erhält man

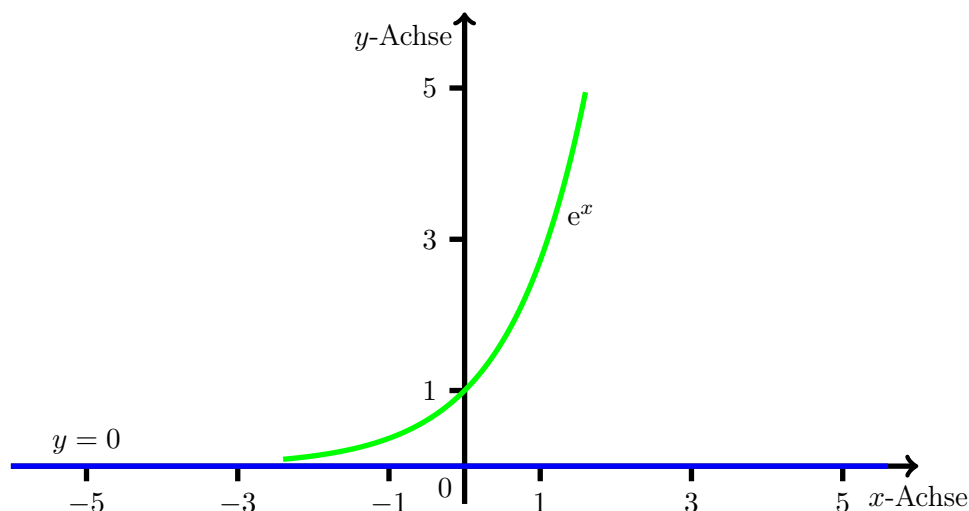
$$f(x) = \frac{8x^3 - x^2 + 12x + 11}{4x^2 + 4} = 2x - \frac{1}{4} + \frac{x+3}{x^2+1}$$

Somit beschreibt $h : y = 2x - \frac{1}{4}$ die Asymptote für $x \rightarrow \pm\infty$.

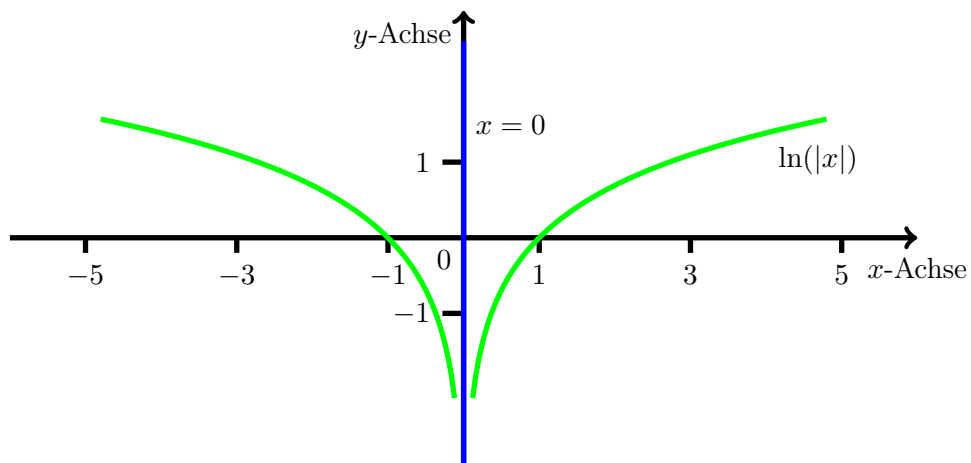
wobei $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto p(x) := 8x^3 - x^2 + 12x + 11$ ein Polynom dritten Grades darstellt.



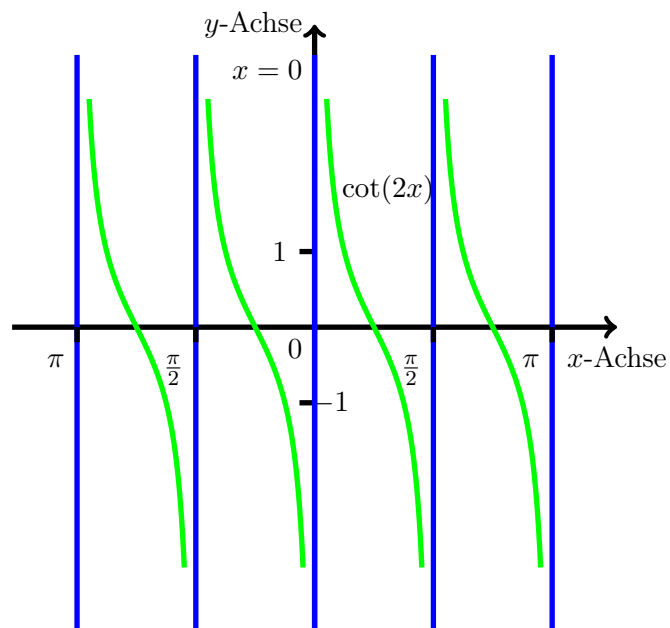
GWStetig/FktGW/Ag_Asymptoten_TranszendenteFktZeichnung1.tex



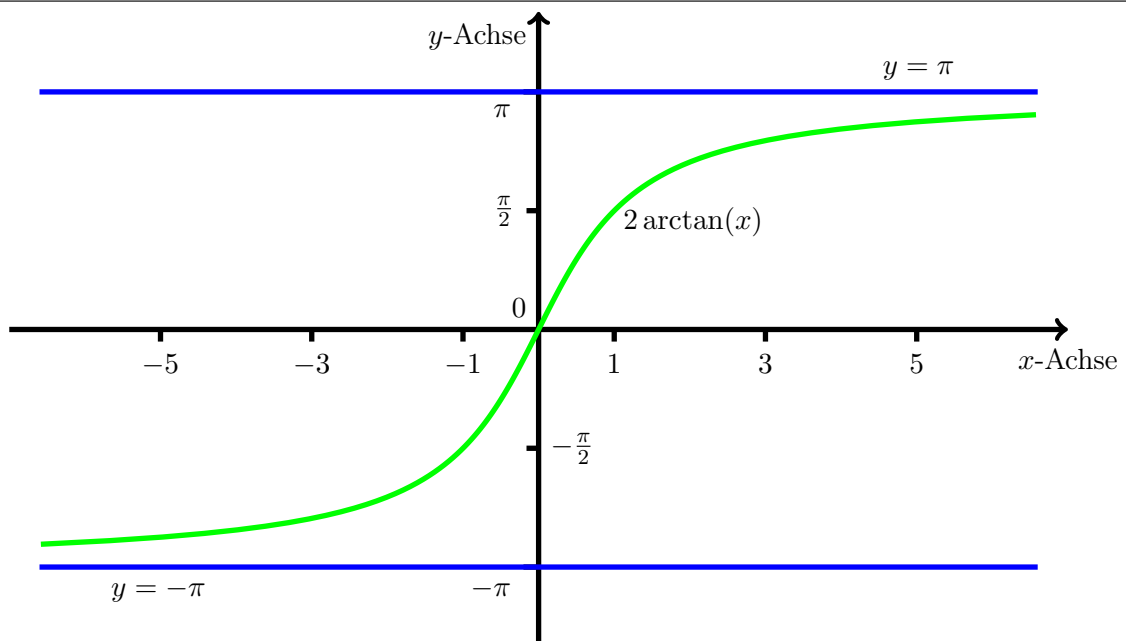
GWStetig/FktGW/Ag_Asymptoten_TranszendenteFktZeichnung2.tex



GWStetig/FktGW/Ag_Asymptoten_TranszendenteFktZeichnung3.tex



GWStetig/FktGW/Ag_Asymptoten_TranszendenteFktZeichnung4.tex



**Aufgabe 63.305** (Asymptoten von transzendenten Funktionen)

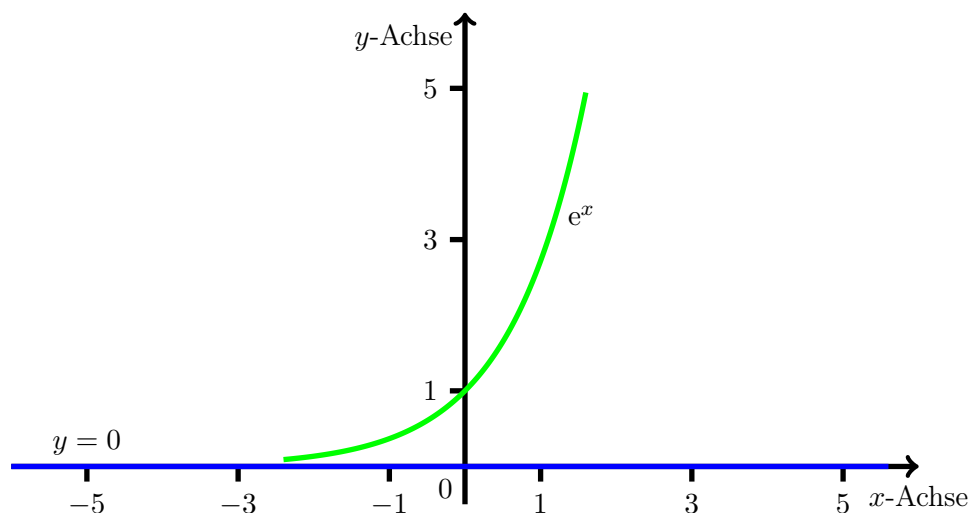
Zeichnen Sie jeweils die Asymptoten des Graphen der Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit

a) $x \mapsto f(x) := \exp(x)$ und $D := \mathbb{R}$

$$h : y = 0 \text{ für } x \rightarrow -\infty$$

Lösung:

Es wird die Asymptote $h : y = 0$ für $x \rightarrow -\infty$ zeichnerisch dargestellt:

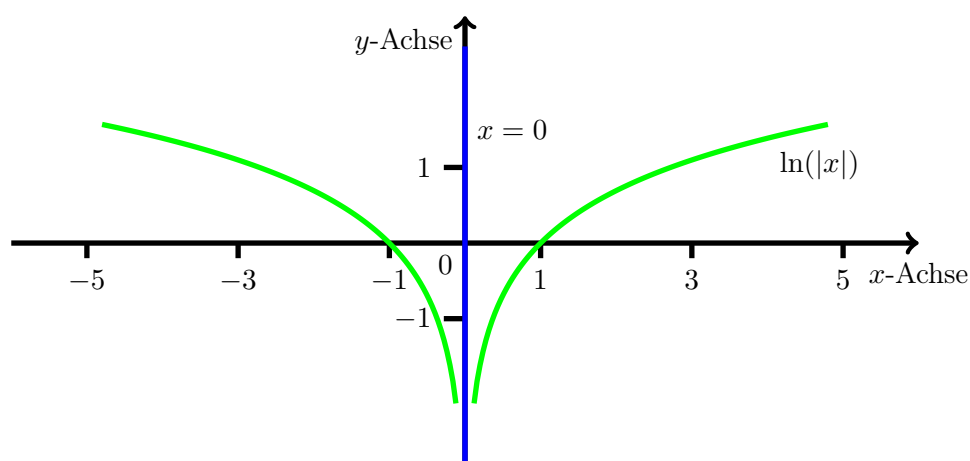


b) $x \mapsto f(x) := \ln(|x|)$ und $D := \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$g : x = 0 \text{ für } x \rightarrow 0$$

Lösung:

Es wird die Asymptote $g : x = 0$ für $x \rightarrow 0$ zeichnerisch dargestellt:

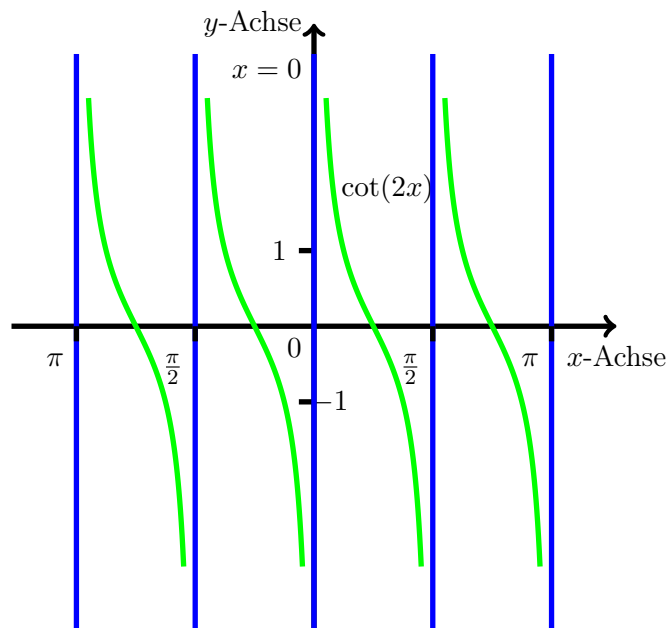


c) $x \mapsto f(x) := \cot(2x)$ und $D := [-\pi; \pi]$

$$g_k : x = \frac{\pi k}{2} \text{ (} x \rightarrow \frac{\pi k}{2} \text{) für } k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

Lösung:

Es werden die Asymptoten $g_k : x = \frac{\pi k}{2}$ ($x \rightarrow \frac{\pi k}{2}$) für $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ zeichnerisch dargestellt:

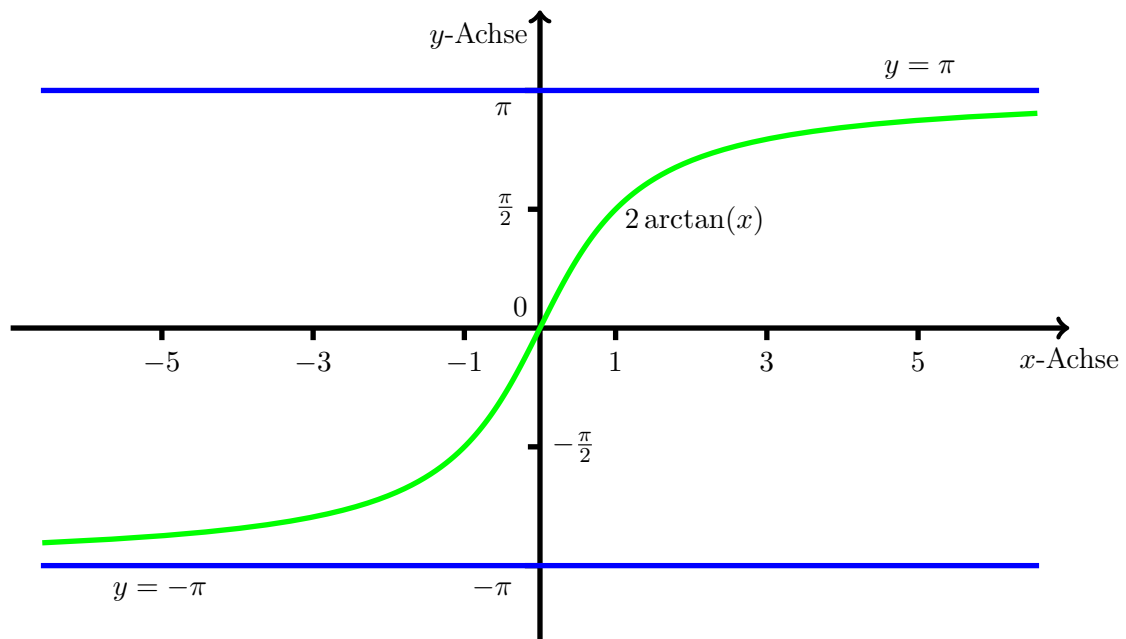


d) $x \mapsto f(x) := 2 \cdot \arctan(x)$ und $D := \mathbb{R}$

$$h_1 : y = \pi \ (x \rightarrow \infty), \ h_2 : y = -\pi \ (x \rightarrow -\infty)$$

Lösung:

Es werden die Asymptoten $h_1 : y = \pi \ (x \rightarrow \infty)$ und $h_2 : y = -\pi \ (x \rightarrow -\infty)$ zeichnerisch dargestellt:



GWStetig/FktGW/Ag_Grenzwerte_RationaleTerme.tex

Aufgabe 63.306 (Grenzwerte)

jgl

Ermitteln Sie folgende Grenzwerte, sofern diese existieren:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x}{16 - x}$

-8

Lösung:

Aus der Polynomdivision $8x = (-x + 16) \cdot (-8) + 128$ folgt für $x > 16$ dann

$$\frac{8x}{16-x} = -8 + \frac{128}{16-x} \rightarrow -8 + 0 = -8$$

für $x \rightarrow \infty$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3-21x^2}{4-3x^2-20x}$

7

Lösung:

Für $x < -1$ ergibt sich

$$\frac{x+3-21x^2}{4-3x^2-20x} = \frac{x^2(-21 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2})}{x^2(-3 - \frac{20}{x} + \frac{4}{x^2})} = \frac{-21 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{-3 - \frac{20}{x} + \frac{4}{x^2}} \rightarrow \frac{-21 + 0 + 0}{-3 - 0 + 0} = 7$$

für $x \rightarrow -\infty$.

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4+8}{x^3+4}$

-6

Lösung:

Wegen $x^3 + 4 \rightarrow (-2)^3 + 4 = -4 \neq 0$ und $x^4 + 8 \rightarrow (-2)^4 + 8 = 24$ für $x \rightarrow -2$ erhält man den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4+8}{x^3+4} = \frac{24}{-4} = -6$.

d) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{6-x-x^2}{x+3}$

5

Lösung:

Wegen

$$\begin{aligned} 6-x-x^2 &= -\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 6\right) = -\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right) \\ &= -\left(x + \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right) = -(x-2) \cdot (x+3) \end{aligned}$$

ergibt sich für $x \neq -3$ dann:

$$\frac{6-x-x^2}{x+3} = -x+2 \rightarrow -(-3)+2=5$$

für $x \rightarrow -3$.

e) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{6}{(x-8)^2}$

div. (∞)

Lösung:

Für alle reellen Zahlen x gilt $(x-8)^2 \geq 0$. Zudem steht $(x-8)^2 \rightarrow (8-8)^2 = 0$ für $x \rightarrow 8$. Deshalb strebt wegen $6 > 0$ der Bruch

$$\frac{6}{(x-8)^2} \rightarrow \infty$$

für $x \rightarrow 8$, sodass der Grenzwert nicht existiert (und nur als uneigentlicher Grenzwert ∞ vorhanden ist).

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{12}{x^3 - 1}$

div.

Lösung:

Für $x \rightarrow 1$ strebt $x^3 - 1 \rightarrow 1^3 - 1 = 0$. Weiter ist $x^3 > 1$ und damit $x^3 - 1 > 0$ für $x > 1$. Folglich ist

$$\frac{12}{x^3 - 1} \rightarrow \infty \quad \text{für } x \rightarrow 1+$$

Deshalb existiert der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{12}{x^3 - 1}$ nicht.

Wegen $x^3 < 1$, also $x^3 - 1 < 0$, für $x < 1$ strebt

$$\frac{12}{x^3 - 1} \rightarrow -\infty \quad \text{für } x \rightarrow 1-$$

Somit existiert $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{12}{x^3 - 1}$ auch nicht als uneigentlicher Grenzwert.



GWStetig/FktGW/Ag_Grenzwerte_Sandwich.tex

Aufgabe 63.307 (Sandwich Theorem)

vr

Verwenden Sie das Sandwich Theorem um die folgenden Grenzwerte zu berechnen:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + \sin(x)}$

0

Lösung: Verwende, dass $-1 \leq \sin x \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ die Abschätzung

$$\frac{1}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{x^2 + \sin x} \leq \frac{1}{x^2 - 1}$$

Die Grenzwerte links und rechts sind gleich 0:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 \pm 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \cdot \frac{1}{x^2}}{x^2 \left(1 \pm \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{1 \pm \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1 \pm 0} = 0$$

Damit ist auch der gesuchte Grenzwert gleich 0.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{5x^2 + 3}{\ln(x^2 + 1)}\right)$

0

Lösung: Verwende, dass $-1 \leq \sin y \leq 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Damit gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ die Abschätzung

$$-1 \leq \sin\left(\frac{5x^2 + 3}{\ln(x^2 + 1)}\right) \leq 1$$

und

$$-|x| \leq x \sin\left(\frac{5x^2 + 3}{\ln(x^2 + 1)}\right) \leq |x|$$

Da die Grenzwerte links und rechts gleich Null sind:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \pm |x| = 0$$

ist auch der gesuchte Grenzwert gleich 0.

c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} e^{3+\cos(x) \cdot \arctan(x)}$

e^3

Lösung: Wir verwenden dass $-\frac{\pi}{2} < \arctan(x) < \frac{\pi}{2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Weiterhin verwenden wir, dass e^x eine monoton wachsende Funktion ist, d.h., aus $x_1 \leq x_2$ folgt, dass auch $e^{x_1} \leq e^{x_2}$. Damit gelten für alle $x \in \mathbb{R}$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned} 3 - |\cos x| \cdot \frac{\pi}{2} &< 3 + \cos(x) \arctan(x) < 3 + |\cos x| \cdot \frac{\pi}{2} \\ &\Downarrow \\ e^{3-|\cos x| \cdot \frac{\pi}{2}} &< e^{3+\cos(x) \arctan(x)} < e^{3+|\cos x| \cdot \frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

Grenzwerte links und rechts sind gleich:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} e^{3 \pm |\cos x| \cdot \frac{\pi}{2}} = e^{3 \pm |\cos \frac{\pi}{2}| \cdot \frac{\pi}{2}} = e^{3 \pm 0 \cdot \frac{\pi}{2}} = e^3$$

Damit ist auch der gesuchte Grenzwert gleich e^3 .

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) + 1}{x \cdot \tanh\left(\frac{1}{x}\right) + 5}$

$\frac{2}{5}$

Lösung: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt dass $-1 < \tanh x < 1$. Damit gilt

$$\begin{aligned} 1 &< \tanh\left(\frac{1}{x}\right) < 1 \\ &\Downarrow \\ -|x| + 5 &< x \tanh\left(\frac{1}{x}\right) + 5 < |x| + 5 \end{aligned}$$

Für alle $x < 5$ (was die Umgebung des Nullpunktes einschliesst) gilt

$$\frac{\cos x + 1}{|x| + 5} < \frac{\cos x + 1}{x \tanh\left(\frac{1}{x}\right) + 5} < \frac{\cos x + 1}{-|x| + 5}$$

Die Grenzwerte links und rechts sind gleich:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 1}{\pm|x| + 5} = \frac{\cos 0 + 1}{\pm|0| + 5} = \frac{2}{5}$$

Damit ist auch der gesuchte Grenzwert gleich $\frac{2}{5}$.



GWStetig/FktGW/Ag_Grenzwerte_UmformungenSandwichlemma.tex

Aufgabe 63.308 (Grenzwerte)

jgl

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{8}{x}\right)$

0

Lösung:

Für $z > 0$ ist $0 \leq \sin(z) \leq z$ aufgrund der Definition der Sinusfunktion am Einheitskreis und der angegebenen Ungleichung (eine solche „vereinfachende“ Ungleichung heißt auch Abschätzung). Da $\frac{8}{x} > 0$ für $x > 0$ ist, folgt

$$0 \leftarrow 0 \leq \sin\left(\frac{8}{x}\right) \leq \frac{8}{x} \rightarrow 0$$

für $x \rightarrow \infty$.

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x} \cdot \cos(6x))$

0

Lösung:

Die reelle Kosinusfunktion ist beschränkt: Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $-1 \leq \cos(6x) \leq 1$. Zusammen mit $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$ und $e^{-x} > 0$ ergibt sich

$$0 \leftarrow -e^{-x} \leq e^{-x} \cos(6x) \leq e^{-x} \rightarrow 0$$

für $x \rightarrow \infty$.

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x \cdot \cos(x)}$

2

Lösung:

Mit den Additionstheoremen der trigonometrischen Funktionen erhält man $\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$ und für $0 < x < 1$ dann

$$q(x) := \frac{\sin(2x)}{x \cdot \cos(x)} = \frac{2 \sin(x) \cdot \cos(x)}{x \cdot \cos(x)} = 2 \cdot \frac{\sin(x)}{x}$$

Mit der angegebenen Ungleichung (Abschätzung) $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$ folgt

$$2 \leftarrow 2 \left(1 - \frac{x^2}{6}\right) \leq 2 \cdot \frac{\sin(x)}{x} \leq 2 \cdot \frac{x}{x} = 2 \rightarrow 2$$

für $x \rightarrow 0+$. Wegen $\sin(-z) = -\sin(z)$ ist $\frac{\sin(-z)}{-z} = \frac{\sin(z)}{z}$, sodass sich derselbe Grenzwert für $x \rightarrow 0-$ ergibt. Damit stimmen linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert überein. Insgesamt erhält man damit 2 als Grenzwert.

Alternativ kann man die Potenzreihendarstellung vom Sinus einsetzen und ausnutzen, dass Potenzreihen stetig sind:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} \left(x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 + \frac{1}{x} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{0^{2n}}{(2n+1)!} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (2 + 0) = 2. \end{aligned}$$

Hinweis: Es gilt: $x - \frac{1}{6}x^3 \leq \sin(x) \leq x$ für alle $x \geq 0$.



GWStetig/FktGW/Ag_Grenzwerte_einfach.tex

Aufgabe 63.309 (Grenzwerte)

jgl

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 3)^2 - (3 - x^2)^2}{6x^2}$

2

Lösung:

Für $x > 0$ gilt

$$\frac{(x^2 + 3)^2 - (3 - x^2)^2}{6x^2} = \frac{x^4 + 6x^2 + 9 - (9 - 6x^2 + x^4)}{6x^2} = 2 \rightarrow 2$$

für $x \rightarrow \infty$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin(x)}{x}$

0

Lösung:

Die reelle Sinusfunktion ist beschränkt. Für eine reelle Zahl x gilt nämlich $-1 \leq \sin(x) \leq 1$. Für $x < 0$ folgt daraus

$$0 \leftarrow -\frac{1}{x} \geq \frac{\sin(x)}{x} \geq \frac{1}{x} \rightarrow 0$$

für $x \rightarrow -\infty$. Somit ist $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$.

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 + 7x}$

-4

Lösung:

Eine Idee zur Umformung der Differenz(!) zweier Wurzelausdrücke bietet die dritte binomische Formel $(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$: Wenn sie auf $a = \sqrt{r}$ und $b = \sqrt{s}$ mit $r, s \geq 0$ angewandt wird, ergibt sich

$$(\sqrt{r} - \sqrt{s}) \cdot (\sqrt{r} + \sqrt{s}) = r - s.$$

Für $x > 1$ ist $x^2 - x = x(x - 1) > 0$ und $x^2 + 7x > 0$. Der gegebene Term $\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 + 7x}$ wird mit $\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 7x}$ erweitert:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 + 7x} &\cdot \frac{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 7x}}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 7x}} = \frac{(x^2 - x) - (x^2 + 7x)}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 7x}} \\ &= \frac{-8x}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 7x}} \\ &= \frac{-8x}{x \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{7}{x}} \right)} \\ &= \frac{-8}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{7}{x}}} \\ &\rightarrow \frac{-8}{\sqrt{1 - 0} + \sqrt{1 + 0}} = -4. \end{aligned}$$

für $x \rightarrow \infty$.



GWStetig/FktGW/Ag_Grenzwerte_einfach2_bau.tex

Aufgabe 63.310 (Noch mehr Grenzwerte wiederholen)

Bestimmen Sie diese Grenzwerte (mit ausführlichem Rechenweg):

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x}{x^2 - 1}$

1

div.

d) $\lim_{x \rightarrow \pi} \tan(x)$

0

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 32}{x^2 - 4}$

20

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(x)}$

0

Lösung:

Hier ist Vorsicht geboten: Da der Grenzwert nicht für $x \rightarrow \infty$ genommen wird, gelten einige Regeln nicht. Beispielsweise entscheidet beim ersten Bruch nicht die höchste x -Potenz über den Grenzwert, sondern die Nullstellen in Zähler und Nenner:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1) \cdot x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x) = 1.$$

Der Grenzwert ist konvergent, weil sich der kritische Term $x^2 - 1$ im Nenner hier wegekürzen lässt. Dieses Problem kann man auch durch Polynomdivision lösen.

Der zweite Grenzwert ist

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\underbrace{\frac{1}{x-1}}_{\text{div.}} - \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{\rightarrow \frac{1}{2}} \right) \text{ divergent.}$$

Der erste Bruch ist divergent, weil $\frac{1}{x-1} \rightarrow \infty$ strebt für $x \rightarrow 1+$ (von rechts) bzw. $\frac{1}{x-1} \rightarrow -\infty$ für $x \rightarrow 1-$ (von links).

Beim dritten Grenzwert kann man nicht (so ohne Weiteres) kürzen, aber zum Beispiel die Regel von de l'Hôpital anwenden:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 32}{x^2 - 4} \stackrel{\text{Fall}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^4}{2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5}{2} x^3 = \frac{5}{2} \cdot 2^3 = 20.$$

Beim vierten Grenzwert ist einfach

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \tan(x) = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\sin(\pi)}{\cos(\pi)} = 0$$

weil keine Null im Nenner auftaucht (und die trigonometrischen Funktionen stetig sind).

Beim fünften Grenzwert ist

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(x)} = 0,$$

weil $x \rightarrow 0$ im Zähler ist und der Nenner $\ln(x) \rightarrow -\infty$ den Wert nur noch näher an die Null bringt.



GWStetig/FktGW/Ag_Grenzwerte_einfach_wiwi.tex

Aufgabe 63.311 (Einseitige Funktionsgrenzwerte)

Bestimmen Sie diese Funktionsgrenzwerte:

a) $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \quad -1$

Lösung: Die erste Funktion ist stetig (und definiert) in $x_0 = 0$, also darf man den Grenzwert direkt einsetzen:

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{0^2 - 1}{0^2 + 1} = -1.$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2} \right) \quad -\infty$

Lösung: Für die zweite Funktion gilt, dass man zwei divergente Terme nicht gleichzeitig aus dem Limes ziehen darf. Man muss sie erst durch Bildung des Hauptnenners zu einem einzigen Term vereinen und von diesem dann konvergente Terme abspalten:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{x}{x^2} - \frac{x+1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x - (x+1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0+} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\infty.$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0-} \left(1 - \frac{x+1}{x} \right) \quad \infty$$

Lösung: Bei der dritten Funktion ergibt die gleiche Umformung

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \left(1 - \frac{x+1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0-} \left(\frac{x - (x+1)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0-} \left(-\frac{1}{x} \right) = \infty$$

mit positivem Vorzeichen. Dabei ist der Term $\frac{1}{x}$ negativ (weil x von links an 0 herangeht), also ist $-\frac{1}{x}$ während des Grenzwertübergangs positiv.

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0+} \left(1 - \frac{x+1}{x} \right) \quad -\infty$$

Lösung: Bei der vierten Funktion ist es umgekehrt:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \left(1 - \frac{x+1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{x - (x+1)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0+} \left(-\frac{1}{x} \right) = -\infty$$

weil $\frac{1}{x}$ hier positiv und $-\frac{1}{x}$ negativ ist.



GWStetig/FktGW/Ag_Grenzwerte_elementar_mittel.tex

Aufgabe 63.312 (Grenzwerte)

Untersuchen Sie, ob die (rechtsseitigen, linksseitigen) Grenzwerte existieren:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} (3\sqrt{x+2} - \sqrt{9x}). \quad 0$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x} - \frac{1}{2}}, \quad \text{div.}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(-6x)}{\sin(4x)}, \quad -\frac{3}{2}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|1-x|}{5x-5}, \quad \text{linksseitig: } -\frac{1}{5}, \text{ rechtsseitig: } +\frac{1}{5}$$

Lösung: Es wird untersucht, ob die (linksseitigen, rechtsseitigen) Grenzwerte existieren:

a) Für $x > 0$ gilt

$$\begin{aligned} 3\sqrt{x+2} - \sqrt{9x} &= 3(\sqrt{x+2} - \sqrt{x}) \\ &= 3 \cdot \frac{(x+2) - x}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{6}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} \rightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

b) Für $x > 0$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &:= \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x} - \frac{1}{2}} = \frac{x \cdot (\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x}})}{x^{\frac{3}{4}} \cdot (\sqrt[4]{1 + \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{2\sqrt[4]{x^3}})} \\ &= \sqrt[4]{x} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{1 + \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{2\sqrt[4]{x^3}}} \end{aligned}$$

Der zweite Faktor konvergiert gegen 1 für $x \rightarrow \infty$. Wegen $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[4]{x^3} = \infty$ ist somit f bestimmt divergent mit $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

c) Für $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ mit $x \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{\tan(-6x)}{\sin(4x)} &= \frac{\sin(-6x)}{\sin(4x) \cdot \cos(-6x)} \\ &= -\frac{\sin(6x)}{\sin(4x) \cdot \cos(6x)} \rightarrow -\frac{3}{2} \quad \text{für } x \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Denn aufgrund der Stetigkeit ist $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(6x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(4x) = 1$ und $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(6x) = 0$ sowie $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(4x) = 0$. Weiter ist $\sin$ differenzierbar, sodass dann nach der Regel von de l'Hospital $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(6x)}{\sin(4x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \cos(6x)}{4 \cos(4x)} = \frac{3}{2}$ gilt.

Alternativ mit Additionstheoremen:

$$\begin{aligned}\frac{\tan(-6x)}{\sin(4x)} &= \frac{\sin(-6x)}{\sin(4x) \cdot \cos(-6x)} \\ &= -\frac{1}{\cos(6x)} \frac{\sin(6x)}{\sin(4x)} = -\frac{1}{\cos(6x)} \frac{\sin(4x + 2x)}{\sin(4x)} \\ &= -\frac{1}{\cos(6x)} \frac{\sin(4x) \cos(2x) + \cos(4x) \sin(2x)}{\sin(4x)} \\ &= -\frac{1}{\cos(6x)} \left(\cos(2x) + \cos(4x) \frac{\sin(2x)}{\sin(2 \cdot 2x)} \right) \\ &= -\frac{1}{\cos(6x)} \left(\cos(2x) + \cos(4x) \frac{\sin(2x)}{2 \sin(2x) \cos(2x)} \right) \\ &= -\frac{1}{\cos(6x)} \left(\cos(2x) + \frac{\cos(4x)}{2 \cos(2x)} \right)\end{aligned}$$

Es ist $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(6x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(4x) = 1$ und $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(2x) = 1$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(-6x)}{\sin(4x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{\cos(6x)} \left(\cos(2x) + \frac{\cos(4x)}{2 \cos(2x)} \right) \\ &= -\frac{1}{1} \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 1} \right) = -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

d) Es wird der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert von $f(x) := \frac{|1-x|}{5x-5}$ an der Stelle $a = 1$ bestimmt:

- Für $x < 1$ gilt $f(x) = \frac{1-x}{5(x-1)} = -\frac{1}{5}$, sodass $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = -\frac{1}{5}$ ist.
- Für $x > 1$ gilt $f(x) = \frac{-(1-x)}{5(x-1)} = \frac{1}{5}$, sodass $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \frac{1}{5}$ ist.

Daher besitzt f keinen Grenzwert an der Stelle $a = 1$.



GWStetig/FktGW/Ag_Grenzwerte_ohneLH.tex

Aufgabe 63.313 (Grenzwerte, teilweise schwer)

rd

Bestimmen Sie, soweit existent, die folgenden Funktionsgrenzwerte. Keine Begründung erforderlich.

	Grenzwert
a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 1}{x^4 + 1}$	a) 1
b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	b) 1
c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 + 3x^3 - 18x^2 - 6x + 18}{x^2 - x - 6}$	c) 15
d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x}$	d) 1
e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x}$	e) 0
f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 5x}{5^x - 1}$	f) $\frac{5}{\ln 5}$
	Grenzwert
g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x)}{x - 1}$	g) -1
h) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$	h) 0
i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$	i) 1
j) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(4 + \frac{\sin(x)}{x} \right)$	j) $\ln(5)$
k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2} + e^x}{e^{x^2} + e^{-x^2}}$	k) 1

Hinweis: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$.

Lösung:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 1}{x^4 + 1}$

1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 1}{x^4 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^4 - 1) \frac{1}{x^4}}{(x^4 + 1) \frac{1}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^4}}{1 + \frac{1}{x^4}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1.$$

Alternativ kann man hier auch l'Hospital verwenden.

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^x - e^{-x})e^{-x}}{(e^x + e^{-x})e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1.$$

Anmerkung: Hier führt l'Hospital nicht zum Ziel, da der neue Grenzwert nicht einfacher als der Originalgrenzwert ist.

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 + 3x^3 - 18x^2 - 6x + 18}{x^2 - x - 6}$

15 Wir beginnen mit dem Grenzwert im Zähler:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} (x^4 + 3x^3 - 18x^2 - 6x + 18) &= 3^4 + 3 \cdot 3^3 - 18 \cdot 3^2 - \underbrace{6 \cdot 3 + 18}_{=0} \\ &= 3^2 (\underbrace{3^2 + 3 \cdot 3 - 18}_{=0}) = 0. \end{aligned}$$

Nun untersuchen wir den Grenzwert im Nenner:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - x - 6) = 3^2 - 3 - 6 = 0.$$

Lösung mittels l'Hospital:

Zähler und Nenner gehen also beide gegen 0 und sind differenzierbar. Somit können wir die Regel von l'Hospital verwenden:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 + 3x^3 - 18x^2 - 6x + 18}{x^2 - x - 6} &\stackrel{(\text{l'Hosp.})}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^3 + 9x^2 - 36x - 6}{2x - 1} \\ &= \frac{4 \cdot 3^3 + 9 \cdot 3^2 - 36 \cdot 3 - 6}{2 \cdot 3 - 1} \\ &= \frac{3(4 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 36 - 2)}{5} \\ &= \frac{3(36 + 27 - 36 - 2)}{5} \\ &= \frac{3 \cdot 25}{5} \\ &= 15. \end{aligned}$$

Alternativlösung ohne l'Hospital:

Da Zähler und Nenner beides Polynome sind, kann man auch alternativ (ohne l'Hospital) so vorgehen, dass man im Zähler und im Nenner ein $(x - 3)$ ausklammert (das erfordert eine Polynomdivision). Es ergibt sich dann: $x^4 + 3x^3 - 18x^2 - 6x + 18 = (x - 3)(x^3 + 6x^2 - 6)$ im Zähler und $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$ im Nenner. Insgesamt erhalten wir also:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 + 3x^3 - 18x^2 - 6x + 18}{x^2 - x - 6} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x^3 + 6x^2 - 6)}{(x - 3)(x + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 + 6x^2 - 6}{x + 2} \\ &= \frac{3^3 + 6 \cdot 3^2 - 6}{3 + 2} \\ &= \frac{3(3^2 + 6 \cdot 3 - 2)}{5} \\ &= \frac{3(9 + 18 - 2)}{5} \\ &= \frac{3 \cdot 25}{5} \\ &= 15. \end{aligned}$$

d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x}$

1

Lösung mittels l'Hospital:

Zähler und Nenner konvergieren gegen 0, somit dürfen wir L'Hospital verwenden:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} \stackrel{(\text{l'Hosp.})}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x)}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Alternativlösung ohne l'Hospital:

Verwende die Potenzreihendefinition der $\sin$ -Funktion:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Falls nur der Grenzwert berechnet werden sollte, ohne jegliche weitere Begründung:

Ersetze die Sinusfunktion durch die Pünktchennotation der Potenzreihe:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 - 0 + 0 - 0 + \dots = 1$$

Falls auch eine Begründung benötigt ist: (Beachte: Begriffe wie Stetigkeit, Differenzierbarkeit oder Taylorreihe sind unter Umständen noch nicht eingeführt worden!) Da die Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergent ist, sind die folgenden Umformungen erlaubt:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x)}{x} &= \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{x} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{x^{2 \cdot 0}}{(2 \cdot 0 + 1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = 1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}}_{=: S(x)} = 1 + S(x) \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt zeigen wir mit Hilfe der Indexverschiebung, dass die Reihe $S(x)$ gegen Null konvergiert, wenn $x \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \stackrel{k=n-1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2(k+1)}}{(2(k+1)+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k} \cdot x^2}{(2k+3)!} = x^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k}}{(2k+3)!} \end{aligned}$$

Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k}}{(2k+3)!}$ ist absolut konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$ (Beweis, z.B., mittels Quotientenkriterium) und damit beschränkt. Allerdings kann diese Beschränkung x -abhängig sein (um dies zu umgehen, ist Stetigkeitsbegriff notwendig). Da wir aber nur den Grenzwert für $x \rightarrow 0$ benötigen, reicht es, eine Abschätzung der Reihe in einem Intervall $x \in (-1, 1)$ zu finden.

Für alle $x \in (-1, 1)$ gilt:

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k}}{(2k+3)!} \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+3)!}$$

Rechts steht jetzt eine Zahlenreihe, die nicht von x -abhängt. Da diese konvergent ist (Überprüfung z.B., mittels Quotientenkriterium), existiert eine Zahl $M \in \mathbb{R}$:

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k}}{(2k+3)!} \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+3)!} \leq M$$

und damit nach Sandwichkriterium

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} |S(x)| \leq \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot M = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 0} S(x) = 0.$$

Eingesetzt in Ausgangsgrenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + S(x)) = 1 + 0 = 1.$$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x}$

0

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\sin(x)}_{\text{beschränkt}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\rightarrow 0} = 0.$$

f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 5x}{5^x - 1}$

$\frac{5}{\ln 5}$

Wir beginnen mit dem Grenzwert im Zähler:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 5x) = 0^2 + 5 \cdot 0 = 0.$$

Nun untersuchen wir den Grenzwert im Nenner:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (5^x - 1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{x \ln 5} - 1) = \underbrace{e^{0 \cdot \ln 5}}_{=1} - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Lösung mittels l'Hospital:

Zähler und Nenner gehen also beide gegen 0 und sind differenzierbar. Somit können wir die Regel von l'Hospital verwenden:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 5x}{5^x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 5x}{e^{x \ln 5} - 1} \stackrel{\text{l'Hosp.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + 5}{(\ln 5)e^{x \ln 5}} \\ &= \frac{2 \cdot 0 + 5}{(\ln 5)e^{0 \cdot \ln 5}} = \frac{5}{\ln 5}. \end{aligned}$$

Alternativlösung mittels Potenzreihen:

Verwende die Potenzreihen Darstellung der Exponentialfunktion:

$$e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Mit $5 = e^{\ln 5}$ gilt

$$\begin{aligned} 5^x &= (e^{\ln 5})^x = e^{x \ln 5} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln 5)^n}{n!} \\ &= \frac{(x \ln 5)^0}{0!} + \frac{(x \ln 5)^1}{1!} + \frac{(x \ln 5)^2}{2!} + \frac{(x \ln 5)^3}{3!} + \dots \\ &= 1 + x \ln 5 + \frac{(x \ln 5)^2}{2!} + \frac{(x \ln 5)^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$

Falls nur das Ergebnis ohne weitere Begründung erforderlich: Ersetze den 5^x Term durch die Pünktchennotation der Potenzreihe:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 5x}{5^x - 1} &= \frac{x(x+5)}{\left(1 + x \ln 5 + \frac{(x \ln 5)^2}{2!} + \frac{(x \ln 5)^3}{3!} + \dots\right) - 1} = \frac{x(x+5)}{x \ln 5 + \frac{(x \ln 5)^2}{2!} + \frac{(x \ln 5)^3}{3!} + \dots} \\ &= \frac{x(x+5)}{x \left(\ln 5 + \frac{x(\ln 5)^2}{2!} + \frac{x^2(\ln 5)^3}{3!} + \dots\right)} = \frac{x+5}{\ln 5 + \frac{x(\ln 5)^2}{2!} + \frac{x^2(\ln 5)^3}{3!} + \dots} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{0+5}{\ln 5 + 0 + 0 + \dots} = \frac{5}{\ln 5} \end{aligned}$$

Falls auch die Begründung erforderlich: Beweis ähnlich wie in den Aufgabenteil ??.

g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x)}{x-1}$

-1

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x)}{x-1} = \frac{\cos(0)}{0-1} = -1.$$

Achtung: Da hier kein „ $\frac{0}{0}$ “-Fall und kein „ $\frac{\infty}{\infty}$ “-Fall vorliegt, dürfen wir hier *nicht* L'Hospital anwenden.

h) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$

0

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1) - x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Anmerkung: Beachten Sie die Ähnlichkeit dieser Aufgabe mit den Aufgaben (2.1e) und (2.1g) vom letzten Blatt.

i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

1

Zuerst einmal sollte darauf hingewiesen werden, dass im Allgemeinen aus $a \rightarrow 0$ und $b \rightarrow 0$ leider *nicht* folgt, dass $a^b \rightarrow 1$. In dieser konkreten Aufgabe kommt zwar in der Tat 1 heraus, aber das ist nicht immer so. Siehe Aufgabenteil (??) für ein Beispiel, wo Basis und Exponent beide gegen 0 gehen, aber der Grenzwert ist nicht 1. Wir haben zwar in der Vorlesung definiert, dass $0^0 = 1$ ist, aber die Grenzwertregeln, die wir für $+$, $-$, $\cdot$, $/$ haben, gelten *nicht* fürs Potenzieren. Deshalb bei Folgen oder Funktionen mit variablem Exponenten immer so vorgehen:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln(x)} \\ &= e^{\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) \right)} \\ &\stackrel{\text{Hinweis}}{=} e^0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Das wir den Grenzwert in die e -Funktion hineingezogen haben, liegt daran, dass die e -Funktion stetig ist.

j) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(4 + \frac{\sin(x)}{x} \right)$

$\ln(5)$

Wenn $x \rightarrow 0$, dann folgt $\frac{\sin(x)}{x} \rightarrow 1$ (nach Aufgabenteil (??)).

Aus unseren Grenzwertregeln folgt dann $4 + \frac{\sin(x)}{x} \rightarrow 4 + 1 = 5$.

Schließlich folgt aus der Stetigkeit des Logarithmus, dass

$$\ln \left(4 + \frac{\sin(x)}{x} \right) \rightarrow \ln(5).$$

k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2} + e^x}{e^{x^2} + e^{-x^2}}$

1

Bei diesem Bruch gehen Zähler und Nenner beide gegen ∞ (für $x \rightarrow \infty$). Wir dürften also l'Hospital anwenden. Leider wird der Grenzwert nicht einfacher, sondern komplizierter. Dies ist also ein typisches Beispiel für einen Fall, wo man L'Hospital anwenden könnte, dies aber überhaupt nicht weiter hilft...

Was stattdessen hilft, ist die Standardidee, dass man schaut, welcher Term im Nenner den Ausschlag gibt und dann Zähler und Nenner dadurch teilt (siehe auch Aufgabenteil (??)).

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2} + e^x}{e^{x^2} + e^{-x^2}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^{x^2} + e^x) \frac{1}{e^{x^2}}}{(e^{x^2} + e^{-x^2}) \frac{1}{e^{x^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + e^{x-x^2}}{1 + e^{-2x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + e^{x(1-x)}}{1 + e^{-2x^2}}\end{aligned}$$

Wegen $x(1-x) \rightarrow -\infty$ geht $e^{x(1-x)}$ gegen 0 und der Zähler gegen 1. Der Nenner auch, also ist der Grenzwert insgesamt 1.



GWStetig/GlmUndLStetig/Ag_StetigkeitGlm_ExistenzDesGWLiefertGlmStetigkeit.tex

Aufgabe 64.314 (Beweisaufgabe zur gleichmäßigen Stetigkeit)

SPF,EHH,CB

Zeigen Sie: Ist $f: [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x)$ stetig und existiert $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ (im eigentlichen Sinne, das heißt, es gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) =: \alpha \in \mathbb{R}$), so ist f gleichmäßig stetig auf $[0; \infty)$.

Tipps: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \alpha$ gilt genau dann, wenn für alle $\tilde{\varepsilon} \in \mathbb{R}$ mit $\tilde{\varepsilon} > 0$ ein $X_{\tilde{\varepsilon}} \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq \max(\{0; X_{\tilde{\varepsilon}}\})$ die Ungleichung $|f(x) - \alpha| < \tilde{\varepsilon}$ gilt.

Zerlegen Sie $[0; \infty) = [0; X_{\frac{\varepsilon}{3}}] \cup [X_{\frac{\varepsilon}{3}}; \infty)$ und unterscheiden Sie drei Fälle, je nachdem, aus welchem der beiden Intervalle Ihre Variablen stammen.

Wie hilft Ihnen der Satz von Heine?

Lösung:

Wegen $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \alpha$ gibt es für alle $\tilde{\varepsilon} \in \mathbb{R}$ mit $\tilde{\varepsilon} > 0$ ein $X_{\tilde{\varepsilon}} \in \mathbb{R}$ mit $|f(x) - \alpha| < \tilde{\varepsilon}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq \max(\{0; X_{\tilde{\varepsilon}}\})$.

Sei nun $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$.

Da f stetig auf dem kompakten Intervall $[0; X_{\frac{\varepsilon}{3}}]$ ist, ist $f|_{[0; X_{\frac{\varepsilon}{3}}]}$ nach dem Satz von Heine gleichmäßig stetig. Es gibt also ein $\delta(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ mit $\delta(\varepsilon) > 0$ und $|f(x) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $t \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq x \leq X_{\frac{\varepsilon}{3}}$, $0 \leq t \leq X_{\frac{\varepsilon}{3}}$ und $|x - t| < \delta(\varepsilon)$.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$ und alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t \geq 0$ und $|x - t| < \delta(\varepsilon)$ gilt dann

im Fall $x \leq X_{\frac{\varepsilon}{3}}$ und $t \leq X_{\frac{\varepsilon}{3}}$ die Abschätzung

$$|f(x) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon \quad \text{wegen } |x - t| < \delta(\varepsilon).$$

im Fall $x > X_{\frac{\varepsilon}{3}}$ und $t > X_{\frac{\varepsilon}{3}}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} |f(x) - f(t)| &= |f(x) - \alpha + \alpha - f(t)| \\ &\leq |f(x) - \alpha| + |\alpha - f(t)| \stackrel{x > X_{\frac{\varepsilon}{3}}}{<} \frac{\varepsilon}{3} + |f(t) - \alpha| \stackrel{t > X_{\frac{\varepsilon}{3}}}{<} \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon. \end{aligned}$$

im Fall $x \leq X_{\frac{\varepsilon}{3}} < t$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} |f(x) - f(t)| &= \left| f(x) - f\left(X_{\frac{\varepsilon}{3}}\right) + f\left(X_{\frac{\varepsilon}{3}}\right) - \alpha + \alpha - f(t) \right| \\ &\leq \left| f(x) - f\left(X_{\frac{\varepsilon}{3}}\right) \right| + \left| f\left(X_{\frac{\varepsilon}{3}}\right) - \alpha \right| + |\alpha - f(t)|. \end{aligned}$$

Wegen $x \leq X_{\frac{\varepsilon}{3}} < t$ gilt $|x - t| = t - x$, was $\left| x - X_{\frac{\varepsilon}{3}} \right| = X_{\frac{\varepsilon}{3}} - x < t - x = |x - t| < \delta(\varepsilon)$ liefert. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} |f(x) - f(t)| &\leq \left| f(x) - f\left(X_{\frac{\varepsilon}{3}}\right) \right| + \left| f\left(X_{\frac{\varepsilon}{3}}\right) - \alpha \right| + |\alpha - f(t)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \left| f\left(X_{\frac{\varepsilon}{3}}\right) - \alpha \right| + |\alpha - f(t)| \stackrel{X_{\frac{\varepsilon}{3}} > X_{\frac{\varepsilon}{3}}}{<} \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + |f(t) - \alpha| \stackrel{t > X_{\frac{\varepsilon}{3}}}{<} \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

im Fall $t \leq X_{\frac{\varepsilon}{3}} < x$ die Abschätzung $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$ auf demselben Weg im vorherigen Fall.

Also ist f gleichmäßig stetig auf $[0; \infty)$.



GWStetig/GlmUndLStetig/Ag_StetigkeitGlm_SinusVonEinsDurchX.tex

Aufgabe 64.315 (Chaos bei der Null)

EHH+SPF

Seien $a \in (0; 1)$ und $f: (0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Untersuchen Sie f und $f|_{(a;1]}$ auf gleichmäßige Stetigkeit!

f ist nicht gleichmäßig stetig, $f|_{(a;1]}$ hingegen schon

Lösung:

f ist als Komposition stetiger Funktionen stetig auf $(0; 1]$ und damit auch auf $(a; 1]$.

Behauptung: f ist nicht gleichmäßig stetig.

Idee: In der Nähe der 0 nimmt f die Werte 1 und 0 in immer kleineren Intervallen an.

Wegen $|1 - 0| = 1$ wählen wir $\varepsilon := \frac{1}{2}$ und suchen für jedes $\delta \in \mathbb{R}$ mit $\delta > 0$ ein $x_\delta \in (0; 1]$ und ein $t_\delta \in (0; 1]$ mit $f(x_\delta) = 1$, $f(t_\delta) = 0$ und $|x_\delta - t_\delta| < \delta$.

$$f(x_\delta) = 1 \iff \sin\left(\frac{1}{x_\delta}\right) = 1 \iff \frac{1}{x_\delta} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \iff x_\delta = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}} \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}.$$

$$f(t_\delta) = 0 \iff \sin\left(\frac{1}{t_\delta}\right) = 0 \iff \frac{1}{t_\delta} = \ell\pi \text{ für ein } \ell \in \mathbb{Z} \iff t_\delta = \frac{1}{\ell\pi} \text{ für ein } \ell \in \mathbb{Z}.$$

Hoffnung: Vielleicht klappt ja $\ell = 2k$. Dann liegen x_δ und t_δ schön nah beisammen.

Finde also ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\left|\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2n\pi}\right| < \delta$: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2n\pi}\right| &= \left|\frac{2}{4n\pi + \pi} - \frac{1}{2n\pi}\right| = \left|\frac{4n\pi - (4n\pi + \pi)}{(4n\pi + \pi) \cdot 2n\pi}\right| = \left|\frac{-\pi}{8n^2\pi^2 + 2n\pi^2}\right| \\ &= \left|\frac{-\pi}{2\pi^2} \cdot \frac{1}{4n^2 + n}\right| = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{4n^2 + n} \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{4n + n} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{5n} = \frac{1}{10\pi} \cdot \frac{1}{n} < \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Also gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $\delta \in \mathbb{R}$ mit $\delta > 0$

$$\left|\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2n\pi}\right| < \delta \iff \frac{1}{n} < \delta \iff n > \frac{1}{\delta}.$$

Wähle also $n_\delta := \left\lceil \frac{1}{\delta} \right\rceil + 1$, $x_\delta := \frac{2}{4\pi n_\delta + \pi}$ und $t_\delta := \frac{1}{2\pi n_\delta}$. Wegen $\delta > 0$ ist $\frac{1}{\delta} > 0$, also $n_\delta \geq 1$.

Wegen $0 < 1 \leq n_\delta$ gilt $0 < 4\pi n_\delta + \pi$ und $0 < 2\pi n_\delta$, was $x_\delta > 0$ und $t_\delta > 0$ nach sich zieht.

Außerdem liefert $n_\delta \geq 1$, dass $2\pi n_\delta \geq 2$ und $4\pi n_\delta + \pi \geq 3$ gilt. Das liefert also $x_\delta \leq \frac{1}{3} < 1$ und $t_\delta \leq \frac{1}{2} < 1$. Wegen $|x_\delta - t_\delta| < \delta$ und $|f(x_\delta) - f(t_\delta)| = |1 - 0| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon$ für alle $\delta \in \mathbb{R}$ mit $\delta > 0$ ist f nicht gleichmäßig stetig auf $(0; 1]$.

Behauptung: $f|_{(a;1]}$ ist gleichmäßig stetig auf $(a; 1]$.

Für alle $x \in (0; 1)$ liefert die Kettenregel

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx} \sin(x^{-1}) = \cos(x^{-1}) \cdot \frac{d}{dx} x^{-1} = \cos(x^{-1}) \cdot (-1) \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Für alle $x \in (0; 1]$ und alle $t \in (0; 1]$ liefert der Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein $\xi_{x,t} \in (\min\{x; t\}; \max\{x; t\})$ mit $f(x) - f(t) = f'(\xi_{x,t}) \cdot (x - t)$.

Setzt man für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ als maximalen Abstand $\delta_{\varepsilon,a} := a^2 \cdot \varepsilon$, so folgt für alle $x \in (a; 1]$ und alle $t \in (a; 1]$ mit $|x - t| < \delta_{\varepsilon,a}$ wegen $\xi_{x,t} > \min\{x; t\} > a$

$$|f(x) - f(t)| = |f'(\xi_{x,t}) \cdot (x - t)| = \left| -\frac{1}{\xi_{x,t}^2} \cdot \cos\left(\frac{1}{\xi_{x,t}}\right) \right| \cdot |x - t| < \frac{1}{\xi_{x,t}^2} \cdot \delta_{\varepsilon,a} < \frac{1}{a^2} \cdot a^2 \cdot \varepsilon = \varepsilon.$$

Also ist $f|_{(a;1]}$ gleichmäßig stetig auf $(a; 1]$.

Alternativ, mit Satz von Heine: f ist als Komposition stetiger Funktionen stetig auf $\left[\frac{a}{2}; 1\right]$. Nach dem Satz von Heine ist f dort auch gleichmäßig stetig. Mit der Definition der gleichmäßigen Stetigkeit folgt daraus, dass f auch auf $(a; 1] \subseteq \left[\frac{a}{2}; 1\right]$ gleichmäßig stetig ist.



GWStetig/Stetigkeit/Ag_Stetigkeit_Definition_leicht2.tex

Aufgabe 65.316 (Stetigkeit von Funktionen)

jgl

Untersuchen Sie, ob die nachstehenden Funktionen an der Stelle $a = 0$ stetig sind:

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := \begin{cases} \sin(x) \sin\left(\frac{2}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$ stetig in 0

b) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto g(x) := \begin{cases} \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ \pi & \text{für } x = 0. \end{cases}$ unstetig in 0

Lösung:

a) Die Funktion f ist in $a = 0$ stetig, da für jede Nullfolge (x_n) mit $x_n \neq 0$ dann $|f(x_n) - f(0)|$ gegen 0, also $(f(x_n))$ gegen $f(0)$ konvergiert.

b) Die Funktion g ist in $a = 0$ nicht stetig. Denn für die Nullfolge $(-\frac{1}{n})$ strebt $g(x_n) = \frac{\pi}{2} - \arctan(n)$ gegen $0 \neq \pi = g(0)$.



GWStetig/Stetigkeit/Ag_Stetigkeit_Definition_mittel.tex

Aufgabe 65.317 (Stetigkeit von Funktionen)

Bestimmen Sie diejenigen $p \in \mathbb{R}$, für welche die Funktion $f_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist mit $(14 \cdot 16 = 224)$

$$x \mapsto f_p(x) := \begin{cases} \frac{12x^2+3x-42}{2x+4} & \text{für } x < -2, \\ px^2 + 6x - 2p^2 & \text{für } -2 \leq x < 4, \\ \frac{12-p^2x^2-px}{x} & \text{für } x \geq 4. \end{cases}$$

Es ist nur $f_{-\frac{3}{2}}$ stetig (f_{-7} ist in $a = -2$ unstetig und $f_{\frac{7}{2}}$ ist in $b = 4$ unstetig).

Lösung:

Es sollen diejenigen Zahlen p bestimmt werden, für die f_p stetig ist. Wird f_p auf eines der Intervalle $(-\infty; -2)$, $[-2; 4)$ bzw. $[4; \infty)$ eingeschränkt, liegt jeweils eine Einschränkung einer rationalen Funktion vor. Diese ist somit stetig.

Damit f_p auf $\mathbb{R}$ stetig ist, muss der linksseitige Grenzwert in -2 sowie in 4 existieren, und es muss

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f_p(x) = f_p(-2) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} f_p(x) = f_p(4)$$

gelten (der rechtsseitige Grenzwert existiert aufgrund der Stetigkeit auf $[-2; 4)$ bzw. auf $[4; \infty)$ und ist gleich dem Funktionswert an der Stelle -2 bzw. 4).

$x = -2$: Wird f_p für $x < -2$ betrachtet, ergibt sich mit $14 \cdot 16 = (15 - 1) \cdot (15 + 1) = 225 - 1$ und

$$\begin{aligned} 12x^2 + 3x - 42 &= 3 \cdot \left((2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - 14 \right) = 3 \cdot \left((2x + \frac{1}{4})^2 - \frac{225}{16} \right) \\ &= 3 \cdot \left(2x + \frac{1}{4} - \frac{15}{4} \right) \cdot \left(2x + \frac{1}{4} + \frac{15}{4} \right) = 3 \cdot \left(2x - \frac{7}{2} \right) \cdot (2x + 4) \end{aligned}$$

dann

$$f_p(x) = 3 \cdot \left(2x - \frac{7}{2} \right) \xrightarrow{x \rightarrow -2^-} 3 \cdot \left(2 \cdot (-2) - \frac{7}{2} \right) = -\frac{45}{2}.$$

Somit existiert der linksseitige Grenzwert, und es folgt $-\frac{45}{2} \stackrel{!}{=} f_p(-2) = p \cdot (-2)^2 + 6 \cdot (-2) - 2p^2 = -2p^2 + 4p - 12$ und damit $2p^2 - 4p - \frac{21}{2} = 0$. Man erhält die Lösungen dieser Gleichung via

$$\begin{aligned} 0 &= 2p^2 - 4p - \frac{21}{2} & \iff & 0 = p^2 - 2 \cdot p \cdot 1 + 1^2 - 1 - \frac{21}{4} \\ \iff 0 &= (p-1)^2 - \frac{25}{4} & \iff & 0 = (p-1+\frac{5}{2}) \cdot (p-1-\frac{5}{2}) \\ \iff 0 &= (p+\frac{3}{2}) \cdot (p-\frac{7}{2}) & \iff & p \in \{-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\}. \end{aligned}$$

Somit ist f_p in -2 genau dann stetig, wenn $p = p_1 := -\frac{3}{2}$ oder $p = p_2 := \frac{7}{2}$ ist.

x = 4: Die Einschränkung auf $[-2; 4)$ führt auf eine (Einschränkung einer) Polynomfunktion, sodass der linksseitige Grenzwert in 4 für alle $p \in \mathbb{R}$ existiert.

Es ist noch zu überprüfen, ob der Grenzwert gleich dem Funktionswert an der Stelle 4 ist; das heißt, es zu klären, ob für $p = p_1$ bzw. $p = p_2$ die folgende Gleichung gilt

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f_p(x) = f_p(4)$$

$p_1 = -\frac{3}{2}$: Es ist

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f_{p_1}(x) = p_1 \cdot 4^2 + 6 \cdot 4 - 2p_1^2 = -\frac{3}{2} \cdot 16 + 24 - 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = -24 + 24 - \frac{9}{2} = -\frac{9}{2}.$$

Weiter ist

$$f_{p_1}(4) = \frac{12 - p_1^2 \cdot 4^2 - p_1 \cdot 4}{4} = 3 - 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - \left(-\frac{3}{2}\right) = 3 - 9 + \frac{3}{2} = -\frac{9}{2}.$$

Somit ist auch die Bedingung $\lim_{x \rightarrow 4^-} f_{p_1}(x) = f_{p_1}(4)$ erfüllt.

$p_2 = \frac{7}{2}$: Es ist

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f_{p_2}(x) = p_2 \cdot 4^2 + 6 \cdot 4 - 2p_2^2 = \frac{7}{2} \cdot 16 + 24 - 2 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 56 + 24 - \frac{49}{2} = \frac{111}{2}.$$

Weiter ist

$$f_{p_2}(4) = \frac{12 - p_2^2 \cdot 4^2 - p_2 \cdot 4}{4} = 3 - 4 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{7}{2} = -\frac{1}{2} - 49 = -\frac{99}{2}.$$

Daher ist die Bedingung $\lim_{x \rightarrow 4^-} f_{p_2}(x) = f_{p_2}(4)$ nicht erfüllt.

Alternative Vorgehensweise: Alternativ kann man auch hier die $p \in \mathbb{R}$ berechnen, für die $\lim_{x \rightarrow 4^-} f_p(x) = f_p(4)$ gilt: Für alle $p \in \mathbb{R}$ sind

$$f_p(4) = \frac{12 - p^2 \cdot 4^2 - 4p}{4} = 3 - 4p^2 - p \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} f_p(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (px^2 + 6x - 2p^2) = 16p + 24 - 2p^2.$$

Die Gleichung $f_p(4) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f_p(x)$ ist also für alle $p \in \mathbb{R}$ mit $-4p^2 - p + 3 = -2p^2 + 16p + 24$ erfüllt. Diese Gleichung ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} 0 &= 2p^2 + 17p + 21 & \iff & 0 = p^2 + 2 \cdot p \cdot \frac{17}{4} + \left(\frac{17}{4}\right)^2 - \frac{289}{16} + \frac{21}{2} \\ \iff 0 &= \left(p + \frac{17}{4}\right)^2 - \frac{121}{16} & \iff & 0 = \left(p + \frac{17}{4} + \frac{11}{4}\right) \cdot \left(p + \frac{17}{4} - \frac{11}{4}\right) \\ \iff 0 &= (p+7) \cdot \left(p + \frac{3}{2}\right) & \iff & p \in \{-7; -\frac{3}{2}\}. \end{aligned}$$

Somit ist f_p nur für $p = p_1 = -\frac{3}{2}$ stetig.



GWStetig/Stetigkeit/Ag_Stetigkeit_parameter_wiwi.tex

Finden Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{R}$ so, dass

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto f(x) := \begin{cases} |\log_5(1-x)|, & \text{falls } x < 0 \\ \alpha + \cos(\pi x), & \text{falls } 0 \leq x \leq 1 \\ \beta e^{x-1}, & \text{falls } x > 1 \end{cases}$$

überall stetig ist. Finden Sie dann die Monotoniebereiche und die beiden Randasymptoten.

$$\alpha = -1, \beta = -2, f \text{ streng monoton fallend, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

Lösung:

Innerhalb der einzelnen Fallunterscheidungen ist die Funktion stetig als Verkettung bekannter stetiger Funktionen. Die einseitigen Funktionsgrenzwerte an den Fallgrenzen sind

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) &\stackrel{\text{Fall 1}}{=} \lim_{x \rightarrow 0-} |\log_5(1-x)| \stackrel{\text{Einsetzen}}{=} |\log_5(1-0)| = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) &\stackrel{\text{Fall 2}}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} (\alpha + \cos(\pi x)) \stackrel{\text{Einsetzen}}{=} \alpha + \cos(0) = \alpha + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) &\stackrel{\text{Fall 2}}{=} \lim_{x \rightarrow 1-} (\alpha + \cos(\pi x)) \stackrel{\text{Einsetzen}}{=} \alpha + \cos(\pi) = \alpha - 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) &\stackrel{\text{Fall 3}}{=} \lim_{x \rightarrow 1+} (\beta e^{x-1}) \stackrel{\text{Einsetzen}}{=} \beta. \end{aligned}$$

Damit einseitige Funktionsgrenzen und Funktionswerte übereinstimmen müssen wir $\alpha = -1$ und $\beta = -2$ einsetzen. Die stetige Funktion lautet also

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} |\log_5(1-x)| & \text{falls } x < 0 \\ \cos(\pi x) - 1 & \text{falls } 0 \leq x \leq 1 \\ -2e^{x-1} & \text{falls } x > 1 \end{cases}.$$

Die Monotoniebereiche berechnen wir zunächst einmal innerhalb der Fallunterscheidungen, dann setzen wir sie zusammen:

- Fall 1: x steigend, $1-x$ fallend, $\log_5(1-x)$ fallend, aber wie verhält sich der Betrag? Für $x < 0$ ist $1-x > 1$, also ist $\log_5(1-x) = \frac{\ln(1-x)}{\ln(5)} > 0$ weil $\ln(1) = 0$ ist. Der Betrag ist also überflüssig und auf $(-\infty, 0)$ ist $f(x)$ streng monoton fallend.
- Fall 2: $x \in [0, 1]$ steigend, $\pi x \in [0, \pi]$, $\cos(\pi x) \in [1, -1]$ fallend, $\cos(\pi x) - 1 \in [0, -2]$ monoton fallend.
- Fall 3: x steigend, $x-1$ steigend, e^{x-1} steigend, $-2e^{x-1}$ fallend.

Die Funktion ist also insgesamt überall streng monoton fallend. Die Randasymptoten sind

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \stackrel{\text{Fall 1}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} |\log_5(1-x)| = \lim_{y \rightarrow \infty} |\log_5(y)| = \infty$$

sowie

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \stackrel{\text{Fall 3}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} (-2e^{x-1}) = -2 \lim_{y \rightarrow \infty} e^y = -\infty.$$



GWStetig/ZWS/Ag_ZWS_BildbereichBestimmen.tex

Aufgabe 66.319 (Bildbereich zweier Abbildungen)

Bestimmen Sie die maximalen Definitionsbereiche $D_f \subseteq \mathbb{R}$ und $D_g \subseteq \mathbb{R}$ sowie die Bildbereiche von

$$f : D_f \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto f(x) := \frac{3+4x}{1+x^2} \quad \text{und} \quad g : D_g \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto g(x) := \log_5 \left(1 + \frac{3+4x}{1+x^2} \right)$$

mit Hilfe des Zwischenwertsatzes!

$$D_f = \mathbb{R}, f(\mathbb{R}) = [-1, 4], D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\}, g(\mathbb{R} \setminus \{-2\}) = (-\infty, 1]$$

Lösung:

In f kann man jede beliebige Zahl einsetzen, also gilt $D_f = \mathbb{R}$. Die einseitigen Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

nützen hier erstmal nichts. Wir bestimmen daher die Extremwerte (aus dem Kapitel über Differenzialrechnung) von $f(x)$ über die erste Ableitung:

$$f'(x) \underset{\text{Quotientenregel}}{=} \frac{4 \cdot (1+x^2) - (3+4x) \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4x^2 + 4 - 6x - 8x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{-4x^2 - 6x + 4}{(1+x^2)^2}.$$

Die erste Ableitung wird Null falls

$$-4x^2 - 6x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = 0 \underset{pq\text{-Formel}}{\Leftrightarrow} x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 1} = -2, \frac{1}{2}$$

ist. Einsetzen ergibt $f(-2) = -1$ (Minimum) und $f(\frac{1}{2}) = 4$ (Maximum). Da die Funktion an den Rändern nicht gegen $\pm\infty$ läuft und es keine weiteren Extremwerte gibt, ist der Bildbereich nach dem Zwischenwertsatz $[-1, 4]$ wobei beide Werte auch angenommen werden an den Stellen $x_{1,2}$.

Alternative Lösung ohne Differenzialrechnung:

Wegen $f(-\frac{3}{4}) = \frac{3+4 \cdot (-\frac{3}{4})}{1+(-\frac{3}{4})^2} = \frac{3-3}{1+\frac{9}{16}} = \frac{0}{\frac{25}{16}} = 0$ ist $0 \in f(\mathbb{R})$.

Wir bestimmen, für welche $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = y$ geben kann:

$$\begin{aligned} \frac{3+4x}{1+x^2} = y &\Leftrightarrow 3+4x = y + yx^2 \Leftrightarrow 0 = yx^2 - 4x + y - 3 \\ &\Leftrightarrow 0 = y \cdot \left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{2}{y} + \left(\frac{2}{y} \right)^2 - \frac{4}{y^2} + 1 - \frac{3}{y} \right) \\ &\Leftrightarrow 0 = \left(x - \frac{2}{y} \right)^2 - \left(\frac{4}{y^2} + \frac{3}{y} - 1 \right) \Leftrightarrow \frac{4}{y^2} + \frac{3}{y} - 1 = \left(x - \frac{2}{y} \right)^2. \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann genau dann von (mindestens) einem $x \in \mathbb{R}$ gelöst werden, wenn $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\frac{4}{y^2} + \frac{3}{y} - 1 \geq 0$ ist. Für $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{4}{y^2} + \frac{3}{y} - 1 \geq 0 &\Leftrightarrow 4 + 3y - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \geq y^2 - 2 \cdot y \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2} \right)^2 - \frac{9}{4} - 4 \\ &\Leftrightarrow 0 \geq \left(y - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{25}{4} \Leftrightarrow 0 \geq \left(y - \frac{3}{2} + \frac{5}{2} \right) \cdot \left(y - \frac{3}{2} - \frac{5}{2} \right) \\ &\Leftrightarrow 0 \geq (y+1) \cdot (y-4) \\ &\Leftrightarrow (y+1 \leq 0 \text{ und } y-4 \geq 0) \quad \text{oder} \quad (y+1 \geq 0 \text{ und } y-4 \leq 0) \\ &\Leftrightarrow (y \leq -1 \text{ und } y \geq 4) \quad \text{oder} \quad (y \geq -1 \text{ und } y \leq 4) \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 4. \end{aligned}$$

Genau eine Lösung gibt es, wenn $\left(x - \frac{2}{y}\right)^2 = \frac{4}{y^2} + \frac{3}{y} - 1 = 0$ ist, sprich für $y = 4$ und $x = \frac{1}{2}$ bzw. für $y = -1$ und $x = -2$. Es gilt $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3+4 \cdot \frac{1}{2}}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3+2}{1+\frac{1}{4}} = \frac{5}{\frac{5}{4}} = 4$ und $f(-2) = \frac{3+4 \cdot (-2)}{1+(-2)^2} = \frac{3-8}{1+4} = \frac{-5}{5} = -1$.

Also nimmt f in $\frac{1}{2}$ ihr Maximum 4 und in -2 das Minimum -1 an.

Da f als Komposition stetiger Funktionen stetig ist, werden nach dem Zwischenwertsatz alle Werte zwischen Maximum und Minimum ebenfalls angenommen und es folgt $f(\mathbb{R}) = [-1, 4]$.

In $g(x)$ ist $\log_5(x)$ definiert für $x > 0$, also falls $f(x) > -1$ ist. Da -1 das (einzige) Minimum von $f(x)$ ist und für $x = -2$ angenommen wird folgt, dass der Definitionsbereich $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ ist. Da sowohl der Logarithmus wie auch das „+1“ monoton steigende Funktionen sind, überträgt sich das Maximum von f auf g zu $g\left(\frac{1}{2}\right) = \log_5(1+4) = 1$. Dagegen ist

$$\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \log_5(1+x) = -\infty.$$

Mit dem Zwischenwertsatz erhalten wir $(-\infty, 1]$ als Bildbereich für g .



GWStetig/ZWS/Ag_ZWS_ExistenzEinerLoesung.tex

Aufgabe 66.320 (Zwischenwertsatz)

Es sei $f: [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := \frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{1}{4} \cdot \cos(x)$.

Zeigen Sie: Es gibt ein $x \in [-1; 1]$ mit $f(x) = \text{id}(x) = x$.

Lösung:

Es gilt $f(x) = x$ genau dann, wenn $g(x) := x - \frac{1}{4} \cdot x^2 - \frac{1}{4} \cdot \cos(x) = 0$ ist.

Weiterhin sind $g(-1) = -1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot \cos(-1) < -1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = -1 < 0$ und $g(1) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos(1) > 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} > 0$.

Da g als Summe stetiger Funktionen stetig ist, gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $x \in (-1; 1)$ mit $g(x) = 0$, also mit $f(x) = x$.



IntEinDim/DefRiemann/Ag_Integration_OberUntersumme_Bild1.png

Aufgabenblatt 68

IntEinDim/Integrale



IntEinDim/Integrale/Ag_IntEinDim_IntBereichZerlegenZweiBetraegeEineWurzelAusQuadrat.tex

Aufgabe 68.321 (Integrationsbereich zerlegen)

vr

Berechnen Sie die folgenden Integrale!

a) $\int_{-2}^2 |t^2 - 4t + 3| dt$

$\frac{56}{3}$

Lösung:

Um die Vorzeichenbereiche des Terms in den Betragsstrichen zu bestimmen, faktoriere den Term mit einer Methode der Wahl. Zum Beispiel gilt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$t^2 - 4t + 3 = t^2 - 2 \cdot t \cdot 2 + 2^2 - 4 + 3 = (t - 2)^2 - 1 = (t - 2 + 1) \cdot (t - 2 - 1) = (t - 1) \cdot (t - 3).$$

Diese Parabel ist nach oben geöffnet, damit ist $t^2 - 4t + 3 < 0$ für $t \in (1; 3)$. Nur die Nullstelle $t_0 := 1$ liegt innerhalb des Integrationsbereiches. Auf dem Integrationsbereich $[-2; 2]$ gilt

$$|t^2 - 4t + 3| = \begin{cases} t^2 - 4t + 3, & \text{falls } t \in [-2; 1] \text{ ist} \\ -(t^2 - 4t + 3), & \text{falls } t \in (1; 2] \text{ ist} \end{cases}.$$

Damit ergibt sich das gesuchte Integral zu

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 |t^2 - 4t + 3| dt &= \int_{-2}^1 (t^2 - 4t + 3) dt + \int_1^2 (-t^2 + 4t - 3) dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t \right]_{t=-2}^{t=1} + \left[-\frac{t^3}{3} + 2t^2 - 3t \right]_{t=1}^{t=2} \\ &= \left(\frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 \right) - \left(\frac{(-2)^3}{3} - 2 \cdot (-2)^2 + 3 \cdot (-2) \right) \\ &\quad + \left(-\frac{2^3}{3} + 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 \right) - \left(-\frac{1^3}{3} + 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1 \right) \\ &= \frac{1}{3} - 2 + 3 + \frac{8}{3} + 8 + 6 - \frac{8}{3} + 8 - 6 + \frac{1}{3} - 2 + 3 = \frac{2}{3} + 18 = \frac{56}{3}. \end{aligned}$$

b) $\int_{-2}^2 (1 - u) \cdot |u + 1| du$

$\frac{4}{3}$

Lösung:

Für den Betragsterm gilt $|u + 1| = \begin{cases} u + 1, & \text{falls } u \geq -1 \text{ ist} \\ -u - 1, & \text{falls } u < -1 \text{ ist} \end{cases}.$

Das gesuchte Integral berechnet sich damit zu

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 (1 - u) \cdot |u + 1| du &= \int_{-2}^{-1} (1 - u) \cdot (-u - 1) du + \int_{-1}^2 (1 - u) \cdot (u + 1) du \\ &= \int_{-2}^{-1} (-1 + u^2) du + \int_{-1}^2 (1 - u^2) du \\ &= \left[-u + \frac{u^3}{3} \right]_{u=-2}^{u=-1} + \left[u - \frac{u^3}{3} \right]_{u=-1}^{u=2} \\ &= \left(-(-1) + \frac{(-1)^3}{3} \right) - \left(-(-2) + \frac{(-2)^3}{3} \right) \\ &\quad + \left(2 - \frac{2^3}{3} \right) - \left((-1) - \frac{(-1)^3}{3} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{3} - 2 + \frac{8}{3} + 2 - \frac{8}{3} + 1 - \frac{1}{3} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

c) $\int_{-3}^2 \sqrt{(x^2 + x - 2)^2} dx$

$\frac{49}{6}$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sqrt{(x^2 + x - 2)^2} = |x^2 + x - 2|$.

Die Nullstellen des Terms in den Betragsstrichen können mit einer Methode der Wahl berechnet werden. Zum Beispiel gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x^2 + x - 2 = 0 &\iff x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2 = 0 \iff \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = 0 \\ &\iff \left(x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) = 0 \iff (x + 2) \cdot (x - 1) = 0 \\ &\iff x = -2 \text{ oder } x = 1. \end{aligned}$$

Die Parabel ist nach oben geöffnet. Damit ist der Term negativ zwischen den beiden Nullstellen. Da beide Nullstellen innerhalb des Integrationsbereiches $[-3; 2]$ liegen, gilt dort

$$\sqrt{(x^2 + x - 2)^2} = |x^2 + x - 2| = \begin{cases} x^2 + x - 2, & \text{falls } x \in [-3; -2] \text{ ist} \\ -x^2 - x + 2, & \text{falls } x \in (-2; 1) \text{ ist} \\ x^2 + x - 2, & \text{falls } x \in [1; 2] \text{ ist} \end{cases}.$$

Das gesuchte Integral ist damit

$$\begin{aligned} \int_{-3}^2 \sqrt{(x^2 + x - 2)^2} dx &= \int_{-3}^{-2} (x^2 + x - 2) dx + \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx + \int_1^2 (x^2 + x - 2) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_{x=-3}^{x=-2} + \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{x=-2}^{x=1} + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_{x=1}^{x=2} \\ &= \left(\frac{(-2)^3}{3} + \frac{(-2)^2}{2} - 2 \cdot (-2) \right) - \left(\frac{(-3)^3}{3} + \frac{(-3)^2}{2} - 2 \cdot (-3) \right) \\ &\quad + \left(-\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 2 \cdot 1 \right) - \left(-\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} + 2 \cdot (-2) \right) \\ &\quad + \left(\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} - 2 \cdot 2 \right) - \left(\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} - 2 \cdot 1 \right) \\ &= -\frac{8}{3} + 2 + 4 + 9 - \frac{9}{2} - 6 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \\ &\quad - \frac{8}{3} + 2 + 4 + \frac{8}{3} + 2 - 4 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \\ &= -\frac{10}{3} + 17 - \frac{11}{2} = \frac{-20+60+42-33}{6} = \frac{-53+102}{6} = \frac{49}{6}. \end{aligned}$$



IntEinDim/Integrale/Ag_Integrale_altKlausur_bau_2010_Teil_a.tex

Aufgabe 68.322 (bestimmte Integration (5))

Berechnen Sie die Werte folgender Integrale:

a) $\int_{-\pi}^{\pi} 3x \cdot \cos(x) dx$

0

Lösung:

Das Integrationsintervall ist zum Nullpunkt symmetrisch, und der Integrand ist wegen $3 \cdot (-x) \cdot \cos(-x) = -3 \cdot x \cdot \cos(x)$ eine ungerade Funktion. Folglich ist der Wert des Integrals gleich null.

Alternativ kann das Integral mittels partieller Integration mit $u = u(x) = 3x$ und $v'(x) = \cos(x)$ berechnet werden.

b) $\int_1^4 3 \cdot |x^2 - 4| \, dx$

37

Lösung:

Um den Betrag im Integranden auflösen zu können, ermittelt man zunächst die Nullstellen von $x^2 - 4$. Diese sind $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$, und es gilt

$$|x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4, & x \leq -2 \\ -(x^2 - 4), & -2 < x < 2 \\ x^2 - 4, & 2 \leq x \end{cases}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_1^4 3 \cdot |x^2 - 4| \, dx &= \int_1^2 -3 \cdot (x^2 - 4) \, dx + \int_2^4 3 \cdot (x^2 - 4) \, dx \\ &= \int_1^2 (-3 \cdot x^2 + 12) \, dx + \int_2^4 (3 \cdot x^2 - 12) \, dx \\ &= [-x^3 + 12x]_1^2 + [x^3 - 12x]_2^4 \\ &= [(-2^3 + 12 \cdot 2) - (-1 + 12)] + [(4^3 - 12 \cdot 4) - (2^3 - 12 \cdot 2)] \\ &= (16 - 11) + (16 - (-16)) \\ &= 37 \end{aligned}$$

c) $\int_e^{e^2} \frac{\ln(x^2)}{4x} \, dx$

$\frac{3}{4}$

Lösung:

Zunächst vereinfacht man den Integranden mit Hilfe der Rechenregeln für Logarithmen zu

$$\frac{\ln(x^2)}{4x} = \frac{2 \cdot \ln(x)}{4x} = \frac{\ln(x)}{2x}.$$

Anschließend nimmt man dann die Substitution $u = u(x) = \ln(x)$ vor, um das Integral in elementarer Weise zu berechnen:

$$\begin{aligned} \int_e^{e^2} \frac{\ln(x^2)}{4x} \, dx &= \frac{1}{2} \cdot \int_e^{e^2} \ln(x) \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_e^{e^2} u(x) \cdot u'(x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_{u(e)}^{u(e^2)} u \, du \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot u^2 \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(2 - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

**Aufgabe 68.323** (viele Integrale)

spf

Sei $\kappa := \sqrt{\ln(\ln(3))}$. Berechnen Sie die folgenden Integrale bzw. Stammfunktionen!

a) $\int_1^4 \frac{1-r^2}{\sqrt{r}} dr$

-52/5

Lösung mit Standardintegralen: Es gilt

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{1-r^2}{\sqrt{r}} dr &= \int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{r}} - r^{\frac{3}{2}} \right) dr = \left[2 \cdot \sqrt{r} - \frac{2}{5} \cdot r^{\frac{5}{2}} \right]_{r=1}^{r=4} \\ &= \left(2 \cdot \sqrt{4} - \frac{2}{5} \cdot \sqrt{4}^5 \right) - \left(2 \cdot \sqrt{1} - \frac{2}{5} \cdot \sqrt{1}^5 \right) = 2 \cdot 2 - \frac{2}{5} \cdot 32 - 2 + \frac{2}{5} = -\frac{52}{5}. \end{aligned}$$

Lösung mit Substitutionsregel: Seien $g(x) := 1-x^4$ und $h(r) := \sqrt{r}$. Dann gilt $h'(r) = \frac{1}{2\sqrt{r}}$, $h(1) = \sqrt{1} = 1$, $h(4) = \sqrt{4} = 2$ und die Substitutionsregel liefert

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{1-r^2}{\sqrt{r}} dr &= 2 \cdot \int_1^4 \underbrace{(1-\sqrt{r}^4)}_{=g(h(r))} \cdot \underbrace{\frac{1}{2 \cdot \sqrt{r}}}_{=h'(r)} dr = 2 \cdot \int_{h(1)}^{h(4)} \underbrace{(1-x^4)}_{=g(x)} dx = 2 \cdot \left[x - \frac{x^5}{5} \right]_{x=1}^{x=2} \\ &= 2 \cdot \left(2 - \frac{2^5}{5} - 1 + \frac{1^5}{5} \right) = 2 \cdot \frac{10-32-5+1}{5} = 2 \cdot \frac{11-37}{5} = 2 \cdot \frac{-26}{5} = -\frac{52}{5}. \end{aligned}$$

Lösung mit partieller Integration: Seien $u(r) := 1-r^2$ und $v(r) := 2 \cdot \sqrt{r}$. Dann gilt $u'(r) = -2r$ und $v'(r) = \frac{1}{\sqrt{r}}$. Eine partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{1-r^2}{\sqrt{r}} dr &= \int_1^4 \underbrace{(1-r^2)}_{=u(r)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{r}}}_{=v'(r)} dr = \left[\underbrace{(1-r^2)}_{=u(r)} \cdot \underbrace{2 \cdot \sqrt{r}}_{=v(r)} \right]_{r=1}^{r=4} - \int_1^4 \underbrace{(-2r)}_{=u'(r)} \cdot \underbrace{2 \cdot \sqrt{r}}_{=v(r)} dr \\ &= (1-4^2) \cdot 2 \cdot \sqrt{4} - (1-1^2) \cdot 2 \cdot \sqrt{1} + 4 \cdot \int_1^4 r^{\frac{3}{2}} dr \\ &= (1-16) \cdot 2 \cdot 2 - (1-1) \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot \left[\frac{2}{5} \cdot r^{\frac{5}{2}} \right]_{r=1}^{r=4} \\ &= -15 \cdot 4 - 0 \cdot 2 + 4 \cdot \left(\frac{2}{5} \cdot \sqrt{4}^5 - \frac{2}{5} \cdot \sqrt{1}^5 \right) \\ &= -60 - 0 + \frac{8}{5} \cdot 2^5 - \frac{8}{5} \cdot 1^5 = \frac{-60 \cdot 5 + 8 \cdot 32 - 8 \cdot 1}{5} = \frac{-300 + 256 - 8}{5} = -\frac{52}{5}. \end{aligned}$$

b) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3}{\sqrt{1-\varphi^2}} d\varphi$

 $\frac{\pi}{2}$

Lösung: Wegen $(\arcsin(\varphi))' = \frac{1}{\sqrt{1-\varphi^2}}$ gilt

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3}{\sqrt{1-\varphi^2}} d\varphi = [3 \cdot \arcsin(\varphi)]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{1}{2}} = 3 \cdot \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - 3 \cdot \arcsin(0) = 3 \cdot \frac{\pi}{6} - 3 \cdot 0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{c) } \int_0^{\sqrt{3}} \frac{3}{\sqrt{4-\psi^2}} d\psi$$

π

Lösung: Seien $g(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1-\varphi^2}}$ und $h(\psi) := \frac{\psi}{2}$. Dann gilt $h'(\psi) = \frac{1}{2}$, $h(0) = 0$ und $h(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Wegen $(\arcsin(\varphi))' = \frac{1}{\sqrt{1-\varphi^2}}$ folgt mit der Substitutionsregel

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{3}{\sqrt{4-\psi^2}} d\psi &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{3}{\sqrt{4 \cdot \left(1 - \frac{\psi^2}{4}\right)}} d\psi = 3 \cdot \int_0^{\sqrt{3}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\psi}{2}\right)^2}}}_{=g(h(\psi))} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{=h'(\psi)} d\psi = 3 \cdot \int_{h(0)}^{h(\sqrt{3})} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-\varphi^2}}}_{=g(\varphi)} d\varphi \\ &= [3 \cdot \arcsin(\varphi)]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}} = 3 \cdot \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 3 \cdot \arcsin(0) = 3 \cdot \frac{\pi}{3} - 3 \cdot 0 = \pi. \end{aligned}$$

$$\text{d) } \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} \sin(\pi t) \cdot e^{\cos(\pi t)} dt$$

$\frac{1-\sqrt{e}}{\pi}$

Lösung: Seien $g(x) = e^x$ und $h(t) := \cos(\pi t)$. Dann gilt $h'(t) = -\pi \cdot \sin(\pi t)$, $h(-\frac{1}{2}) = \cos(-\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ und $h(\frac{1}{3}) = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$. Mit der Substitutionsregel folgt

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} \sin(\pi t) \cdot e^{\cos(\pi t)} dt &= -\frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} \underbrace{e^{\cos(\pi t)}}_{=g(h(t))} \cdot \underbrace{(-\pi \cdot \sin(\pi t))}_{=h'(t)} dt = -\frac{1}{\pi} \cdot \int_{h(-\frac{1}{2})}^{h(\frac{1}{3})} \underbrace{e^x}_{=g(x)} dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \cdot [e^x]_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\pi} \cdot (e^{\frac{1}{2}} - e^0) = \frac{1-\sqrt{e}}{\pi}. \end{aligned}$$

$$\text{e) } \int \frac{\sin(d)}{(\cos(d))^3} dd$$

$\frac{1}{2 \cdot (\cos(d))^2}$

Lösung mit Substitution des Kosinus: Seien $g(t) = t^{-3}$ und $h(d) := \cos(d)$. Dann gilt $h'(d) = -\sin(d)$. Die Substitutionsregel liefert mit einem $A \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin(d)}{(\cos(d))^3} dd &= - \int \underbrace{(\cos(d))^{-3}}_{=g(h(d))} \cdot \underbrace{(-\sin(d))}_{=h'(d)} dd = - \left[\int t^{-3} dt \right]_{t=h(d)} \\ &= - \left[\frac{t^{-2}}{-2} - A \right]_{t=\cos(d)} = \frac{1}{2 \cdot (\cos(d))^2} + A. \end{aligned}$$

Lösung mit Substitution des Tangens: Seien $g(t) = t$ und $h(d) := \tan(d) = \frac{\sin(d)}{\cos(d)}$. Dann gilt $h'(d) = \frac{1}{(\cos(d))^2}$. Die Substitutionsregel liefert mit einem $B \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{\sin(d)}{(\cos(d))^3} dd = \int \underbrace{\frac{\sin(d)}{\cos(d)}}_{=g(h(d))} \cdot \underbrace{\frac{1}{(\cos(d))^2}}_{=h'(d)} dd = \left[\int t dt \right]_{t=h(d)} = \left[\frac{t^2}{2} + B \right]_{t=\tan(d)} = \frac{(\tan(d))^2}{2} + B.$$

$$\text{f)} \int_{16}^{81} \sqrt{\xi} \cdot \sqrt{\xi} \, d\xi$$

$$\frac{8236}{7}$$

Lösung: Wegen $81 = 3^4$, $16 = 2^4$ und $3^7 = 3^4 \cdot 3^3 = 81 \cdot 27$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{16}^{81} \sqrt{\xi} \cdot \sqrt{\xi} \, d\xi &= \int_{16}^{81} \sqrt{\xi \cdot \xi^{\frac{1}{2}}} \, d\xi = \int_{16}^{81} \left(\xi^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \, d\xi = \int_{16}^{81} \xi^{\frac{3}{4}} \, d\xi = \left[\frac{4}{7} \cdot \xi^{\frac{7}{4}}\right]_{\xi=2^4}^{\xi=3^4} = \frac{4}{7} \cdot \sqrt[4]{3^4}^7 - \frac{4}{7} \cdot \sqrt[4]{2^4}^7 \\ &= \frac{4}{7} \cdot (3^7 - 2^7) = \frac{4}{7} \cdot (81 \cdot 27 - 128) = \frac{4}{7} \cdot (1620 + 567 - 128) = \frac{4 \cdot 2059}{7} = \frac{8236}{7}. \end{aligned}$$

$$\text{g)} \int \frac{\ln(m)}{m^2} \, dm$$

$$\frac{\ln(m)+1}{-m}$$

Lösung: Seien $u(m) := -\frac{1}{m}$ und $v(m) := \ln(m)$. Dann gilt $u'(m) = \frac{1}{m^2}$ und $v'(m) = \frac{1}{m}$.

Mit partieller Integration folgt für ein $C \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln(m)}{m^2} \, dm &= \int \underbrace{\frac{1}{m^2}}_{=u'(m)} \cdot \underbrace{\ln(m)}_{=v(m)} \, dm = \underbrace{\left(-\frac{1}{m}\right)}_{=u(m)} \cdot \underbrace{\ln(m)}_{=v(m)} - \int \underbrace{\left(-\frac{1}{m}\right)}_{=u(m)} \cdot \underbrace{\frac{1}{m}}_{=v'(m)} \, dm \\ &= -\frac{\ln(m)}{m} + \int \underbrace{\frac{1}{m^2}}_{=u'(m)} \, dm = -\frac{\ln(m)}{m} + \underbrace{\left(-\frac{1}{m}\right)}_{=u(m)} + C = -\frac{\ln(m)+1}{m} + C. \end{aligned}$$

$$\text{h)} \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{2\sqrt{2}}{3}} \frac{\tau^3}{\sqrt{1-\tau^2}} \, d\tau$$

$$\frac{89}{648}$$

Lösung mit Substitution des Nenners: Seien $g(x) := x^2 - 1$ und $h(\tau) := \sqrt{1-\tau^2}$. Es sind $h'(\tau) = \frac{-2\tau}{2\sqrt{1-\tau^2}}$, $h\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{1-\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ und $h\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \sqrt{1-\frac{4\cdot 2}{9}} = \sqrt{1-\frac{8}{9}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$. Mit der Substitutionsregel folgt

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{2\sqrt{2}}{3}} \frac{\tau^3}{\sqrt{1-\tau^2}} \, d\tau &= \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{2\sqrt{2}}{3}} \underbrace{(1-\tau^2-1)}_{=g(h(\tau))} \cdot \underbrace{\frac{-\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}}_{=h'(\tau)} \, d\tau = \int_{h\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}^{h\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)} \underbrace{(x^2-1)}_{=g(x)} \, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{x=\frac{1}{2}}^{x=\frac{1}{3}} \\ &= \left(\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1-27}{3^4} - \frac{1-12}{3 \cdot 2^3} = \frac{-26 \cdot 8 + 11 \cdot 27}{8 \cdot 81} \\ &= \frac{-160 - 48 + 270 + 27}{640 + 8} = \frac{-208 + 297}{648} = \frac{89}{648}. \end{aligned}$$

Lösung mit Substitution des Radikanden: Seien $g(x) := \frac{x-1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ und $h(\tau) := 1-\tau^2$. Es sind $h'(\tau) = -2\tau$, $h\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ und $h\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = 1 - \frac{4\cdot 2}{9} = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$. Mit der

Substitutionsregel folgt

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{2\sqrt{2}}{3}} \frac{\tau^3}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau &= \frac{1}{2} \cdot \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{2\sqrt{2}}{3}} \underbrace{\frac{1-\tau^2-1}{\sqrt{1-\tau^2}}}_{=g(h(\tau))} \cdot \underbrace{(-2\tau)}_{=h'(\tau)} d\tau = \frac{1}{2} \cdot \int_{h\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}^{h\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)} \underbrace{\left(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}\right)}_{=g(x)} dx \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - 2x^{\frac{1}{2}} \right]_{x=\frac{1}{4}}^{x=\frac{1}{9}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{9}}^3 - 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{9}} \right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{4}}^3 - 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} \right) \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^3 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^3 + \frac{1}{2} = \frac{2^3 - 3^3 \cdot 2^3 - 3^3 + 3^4 \cdot 2^2}{3^4 \cdot 2^3} = \frac{8 - 27 \cdot 8 - 27 + 81 \cdot 4}{81 \cdot 8} \\
 &= \frac{8 - 160 - 56 - 27 + 320 + 4}{640 + 8} = \frac{332 - 243}{648} = \frac{89}{648}.
 \end{aligned}$$

i) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\cos(\alpha))^2}{1 + \sin(\alpha)} d\alpha$

$$\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}$$

Lösung: Mit dem trigonometrischen Pythagoras und der dritten binomischen Formel folgt

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\cos(\alpha))^2}{1 + \sin(\alpha)} d\alpha &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - (\sin(\alpha))^2}{1 + \sin(\alpha)} d\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(1 + \sin(\alpha)) \cdot (1 - \sin(\alpha))}{1 + \sin(\alpha)} d\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \sin(\alpha)) d\alpha \\
 &= [\alpha + \cos(\alpha)]_{\alpha=0}^{\alpha=\frac{\pi}{3}} = \left(\frac{\pi}{3} + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) - (0 + \cos(0)) = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} - 0 - 1 = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

j) $\int_e^{e^3} \frac{1}{v \cdot \ln(v)} dv$

$$\ln(3)$$

Lösung: Seien $g(t) = \frac{1}{t}$ und $h(v) := \ln(v)$. Dann gilt $h'(v) = \frac{1}{v}$, $h(e) = 1$ und $h(e^3) = 3$. Mit der Substitutionsregel folgt

$$\int_e^{e^3} \frac{1}{v \cdot \ln(v)} dv = \int_e^{e^3} \underbrace{\frac{1}{\ln(v)}}_{=g(h(v))} \cdot \underbrace{\frac{1}{v}}_{=h'(v)} dv = \int_{h(e)}^{h(e^3)} \underbrace{\frac{1}{t}}_{=g(t)} dt = [\ln(|t|)]_{t=1}^{t=3} = \ln(3) - \underbrace{\ln(1)}_{=0} = \ln(3).$$

k) $\int_0^2 \frac{f-4}{f+1} df$

$$2 - 5 \cdot \ln(3)$$

Lösung: Seien $g(x) = \frac{1}{x}$ und $h(f) := f + 1$. Dann sind $h'(f) = 1$, $h(0) = 1$ und $h(2) = 3$. Mit der Substitutionsregel folgt

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 \frac{f-4}{f+1} df &= \int_0^2 \frac{f+1-5}{f+1} df = \int_0^2 \left(1 - \frac{5}{f+1} \right) df = \int_0^2 1 df - 5 \cdot \int_0^2 \underbrace{\frac{1}{f+1}}_{=g(h(f))} \cdot \underbrace{1}_{=h'(f)} df \\
 &= [f]_{f=0}^{f=2} - 5 \cdot \int_{h(0)}^{h(2)} \underbrace{\frac{1}{x}}_{=g(x)} dx = 2 - 0 - 5 \cdot [\ln(|x|)]_{x=1}^{x=3} = 2 - 5 \cdot \ln(3) + 5 \cdot \underbrace{\ln(1)}_{=0} \\
 &= 2 - 5 \cdot \ln(3).
 \end{aligned}$$

$$1) \int \arctan(z) \, dz$$

$$z \cdot \arctan(z) - \frac{1}{2} \cdot \ln(1+z^2)$$

Lösung: Seien $u(z) := z$ und $v(z) := \arctan(z)$. Dann gilt $u'(z) = 1$ und $v'(z) = \frac{1}{1+z^2}$.

Seien außerdem $g(t) := \frac{1}{t}$ und $h(z) = 1+z^2$. Dann ist $h'(z) = 2z$.

Eine partielle Integration und die Substitutionsregel liefern mit einem $A \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \int \arctan(z) \, dz &= \int \underbrace{1}_{=u'(z)} \cdot \underbrace{\arctan(z)}_{=v(z)} \, dz = \underbrace{z}_{=u(z)} \cdot \underbrace{\arctan(z)}_{=v(z)} - \int \underbrace{z}_{=u(z)} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+z^2}}_{=v'(z)} \, dz \\ &= z \cdot \arctan(z) - \frac{1}{2} \cdot \int \underbrace{\frac{1}{1+z^2}}_{=g(h(z))} \cdot \underbrace{2z}_{=h'(z)} \, dz = z \cdot \arctan(z) - \frac{1}{2} \cdot \left[\int \frac{1}{t} \, dt \right]_{t=h(z)} \\ &= z \cdot \arctan(z) - \frac{1}{2} \cdot [\ln(|t|)]_{t=1+z^2} + A = z \cdot \arctan(z) - \frac{1}{2} \cdot \ln(1+z^2) + A. \end{aligned}$$

$$m) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \, dt$$

0

Lösung mit der Substitutionsregel: Seien $g(x) := \frac{-1}{2\sqrt{x}}$ und $h(t) = 1-t^2$. Dann gilt $h'(t) = -2t$, $h(-\frac{1}{2}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ und $h(\frac{1}{2}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. Mit der Substitutionsregel folgt

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \, dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \underbrace{\frac{-1}{2 \cdot \sqrt{1-t^2}}}_{=g(h(t))} \cdot \underbrace{(-2t)}_{=h'(t)} \, dt = \int_{h(-\frac{1}{2})}^{h(\frac{1}{2})} g(x) \, dx = \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{-1}{2 \cdot \sqrt{x}} \, dx = 0.$$

Lösung über ungerade Funktionen: Die Funktion $f: (-1;1) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto f(t) := \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ ist ungerade, denn für alle $t \in (-1;1)$ gilt

$$f(-t) = \frac{-t}{\sqrt{1-(-t)^2}} = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} = -f(t).$$

Da das Integrationsintervall symmetrisch zur null liegt und der Integrand eine ungerade Funktion ist, verschwindet das Integral $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \, dt = 0$.

$$n) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\tan(\vartheta))^2}{2} \, d\vartheta$$

$$\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\tan(\vartheta))^2}{2} \, d\vartheta &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + (\tan(\vartheta))^2 - 1 \right) \, d\vartheta = \frac{1}{2} \cdot [\tan(\vartheta) - \vartheta]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4} \right) - (\tan(0) - 0) \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4} - 0 + 0 \right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

o) $\int \arcsin(\delta) d\delta$

$$\delta \cdot \arcsin(\delta) + \sqrt{1 - \delta^2}$$

Lösung: Seien $u(\delta) := \delta$ und $v(\delta) := \arcsin(\delta)$. Dann gilt $u'(\delta) = 1$ und $v'(\delta) = \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}}$.

Seien außerdem $g(t) := \frac{1}{2\sqrt{t}}$ und $h(\delta) = 1 - \delta^2$. Dann ist $h'(\delta) = -2\delta$.

Mit partieller Integration und der Substitutionsregel folgt für ein $B \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \int \arcsin(\delta) d\delta &= \int \underbrace{1}_{=u'(\delta)} \cdot \underbrace{\arcsin(\delta)}_{=v(\delta)} d\delta = \underbrace{\delta}_{=u(\delta)} \cdot \underbrace{\arcsin(\delta)}_{=v(\delta)} - \int \underbrace{\delta}_{=u(\delta)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}}}_{=v'(\delta)} d\delta \\ &= \delta \cdot \arcsin(\delta) + \int \underbrace{\frac{1}{2 \cdot \sqrt{1-\delta^2}}}_{=g(h(\delta))} \cdot \underbrace{(-2\delta)}_{=h'(\delta)} d\delta = \delta \cdot \arcsin(\delta) + \left[\int \frac{1}{2 \cdot \sqrt{t}} dt \right]_{t=h(\delta)} \\ &= \delta \cdot \arcsin(\delta) + \left[\sqrt{t} \right]_{t=1-\delta^2} + B = \delta \cdot \arcsin(\delta) + \sqrt{1-\delta^2} + B. \end{aligned}$$

p) $\int 2h \cdot \arctan(h) dh$

$$(h^2 + 1) \cdot \arctan(h) - h$$

Lösung: Seien $u(h) = h^2$ und $v(h) := \arctan(h)$. Dann sind $u'(h) = 2h$ und $v'(h) = \frac{1}{1+h^2}$.

Mit einem $C \in \mathbb{R}$ liefert eine partielle Integration

$$\begin{aligned} \int \underbrace{2h}_{=u'(h)} \cdot \underbrace{\arctan(h)}_{=v(h)} dh &= \underbrace{h^2}_{=u(h)} \cdot \underbrace{\arctan(h)}_{=v(h)} - \int \underbrace{h^2}_{=u(h)} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+h^2}}_{=v'(h)} dh \\ &= h^2 \cdot \arctan(h) - \int \frac{1+h^2-1}{1+h^2} dh \\ &= h^2 \cdot \arctan(h) - \int \left(1 - \frac{1}{1+h^2} \right) dh \\ &= h^2 \cdot \arctan(h) - (h - \arctan(h)) + C \\ &= (h^2 + 1) \cdot \arctan(h) - h + C. \end{aligned}$$

q) $\int_0^\kappa \frac{w}{e^{e^{w^2}} - w^2} dw$

$$\frac{3-e}{6e}$$

Lösung: Seien $g(t) = e^t$ und $h(w) := -e^{w^2}$. Dann gilt $h'(w) = -2w \cdot e^{w^2}$, $h(0) = -1$ und $h(\kappa) = \left(\sqrt{\ln(\ln(3))} \right) = -\ln(3)$. Mit der Substitutionsregel folgt

$$\begin{aligned} \int_0^\kappa \frac{w}{e^{e^{w^2}} - w^2} dw &= -\frac{1}{2} \cdot \int_0^\kappa \underbrace{e^{-e^{w^2}}}_{=g(h(w))} \cdot \underbrace{(-2w \cdot e^{w^2})}_{=h'(w)} dw = -\frac{1}{2} \cdot \int_{h(0)}^{h(\kappa)} \underbrace{e^t}_{=g(t)} dt = -\frac{1}{2} \cdot [e^t]_{t=-1}^{t=-\ln(3)} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot (e^{-\ln(3)} - e^{-1}) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{e^{\ln(3)}} - \frac{1}{e^1} \right) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{e} \right) = \frac{3-e}{6e}. \end{aligned}$$

r) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin(\eta)} \cdot \sin(2\eta) d\eta$

Lösung: Nach den Additionstheoremen ist $\sin(2\eta) = 2 \cdot \sin(\eta) \cdot \cos(\eta)$ für alle $\eta \in \mathbb{R}$.

Seien $g(t) := e^t \cdot 2 \cdot t$ und $h(\eta) := \sin(\eta)$. Dann sind $h'(\eta) = \cos(\eta)$, $h(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ und $h(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Seien außerdem $u(t) := 2t$ und $v(t) := e^t$. Dann gilt $u'(t) = 2$ und $v'(t) = e^t$.

Mit der Substitutionsregel und einer partiellen Integration folgt

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin(\eta)} \cdot \sin(2\eta) \, d\eta &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{e^{\sin(\eta)} \cdot 2 \cdot \sin(\eta)}_{=g(h(\eta))} \cdot \underbrace{\cos(\eta)}_{=h'(\eta)} \, d\eta = \int_{h(\frac{\pi}{6})}^{h(\frac{\pi}{2})} \underbrace{e^t \cdot 2 \cdot t}_{=g(t)} \, dt \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \underbrace{2t}_{=u(t)} \cdot \underbrace{e^t}_{=v'(t)} \, dt = [2t \cdot e^t]_{t=\frac{1}{2}}^{t=1} - \int_{\frac{1}{2}}^1 \underbrace{2}_{=u'(t)} \cdot \underbrace{e^t}_{=v(t)} \, dt \\ &= 2 \cdot 1 \cdot e^1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}} - [2e^t]_{t=\frac{1}{2}}^{t=1} = 2e^1 - e^{\frac{1}{2}} - 2e^1 + 2e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}. \end{aligned}$$



IntEinDim/Integrale/Ag_Integration_Integralwerte1.tex

Aufgabe 68.324 (bestimmte Integration (4) — die Qual der Wahl)

Berechnen Sie die folgenden Integralwerte:

a) $\int_1^4 \frac{1-x^2}{\sqrt{x}} \, dx$

— $\frac{52}{5}$

Lösung mit Standardintegralen: Es gilt

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{1-x^2}{\sqrt{x}} \, dx &= \int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - x^{\frac{3}{2}} \right) \, dx = \left[2 \cdot \sqrt{x} - \frac{2}{5} \cdot x^{\frac{5}{2}} \right]_{x=1}^{x=4} \\ &= \left(2 \cdot \sqrt{4} - \frac{2}{5} \cdot \sqrt{4}^5 \right) - \left(2 \cdot \sqrt{1} - \frac{2}{5} \cdot \sqrt{1}^5 \right) = 2 \cdot 2 - \frac{2}{5} \cdot 32 - 2 + \frac{2}{5} = -\frac{52}{5}. \end{aligned}$$

Lösung mit Substitutionsregel: Seien $g(t) := 1-t^4$ und $h(x) := \sqrt{x}$. Dann gilt $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $h(1) = \sqrt{1} = 1$, $h(4) = \sqrt{4} = 2$ und die Substitutionsregel liefert

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{1-x^2}{\sqrt{x}} \, dx &= 2 \cdot \int_1^4 \underbrace{(1-\sqrt{x}^4)}_{=g(h(x))} \cdot \underbrace{\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}}_{=h'(x)} \, dx = 2 \cdot \int_{h(1)}^{h(4)} \underbrace{(1-t^4)}_{=g(t)} \, dt = 2 \cdot \left[t - \frac{t^5}{5} \right]_{t=1}^{t=2} \\ &= 2 \cdot \left(2 - \frac{2^5}{5} - 1 + \frac{1^5}{5} \right) = 2 \cdot \frac{10-32-5+1}{5} = 2 \cdot \frac{11-37}{5} = 2 \cdot \frac{-26}{5} = -\frac{52}{5}. \end{aligned}$$

Lösung mit partieller Integration: Seien $u(x) := 1-x^2$ und $v(x) := 2 \cdot \sqrt{x}$. Dann gilt $u'(x) = -2x$ und $v'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Eine partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{1-x^2}{\sqrt{x}} \, dx &= \int_1^4 \underbrace{(1-x^2)}_{=u(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{=v'(x)} \, dx = \left[\underbrace{(1-x^2)}_{=u(x)} \cdot \underbrace{2 \cdot \sqrt{x}}_{=v(x)} \right]_{x=1}^{x=4} - \int_1^4 \underbrace{(-2x)}_{=u'(x)} \cdot \underbrace{2 \cdot \sqrt{x}}_{=v(x)} \, dx \\ &= (1-4^2) \cdot 2 \cdot \sqrt{4} - (1-1^2) \cdot 2 \cdot \sqrt{1} + 4 \cdot \int_1^4 x^{\frac{3}{2}} \, dx \\ &= (1-16) \cdot 2 \cdot 2 - (1-1) \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot \left[\frac{2}{5} \cdot x^{\frac{5}{2}} \right]_{x=1}^{x=4} \\ &= -15 \cdot 4 - 0 \cdot 2 + 4 \cdot \left(\frac{2}{5} \cdot \sqrt{4}^5 - \frac{2}{5} \cdot \sqrt{1}^5 \right) \\ &= -60 - 0 + \frac{8}{5} \cdot 2^5 - \frac{8}{5} \cdot 1^5 = \frac{-60 \cdot 5 + 8 \cdot 32 - 8 \cdot 1}{5} = \frac{-300 + 256 - 8}{5} = \frac{-52}{5}. \end{aligned}$$

b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(t) \cdot \exp(\cos(t)) \, dt$

$$1 - \exp\left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}\right)$$

Lösung:

Es ist $\cos' = -\sin$; somit gilt für den Integranden $\sin(t) \cdot e^{\cos t} = -u'(x) \cdot e^{u(x)}$, wenn $u = u(t) = \cos t$ gesetzt wird. Mit der Substitutionsregel ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(t) \cdot e^{\cos t} \, dt &= - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} u'(t) \cdot e^{u(t)} \, dt \\ &= - \int_{u(-\frac{\pi}{2})}^{u(\frac{\pi}{4})} e^u \, du \\ &= - [e^u]_{u(-\frac{\pi}{2})}^{u(\frac{\pi}{4})} \\ &= [-e^u]_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \\ &= -e^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} - (-e^0) \\ &= 1 - e^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Nur die Substitutionsregel führt hier zum Erfolg. Umformen des Ausdrucks ist nicht möglich (den Kosinus bekommt man nicht aus dem Exponenten von e heraus). Ebenso kann man nicht partiell integrieren: die Wahl $u(t) = \sin t$ und $v'(t) = e^{\cos t}$ führt zu nichts, weil wir keine Stammfunktion von $e^{\cos t}$ kennen, die umgekehrte Wahl $u(t) = e^{\cos t}$ und $v'(t) = \sin t$ ist zwar möglich, wegen $u'(t) = \sin(t)e^{\cos t}$ ist das Integral nach einer partiellen Integration aber nicht einfacher, sondern komplizierter geworden.

c) $\int_{16}^{81} \sqrt{x \cdot \sqrt{x}} \, dx$

$$\frac{8236}{7}$$

Lösung:

Mit der Umformung des Integranden $\sqrt{x \cdot \sqrt{x}} = x^{\frac{1}{2}} \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{3}{4}}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{16}^{81} \sqrt{x \cdot \sqrt{x}} \, dx &= \int_{16}^{81} x^{\frac{3}{4}} \, dx \\ &= \left[\frac{4}{7} x^{\frac{7}{4}} \right]_{16}^{81} \\ &= \frac{4}{7} \left(81^{\frac{7}{4}} - 16^{\frac{7}{4}} \right) \\ &= \frac{4}{7} (3^7 - 2^7) \\ &= \frac{4}{7} \cdot (81 \cdot 27 - 128) \\ &= \frac{4}{7} \cdot (2187 - 128) \\ &= \frac{4 \cdot 2059}{7} \\ &= \frac{8236}{7} = 1176 + \frac{4}{7} \end{aligned}$$

Auch hier ist Umformen die sinnvolle Lösung. Die Substitutionsregel kann man nicht anwenden, weil zum Teilterm $g(x) = \sqrt{x}$ die Ableitung $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ nicht im Integral vorkommt. Partielle Integration ist auch nicht sinnvoll, weil beim Ableiten oder integrieren des Faktors $\sqrt{x}$ immer wieder eine Wurzel entsteht die auch nach beliebig häufiger Anwendung der partiellen Integration nicht verschwindet.

Zusatz: Diskutieren Sie auch kurz, welche der drei Integrationsmethoden (elementar, partiell, per Substitution) für das jeweilige Integral möglich und welche *sinnvoll* sind.



IntEinDim/Integrale/Ag_Integration_Integralwerte2.tex

Aufgabe 68.325 (bestimmte Integration (5))

Berechnen Sie die Werte folgender Integrale:

a) $\int_{-\pi}^{\pi} 3x \cdot \cos(x) \, dx$

0

Lösung:

Das Integrationsintervall ist zum Nullpunkt symmetrisch, und der Integrand ist wegen $3 \cdot (-x) \cdot \cos(-x) = -3 \cdot x \cdot \cos(x)$ eine ungerade Funktion. Folglich ist der Wert des Integrals gleich null.

Alternativ kann das Integral mittels partieller Integration mit $u = u(x) = 3x$ und $v'(x) = \cos(x)$ berechnet werden.

b) $\int_1^4 3 \cdot |x^2 - 4| \, dx$

37

Lösung:

Um den Betrag im Integranden auflösen zu können, ermittelt man zunächst die Nullstellen von $x^2 - 4$. Diese sind $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$, und es gilt

$$|x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4, & x \leq -2 \\ -(x^2 - 4), & -2 < x < 2 \\ x^2 - 4, & 2 \leq x \end{cases}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_1^4 3 \cdot |x^2 - 4| \, dx &= \int_1^2 -3 \cdot (x^2 - 4) \, dx + \int_2^4 3 \cdot (x^2 - 4) \, dx \\ &= \int_1^2 (-3 \cdot x^2 + 12) \, dx + \int_2^4 (3 \cdot x^2 - 12) \, dx \\ &= [-x^3 + 12x]_1^2 + [x^3 - 12x]_2^4 \\ &= [(-2^3 + 12 \cdot 2) - (-1 + 12)] + [(4^3 - 12 \cdot 4) - (2^3 - 12 \cdot 2)] \\ &= (16 - 11) + (16 - (-16)) \\ &= 37 \end{aligned}$$

c) $\int_e^{e^2} \frac{\ln(x^2)}{4x} \, dx$

$\frac{3}{4}$

Lösung:

Zunächst vereinfacht man den Integranden mit Hilfe der Rechenregeln für Logarithmen zu

$$\frac{\ln(x^2)}{4x} = \frac{2 \cdot \ln(x)}{4x} = \frac{\ln(x)}{2x}.$$

Anschließend nimmt man dann die Substitution $u = u(x) = \ln(x)$ vor, um das Integral in elementarer Weise zu berechnen:

$$\begin{aligned} \int_e^{e^2} \frac{\ln(x^2)}{4x} dx &= \frac{1}{2} \cdot \int_e^{e^2} \ln(x) \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_e^{e^2} u(x) \cdot u'(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_{u(e)}^{u(e^2)} u du \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot u^2 \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(2 - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$



IntEinDim/Integrale/Ag_Integration_Substitution.tex

Aufgabe 68.326 (Integration per Substitution)

Verwenden Sie die Substitutionsregel, um die folgenden Stammfunktionen bzw. Integralwerte zu berechnen:

a) $\int_{-1}^3 \frac{1}{x+2} dx$

$\ln(5)$

Lösung:

Mit der Substitution $u = u(x) = x + 2$ und der Ableitung $u'(x) = 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 \frac{x+2}{dx} &= \int_{-1}^3 \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x) dx \\ &= \int_{u(-1)}^{u(3)} \frac{1}{u} du \\ &= \int_1^5 \frac{1}{u} du \\ &= [\ln(|u|)]_1^5 \\ &= [\ln(u)]_1^5 \quad (\text{wegen } 0 < 1 < 5 \text{ kann der Betrag im Argument des ln entfallen}) \\ &= \ln(5) - \ln(1) = \ln(5) - 0 = \ln(5). \end{aligned}$$

b) $\int \frac{3x^2 - 2}{2x^3 - 4x + 2} dx$

$\frac{1}{2} \cdot \ln(|x^3 - 2x + 1|) + C$

Lösung:

Mit der Substitution $u = u(x) = 2x^3 - 4x + 2$ und der Ableitung $u'(x) = 2 \cdot 3x^2 - 4 = 2 \cdot (3x^2 - 2)$ erhält man für den Integranden

$$\frac{3x^2 - 2}{2x^3 - 4x + 2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot u'(x)}{u(x)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$$

und damit dann

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 - 2}{2x^3 - 4x + 2} dx &= \int \frac{\frac{1}{2} \cdot u'(x)}{u(x)} dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{u} du \\ &= \frac{1}{2} \cdot \ln(|u|) + C \quad \text{mit } u = 2x^3 - 4x + 2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \ln(|2x^3 - 4x + 2|) + C \\ &= \frac{1}{2} \cdot \ln(2 \cdot |x^3 - 2x + 1|) + C \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\ln(2) + \ln(|x^3 - 2x + 1|)) + C \\ &= \frac{1}{2} \cdot \ln(|x^3 - 2x + 1|) + \underbrace{C + \frac{1}{2} \cdot \ln(2)}_{=: \tilde{C}}. \end{aligned}$$

c) $\int_{-1}^4 \sqrt{x+5} \cdot e^{\sqrt{x+5}} dx$

$$10e^3 - 4e^2$$

Lösung:

Für $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto g(t) := 2t^2 \cdot e^t$ und $h: (-5; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto h(x) := \sqrt{x+5}$ ergibt sich $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+5}}$, $h(-1) = \sqrt{-1+5} = \sqrt{4} = 2$ und $h(4) = \sqrt{4+5} = \sqrt{9} = 3$.

Die Substitutionsregel liefert

$$\int_{-1}^4 \sqrt{x+5} \cdot e^{\sqrt{x+5}} dx = \int_{-1}^4 \underbrace{2 \cdot \sqrt{x+5}^2 \cdot e^{\sqrt{x+5}}}_{=g(h(x))} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x+5}}}_{=h'(x)} dx = \int_{h(-1)}^{h(4)} g(t) dt = \int_2^3 2t^2 \cdot e^t dt.$$

Setzt man $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto u(t) := t^2$, $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto v(t) := t$ und $w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto w(t) := e^t$, so ergibt sich $u'(t) = 2t$, $v'(t) = 1$ und $w'(t) = e^t$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Zweimalige partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^4 \sqrt{x+5} \cdot e^{\sqrt{x+5}} dx &= \int_2^3 2t^2 \cdot e^t dt = 2 \cdot \int_2^3 \underbrace{t^2}_{=u(t)} \cdot \underbrace{e^t}_{=w'(t)} dt \\
 &= 2 \cdot \left(\left[\underbrace{t^2}_{=u(t)} \cdot \underbrace{e^t}_{=w(t)} \right]_{t=2}^{t=3} - \int_2^3 \underbrace{2t}_{=u'(t)} \cdot \underbrace{e^t}_{=w(t)} dt \right) \\
 &= 2 \cdot (3^2 \cdot e^3 - 2^2 \cdot e^2) - 4 \cdot \int_2^3 \underbrace{t}_{=v(t)} \cdot \underbrace{e^t}_{=w'(t)} dt \\
 &= 2 \cdot (9 \cdot e^3 - 4 \cdot e^2) - 4 \cdot \left(\left[\underbrace{t}_{=v(t)} \cdot \underbrace{e^t}_{=w(t)} \right]_{t=2}^{t=3} - \int_2^3 \underbrace{1}_{=v'(t)} \cdot \underbrace{e^t}_{=w(t)} dt \right) \\
 &= 18 \cdot e^3 - 8 \cdot e^2 - 4 \cdot (3 \cdot e^3 - 2 \cdot e^2) + 4 \cdot \int_2^3 e^t dt \\
 &= 18 \cdot e^3 - 8 \cdot e^2 - 12 \cdot e^3 + 8 \cdot e^2 + 4 \cdot [e^t]_{t=2}^{t=3} \\
 &= 6 \cdot e^3 + 4 \cdot (e^3 - e^2) \\
 &= 10 \cdot e^3 - 4 \cdot e^2.
 \end{aligned}$$



IntEinDim/Integrale/Ag_Integration_Zerlegen2.tex

Aufgabe 68.327 (Integrale zerlegen)

vr

Seien $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$x \mapsto f(x) := |x-1|, \quad x \mapsto g(x) := \begin{cases} 2x, & \text{für } x \geq 1 \\ x+1, & \text{für } 0 < x < 1 \\ 1, & \text{für } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad x \mapsto h(x) := |2x-4| + x.$$

Berechnen Sie die folgenden Integralwerte:

a) $\int_{-3}^2 f(x) dx$

$\frac{17}{2}$

Lösung:

$$\begin{aligned}
 \int_{-3}^2 f(x) dx &= \int_{-3}^1 (1-x) dx + \int_1^2 (x-1) dx \\
 &= \left[x - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-3}^1 + \left[\frac{1}{2}x^2 - x \right]_1^2 \\
 &= \left(1 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \right) - \left(-3 - \frac{1}{2} \cdot (-3)^2 \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot 2^2 - 2 \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2 - 1 \right) \\
 &= \frac{17}{2}
 \end{aligned}$$

b) $\int_{-2}^4 g(x) dx$

$\frac{37}{2}$

Lösung:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^4 f(x) dx &= \int_{-2}^0 1 dx + \int_0^1 (x+1) dx + \int_1^4 2x dx \\&= [x]_{-2}^0 + \left[\frac{1}{2}x^2 + x \right]_0^1 + \left[2 \cdot \frac{1}{2}x^2 \right]_1^4 \\&= 0 - (-2) + \frac{1}{2} + 1 - 0 + 4^2 - 1 \\&= \frac{37}{2}\end{aligned}$$

c) $\int_{-1}^5 h(x) dx$

30

Lösung:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^5 f(x) dx &= \int_{-1}^2 ((4-2x) + x) dx + \int_2^5 (2x-4+x) dx \\&= (4-x) dx + \int_2^5 (3x-4) dx \\&= \left[4x - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^2 + \left[3 \cdot \frac{1}{2}x^2 - 4x \right]_2^5 \\&= \left(4 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 \right) - \left(4 \cdot (-1) - \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 \right) + \left(\frac{3}{2} \cdot 5^2 - 4 \cdot 5 \right) - \left(\frac{3}{2} \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 \right) \\&= 30\end{aligned}$$

Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f , g und h und markieren Sie die Fläche, die dem jeweiligen Integralwert entspricht!



IntEinDim/Integrale/Ag_Integration_bestimmteGrundintegrale_leicht.tex

Aufgabe 68.328 (bestimmte Integration (1))

15.1.1

Berechnen Sie die folgenden Integralwerte:

a) $\int_1^3 2x^2 dx$

$\frac{52}{3}$

Lösung:

$$\int_1^3 2x^2 dx = 2 \cdot \int_1^3 x^2 dx = 2 \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^3 = \frac{2}{3} \cdot (3^3 - 1^3) = \frac{2}{3} \cdot 26 = \frac{52}{3}$$

b) $\int_1^2 \frac{2}{x^3} dx$

$\frac{3}{4}$

Lösung:

$$\int_1^2 \frac{2}{x^3} dx = 2 \cdot \int_1^2 x^{-3} dx = 2 \cdot \left[\frac{x^{-2}}{-2} \right]_1^2 = - \left[\frac{1}{x^2} \right]_1^2 = - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{1} \right) = \frac{3}{4}$$

c) $\int_2^3 (2x^4 + 4x) \, dx$

$\frac{472}{5}$

Lösung:

$$\int_2^3 (2x^4 + 4x) \, dx = 2 \cdot \int_2^3 x^4 \, dx + 4 \cdot \int_2^3 x \, dx = 2 \cdot \left[\frac{x^5}{5} \right]_2^3 + 4 \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^3 = 2 \cdot \frac{3^5 - 2^5}{5} + 4 \cdot \frac{3^2 - 2^2}{2} = \frac{472}{5}$$



IntEinDim/Integrale/Ag_Integration_bestimmteIntegrale2.tex

Aufgabe 68.329 (bestimmte Integration)
Berechnen Sie die folgenden Integralwerte:

a) $\int_{-2}^3 (x^3 - 3x) \, dx$

$\frac{35}{4}$

Lösung:

$$\int_{-2}^3 (x^3 - 3x) \, dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 \right]_{-2}^3 = \left[\frac{x^2}{4}(x^2 - 6) \right]_{-2}^3 = \frac{9}{4} \cdot 3 - \frac{4}{4} \cdot (-2) = \frac{27+8}{4} = \frac{35}{4}.$$

b) $\int_0^{\frac{3\pi}{5}} 2 \cdot \sin(2x) \, dx$

$1 + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Lösung:

Zur Substitution wird die Funktion $u(x) := 2x$ mit der Ableitung $u'(x) = 2$ verwendet; mit $u(0) = 0$ und $u\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{6\pi}{5} = \pi + \frac{1}{5}\pi$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{3\pi}{5}} 2 \sin(2x) \, dx &= \int_0^{\frac{6\pi}{5}} \sin u \, du \\ &= [-\cos(u)]_0^{\frac{6\pi}{5}} \\ &= -\cos \frac{6\pi}{5} + \cos 0 \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{5} + \pi\right) + 1 \\ &= 1 + \cos \frac{\pi}{5}. \end{aligned}$$

c) $\int_1^2 x \cdot \exp(x) \, dx$

$\exp(2)$

Lösung:

Partielle Integration mit $u = x$ und $v' = e^x$, wobei $u' = 1$ und $v = e^x$ ist, ergibt

$$\begin{aligned}\int_1^2 x \cdot e^x \, dx &= [x \cdot e^x]_1^2 - \int_1^2 1 \cdot e^x \, dx \\ &= [x \cdot e^x - e^x]_1^2 \\ &= [(x-1)e^x]_1^2 \\ &= e^2 - 0 = e^2.\end{aligned}$$

d) $\int_1^2 \ln(x) \, dx$

$$2 \cdot \ln(2) - 1$$

Lösung:

Partielle Integration mit $u' = 1$ und $v = \ln x$, wobei $u = x$ und $v' = \frac{1}{x}$ ist, ergibt

$$\begin{aligned}\int_1^2 \ln(x) \, dx &= \int_1^2 1 \cdot \ln(x) \, dx = [x \cdot \ln x]_1^2 - \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= [x \cdot \ln x]_1^2 - \int_1^2 1 \, dx \\ &= [x \cdot (\ln x - 1)]_1^2 \\ &= (2(\ln(2) - 1)) - (1(\ln(1) - 1)) \\ &= 2 \ln 2 - 2 - 0 + 1 \\ &= 2 \ln 2 - 1 \\ &= \ln 4 - 1.\end{aligned}$$

e) $\int_0^2 \frac{3}{\sqrt{5x+2}} \, dx$

$$\frac{6}{5} \cdot (2 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{2})$$

Lösung:

Zur Substitution wird die lineare Funktion $u(x) := 5x + 2$ mit der Ableitung $\frac{du}{dx} = u'(x) = 5$, also $\frac{1}{5}u'(x) = 1$, verwendet:

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{3}{\sqrt{5x+2}} \, dx &= \int_0^2 \frac{3}{\sqrt{u(x)}} \frac{1}{5} u'(x) \, dx \\ &= \frac{3}{5} \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{u(x)}} \cdot u'(x) \, dx \\ &= \frac{3}{5} \int_{u(0)}^{u(2)} \frac{1}{\sqrt{u}} \, du \quad \text{mit } u(0) = 5 \cdot 0 + 2 = 2, u(2) = 5 \cdot 2 + 2 = 12 \\ &= \frac{3}{5} \int_2^{12} u^{-\frac{1}{2}} \, du \\ &= \frac{3}{5} \left[2u^{\frac{1}{2}} \right]_2^{12} \\ &= \frac{6}{5} [\sqrt{u}]_2^{12} \\ &= \frac{6}{5} (\sqrt{12} - \sqrt{2})\end{aligned}$$

f) $\int_{-1}^{-2} 2x^2 \cdot \exp\left(-\frac{x^3}{2}\right) dx$

$$\frac{4}{3} \cdot (\sqrt{e} - e^4)$$

Lösung:

Zur Substitution wird die Funktion $u(x) := -\frac{x^3}{2}$ mit der Ableitung $u'(x) = -\frac{3}{2}x^2$, also $x^2 = -\frac{2}{3}u'(x)$, verwendet; mit $u(-1) = \frac{1}{2}$ und $u(-2) = 4$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{-2} 2x^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^3} dx &= \int_{-1}^{-2} 2 \left(-\frac{2}{3}\right) u'(x) \cdot e^{u(x)} dx \\ &= -\frac{4}{3} \int_{-1}^{-2} u'(x) \cdot e^{u(x)} dx \\ &= -\frac{4}{3} \int_{u(-1)}^{u(-2)} e^u du \\ &= -\frac{4}{3} [e^u]_{\frac{1}{2}}^4 \\ &= -\frac{4}{3} (e^4 - e^{\frac{1}{2}}) \\ &= \frac{4}{3} (\sqrt{e} - e^4) \end{aligned}$$



IntEinDim/Integrale/Ag_Integration_bestimmteIntegrale_leicht.tex

Aufgabe 68.330 (bestimmte Integration)

Berechnen Sie die folgenden Integralwerte:

a) $\int_2^4 (3x^2 - 2x) dx$

44

Lösung:

$$\int_2^4 (3x^2 - 2x) dx = [x^3 - x^2]_2^4 = [x^2(x - 1)]_2^4 = 16 \cdot 3 - 4 \cdot 1 = 44$$

b) $\int_{-\pi}^{2\pi} (\sin(x) - \cos(x)) dx$

-2

Lösung:

Mit den Periodizitäts- und Symmetrieeigenschaften der trigonometrischen Funktionen sin und cos erhält man:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{2\pi} \sin(x) - \cos(x) dx &= \int_{-\pi}^{2\pi} \sin(x) dx - \int_{-\pi}^{2\pi} \cos(x) dx \\ &= [-\cos(x)]_{-\pi}^{2\pi} - [\sin(x)]_{-\pi}^{2\pi} \\ &= -\cos(2\pi) + \cos(-\pi) - (\sin(2\pi) - \sin(-\pi)) \\ &= -\cos(0) + \cos(\pi) - \sin(0) - \sin(\pi) = -1 - 1 - 0 - 0 = -2 \end{aligned}$$

c) $\int_0^4 e^{-x} dx$

$$1 - \frac{1}{e^4}$$

Lösung:

$$\int_0^4 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^4 = -e^{-4} - (-e^0) = -\frac{1}{e^4} + 1$$

d) $\int_1^2 \sqrt{5x-1} dx$

$$\frac{38}{15}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \sqrt{5x-1} dx &= \frac{1}{5} \cdot \int_1^2 (5x-1)^{\frac{1}{2}} \cdot 5 dx && \text{Substitution: } t := 5x-1, \, dt = 5dx \\ &= \frac{1}{5} \cdot \int_4^9 t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{5} \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}} \right]_{t=4}^{t=9} \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(9^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{2}{15} \cdot (27 - 8) = \frac{38}{15} \end{aligned}$$

e) $\int_0^2 (4x^2 - 3x^4 + 2x) dx$

$$-\frac{68}{15}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \int_0^2 (4x^2 - 3x^4 + 2x) dx &= \left[\frac{4}{3} \cdot x^3 - \frac{3}{5} \cdot x^5 + x^2 \right]_0^2 = \frac{4}{3} \cdot 8 - \frac{3}{5} \cdot 32 + 4 \\ &= \frac{32 \cdot 5 - 96 \cdot 3 + 4 \cdot 15}{15} = \frac{160 - 288 + 60}{15} = -\frac{68}{15} \end{aligned}$$

f) $\int_1^2 (2x^2 - 5)^2 dx$

$$\frac{47}{15}$$

Lösung:

Es ist

$$\begin{aligned} \int_1^2 (2x^2 - 5)^2 dx &= \int_1^2 (4x^4 - 20x^2 + 25) dx = \left[\frac{4}{5}x^5 - \frac{20}{3}x^3 + 25x \right]_1^2 \\ &= \left(\frac{4}{5} \cdot 32 - \frac{20}{3} \cdot 8 + 25 \cdot 2 \right) - \left(\frac{4}{5} - \frac{20}{3} + 25 \right) \\ &= \frac{4}{5} \cdot 31 - \frac{20}{3} \cdot 7 + 25 = \frac{124}{5} - \frac{140}{3} + 25 \\ &= \frac{124 \cdot 3 - 140 \cdot 5 + 25 \cdot 15}{15} = \frac{372 - 700 + 375}{15} = \frac{47}{15}. \end{aligned}$$



IntEinDim/PBZ/Ag_IntEinDim_PBZMitAnsatzImTipp.tex

Aufgabe 69.331 (Partialbruchzerlegungen zum Integrieren)

SPF

Geben Sie die folgenden Stammfunktionen an!

a) $\int \frac{-3t-17}{t^2+2t-3} dt$

$$\ln \left(\frac{(t+3)^2}{|t-1|^5} \right)$$

Lösung:

Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$t^2 + 2t - 3 = t^2 + 2 \cdot t \cdot 1 + 1^2 - 1 - 3 = (t+1)^2 - 4 = (t+1-2) \cdot (t+1+2) = (t-1) \cdot (t+3).$$

Seien $A \in \mathbb{R}$ und $B \in \mathbb{R}$ mit $\frac{-3t-17}{t^2+2t-3} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+3}$ für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$.

Multiplikation mit dem Hauptnenner liefert für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$

$$-3t - 17 = A \cdot (t+3) + B \cdot (t-1).$$

Im Grenzübergang $t \rightarrow 1$ ergibt sich die Gleichung $-3 - 17 = A \cdot 4$, also $A = -5$.

Der Grenzübergang $t \rightarrow -3$ liefert andererseits $9 - 17 = B \cdot (-4)$, also $B = 2$.

Insgesamt folgt

$$\begin{aligned} \int \frac{-3t-17}{t^2+2t-3} dt &= \int \left(\frac{-5}{t-1} + \frac{2}{t+3} \right) dt = -5 \cdot \ln(|t-1|) + 2 \cdot \ln(|t+3|) \\ &= \ln \left(|t-1|^{-5} \right) + \ln \left(|t+3|^2 \right) = \ln \left(\frac{(t+3)^2}{|t-1|^5} \right). \end{aligned}$$

b) $\int \frac{x^2+2x-4}{x^3-5x^2+8x-4} dx$

$$\ln \left(\frac{(x-2)^2}{|x-1|} \right) - \frac{4}{x-2}$$

Lösung:

Es gilt $1^3 - 5 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 - 4 = 1 - 5 + 8 - 4 = -4 + 4 = 0$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} x^3 - 5x^2 + 8x - 4 &= (x-1) \cdot (x^2 - 4x + 4) \\ \frac{-(x^3 - x^2)}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} &= \frac{-(x^3 - x^2)}{(x-1) \cdot (x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2)} \\ &= \frac{-4x^2 + 8x - 4}{(x-1) \cdot (x-2)^2} \\ \frac{-(-4x^2 + 4x)}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} &= \frac{4x - 4}{(x-1) \cdot (x-2)^2} \\ \frac{-(4x - 4)}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} &= \frac{0}{(x-1) \cdot (x-2)^2} \end{aligned}$$

Seien $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$ und $C \in \mathbb{R}$ mit $\frac{x^2+2x-4}{x^3-5x^2+8x-4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.

Multiplikation mit dem Hauptnenner liefert für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$

$$x^2 + 2x - 4 = A \cdot (x-2)^2 + B \cdot (x-1) \cdot (x-2) + C \cdot (x-1).$$

Im Grenzübergang $x \rightarrow 1$ ergibt sich die Gleichung $1 + 2 - 4 = A \cdot (-1)^2$, also $A = -1$.

Der Grenzübergang $x \rightarrow 2$ liefert andererseits $4 + 4 - 4 = C \cdot 1$, also $C = 4$.

Für $x = 0$ ergibt sich damit $0 + 0 - 4 = -1 \cdot (-2)^2 + B \cdot (-1) \cdot (-2) + 4 \cdot (-1)$, also $B = 2$.

Insgesamt folgt

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 2x - 4}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} dx &= \int \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2} \right) dx \\ &= -\ln(|x-1|) + 2 \cdot \ln(|x-2|) - 4 \cdot \frac{1}{x-2} = \ln \left(\frac{(x-2)^2}{|x-1|} \right) - \frac{4}{x-2}. \end{aligned}$$

c) $\int \frac{2\tau^2 + 5\tau + 7}{\tau^3 - 3\tau^2 + \tau - 3} d\tau$

$$\ln \left(\frac{(\tau-3)^4}{\tau^2+1} \right) - \arctan(\tau)$$

Lösung:

Für alle $\tau \in \mathbb{R}$ gilt

$$\tau^3 - 3\tau^2 + \tau - 3 = \tau^2 \cdot (\tau - 3) + (\tau - 3) = (\tau^2 + 1) \cdot (\tau - 3) \quad \text{und} \quad \tau^2 + 1 \neq 0.$$

Seien $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$ und $C \in \mathbb{R}$ mit $\frac{2\tau^2 + 5\tau + 7}{\tau^3 - 3\tau^2 + \tau - 3} = \frac{A}{\tau - 3} + \frac{B\tau + C}{\tau^2 + 1}$ für alle $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Multiplikation mit dem Hauptnenner liefert für alle $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$$2\tau^2 + 5\tau + 7 = A \cdot (\tau^2 + 1) + (B\tau + C) \cdot (\tau - 3).$$

Im Grenzübergang $\tau \rightarrow 3$ ergibt sich die Gleichung $18 + 15 + 7 = A \cdot (9 + 1)$, also $A = 4$.

Für $\tau = 0$ ergibt sich damit $0 + 0 + 7 = 4 \cdot 1^2 + C \cdot (-3)$, sprich $C = -1$.

Mit $\tau = 1$ folgt daraus $2 + 5 + 7 = 4 \cdot 2 + (B - 1) \cdot (-2)$, also $14 = 8 - 2B + 2$, sprich $B = -2$.

Insgesamt folgt mit $g(x) := \frac{1}{x}$, $h(\tau) := \tau^2 + 1$ wegen $h'(\tau) = 2\tau$ aus der Substitutionsregel

$$\begin{aligned} \int \frac{2\tau^2 + 5\tau + 7}{\tau^3 - 3\tau^2 + \tau - 3} d\tau &= \int \left(\frac{4}{\tau - 3} + \frac{-2\tau - 1}{\tau^2 + 1} \right) d\tau \\ &= \int \frac{4}{\tau - 3} d\tau - \int \underbrace{\frac{1}{\tau^2 + 1}}_{=g(h(\tau))} \cdot \underbrace{2\tau}_{=h'(\tau)} d\tau - \int \frac{1}{\tau^2 + 1} d\tau \\ &= 4 \cdot \ln(|\tau - 3|) - \left[\int \underbrace{\frac{1}{x}}_{=g(x)} dx \right]_{x=\tau^2+1} - \arctan(\tau) \\ &= \ln(|\tau - 3|^4) - \ln(|\tau^2 + 1|) - \arctan(\tau) \\ &= \ln \left(\frac{(\tau-3)^4}{\tau^2+1} \right) - \arctan(\tau). \end{aligned}$$

Tipps: Finden Sie in Aufgabenteil a) Konstanten $A \in \mathbb{R}$ und $B \in \mathbb{R}$ mit $\frac{r}{p \cdot q} = \frac{A}{p} + \frac{B}{q}$.

In Aufgabenteil b) brauchen Sie $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$ und $C \in \mathbb{R}$ mit $\frac{r}{p \cdot q^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{q} + \frac{C}{q^2}$.

In Aufgabenteil c) suchen Sie $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$ und $C \in \mathbb{R}$ mit $\frac{r}{p \cdot q} = \frac{A}{p} + \frac{B \cdot \text{id} + C}{q}$ und $q \neq 0$.
 p , q und r sind dabei Polynome, aus denen die Integranden zusammengesetzt sind.



IntEinDim/Partiell/Ag_IntEinDim_PartiiellMitUndOhneTricks.tex

Aufgabe 70.332 (partielle Integration)

spf

Berechnen Sie die folgenden Integrale bzw. Stammfunktionen mittels partieller Integration!

a) $\int_{-1}^3 (6w^2 + 1) \cdot 2w \, dw$

248

Lösung:

Seien $u(w) := 2w^3 + w$ und $v(w) := 2w$. Dann gilt $u'(w) = 6w^2 + 1$ und $v'(w) = 2$.

Es folgt

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 \underbrace{(6w^2 + 1)}_{=u'(w)} \cdot \underbrace{2w}_{=v(w)} \, dw &= \left[\underbrace{(2w^3 + w)}_{=u(w)} \cdot \underbrace{2w}_{=v(w)} \right]_{w=-1}^{w=3} - \int_{-1}^3 \underbrace{(2w^3 + w)}_{=u(w)} \cdot \underbrace{2}_{=v'(w)} \, dw \\ &= [4w^4 + 2w^2]_{w=-1}^{w=3} - \int_{-1}^3 (4w^3 + 2w) \, dw \\ &= [4w^4 + 2w^2]_{w=-1}^{w=3} - [w^4 + w^2]_{w=-1}^{w=3} = [3w^4 + w^2]_{w=-1}^{w=3} \\ &= (3 \cdot 3^4 + 3^2) - \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot (-1)^4 + (-1)^2) \\ &= 243 + 9 - 3 - 1 \\ &= 248. \end{aligned}$$

b) $\int_1^{\ln(2)} \zeta \cdot e^\zeta \, d\zeta$

$2 \cdot \ln(2) - 2$

Lösung:

Seien $u(\zeta) := \zeta$ und $v(\zeta) := e^\zeta$. Dann gilt $u'(\zeta) = 1$ und $v'(\zeta) = e^\zeta$.

Es folgt

$$\begin{aligned} \int_1^{\ln(2)} \underbrace{\zeta}_{=u(\zeta)} \cdot \underbrace{e^\zeta}_{=v'(\zeta)} \, d\zeta &= \left[\underbrace{\zeta}_{=u(\zeta)} \cdot \underbrace{e^\zeta}_{=v(\zeta)} \right]_{\zeta=1}^{\zeta=\ln(2)} - \int_1^{\ln(2)} \underbrace{1}_{=u'(\zeta)} \cdot \underbrace{e^\zeta}_{=v(\zeta)} \, d\zeta \\ &= [\zeta \cdot e^\zeta]_{\zeta=1}^{\zeta=\ln(2)} - [e^\zeta]_{\zeta=1}^{\zeta=\ln(2)} = [(\zeta - 1) \cdot e^\zeta]_{\zeta=1}^{\zeta=\ln(2)} \\ &= (\ln(2) - 1) \cdot e^{\ln(2)} - (1 - 1) \cdot e^1 \\ &= (\ln(2) - 1) \cdot 2 - 0 \cdot e = 2 \cdot \ln(2) - 2. \end{aligned}$$

c) $\int_1^e \ln(x) \, dx$

1

Lösung:

Seien $u(x) := \ln(x)$ und $v(x) := x$. Dann gilt $u'(x) = \frac{1}{x}$ und $v'(x) = 1$.

Es folgt

$$\begin{aligned}
 \int_1^e \ln(x) \, dx &= \int_1^e \underbrace{\ln(x)}_{=u(x)} \cdot \underbrace{1}_{=v'(x)} \, dx = \left[\underbrace{\ln(x)}_{=u(x)} \cdot \underbrace{x}_{=v(x)} \right]_{x=1}^{x=e} - \int_1^e \underbrace{\frac{1}{x}}_{=u'(x)} \cdot \underbrace{x}_{=v(x)} \, dx \\
 &= [\ln(x) \cdot x]_{x=1}^{x=e} - \int_1^e 1 \, dx = [x \cdot \ln(x) - x]_{x=1}^{x=e} \\
 &= (e \cdot \ln(e) - e) - (1 \cdot \ln(1) - 1) = e \cdot 1 - e - 1 \cdot 0 + 1 = 1.
 \end{aligned}$$

d) $\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} k^3 \cdot \cos(k) \, dk$

$$-\frac{27\pi^3}{8} + 3\pi^2 + 9\pi - 6$$

Lösung:

Seien $u_1(k) := k^3$, $u_2(k) := k^2$, $u_3(k) := k$, $v(k) := \sin(k)$ und $w(k) := -\cos(k)$.

Dann gilt $u'_1(k) = 3k^2$, $u'_2(k) = 2k$, $u'_3(k) = 1$, $v'(k) = \cos(k)$ und $w'(k) = \sin(k)$.

Es folgt

$$\begin{aligned}
 &\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \underbrace{k^3}_{=u_1(k)} \cdot \underbrace{\cos(k)}_{=v'(k)} \, dk \\
 &= \left[\underbrace{k^3}_{=u_1(k)} \cdot \underbrace{\sin(k)}_{=v(k)} \right]_{k=\pi}^{k=\frac{3\pi}{2}} - \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \underbrace{3k^2}_{=u'_1(k)} \cdot \underbrace{\sin(k)}_{=v(k)} \, dk \\
 &= [k^3 \cdot \sin(k)]_{k=\pi}^{k=\frac{3\pi}{2}} - 3 \cdot \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \underbrace{k^2}_{=u_2(k)} \cdot \underbrace{\sin(k)}_{=w'(k)} \, dk \\
 &= [k^3 \cdot \sin(k)]_{k=\pi}^{k=\frac{3\pi}{2}} - 3 \cdot \left(\left[\underbrace{k^2}_{=u_2(k)} \cdot \underbrace{(-\cos(k))}_{=w(k)} \right]_{k=\pi}^{k=\frac{3\pi}{2}} - \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \underbrace{2k}_{=u'_2(k)} \cdot \underbrace{(-\cos(k))}_{=w(k)} \, dk \right) \\
 &= [k^3 \cdot \sin(k) + 3k^2 \cdot \cos(k)]_{k=\pi}^{k=\frac{3\pi}{2}} - 6 \cdot \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \underbrace{k}_{=u_3(k)} \cdot \underbrace{\cos(k)}_{=v'(k)} \, dk \\
 &= [k^3 \cdot \sin(k) + 3k^2 \cdot \cos(k)]_{k=\pi}^{k=\frac{3\pi}{2}} - 6 \cdot \left(\left[\underbrace{k}_{=u_3(k)} \cdot \underbrace{\sin(k)}_{=v(k)} \right]_{k=\pi}^{k=\frac{3\pi}{2}} - \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \underbrace{1}_{=u'_3(k)} \cdot \underbrace{\sin(k)}_{=v(k)} \, dk \right) \\
 &= \left[(k^3 - 6k) \cdot \sin(k) + 3k^2 \cdot \cos(k) \right]_{k=\pi}^{k=\frac{3\pi}{2}} + 6 \cdot \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin(k) \, dk \\
 &= \left[(k^3 - 6k) \cdot \sin(k) + 3k^2 \cdot \cos(k) \right]_{k=\pi}^{k=\frac{3\pi}{2}} + 6 \cdot [-\cos(k)]_{k=\pi}^{k=\frac{3\pi}{2}} \\
 &= \left[(k^3 - 6k) \cdot \sin(k) + (3k^2 - 6) \cdot \cos(k) \right]_{k=\pi}^{k=\frac{3\pi}{2}} \\
 &= \left(\left(\left(\frac{3\pi}{2} \right)^3 - 6 \cdot \frac{3\pi}{2} \right) \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}_{=-1} + \left(3 \cdot \left(\frac{3\pi}{2} \right)^2 - 6 \right) \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}_{=0} \right) \\
 &\quad - \left((\pi^3 - 6 \cdot \pi) \cdot \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} + (3 \cdot \pi^2 - 6) \cdot \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} \right) \\
 &= -\frac{27\pi^3}{8} + 3\pi^2 + 9\pi - 6.
 \end{aligned}$$

e) $\int \cos(z) \cdot e^z \, dz$

$$\frac{\sin(z) + \cos(z)}{2} \cdot e^z$$

Lösung:

Seien $u(z) := \sin(z)$, $v(z) := -\cos(z)$ und $w(z) := e^z$.

Dann gilt $u'(z) = \cos(z)$, $v'(z) = \sin(z)$ und $w'(z) = e^z$.

Es folgt

$$\begin{aligned} \int \underbrace{\cos(z)}_{=u'(z)} \cdot \underbrace{e^z}_{=w(z)} dz &= \underbrace{\sin(z)}_{=u(z)} \cdot \underbrace{e^z}_{=w(z)} - \int \underbrace{\sin(z)}_{=u(z)} \cdot \underbrace{e^z}_{=w'(z)} dz \\ &= \sin(z) \cdot e^z - \left(\underbrace{(-\cos(z))}_{=v(z)} \cdot \underbrace{e^z}_{=w(z)} - \int \underbrace{(-\cos(z))}_{=v(z)} \cdot \underbrace{e^z}_{=w'(z)} dz \right) \\ &= (\sin(z) + \cos(z)) \cdot e^z - \int \cos(z) \cdot e^z dz. \end{aligned}$$

Addiert man das letzte Integral auf beiden Seiten und dividiert danach durch 2, so erhält man

$$\int \cos(z) \cdot e^z dz = \frac{\sin(z) + \cos(z)}{2} \cdot e^z.$$

f) $\int_{-\pi}^{\pi} (\sin(\varphi))^2 d\varphi$

π

Lösung:

Seien $u(\varphi) := \sin(\varphi)$ und $v(\varphi) := -\cos(\varphi)$. Dann sind $u'(\varphi) = \cos(\varphi)$ und $v'(\varphi) = \sin(\varphi)$.

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(\varphi))^2 d\varphi &= \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sin(\varphi)}_{=u(\varphi)} \cdot \underbrace{\sin(\varphi)}_{=v'(\varphi)} d\varphi \\ &= \left[\underbrace{\sin(\varphi)}_{=u(\varphi)} \cdot \underbrace{(-\cos(\varphi))}_{=v(\varphi)} \right]_{\varphi=-\pi}^{\varphi=\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos(\varphi)}_{=u'(\varphi)} \cdot \underbrace{(-\cos(\varphi))}_{=v(\varphi)} d\varphi \\ &= [-\sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi)]_{\varphi=-\pi}^{\varphi=\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(\varphi))^2 d\varphi \\ &= [-\sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi)]_{\varphi=-\pi}^{\varphi=\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} (1 - (\sin(\varphi))^2) d\varphi \\ &= [-\sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi)]_{\varphi=-\pi}^{\varphi=\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} 1 d\varphi - \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(\varphi))^2 d\varphi \\ &= [-\sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi)]_{\varphi=-\pi}^{\varphi=\pi} + [\varphi]_{\varphi=-\pi}^{\varphi=\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(\varphi))^2 d\varphi. \end{aligned}$$

Addiert man das letzte Integral auf beiden Seiten und dividiert danach durch 2, so erhält man

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(\varphi))^2 d\varphi &= \frac{1}{2} \cdot [\varphi - \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi)]_{\varphi=-\pi}^{\varphi=\pi} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\pi - \sin(\pi) \cdot \cos(\pi) - (-\pi) - \sin(-\pi) \cdot \cos(-\pi)) = \frac{1}{2} \cdot (\pi + \pi) = \pi. \end{aligned}$$

g) $\int \frac{\sin(\ln(r))}{r^2} dr$

$$-\frac{\sin(\ln(r)) + \cos(\ln(r))}{2r}$$

Lösung:

Seien $u(r) := \sin(\ln(r))$, $v(r) := \cos(\ln(r))$ und $w(r) := -\frac{1}{r}$.

Dann gilt $u'(r) = \frac{\cos(\ln(r))}{r}$, $v'(r) = \frac{-\sin(\ln(r))}{r}$ und $w'(r) = \frac{1}{r^2}$.

Es folgt

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin(\ln(r))}{r^2} dr &= \int \underbrace{\sin(\ln(r))}_{=u(r)} \cdot \underbrace{\frac{1}{r^2}}_{=w'(r)} dr = \underbrace{\sin(\ln(r))}_{=u(r)} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{r}\right)}_{=w(r)} - \int \underbrace{\frac{\cos(\ln(r))}{r}}_{=u'(r)} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{r}\right)}_{=w(r)} dr \\ &= -\frac{\sin(\ln(r))}{r} + \int \underbrace{\cos(\ln(r))}_{=v(r)} \cdot \underbrace{\frac{1}{r^2}}_{=w'(r)} dr \\ &= -\frac{\sin(\ln(r))}{r} + \underbrace{\cos(\ln(r))}_{=v(r)} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{r}\right)}_{=w(r)} - \int \underbrace{\frac{-\sin(\ln(r))}{r}}_{=v'(r)} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{r}\right)}_{=w(r)} dr \\ &= -\frac{\sin(\ln(r)) + \cos(\ln(r))}{r} - \int \frac{\sin(\ln(r))}{r^2} dr. \end{aligned}$$

Addiert man das letzte Integral auf beiden Seiten und dividiert danach durch 2, so erhält man

$$\int \frac{\sin(\ln(r))}{r^2} dr = -\frac{\sin(\ln(r)) + \cos(\ln(r))}{2r}.$$

h) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-\omega^2} d\omega$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6}$$

Lösung:

Wir bestimmen zunächst eine Stammfunktion des Integranden.

Seien $u(\omega) := \omega$ und $v(\omega) := \sqrt{1-\omega^2}$. Dann gilt $u'(\omega) = 1$ und $v'(\omega) = \frac{-\omega}{\sqrt{1-\omega^2}}$.

Es folgt

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-\omega^2} d\omega &= \int \underbrace{1}_{=u'(\omega)} \cdot \underbrace{\sqrt{1-\omega^2}}_{=v(\omega)} d\omega = \underbrace{\omega}_{=u(\omega)} \cdot \underbrace{\sqrt{1-\omega^2}}_{=v(\omega)} - \int \underbrace{\omega}_{=u(\omega)} \cdot \underbrace{\frac{-\omega}{\sqrt{1-\omega^2}}}_{=v'(\omega)} d\omega \\ &= \omega \cdot \sqrt{1-\omega^2} - \int \frac{1-\omega^2}{\sqrt{1-\omega^2}} d\omega \\ &= \omega \cdot \sqrt{1-\omega^2} - \int \sqrt{1-\omega^2} d\omega + \int \frac{1}{\sqrt{1-\omega^2}} d\omega \\ &= \omega \cdot \sqrt{1-\omega^2} - \int \sqrt{1-\omega^2} d\omega + \arcsin(\omega). \end{aligned}$$

Addiert man das letzte Integral auf beiden Seiten und dividiert danach durch 2, so erhält man

$$\int \sqrt{1-\omega^2} d\omega = \frac{\omega \cdot \sqrt{1-\omega^2} + \arcsin(\omega)}{2}.$$

Das liefert insbesondere

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-\omega^2} \, d\omega &= \left[\frac{\omega \cdot \sqrt{1-\omega^2} + \arcsin(\omega)}{2} \right]_{\omega=-\frac{1}{2}}^{\omega=\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)}{2} - \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2} + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}}{2} - \frac{-\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

i) $\int t \cdot \arcsin(t) \, dt$

$$\frac{(2t^2-1) \cdot \arcsin(t) + t \cdot \sqrt{1-t^2}}{4}$$

Lösung:

Seien $u(t) := \frac{t^2}{2}$ und $v(t) := \arcsin(t)$. Dann sind $u'(t) = t$ und $v'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

Es folgt mit dem Zwischenergebnis aus Aufgabenteil h)

$$\begin{aligned}\int \underbrace{t}_{=u'(t)} \cdot \underbrace{\arcsin(t)}_{=v(t)} \, dt &= \underbrace{\frac{t^2}{2}}_{=u(t)} \cdot \underbrace{\arcsin(t)}_{=v(t)} - \int \underbrace{\frac{t^2}{2}}_{=u(t)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}_{=v'(t)} \, dt \\ &= \frac{t^2 \cdot \arcsin(t)}{2} + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1-t^2-1}{\sqrt{1-t^2}} \, dt \\ &= \frac{t^2 \cdot \arcsin(t)}{2} + \frac{1}{2} \cdot \int \sqrt{1-t^2} \, dt - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \, dt \\ &= \frac{t^2 \cdot \arcsin(t)}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{t \cdot \sqrt{1-t^2} + \arcsin(t)}{2} - \frac{1}{2} \cdot \arcsin(t) \\ &= \frac{(2t^2-1) \cdot \arcsin(t) + t \cdot \sqrt{1-t^2}}{4}.\end{aligned}$$

Tipp: Addieren Sie in den Aufgabenteilen h) und i) im Zähler des neuen Integranden eine geschickte 0, nachdem Sie einmal partiell integriert und anschließend aufgeräumt haben!



IntEinDim/Partiell/Ag_IntEinDim_PartiiellohneTricks.tex

Aufgabe 70.333 (partielle Integration)

MK, VEMA

Berechnen Sie folgende Integrale mit Hilfe partieller Integration:

a) $\int (w+1) \cdot e^{w+4} \, dw$

$$w \cdot e^{w+4} + C$$

Lösung:

Mit $u(w) := w+1$ und $v(w) := e^{w+4} = e^4 \cdot e^w$ ergibt sich $u'(w) = 1$ und $v'(w) = e^4 \cdot e^w = e^{w+4}$. Eine partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}\int \underbrace{(w+1)}_{=u(w)} \cdot \underbrace{e^{w+4}}_{=v'(w)} \, dw &= \underbrace{(w+1)}_{=u(w)} \cdot \underbrace{e^{w+4}}_{=v(w)} - \int \underbrace{1}_{=u'(w)} \cdot \underbrace{e^{w+4}}_{=v(w)} \, dw = (w+1) \cdot e^{w+4} - \int \underbrace{e^{w+4}}_{=v'(w)} \, dw \\ &= (w+1) \cdot e^{w+4} - e^{w+4} + C = w \cdot e^{w+4} + C.\end{aligned}$$

b) $\int t^2 \cdot \sin(t) dt$

$$(2 - t^2) \cdot \cos(t) + 2t \cdot \sin(t) + C$$

Lösung:

Eine partielle Integration mit $u(t) := t^2$ und $v(t) := -\cos(t)$ ergibt wegen $u'(t) = 2t$ und $v'(t) = \sin(t)$ ist, ergibt

$$\begin{aligned} \int \underbrace{t^2}_{=u(t)} \cdot \underbrace{\sin(t)}_{=v'(t)} dt &= \underbrace{t^2}_{=u(t)} \cdot \underbrace{(-\cos(t))}_{=v(t)} - \int \underbrace{2t}_{=u'(t)} \cdot \underbrace{(-\cos(t))}_{=v(t)} dt \\ &= -t^2 \cdot \cos(t) + 2 \cdot \int t \cdot \cos(t) dt. \end{aligned}$$

Es wird nochmals eine partielle Integration vorgenommen. Es ergibt sich unter Verwendung von $p(t) := t$ und $q(t) := \sin(t)$ mit $p'(t) = 1$ und $q'(t) = \cos(t)$

$$\begin{aligned} \int t^2 \cdot \sin(t) dt &= -t^2 \cdot \cos(t) + 2 \cdot \int \underbrace{t}_{=p(t)} \cdot \underbrace{\cos(t)}_{=q'(t)} dt \\ &= -t^2 \cdot \cos(t) + 2 \cdot \left(\underbrace{t}_{=p(t)} \cdot \underbrace{\sin(t)}_{=q(t)} - \int \underbrace{1}_{=p'(t)} \cdot \underbrace{\sin(t)}_{=q(t)} dt \right) \\ &= -t^2 \cdot \cos(t) + 2 \cdot (t \cdot \sin(t) + \cos(t) + A) \\ &= -t^2 \cdot \cos(t) + 2t \cdot \sin(t) + 2 \cdot \cos(t) + C. \end{aligned}$$

c) $\int_1^e \sqrt{x} \cdot \ln(x) dx$

$$\frac{2}{9} \cdot \sqrt{e^3} + \frac{4}{9}$$

Lösung:

Partielle Integration mit $u(x) := \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}$ und $v(x) := \ln(x)$, wobei $u'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ und $v'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ ist, ergibt

$$\begin{aligned} \int_1^e \underbrace{\sqrt{x}}_{=u'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{=v(x)} dx &= \left[\underbrace{\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}}_{=u(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{=v(x)} \right]_{x=1}^{x=e} - \int_1^e \underbrace{\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}}_{=u(x)} \cdot \underbrace{x^{-1}}_{=v'(x)} dx \\ &= \left(\frac{2}{3} \cdot e^{\frac{3}{2}} \cdot \underbrace{\ln(e)}_{=1} - \frac{2}{3} \cdot 1^{\frac{3}{2}} \cdot \underbrace{\ln(1)}_{=0} \right) - \frac{2}{3} \cdot \int_1^e \underbrace{x^{\frac{1}{2}}}_{=u'(x)} dx \\ &= \frac{2}{3} \cdot \sqrt{e^3} - \frac{2}{3} \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} \right]_{x=1}^{x=e} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{e^3} - \frac{4}{9} \cdot e^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{9} \cdot 1^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{9} \cdot \sqrt{e^3} + \frac{4}{9}. \end{aligned}$$



IntEinDim/Stammfkt/Ag_AbleitenUndIntegrieren_Einstieg.tex

Aufgabe 71.334 (Ableiten und Integrieren)

Füllen Sie die folgende Tabelle aus!

Lösung:

$f(x)$	$f'(x)$	$\int f(x) dx$
$x^2 + 2x^5$	$2x + 10x^4$	$\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^6 + C$
$\sin x + \cos x$	$\cos x - \sin x$	$-\cos x + \sin x + C$
$\cos x + \frac{2}{x} + 5$	$-\sin x - \frac{2}{x^2}$	$\sin x + 2 \ln x + 5x + C$
$\frac{3}{x^3} + 4x^{-1}$	$-\frac{9}{x^4} - 4x^{-2}$	$-\frac{3}{2x^2} + 4 \ln x + C$
$\frac{3}{5}x^5 + C$	$3x^4$	$\frac{1}{10}x^6 + Cx + K$
$\frac{1}{2}e^{2x} + C$	e^{2x}	$\frac{1}{4}e^{2x} + Cx + K$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$	$\arctan x + C, C \in \mathbb{R}$
$-\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$	$\frac{6}{x^4} - \frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^2} + \ln x + C, C \in \mathbb{R}$

$f(x)$	$f'(x)$	$\int f(x) dx$	$f(x)$	$f'(x)$	$\int f(x) dx$
$x^2 + 2x^5$	$2x + 10x^4$	$\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^6 + C$	$\frac{3}{5}x^5 + C$	$3x^4$	$\frac{1}{10}x^6 + Cx + K$
$\sin x + \cos x$	$\cos x - \sin x$	$-\cos x + \sin x + C$	$\frac{1}{2}e^{2x} + C$	e^{2x}	$\frac{1}{4}e^{2x} + Cx + K$
$\cos x + \frac{2}{x} + 5$	$-\sin x - \frac{2}{x^2}$	$\sin x + 2 \ln x + 5x + C$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$	$\arctan x + C, C \in \mathbb{R}$
$\frac{3}{x^3} + 4x^{-1}$	$-\frac{9}{x^4} - 4x^{-2}$	$-\frac{3}{2x^2} + 4 \ln x + C$	$-\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$	$\frac{6}{x^4} - \frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^2} + \ln x + C, C \in \mathbb{R}$



IntEinDim/Stammfkt/Ag_IntStammFkt_WurzelEinsMinusSinus.tex

Aufgabe 71.335 (Was ist eine Stammfunktion?)

spf

Seien $a := 2 \cdot \sqrt{2}$ und $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := \sqrt{1 - \sin(x)}$.

- a) Substituieren Sie $t = \sin(x)$, um mit Hilfe des trigonometrischen Pythagoras' $\int f(x) dx$ zu berechnen!

„ $2 \cdot \sqrt{1 + \sin(x)}$ “

Lösung:

Bemerkung: Im nächsten Absatz finden sich zwei mathematische Unsauberheiten: Zum Einen wird mit $\frac{\cos(x)}{\cos(x)}$ multipliziert, ohne den Fall $\cos(x) = 0$ zu beachten. Diese Unsauberheit ließe sich mit einem auf stetiger Ergänzbarkeit beruhenden Argument leicht beheben.

Viel schwerwiegender ist die Unsauberheit im Umformungsschritt (*): Hier wird das Vorzeichen von $\cos(x)$ außer Acht gelassen. In den folgenden Aufgabenteilen wird diese Unsauberheit korrigiert.

Setzt man $h(x) := \sin(x)$, so folgt mit $(\cos(x))^2 = 1 - (\sin(x))^2$

$$\int f(x) dx = \int \sqrt{1 - \sin(x)} dx = \int \frac{\sqrt{1 - \sin(x)}}{\cos(x)} \cdot \cos(x) dx \stackrel{(*)}{=} \underbrace{\int \frac{\sqrt{1 - \sin(x)}}{\sqrt{1 - (\sin(x))^2}} dx}_{=y(h(x))} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{=h'(x)} dx,$$

wenn man $y(t) := \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1-t^2}}$ setzt.

Die Substitutionsregel liefert dann mit $u(r) := r^{-\frac{1}{2}}$ und $w(t) := 1+t$ wegen $w'(t) = 1$

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \left[\int y(t) dt \right]_{t=h(x)} = \left[\int \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1-t^2}} dt \right]_{t=\sin(x)} = \left[\int \sqrt{\frac{1-t}{1-t^2}} dt \right]_{t=\sin(x)} \\ &= \left[\int \sqrt{\frac{1-t}{(1-t) \cdot (1+t)}} dt \right]_{t=\sin(x)} = \left[\int \sqrt{\frac{1}{1+t}} dt \right]_{t=\sin(x)} \\ &= \left[\int \underbrace{(1+t)^{-\frac{1}{2}}}_{=u(w(t))} \cdot \underbrace{1}_{=w'(t)} dt \right]_{t=\sin(x)} = \left[\int \underbrace{r^{-\frac{1}{2}}}_{=u(r)} dr \right]_{r=w(t)} \Big|_{t=\sin(x)} \\ &= \left[\frac{1}{-\frac{1}{2}+1} \cdot r^{-\frac{1}{2}+1} \right]_{r=w(\sin(x))} = \left[\frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot r^{\frac{1}{2}} \right]_{r=1+\sin(x)} = 2 \cdot \sqrt{1 + \sin(x)}. \end{aligned}$$

- b) Aufgabenteil a) scheint zu suggerieren, dass $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$ gilt. Warum kann das nicht sein und wie wird das Integral korrekt berechnet? Welcher Integralwert ergibt sich?

$$f > 0 \text{ auf } [0; 2\pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\} \quad 4 \cdot \sqrt{2}$$

Lösung:

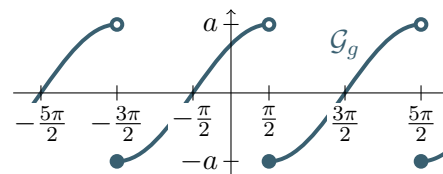
Da $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, muss $\int_0^{2\pi} f(x) dx \geq \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x) dx$ gelten. Der Umformungsschritt (*) aus der Lösung zu Aufgabenteil a) ist auf $[0; \frac{\pi}{6}]$ wegen $\cos(x) > 0$ für alle $x \in [0; \frac{\pi}{6}]$ korrekt. Damit folgt also

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) dx &\geq \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x) dx = \left[2 \cdot \sqrt{1 + \sin(x)} \right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{6}} = 2 \cdot \sqrt{1 + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} - 2 \cdot \sqrt{1 + \sin(0)} \\ &= 2 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{2}} - 2 \cdot \sqrt{1 + 0} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} - 2 \cdot \sqrt{1} = \sqrt{4 \cdot \frac{3}{2}} - 2 \cdot 1 = \sqrt{6} - 2 \stackrel{6>4}{>} 0. \end{aligned}$$

Dort, wo der Kosinus negativ wird, muss im Umformungsschritt (*) aus der Lösung zu Aufgabenteil a) ein zusätzliches Minuszeichen in den Nenner geschrieben werden. Dieses zieht sich bis zum Ende durch und liefert also

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) dx &= \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx}_{\cos > 0 \text{ auf } (0; \frac{\pi}{2})} + \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx}_{\cos < 0 \text{ auf } (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2})} + \underbrace{\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f(x) dx}_{\cos > 0 \text{ auf } (\frac{3\pi}{2}; 2\pi)} \\ &= \left[2 \cdot \sqrt{1 + \sin(x)} \right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} + \left[-2 \cdot \sqrt{1 + \sin(x)} \right]_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\frac{3\pi}{2}} + \left[2 \cdot \sqrt{1 + \sin(x)} \right]_{x=\frac{3\pi}{2}}^{x=2\pi} \\ &= 2 \cdot \sqrt{1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} - 2 \cdot \sqrt{1 + \sin(0)} - 2 \cdot \sqrt{1 + \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)} \\ &\quad + 2 \cdot \sqrt{1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} + 2 \cdot \sqrt{1 + \sin(2\pi)} - 2 \cdot \sqrt{1 + \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)} \\ &= 2 \cdot \sqrt{1+1} - 2 \cdot \sqrt{1+0} - 2 \cdot \sqrt{1-1} + 2 \cdot \sqrt{1+1} + 2 \cdot \sqrt{1+0} - 2 \cdot \sqrt{1-1} \\ &= 2 \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{1} - 2 \cdot \sqrt{0} + 2 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{1} - 2 \cdot \sqrt{0} \\ &= 4 \cdot \sqrt{2}. \end{aligned}$$

- c) Rechts ist der Graph $\mathcal{G}_g$ der Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto g(x) := \begin{cases} 2 \cdot \sqrt{1 + \sin(x)}, & \text{falls } \cos(x) > 0 \\ -2 \cdot \sqrt{1 + \sin(x)}, & \text{falls } \cos(x) \leq 0 \end{cases}$ angedeutet. Warum ist g keine Stammfunktion von f ? Können Sie eine Stammfunktion von f angeben (ohne Beweis)?



g ist nicht stetig

$$g(x) + \left\lfloor \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{4} \right\rfloor \cdot 4 \cdot \sqrt{2}$$

Lösung:

$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto F(x)$ ist eine Stammfunktion von f , falls F auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist mit $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Da g — wie in der Skizze ersichtlich — nicht stetig ist, ist g auch nicht differenzierbar und kann damit keine Stammfunktion von f sein.

Verschiebt man die Abschnitte des Graphen derart in vertikaler Richtung, dass alle ausgefüllten Kreise auf den nicht ausgefüllten Kreisen landen, so ist die zum dabei erhaltenen Graphen zugehörige Funktion stetig. Da die Grenzwerte der Ableitung von g jeweils existieren und 0 sind, wenn x gegen eine der Unstetigkeitsstellen läuft, ist die resultierende Funktion sogar differenzierbar.

Die Verschiebung kann man zum Beispiel mit Hilfe der Gauß'schen-Größen-Ganzen-Funktion $\lfloor \cdot \rfloor: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $t \mapsto \lfloor t \rfloor := \max \{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq t\}$ realisieren:

$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto F(x) := g(x) + \left\lfloor \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{4} \right\rfloor \cdot 4 \cdot \sqrt{2}$ ist eine Stammfunktion von f .



IntEinDim/Stammfkt/Ag_Integrale_NachObererGrenzeAbleiten.tex

Aufgabe 71.336 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

spf

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen stetig differenzierbar sind und bestimmen Sie ihre Ableitung!

a) $f: (0; 1) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := \int_0^x e^{\frac{t^2 - \arcsin(t)}{\ln(t+2)}} \cdot \sqrt{t^2 + 2} \, dt$

$$e^{\frac{x^2 - \arcsin(x)}{\ln(x+2)}} \cdot \sqrt{x^2 + 2}$$

Lösung: Mit $\tilde{f}(x) = e^{\frac{x^2 - \arcsin(x)}{\ln(x+2)}} \cdot \sqrt{x^2 + 2}$ gilt

$$f'(x) = \left(\int_0^x \tilde{f}(t) \, dt \right)' = \tilde{f}(x) \cdot x' - \tilde{f}(0) \cdot 0' = \tilde{f}(x) = e^{\frac{x^2 - \arcsin(x)}{\ln(x+2)}} \cdot \sqrt{x^2 + 2}$$

b) $g: (-1; 1) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto g(x) := \int_x^0 \operatorname{artanh}\left(\frac{y + \sin(y)}{2}\right) \cdot 3^{2y^2+1} \, dy$

$$-\operatorname{artanh}\left(\frac{x + \sin(x)}{2}\right) \cdot 3^{2x^2+1}$$

Lösung: Mit $\tilde{g}(x) = \operatorname{artanh}\left(\frac{x + \sin(x)}{2}\right) \cdot 3^{2x^2+1}$ gilt

$$g'(x) = \left(\int_x^0 \tilde{g}(y) \, dy \right)' = \tilde{g}(0) \cdot 0' - \tilde{g}(x) \cdot x' = -\tilde{g}(x) = -\operatorname{artanh}\left(\frac{x + \sin(x)}{2}\right) \cdot 3^{2x^2+1}$$

c) $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto u(t) := \int_0^{t^2+t} \sin(z) \cdot \cosh(\arctan(z^2 + 2)) \, dz$

$$\sin(t^2 + t) \cdot \cosh(\arctan((t^2 + t)^2 + 2)) \cdot (2t + 1)$$

Lösung: Mit $\tilde{u}(t) = \sin(t) \cdot \cosh(\arctan(t^2 + 2))$ gilt

$$\begin{aligned} u'(t) &= \left(\int_0^{t^2+t} \tilde{u}(z) \, dz \right)' = \tilde{u}(t^2+t) \cdot (t^2+t)' - \tilde{u}(0) \cdot 0' \\ &= \tilde{u}(t^2+t) \cdot (2t+1) = \sin(t^2+t) \cdot \cosh(\arctan((t^2+t)^2+2)) \cdot (2t+1) \end{aligned}$$

d) $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto v(t) := \int_{-e^t}^{\ln(1+t^2)} \left(\sqrt{3s^2 - 4s + 2} \cdot e^{\frac{1}{2}s^2} + 3 \cos(s^2) \right) ds$
 $+ \left(\sqrt{3(\ln(1+t^2))^2 - 4 \ln(1+t^2) + 2} \cdot e^{\frac{1}{2}(\ln(1+t^2))^2} + 3 \cos((\ln(1+t^2))^2) \right) \cdot \frac{2t}{1+t^2}$
 $+ \left(\sqrt{3e^{2t} + 4e^t + 2} \cdot e^{\frac{1}{2}e^{2t}} + 3 \cos(e^{2t}) \right) \cdot e^t$

Lösung: Mit $\tilde{v}(t) = \sqrt{3t^2 - 4t + 2} \cdot e^{\frac{1}{2}t^2} + 3 \cos(t^2)$ gilt

$$\begin{aligned} v'(t) &= \left(\int_{-e^t}^{\ln(1+t^2)} \tilde{v}(s) \, ds \right)' = \tilde{v}(\ln(1+t^2)) \cdot (\ln(1+t^2))' - \tilde{v}(-e^t) \cdot (-e^t)' \\ &= \tilde{v}(\ln(1+t^2)) \cdot \frac{2t}{1+t^2} - \tilde{v}(-e^t) \cdot (-e^t) \\ &= \left(\sqrt{3(\ln(1+t^2))^2 - 4(\ln(1+t^2)) + 2} \cdot e^{\frac{1}{2}(\ln(1+t^2))^2} + 3 \cos((\ln(1+t^2))^2) \right) \cdot \frac{2t}{1+t^2} \\ &\quad + \left(\sqrt{3e^{2t} + 4e^t + 2} \cdot e^{\frac{1}{2}e^{2t}} + 3 \cos(e^{2t}) \right) \cdot e^t \end{aligned}$$



IntEinDim/Stammfkt/Ag_Integration_EinstiegMitAbleitungen.tex

Aufgabe 71.337 (Ableiten rückwärts)

vr

Bestimmen Sie die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, falls dessen Ableitung $f'(x)$ und der Wert in einem Punkt bekannt sind!

a) $D = \mathbb{R}$, $f'(x) = 4x^3 + 2x$, $f(1) = 2$

$$x^4 + x^2$$

Lösung: Aus der Ableitungstabellen kann abgelesen werden, dass

$$4x^3 = (x^4)' \quad \text{und} \quad 2x = (x^2)'$$

Die gesuchte Funktion ist damit

$$f(x) = x^4 + x^2 + C$$

Aus der Bedingung $f(1) = 1^4 + 1^2 + C \stackrel{!}{=} 2$ folgt dass $C = 0$ und damit ist

$$f(x) = x^4 + x^2.$$

b) $D = \mathbb{R}$, $f'(x) = \cos(x)$, $f(\pi) = 1$

$$\sin(x) + 1$$

Lösung: Aus der Ableitungstabellen liest man ab, dass

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$

und die gesuchte Funktion ist damit

$$f(x) = \sin(x) + C.$$

Aus der Bedingung $f(\pi) = \sin(\pi) + C = 0 + C \stackrel{!}{=} 1$ folgt, dass $C = 1$ und dementsprechend ist

$$f(x) = \sin(x) + 1.$$

c) $D = [-1, \infty)$, $f'(x) = \sqrt{x+1}$, $f(0) = 1$

$$\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}$$

Lösung: Aus der Ableitungstabellen ist bekannt, dass für $\alpha \neq 0$ gilt $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$. Die Quadratwurzel kann als Potenz geschrieben werden mit $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Um die Ableitungsregel verwenden zu können, muss also $\alpha = \frac{3}{2}$ gelten:

$$\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

Verschieben des Argumentes um eine Konstante beeinflusst die Ableitung nicht:

$$\left((x+1)^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x+1}.$$

Damit gilt auch

$$\left(\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x+1}$$

und die gesuchte Funktion ist

$$f(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Die Bedingung

$$f(0) = \frac{2}{3}(0+1)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} + C \stackrel{!}{=} 1$$

liefert den Wert der Konstante $C = \frac{1}{3}$ und die Funktion ist

$$f(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}.$$

d) $D = \mathbb{R}$, $f'(x) = \cos(2x + \pi)$, $f(\pi) = 1$

$$\frac{1}{2} \sin(2x + \pi) + 1$$

Lösung: Aus den Ableitungstabellen ist bekannt, dass $(\sin(x))' = \cos(x)$ gilt. Wegen des Kettenregels gilt

$$(\sin(2x + \pi))' = \cos(2x + \pi) \cdot (2x + \pi)' = \cos(2x + \pi) \cdot 2$$

und damit

$$\left(\frac{1}{2} \sin(2x + \pi)\right)' = \cos(2x + \pi).$$

Die gesuchte Funktion beinhaltet auch noch die Konstante C :

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin(2x + \pi) + C,$$

welche aus der zusätzlichen Bedingung $f(\pi) = 1$ berechnet werden kann:

$$f(\pi) = \frac{1}{2} \sin(2\pi + \pi) + C = 0 + C \stackrel{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad C = 1$$

und

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin(2x + \pi) + 1.$$

e) $D = \mathbb{R}$, $f'(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$, $f(\frac{\pi}{2}) = 1$

$$\frac{1}{2}(\sin(x))^2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(\cos(x))^2 + 1$$

Lösung: Hier muss beachtet werden, dass aus $(-\cos(x))' = \sin(x)$ und $(\sin(x))' = \cos(x)$ folgt nicht, dass die Ableitung des Produktes ein Produkt der Ableitungen ist:

$$\begin{aligned} (-\cos(x) \sin(x))' &= (-\cos(x))' \cdot \sin(x) + (-\cos(x)) \cdot (\sin(x))' \\ &= \sin(x) \cdot \sin(x) - \cos(x) \cdot \cos(x) \neq \sin(x) \cdot \cos(x). \end{aligned}$$

Wenn man dagegen beachtet, dass $\cos(x)$ die Ableitung von $\sin(x)$ erhält man mit Kettenregel dass

$$(\sin(x)^2)' = 2 \sin(x) \cdot (\sin(x))' = 2 \sin(x) \cdot \cos(x)$$

und damit auch

$$\left(\frac{1}{2} \sin(x)^2\right)' = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin(x) \cdot (\sin(x))' = \sin(x) \cdot \cos(x).$$

Die gesuchte Funktion ist

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin(x)^2 + C,$$

wobei die Konstante C aus der zusätzlichen Bedingung bestimmt wird:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + C = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + C \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}.$$

Damit ist

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin(x)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (1 - \cos(x)^2) + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} \cos(x)^2.$$

f) $D = (0, \infty)$, $f'(x) = 2x \cdot \ln(x) + x$, $f(1) = 1$ $x^2 \ln(x) + 1$

Lösung: Auch in diesem Beispiel kann man nicht irgendwie nach $\ln$ in der Ergebnisspalte der Ableitungstabellen suchen; in der meisten Standardtabellen kommt $\ln(x)$ als Ableitung gar nicht vor. Es ist lediglich bekannt, dass $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ gilt.

In der Produktregel kommt einer der Faktoren immer nicht abgeleitet in der Summe:

$$(u(x) \cdot v(x))' = (u(x))' \cdot v(x) + u(x) \cdot (v(x))'.$$

Dadurch macht es Sinn mit dem Ansatz $v(x) = \ln(x)$ zu versuchen:

$$(u(x) \cdot \ln(x))' = (u(x))' \cdot \ln(x) + u(x) \cdot \frac{1}{x}.$$

Jetzt suchen wir nach einer Funktion $u(x)$ so dass

$$(u(x))' = 2x \quad \text{und} \quad u(x) \cdot \frac{1}{x} = x$$

was bei $u(x) = x^2$ erfüllt ist. Die gesuchte Funktion ist damit

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) + C = x^2 \cdot \ln(x) + C$$

Die Bedingung $f(1) = 1$ liefert den Wert der Konstante:

$$f(1) = 1^2 \cdot \ln(1) + C = 0 + C \stackrel{!}{=} 1 \rightarrow C = 1$$

und damit

$$f(x) = x^2 \cdot \ln(x) + 1.$$



IntEinDim/Stammfkt/Ag_Integration_Grundintegrale.tex

Aufgabe 71.338 (elementare Stammfunktionen)

Bestimmen Sie die folgenden Stammfunktionen:

a) $\int x^4 dx$

$$\frac{1}{5} \cdot x^5 + C$$

Lösung:

$$\int x^4 dx = \frac{1}{4+1} \cdot x^{4+1} + C = \frac{1}{5} \cdot x^5 + C.$$

b) $\int (x^2 + 3x^3) \, dx$

$$\frac{1}{3} \cdot x^3 + \frac{3}{4} \cdot x^4 + C$$

Lösung:

$$\int (x^2 + 3x^3) \, dx = \int x^2 \, dx + 3 \int x^3 \, dx = \frac{1}{3} \cdot x^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot x^4 + K \right) = \frac{1}{3} \cdot x^3 + \frac{3}{4} \cdot x^4 + C \quad \text{mit } C = 3K.$$

c) $\int (\sqrt[3]{8x} + 7) \, dx$

$$\frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{x^4} + 7x + C$$

Lösung:

$$\int (\sqrt[3]{8x} + 7) \, dx = \int \sqrt[3]{8} \cdot x^{\frac{1}{3}} \, dx + \int 7 \, dx = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot x^{\frac{4}{3}} + 7x + C = \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{x^4} + 7x + C$$

d) $\int \frac{2}{x} \, dx$

$$2 \cdot \ln(|x|) + C$$

Lösung:

$$\int \frac{2}{x} \, dx = 2 \cdot \int \frac{1}{x} \, dx = 2 \cdot \ln(|x|) + C$$

e) $\int \frac{5}{x^2} \, dx$

$$-\frac{5}{x} + C$$

Lösung:

$$\int \frac{5}{x^2} \, dx = 5 \int x^{-2} \, dx = 5 \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} + C = 5 \cdot (-1) x^{-1} = -\frac{5}{x} + C$$

f) $\int \frac{3}{2+2x^2} \, dx$

$$\frac{3}{2} \cdot \arctan(x) + C$$

Lösung:

$$\int \frac{3}{2+2x^2} \, dx = \frac{3}{2} \cdot \int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \frac{3}{2} \cdot \arctan(x) + C$$

g) $\int 2 \cdot \sin(x) \, dx$

$$-2 \cdot \cos(x) + C$$

Lösung:

$$\int 2 \sin(x) \, dx = 2 \cdot (-\cos(x)) + C = -2 \cos(x) + C$$

h) $\int (x + \sin(x) - e^x) dx$

$$\frac{x^2}{2} - \cos(x) - e^x + C$$

Lösung:

$$\int (x + \sin(x) - e^x) dx = \int x^1 dx + \int \sin(x) dx + \int -e^x dx = \frac{1}{2} \cdot x^2 - \cos(x) - e^x + C$$

i) $\int (4 + 4 \cdot (\tan(x))^2) dx$

$$4 \cdot \tan(x) + C$$

Lösung:

Mit

$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)' = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \left(\frac{\cos(x)}{\cos(x)} \right)^2 + \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)^2 = 1 + \tan^2(x)$$

folgt

$$\int (4 + 4 \cdot (\tan(x))^2) dx = \int 4 \cdot (1 + \tan^2(x)) dx = 4 \cdot \int \tan'(x) dx = 4 \cdot \tan(x) + C$$



IntEinDim/Stammfkt/Ag_Integration_Stammfunktionen1.tex

Aufgabe 71.339 (Stammfunktionen (1))

Bestimmen Sie die nachstehenden Stammfunktionen:

a) $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$

$$\frac{1}{2} \cdot (\ln(x))^2$$

Lösung:

Mit der Substitution $u = u(x) = \ln(x)$ und der Ableitung $u'(x) = \frac{1}{x}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln(x)}{x} dx &= \int u(x) \cdot u'(x) dx \\ &= \int u du \\ &= \frac{1}{2} \cdot u^2 + C \quad \text{mit } u = \ln(x) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\ln(x))^2 + C \end{aligned}$$

b) $\int \arctan(x) dx$

$$x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \cdot \ln(|1 + x^2|) + C$$

Lösung:

Hier kann man den „1“-Trick anwenden, um den Integranden zunächst als Produkt zu schreiben

$$\arctan(x) = 1 \cdot \arctan(x),$$

um dann mittels partieller Integration mit $u'(x) = 1$ und $v(x) = \arctan(x)$ und einer anschließenden Substitution $z = z(x) = 1 + x^2$ mit der Ableitung $z'(x) = 2x$ eine gesuchte Stammfunktion zu finden

$$\begin{aligned}
 \int \arctan(x) \, dx &= x \cdot \arctan(x) - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx \\
 &= x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x \, dx \\
 &= x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{z(x)} \cdot z'(x) \, dx \\
 &= x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{z} \, dz \\
 &= x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \cdot \ln(|z|) + C \quad \text{mit } z = 1 + x^2 \\
 &= x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \cdot \ln(|1 + x^2|) + C
 \end{aligned}$$

c) $\int \frac{x+2}{x+3} \, dx$

$$x - \ln(|x+3|) + C$$

Lösung:

Zunächst überführt man den Integranden per Polynomdivision

$$\frac{x+2}{x+3} = \frac{x+3-1}{x+3} = 1 - \frac{1}{x+3}$$

in einen elementar integrierbaren Ausdruck.

Mit der Substitution $u = u(x) = x + 3$ und der Ableitung $u'(x) = 1$ ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x+2}{x+3} \, dx &= \int \left(1 - \frac{1}{x+3}\right) \, dx \\
 &= \int 1 \, dx - \int \frac{1}{x+3} \, dx \\
 &= x - \ln(|x+3|) + C
 \end{aligned}$$



IntEinDim/Stammfkt/Ag_Integration_Stammfunktionen2.tex

Aufgabe 71.340 (Stammfunktionen (2))

Bestimmen Sie die nachstehenden Stammfunktionen:

a) $\int 2x \cdot (6x^3 + 1) \, dx$

$$\frac{12}{5}x^5 + x^2 + C$$

Lösung:

$$\int 2x \cdot (6x^3 + 1) \, dx = \int (12x^4 + 2x) \, dx = \frac{12}{5} \cdot x^5 + x^2 + C$$

b) $\int (\cos(x))^2 \, dx$

$$\frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{4} \cdot \sin(2x) + C$$

Lösung:

Partielle Integration mit

$$\begin{aligned} u' = u'(x) = \cos(x) &\implies u(x) = \sin(x) \\ v(x) = \cos(x) &\implies v'(x) = -\sin(x) \end{aligned}$$

liefert dann

$$\begin{aligned} \int \cos^2(x) \, dx &= \sin(x) \cdot \cos(x) - \int \sin(x) \cdot (-\sin(x)) \, dx \\ &= \sin(x) \cdot \cos(x) + \int \sin^2(x) \, dx \\ &= \sin(x) \cdot \cos(x) + \int (1 - \cos^2(x)) \, dx, && \text{trigonometrischer Pythagoras!} \\ &= \sin(x) \cdot \cos(x) + \int 1 \, dx - \int \cos^2(x) \, dx \end{aligned}$$

Durch die Umformung wurde das Ausgangsintegral reproduziert, allerdings mit negativem Vorzeichen. Dieses „schaufelt man nun auf die linke Seite rüber“ (vornehmer ausgedrückt: man addiert $\int \cos^2(x) \, dx$) und erhält

$$2 \cdot \int \cos^2(x) \, dx = \sin(x) \cdot \cos(x) + \int 1 \, dx = \sin(x) \cdot \cos(x) + x + K$$

mit einer Integrationskonstanten K . Multipliziert man die Gleichung nun noch mit $\frac{1}{2}$, so erhält man die gesuchte Stammfunktion

$$\int \cos^2(x) \, dx = \frac{1}{2} \cdot (x + \sin(x) \cdot \cos(x)) + C,$$

wobei $\frac{K}{2} =: C$ gesetzt wurde.

c) $\int x \cdot (x^2 - 2)^5 \, dx$

$$\frac{1}{12} \cdot (x^2 - 2)^6 + C$$

Lösung:

Mit der Substitution $u = u(x) = x^2 - 2$ und der Ableitung $u'(x) = 2x$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \int x \cdot (x^2 - 2)^5 \, dx &= \frac{1}{2} \cdot \int (x^2 - 2)^5 \cdot 2x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int u^5(x) \cdot u'(x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int u^5 \, du \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot u^6 + C && \text{mit } u = x^2 - 2 \\ &= \frac{1}{12} \cdot (x^2 - 2)^6 + C \end{aligned}$$



IntEinDim/Stammfkt/Ag_Integration_Substitution_leicht.tex

Aufgabe 71.341 (Substitutionsregel)

15.1.5; d) geändert

Ermitteln Sie folgende Stammfunktionen mit Hilfe der Substitutionsregel:

a) $\int \sin(2x - 5) \, dx$

$$-\frac{1}{2} \cdot \cos(2x - 5) + C$$

Lösung:

Die Verkettung (Komposition) der linearen Funktion $u(x) := 2x - 5$ mit der Sinusfunktion ergibt den Integranden $\sin(2x - 5) = \sin(u(x))$. Die Ableitung einer linearen Funktion ist eine konstante Funktion. Somit ist $\sin(u(x)) \cdot u'(x) = \sin(u(x)) \cdot 2$ und damit dann

$$\sin(2x - 5) = \sin(u(x)) = \frac{1}{2} \sin(u(x)) \cdot u'(x).$$

Die Rechenregeln für das Integral erlauben es, einen konstanten Faktor vor das Integral zu schreiben. Mit der Substitutionsregel erhält man folglich

$$\begin{aligned} \int \sin(2x - 5) \, dx &= \int \sin(u(x)) \, dx = \int \frac{1}{2} \sin(u(x)) \cdot u'(x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int \sin(u(x)) \cdot u'(x) \, dx = \frac{1}{2} \int \sin(u) \, du \\ &= \frac{1}{2} (-\cos(u)) + C \quad \text{mit } u = u(x) = 2x - 5 \\ &= -\frac{1}{2} \cos(2x - 5) + C. \end{aligned}$$

Eine andere Möglichkeit besteht darin, mit der Umkehrabbildung zu argumentieren. Da u injektiv ist, existiert die Umkehrabbildung $x = u^{-1}(y) = \frac{1}{2}y + \frac{5}{2}$. Mit der Substitutionsregel, angewandt auf u^{-1} und von rechts nach links gelesen, ergibt sich

$$\begin{aligned} \int \sin(2x - 5) \, dx &= \int \sin(2u^{-1}(y) - 5) \cdot (u^{-1})'(y) \, dy \\ &= \int \sin(y) \cdot \frac{1}{2} \, dy \\ &= \frac{1}{2} \int \sin(y) \, dy \\ &= \frac{1}{2} (-\cos(y)) + C \quad \text{mit } y = u(x) = 2x - 5 \\ &= -\frac{1}{2} \cos(2x - 5) + C \end{aligned}$$

Eine weitere Vorgehensweise benutzt die Differentialschreibweise. Für die Substitution $u = u(x) = 2x - 5$ ist $\frac{du}{dx} = u'(x) = 2$, woraus sich $du = u'(x) \, dx = 2 \, dx$ und damit $dx = \frac{1}{2} \, du$ ergibt. Dies führt auf

$$\begin{aligned} \int \sin(2x - 5) \, dx &= \int \sin(u) \cdot \frac{1}{2} \, du \\ &= \frac{1}{2} \int \sin(u) \, du \\ &= \frac{1}{2} (-\cos(u)) + C \quad \text{mit } u = u(x) = 2x - 5 \\ &= -\frac{1}{2} \cos(2x - 5) + C \end{aligned}$$

b) $\int \sqrt[4]{2x + 2} \, dx$

$$\frac{4}{5} \cdot \sqrt[4]{2 \cdot (x + 1)^5} + C$$

Lösung:

Zur Substitution kann die lineare Funktion $u(x) := 2x + 2$ mit der Ableitung $u'(x) = 2$ verwendet werden, und analog zu den vorherigen Teilaufgaben argumentiert werden. Im Folgenden wird das bisherige Vorgehen modifiziert, um zu verdeutlichen, dass es auch beim Integrieren praktisch sein kann, den Integranden umzuformen. Hier ist

$$\sqrt[4]{2x+2} = \sqrt[4]{2 \cdot (x+1)} = \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{x+1} = \sqrt[4]{2} \cdot (x+1)^{\frac{1}{4}}.$$

Die Potenzschreibweise kann selbstredend auch für den ersten Faktor verwendet werden.

Wesentlich für die Substitution mit $u(x) = x + 1$ ist, dass $u'(x) = 1$ ist. Somit gilt $\sqrt[4]{2x+2} = \sqrt[4]{2} \cdot (u(x))^{\frac{1}{4}} \cdot u'(x)$, und mit der Substitutionsregel ergibt sich

$$\begin{aligned} \int \sqrt[4]{2x+2} \, dx &= \int \sqrt[4]{2} \cdot (x+1)^{\frac{1}{4}} \, dx \\ &= \int \sqrt[4]{2} \cdot (u(x))^{\frac{1}{4}} \cdot u'(x) \, dx \\ &= \sqrt[4]{2} \int (u(x))^{\frac{1}{4}} \cdot u'(x) \, dx \\ &= \sqrt[4]{2} \int u^{\frac{1}{4}} \, du \\ &= \sqrt[4]{2} \cdot \frac{4}{5} u^{\frac{5}{4}} + C \quad \text{mit } u = u(x) = x + 1 \\ &= \frac{4}{5} \sqrt[4]{2} \cdot (x+1)^{\frac{5}{4}} + C \\ &= \frac{4}{5} \sqrt[4]{2(x+1)^5} + C \end{aligned}$$

c) $\int 2x \cdot \sin(x^2) \, dx$

$$-\cos(x^2) + C$$

Lösung:

Hier kann der Faktor $\sin(x^2)$ des Integranden als Verkettung der Funktion $u(x) = x^2$ mit der Sinusfunktion aufgefasst werden: $\sin(x^2) = \sin(u(x))$. Die Ableitung von $u(x) = x^2$ ist $u'(x) = 2x$, sodass der Integrand $2x \sin(x^2)$ gleich $u'(x) \cdot \sin(u(x))$ ist. Mit der Substitutionsregel ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int 2x \cdot \sin(x^2) \, dx &= \int u'(x) \cdot \sin(u(x)) \, dx \\ &= \int \sin u \, du \\ &= -\cos u + C \quad \text{mit } u = x^2 \\ &= -\cos(x^2) + C. \end{aligned}$$

d) $\int \frac{x^2}{5x^3 - 4} \, dx$

$$\frac{1}{15} \cdot \ln(|5x^3 - 4|) + C$$

Lösung:

Zur Substitution wird die Funktion $u(x) := 5x^3 - 4$ mit der Ableitung $u'(x) = 15x^2$, also $\frac{1}{15} \cdot u'(x) = x^2$, verwendet:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^2}{5x^3 - 4} \, dx &= \int \frac{1}{15} \frac{u'(x)}{u(x)} \, dx \\
 &= \frac{1}{15} \int \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x) \, dx \\
 &= \frac{1}{15} \int \frac{1}{u} \, du \\
 &= \frac{1}{15} \ln |u| + C \quad \text{mit } u = u(x) = 5x^3 - 4 \\
 &= \frac{1}{15} \ln |5x^3 - 4| + C
 \end{aligned}$$



IntEinDim/SubstRegel/Ag_IntEinDim_SubstRegelOhneTricks.tex

Aufgabe 72.342 (Substitutionsregel)

spf

Berechnen Sie die folgenden Integrale bzw. Stammfunktionen mit Hilfe der Substitutionsregel!

a) $\int_0^2 q \cdot (q^2 - 2)^5 dq$

0

Lösung:

Seien $h(q) := q^2 - 2$ und $g(t) := t^5$. Dann gilt $h'(q) = 2q$, $h(0) = -2$ und $h(2) = 2$.

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_0^2 q \cdot (q^2 - 2)^5 dq &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 \underbrace{(q^2 - 2)^5}_{=g(h(q))} \cdot \underbrace{2q}_{=h'(q)} dq = \frac{1}{2} \cdot \int_{-2}^2 \underbrace{t^5}_{=g(t)} dt \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{t^6}{6} \right]_{t=-2}^{t=2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2^6}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(-2)^6}{6} = \frac{2^4}{3} - \frac{2^4}{3} = 0. \end{aligned}$$

b) $\int_{-1}^4 \sqrt{\ell + 5} d\ell$

$\frac{38}{3}$

Lösung:

Seien $h(\ell) := \ell + 5$ und $g(t) := t^{\frac{1}{2}}$. Dann gilt $h'(\ell) = 1$, $h(-1) = 4$ und $h(4) = 9$.

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_{-1}^4 \sqrt{\ell + 5} d\ell &= \int_{-1}^4 \underbrace{(\ell + 5)^{\frac{1}{2}}}_{=g(h(\ell))} \cdot \underbrace{1}_{=h'(\ell)} d\ell = \int_4^9 \underbrace{t^{\frac{1}{2}}}_{=g(t)} dt \\ &= \left[\frac{2}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}} \right]_{t=4}^{t=9} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{9}^3 - \frac{2}{3} \cdot \sqrt{4}^3 = \frac{54}{3} - \frac{16}{3} = \frac{38}{3}. \end{aligned}$$

c) $\int_{-1}^3 \frac{2^u}{2^u + 2} du$

2

Lösung:

Seien $h(u) := 2^u + 2$ und $g(t) := \frac{1}{t}$. Dann gilt $h'(u) = \ln(2) \cdot 2^u$, $h(-1) = \frac{5}{2}$ und $h(3) = 10$.

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 \frac{2^u}{2^u + 2} du &= \frac{1}{\ln(2)} \cdot \int_{-1}^3 \underbrace{\frac{1}{2^u + 2}}_{=g(h(u))} \cdot \underbrace{\ln(2) \cdot 2^u}_{=h'(u)} du = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \int_{\frac{5}{2}}^{10} \underbrace{\frac{1}{t}}_{=g(t)} dt \\ &= \frac{1}{\ln(2)} \cdot [\ln(|t|)]_{t=\frac{5}{2}}^{t=10} = \frac{1}{\ln(2)} \cdot (\ln(|10|) - \ln(|\frac{5}{2}|)) = \frac{1}{\ln(2)} \cdot (\ln(5 \cdot 2) - \ln(\frac{5}{2})) \\ &= \frac{1}{\ln(2)} \cdot (\ln(5) - \ln(2) - (\ln(5) - \ln(2))) = \frac{1}{\ln(2)} \cdot 2 \cdot \ln(2) = 2. \end{aligned}$$

d) $\int \frac{e^{\frac{1}{n^2}}}{n^3} dn$

$$-\frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{n^2}} + C$$

Lösung:

Seien $h(n) := \frac{1}{n^2}$ und $g(t) := e^t$. Dann gilt $h'(n) = \frac{-2}{n^3}$.

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{\frac{1}{n^2}}}{n^3} dn &= -\frac{1}{2} \cdot \int \underbrace{e^{\frac{1}{n^2}}}_{=g(h(n))} \cdot \underbrace{\frac{-2}{n^3}}_{=h'(n)} dn = -\frac{1}{2} \cdot \left[\int \underbrace{e^t}_{=g(t)} dt \right]_{t=h(n)} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot [e^t + A]_{t=\frac{1}{n^2}} = -\frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{n^2}} + C. \end{aligned}$$

e) $\int \frac{3\vartheta^2 - 2}{2\vartheta^3 - 4\vartheta + 2} d\vartheta$

$$\ln \left(\sqrt{|\vartheta^3 - 2\vartheta + 1|} \right) + C$$

Lösung:

Seien $h(\vartheta) := \vartheta^3 - 2\vartheta + 1$ und $g(t) = \frac{1}{t}$. Dann gilt $h'(\vartheta) = 3\vartheta^2 - 2$.

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int \frac{3\vartheta^2 - 2}{2\vartheta^3 - 4\vartheta + 2} d\vartheta &= \frac{1}{2} \cdot \int \underbrace{\frac{1}{\vartheta^3 - 2\vartheta + 1}}_{=g(h(\vartheta))} \cdot \underbrace{(3\vartheta^2 - 2)}_{=h'(\vartheta)} d\vartheta = \frac{1}{2} \cdot \left[\int \underbrace{\frac{1}{t}}_{=g(t)} dt \right]_{t=h(\vartheta)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot [\ln(|t|) + A]_{t=\vartheta^3 - 2\vartheta + 1} = \frac{1}{2} \cdot \ln(|\vartheta^3 - 2\vartheta + 1|) + C \\ &= \ln \left(\sqrt{|\vartheta^3 - 2\vartheta + 1|} \right) + C. \end{aligned}$$

f) $\int_0^{\sqrt[3]{2}} \frac{x^2}{3} \cdot e^{x^3-2} dx$

$$\frac{e^2 - 1}{9e^2}$$

Lösung:

Seien $h(x) := x^3 - 2$ und $g(t) := e^t$. Dann gilt $h'(x) = 3x^2$, $h(0) = -2$ und $h(\sqrt[3]{2}) = 0$.

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt[3]{2}} \frac{x^2}{3} \cdot e^{x^3-2} dx &= \frac{1}{9} \cdot \int_0^{\sqrt[3]{2}} \underbrace{e^{x^3-2}}_{=g(h(x))} \cdot \underbrace{3x^2}_{=h'(x)} dx = \frac{1}{9} \cdot \int_{-2}^0 \underbrace{e^t}_{=g(t)} dt \\ &= \frac{1}{9} \cdot [e^t]_{t=-2}^{t=0} = \frac{1}{9} \cdot (e^0 - e^{-2}) = \frac{1}{9} - \frac{1}{9e^2} = \frac{e^2 - 1}{9e^2}. \end{aligned}$$

g) $\int \tan(y) dy$

$$-\ln(|\cos(y)|) + C$$

Lösung:

Seien $h(y) = \cos(y)$ und $g(t) = \frac{1}{t}$. Dann gilt $h'(y) = -\sin(y)$.

Damit folgt

$$\begin{aligned}\int \tan(y) \, dy &= - \int \underbrace{\frac{1}{\cos(y)}}_{=g(h(y))} \cdot \underbrace{(-\sin(y))}_{=h'(y)} \, dy = - \left[\int \underbrace{\frac{1}{t}}_{=g(t)} \, dt \right]_{t=h(y)} \\ &= - [\ln(|t|) + A]_{t=\cos(y)} = -\ln(|\cos(y)|) + C.\end{aligned}$$

h) $\int \frac{\cos(\ln(w))}{w} \, dw$

$$\sin(\ln(w)) + C$$

Lösung:

Seien $h(w) := \ln(w)$ und $g(t) := \cos(t)$. Dann gilt $h'(w) = \frac{1}{w}$.

Damit folgt

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos(\ln(w))}{w} \, dw &= \int \underbrace{\cos(\ln(w))}_{=g(h(w))} \cdot \underbrace{\frac{1}{w}}_{=h'(w)} \, dw = \left[\int \underbrace{\cos(t)}_{=g(t)} \, dt \right]_{t=h(w)} \\ &= [\sin(t) + C]_{t=\ln(w)} = \sin(\ln(w)) + C.\end{aligned}$$



IntEinDim/Uneigentlich/Ag_IntEinDimUneig_CauchyHW.tex

Aufgabe 73.343 (Cauchy'scher Hauptwert)

spf

Prüfen Sie zu den folgenden Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto f(t)$ jeweils, ob das uneigentliche Integral $I := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$ und der Cauchy'sche Hauptwert $C := \text{CH-} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-x}^x f(t) dt$ existieren!

a) $f(t) := \sin(t)$

I ex. nicht, $C = 0$

Lösung: Das uneigentliche Integral

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(t) dt &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^0 \sin(t) dt + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \sin(t) dt = \lim_{a \rightarrow \infty} [-\cos(t)]_{t=-a}^{t=0} + \lim_{b \rightarrow \infty} [-\cos(t)]_{t=0}^{t=b} \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} (-\cos(0) + \cos(-a)) + \lim_{b \rightarrow \infty} (-\cos(b) + \cos(0)) \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} (\cos(a) - 1) - \lim_{b \rightarrow \infty} (\cos(b) - 1) \end{aligned}$$

existiert nicht, weil $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos(x)$ nicht existiert. Für den Cauchy'schen Hauptwert hingegen gilt

$$\begin{aligned} \text{CH-} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(t) dt &= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c \sin(t) dt = \lim_{c \rightarrow \infty} [-\cos(t)]_{t=-c}^{t=c} \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} (-\cos(c) + \cos(-c)) = \lim_{c \rightarrow \infty} (-\cos(c) + \cos(c)) = \lim_{c \rightarrow \infty} 0 = 0. \end{aligned}$$

b) $f(t) := \cos(t)$

I ex. nicht, C ex. nicht

Lösung: Weil $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x)$ nicht existiert, existiert auch der Cauchy'sche Hauptwert

$$\begin{aligned} \text{CH-} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(t) dt &= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c \cos(t) dt = \lim_{c \rightarrow \infty} [\sin(t)]_{t=-c}^{t=c} = \lim_{c \rightarrow \infty} (\sin(c) - \sin(-c)) \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} (\sin(c) + \sin(c)) = \lim_{c \rightarrow \infty} 2 \cdot \sin(c). \end{aligned}$$

nicht. Dann kann auch das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \cos(t) dt$ nicht existieren.

c) $f(t) := t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$

$I = C = 0$

Lösung: Mit $g(x) = e^x$ und $h(t) = -\frac{t^2}{2}$ folgt wegen $h'(t) = -t$ mit der Substitutionsregel

$$\int t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt = - \int \underbrace{e^{-\frac{t^2}{2}}}_{=g(h(t))} \cdot \underbrace{(-t)}_{=h'(t)} dt = - \left[\int \underbrace{e^x}_{=g(x)} dx \right]_{x=h(t)} = - [e^x]_{x=-\frac{t^2}{2}} = -e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Weil das uneigentliche Integral

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^0 t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[-e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_{t=-a}^{t=0} + \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_{t=0}^{t=b} \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(-e^{-\frac{0^2}{2}} + e^{-\frac{(-a)^2}{2}} \right) + \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-e^{-\frac{b^2}{2}} + e^{-\frac{0^2}{2}} \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(e^{-\frac{a^2}{2}} - 1 \right) + \lim_{b \rightarrow \infty} \left(1 - e^{-\frac{b^2}{2}} \right) = -1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

existiert, existiert auch der Cauchy'sche Hauptwert und es gilt auch CH- $\int_{-\infty}^{\infty} t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0$.

d) $f(t) := t \cdot e^{\frac{t^2}{2}}$

I ex. nicht, $C = 0$

Lösung: Mit $g(x) = e^x$ und $h(t) = \frac{t^2}{2}$ folgt wegen $h'(t) = t$ mit der Substitutionsregel

$$\int t \cdot e^{\frac{t^2}{2}} dt = \int \underbrace{e^{\frac{t^2}{2}}}_{=g(h(t))} \cdot \underbrace{t}_{=h'(t)} dt = \left[\int \underbrace{e^x}_{=g(x)} dx \right]_{x=h(t)} = [e^x]_{x=\frac{t^2}{2}} = e^{\frac{t^2}{2}}.$$

Das uneigentliche Integral

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot e^{\frac{t^2}{2}} dt &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^0 t \cdot e^{\frac{t^2}{2}} dt + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b t \cdot e^{\frac{t^2}{2}} dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[e^{\frac{t^2}{2}} \right]_{t=-a}^{t=0} + \lim_{b \rightarrow \infty} \left[e^{\frac{t^2}{2}} \right]_{t=0}^{t=b} \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{0^2}{2}} - e^{\frac{(-a)^2}{2}} \right) + \lim_{b \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{b^2}{2}} - e^{\frac{0^2}{2}} \right) = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(1 - e^{\frac{a^2}{2}} \right) + \lim_{b \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{b^2}{2}} - 1 \right) \end{aligned}$$

existiert nicht, weil $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^2}{2}} = \infty$ nicht existiert. Für den Cauchy'schen Hauptwert hingegen gilt

$$\begin{aligned} \text{CH-} \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot e^{\frac{t^2}{2}} dt &= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c t \cdot e^{\frac{t^2}{2}} dt = \lim_{c \rightarrow \infty} \left[e^{\frac{t^2}{2}} \right]_{t=-c}^{t=c} \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{c^2}{2}} - e^{\frac{(-c)^2}{2}} \right) = \lim_{c \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{c^2}{2}} - e^{\frac{c^2}{2}} \right) = \lim_{c \rightarrow \infty} 0 = 0. \end{aligned}$$

e) $f(t) := \frac{\ln(\arctan(t) + \frac{\pi}{2})}{1+t^2}$

$I = C = \pi \cdot \ln(\pi) - \pi$

Lösung: Mit $g(x) = \ln(x) = u(x)$, $v(x) = x$ und $h(t) = \arctan(t) + \frac{\pi}{2}$ folgt wegen $h'(t) = \frac{1}{1+t^2}$, $u'(x) = \frac{1}{x}$ und $v'(x) = 1$ mit der Substitutionsregel und partieller Integration

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln(\arctan(t) + \frac{\pi}{2})}{1+t^2} dt &= \int \underbrace{\ln(\arctan(t) + \frac{\pi}{2})}_{=g(h(t))} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+t^2}}_{=h'(t)} dt = \left[\int \underbrace{\ln(x)}_{=g(x)} dx \right]_{x=h(t)} \\ &= \left[\int 1 \cdot \ln(x) dx \right]_{x=\arctan(t) + \frac{\pi}{2}} = \left[x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \right]_{x=\arctan(t) + \frac{\pi}{2}} \\ &= \left[x \cdot \ln(x) - \int 1 dx \right]_{x=\arctan(t) + \frac{\pi}{2}} = [x \cdot \ln(x) - x]_{x=\arctan(t) + \frac{\pi}{2}} \\ &= (\arctan(t) + \frac{\pi}{2}) \cdot \ln(\arctan(t) + \frac{\pi}{2}) - \arctan(t) - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Es gilt $\lim_{b \rightarrow \infty} \arctan(b) = \frac{\pi}{2}$ und $\lim_{a \rightarrow \infty} \arctan(-a) = -\frac{\pi}{2}$.

Mit der Regel von de l'Hospital ergibt sich

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} (\arctan(-a) + \frac{\pi}{2}) \cdot \ln(\arctan(-a) + \frac{\pi}{2}) &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\ln(\arctan(-a) + \frac{\pi}{2})}{(\arctan(-a) + \frac{\pi}{2})^{-1}} \\ &\stackrel{''-\infty''}{=} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\arctan(-a) + \frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{1+(-a)^2} \cdot (-1)}{-\left(\arctan(-a) + \frac{\pi}{2}\right)^{-2} \cdot \frac{1}{1+(-a)^2} \cdot (-1)} \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(-\arctan(-a) - \frac{\pi}{2}\right) = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} = 0. \end{aligned}$$

Weil wegen $\arctan(0) = 0$ das uneigentliche Integral

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(\arctan(t) + \frac{\pi}{2})}{1+t^2} dt &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^0 \frac{\ln(\arctan(t) + \frac{\pi}{2})}{1+t^2} dt + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{\ln(\arctan(t) + \frac{\pi}{2})}{1+t^2} dt \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left[(\arctan(t) + \frac{\pi}{2}) \cdot \ln(\arctan(t) + \frac{\pi}{2}) - \arctan(t) - \frac{\pi}{2} \right]_{t=-a}^{t=0} \\ &\quad + \lim_{b \rightarrow \infty} \left[(\arctan(t) + \frac{\pi}{2}) \cdot \ln(\arctan(t) + \frac{\pi}{2}) - \arctan(t) - \frac{\pi}{2} \right]_{t=0}^{t=b} \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} \cdot \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} - (\arctan(-a) + \frac{\pi}{2}) \cdot \ln(\arctan(-a) + \frac{\pi}{2}) + \arctan(-a) + \frac{\pi}{2} \right) \\ &\quad + \lim_{b \rightarrow \infty} \left((\arctan(b) + \frac{\pi}{2}) \cdot \ln(\arctan(b) + \frac{\pi}{2}) - \arctan(b) - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \cdot \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0 + \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \pi \cdot \ln(\pi) - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \cdot \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi \cdot \ln(\pi) - \pi \end{aligned}$$

existiert, existiert auch CH- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(\arctan(t) + \frac{\pi}{2})}{1+t^2} dt = \pi \cdot \ln(\pi) - \pi$.

f) $f(t) := \cos(t) \cdot e^{-t}$

I ex. nicht, C ex. nicht

Lösung: Mit $u(t) = \cos(t)$, $v(t) = -e^{-t}$ und $w(t) = \sin(t)$ ergibt sich wegen $u'(t) = -\sin(t)$, $v'(t) = e^{-t}$ und $w'(t) = \cos(t)$ mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int \underbrace{\cos(t)}_{=u(t)} \cdot \underbrace{e^{-t}}_{=v'(t)} dt &= \underbrace{\cos(t)}_{=u(t)} \cdot \underbrace{(-e^{-t})}_{=v(t)} - \int \underbrace{(-\sin(t))}_{=u'(t)} \cdot \underbrace{(-e^{-t})}_{=v(t)} dt \\ &= -\cos(t) \cdot e^{-t} - \int \underbrace{\sin(t)}_{=w(t)} \cdot \underbrace{e^{-t}}_{=v'(t)} dt \\ &= -\cos(t) \cdot e^{-t} - \left(\underbrace{\sin(t)}_{=w(t)} \cdot \underbrace{(-e^{-t})}_{=v(t)} - \int \underbrace{\cos(t)}_{=w'(t)} \cdot \underbrace{(-e^{-t})}_{=v(t)} dt \right) \\ &= (\sin(t) - \cos(t)) \cdot e^{-t} - \int \cos(t) \cdot e^{-t} dt. \end{aligned}$$

Addiert man das Integral $\int \cos(t) \cdot e^{-t} dt$ auf beiden Seiten der äußeren Gleichung und teilt im Anschluss durch 2, so folgt

$$\int \cos(t) \cdot e^{-t} dt = \frac{(\sin(t) - \cos(t)) \cdot e^{-t}}{2}.$$

Es gilt $\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{(\sin(c) - \cos(c)) \cdot e^{-c}}{2} = 0$ wegen $0 \leq \left| \frac{1}{2} \cdot (\sin(c) - \cos(c)) \cdot e^{-c} \right| \leq \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot e^{-c} \xrightarrow{c \rightarrow \infty} 0$.

$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{(\sin(-c) - \cos(-c)) \cdot e^c}{2}$ existiert nicht, da zum Beispiel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sin(-2\pi n) - \cos(-2\pi n)) \cdot e^{2\pi n}}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(0-1) \cdot e^{2\pi n}}{2} = -\infty \text{ gilt.}$$

Damit existiert aber auch der Cauchy'sche Hauptwert

$$\begin{aligned} \text{CH-} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(t) \cdot e^{-t} dt &= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c \cos(t) \cdot e^{-t} dt = \lim_{c \rightarrow \infty} \left[\frac{(\sin(t) - \cos(t)) \cdot e^{-t}}{2} \right]_{t=-c}^{t=c} \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left(\frac{(\sin(c) - \cos(c)) \cdot e^{-c}}{2} - \frac{(\sin(-c) - \cos(-c)) \cdot e^c}{2} \right) \end{aligned}$$

nicht, weswegen auch das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \cos(t) \cdot e^{-t} dt$ nicht existieren kann.

**Aufgabe 73.344** (Majoranten- und Minorantenkriterium)

Stewart Calculus

Entscheiden Sie, ob diese Integrale konvergieren:

a) $\int_1^{\infty} \frac{(\cos(\varphi))^2}{1+\varphi^2} d\varphi$

abs. konv.

Lösung:Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ und damit auch im Integrationsbereich gilt die Ungleichung

$$\left| \frac{(\cos(\varphi))^2}{1+\varphi^2} \right| = \frac{(\cos(\varphi))^2}{1+\varphi^2} \leq \frac{1}{1+\varphi^2}.$$

Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi \mapsto f(\varphi) := \frac{1}{1+\varphi^2}$ kann als Majorante verwendet werden, da das entsprechende Integral konvergent ist:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{1+\varphi^2} d\varphi &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{1+\varphi^2} d\varphi = \lim_{b \rightarrow \infty} [\arctan(\varphi)]_{\varphi=1}^{\varphi=b} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (\arctan(b) - \arctan(1)) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Mit dem Majorantenkriterium folgt, dass das Integral $\int_1^{\infty} \frac{(\cos(\varphi))^2}{1+\varphi^2} d\varphi$ absolut konvergiert.

b) $\int_1^{\infty} \frac{2+e^{-x}}{x} dx$

div.

Lösung:Da die Exponentialfunktion immer positiv ist, gilt für alle $x \in [1; \infty)$

$$\frac{2+e^{-x}}{x} > \frac{2}{x} > 0$$

Die Funktion $g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto g(x) := \frac{2}{x}$ kann als Minorante verwendet werden:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{2}{x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{2}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [2 \cdot \ln(x)]_{x=1}^{x=b} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (2 \cdot \ln(b) - 2 \cdot \ln(1)) = \lim_{b \rightarrow \infty} 2 \cdot \ln(b) = \infty. \end{aligned}$$

Mit dem Minorantenkriterium folgt, dass das Integral $\int_1^{\infty} \frac{2+e^{-x}}{x} dx$ divergiert.

c) $\int_1^{\infty} \frac{1}{u+e^{2u}} du$

abs. konv.

Lösung:Für alle $u \in (0; \infty)$ und damit auch auf dem gesamten Integrationsbereich gilt

$$\left| \frac{1}{u+e^{2u}} \right| = \frac{1}{u+e^{2u}} < \frac{1}{e^{2u}} = e^{-2u}$$

Die Funktion $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u \mapsto h(u) := e^{-2u}$ kann als Majorante verwendet werden:

$$\int_1^\infty e^{-2u} du = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b e^{-2u} du = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} \cdot e^{-2u} \right]_{u=1}^{u=b} = -\frac{1}{2} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} (e^{-2b} - e^{-2}) = \frac{1}{2e^2}.$$

Mit dem Majorantenkriterium folgt, dass das Integral $\int_1^\infty \frac{1}{u + e^{2u}} du$ absolut konvergiert.

d) $\int_1^\infty \frac{r}{\sqrt{1+r^6}} dr$

abs. konv.

Lösung:

Für alle $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und damit auch auf dem gesamten Integrationsbereich gilt die Ungleichung

$$\left| \frac{r}{\sqrt{1+r^6}} \right| = \frac{|r|}{\sqrt{1+r^6}} < \frac{|r|}{\sqrt{r^6}} = \frac{|r|}{|r^3|} = \frac{|r|}{|r|^3} = \frac{1}{|r|^2} = \frac{1}{r^2}$$

Die Funktion $v: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $r \mapsto v(r) := \frac{1}{r^2}$ kann als Majorante verwendet werden:

$$\int_1^\infty \frac{1}{r^2} dr = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{r^2} dr = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r=1}^{r=b} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right) = 1.$$

Mit dem Majorantenkriterium folgt, dass das Integral $\int_1^\infty \frac{r}{\sqrt{1+r^6}} dr$ absolut konvergiert.

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t \cdot \sin(t)} dt$

div.

Lösung:

Dieses Integral ist bei $t = 0$ uneigentlich. Für alle $t \in (0; \pi)$ gilt

$$\sin(t) \leq 1 \quad \xLeftrightarrow{\sin(t) > 0} \quad \frac{1}{\sin(t)} \geq 1 \quad \xLeftrightarrow{t > 0} \quad \frac{1}{t \cdot \sin(t)} \geq \frac{1}{t}.$$

Die Funktion $w: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto w(t) := \frac{1}{t}$ kann als Minorante verwendet werden:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t} dt = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t} dt = \lim_{a \rightarrow 0^+} [\ln(t)]_{t=a}^{t=\frac{\pi}{2}} = \lim_{a \rightarrow 0^+} (\ln(\frac{\pi}{2}) - \ln(a)) = \infty.$$

Mit dem Minorantenkriterium folgt, dass das Integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t \cdot \sin(t)} dt$ divergiert.

f) $\int_0^1 \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} dz$

abs. konv.

Lösung:

Dieses Integral ist bei $z = 0$ uneigentlich. Da die Exponentialfunktion für positive Argumente größer als 1 ist, gilt für alle $z \in (0; \infty)$ die Abschätzung

$$\left| \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} \right| = \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} = \frac{1}{e^z \cdot \sqrt{z}} \leq \frac{1}{\sqrt{z}}$$

Die Funktion $y: (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $z \mapsto y(z) := \frac{1}{\sqrt{z}}$ kann als Majorante verwendet werden:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{z}} dz = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{z}} dz = \lim_{a \rightarrow 0^+} [2 \cdot \sqrt{z}]_{z=a}^{z=1} = \lim_{a \rightarrow 0^+} (2 \cdot \sqrt{1} - 2 \cdot \sqrt{a}) = 2.$$

Mit dem Majorantenkriterium folgt, dass das Integral $\int_0^1 \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} dz$ absolut konvergiert.



IntEinDim/Uneigentlich/Ag_IntegraleUneigentlich_vermischt.tex

Aufgabe 73.345 (Uneigentliche Integrale)

Geben Sie bitte an, warum folgende Integrale uneigentlich sind und bestimmen Sie den Integralwert, falls dieser existiert.

Lösung:

Ein Integral heißt *uneigentlich*, wenn der Integrand im Abschluss des Integrationsbereichs Singularitäten (Polstellen) aufweist oder der Integrationsbereich unbeschränkt ist. Im Gegensatz zu den *eigentlichen* Integralen muss man hier bei der Bestimmung des Integralwertes eine Grenzwertbetrachtung heranziehen.

a) $\int_0^\infty e^{-t} dt$

1

Lösung: Dieses Integral ist uneigentlich, da eine Integrationsgrenze ∞ ist. Es ist konvergent und hat den Integralwert

$$\int_0^\infty e^{-t} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-t} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} [-e^{-t}]_{t=0}^{t=b} = \lim_{b \rightarrow \infty} (\underbrace{-e^{-b}}_{\rightarrow 0} + e^{-0}) = 0 + e^0 = 1.$$

b) $\int_1^2 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx$

∞

Lösung: Der Integrand dieses Integrals besitzt an der Stelle $x = 1$ eine Polstelle. Daher ist es uneigentlich. Das Integral divergiert wegen

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx &= \lim_{a \rightarrow 1^+} \int_a^2 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \lim_{a \rightarrow 1^+} [\ln(|x-1|) - \ln(|x+1|)]_{x=a}^{x=2} \\ &= \lim_{a \rightarrow 1^+} (\ln(1) - \ln(3) - \underbrace{\ln(|a-1|)}_{\rightarrow -\infty} + \ln(|a+1|)) \\ &= \infty, \end{aligned}$$

da alle anderen Terme in der Klammer konvergent sind.

c) $\int_0^1 \frac{z}{z-1} dz$

$-\infty$

Lösung: Der Integrand dieses Integrals besitzt an der Stelle $z = 1$ eine Polstelle. Daher ist es uneigentlich. Man erhält die Divergenz des Integrals zum Beispiel durch Addieren einer Null in der Form $z = z - 1 + 1$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{z}{z-1} dz &= \lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b \frac{z-1+1}{z-1} dz = \lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b \left(1 + \frac{1}{z-1}\right) dz = \lim_{b \rightarrow 1^-} [z + \ln(|z-1|)]_{z=0}^{z=b} \\ &= \lim_{b \rightarrow 1^-} (b + \ln(|b-1|) - 0 - \ln(|0-1|)) = \lim_{b \rightarrow 1^-} (b + \underbrace{\ln(|b-1|)}_{\rightarrow -\infty}) = -\infty.\end{aligned}$$

d) $\int_2^1 \frac{y^2+1}{y^2-1} dy$

$-\infty$

Lösung: Der Integrand dieses Integrals besitzt an der Stelle $y = 1$ eine Polstelle. Daher ist es uneigentlich. Bei diesem Integral ist eine Partialbruchzerlegung hilfreich. Sie kann allerdings auch durch das mehrfache Addieren einer null umgangen werden. Dass hier die obere Grenze kleiner als die untere Grenze ist, spielt für die ganze Rechnung keine Rolle und kann ignoriert werden:

$$\begin{aligned}\int_2^1 \frac{y^2+1}{y^2-1} dy &= - \int_1^2 \frac{y^2+1}{y^2-1} dy = - \int_1^2 \frac{y^2-1+1+1}{y^2-1} dy \\ &= - \int_1^2 \left(1 + \frac{2}{y^2-1}\right) dy = - \int_1^2 \left(1 + \frac{2}{(y-1) \cdot (y+1)}\right) dy \\ &= - \int_1^2 \left(1 + \frac{y+1-y+1}{(y-1) \cdot (y+1)}\right) dy = - \int_1^2 \left(1 + \frac{(y+1)-(y-1)}{(y-1) \cdot (y+1)}\right) dy \\ &= - \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right) dy = - \lim_{a \rightarrow 1^+} \int_a^2 \left(1 + \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right) dy \\ &= - \lim_{a \rightarrow 1^+} [y + \ln(|y-1|) - \ln(|y+1|)]_{y=a}^{y=2} \\ &= - \lim_{a \rightarrow 1^+} (2 + \ln(1) - \ln(3) - a - \underbrace{\ln(|a-1|)}_{\rightarrow -\infty} + \underbrace{\ln(|a+1|)}_{\rightarrow \ln(2)}) \\ &= -\infty.\end{aligned}$$

e) $\int_1^\infty \frac{1}{1+\varphi^2} d\varphi$

$\frac{\pi}{4}$

Lösung: Dieses Integral ist uneigentlich, da eine Integrationsgrenze ∞ ist. Bei diesem Integral verwenden wir, dass $(\arctan(\varphi))' = \frac{1}{\varphi^2+1}$ ist und erhalten Konvergenz:

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{1+\varphi^2} d\varphi &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{1+\varphi^2} d\varphi = \lim_{b \rightarrow \infty} [\arctan(\varphi)]_{\varphi=1}^{\varphi=b} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (\arctan(b) - \arctan(1)) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4},\end{aligned}$$

weil der Arkustangens für $\varphi \rightarrow \infty$ gegen $\frac{\pi}{2}$ konvergiert. Das liegt daran, dass die Umkehrfunktion

$$\tan: \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \varphi \mapsto \tan(\varphi) := \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$$

für $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}-$ gegen ∞ läuft.



IntEinDim/Uneigentlich/Ag_IntegraleUneigentlich_vieleUneigentlicheIntegrale.tex

Aufgabe 73.346 (viele uneigentliche Integrale)

spf

Prüfen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren und geben Sie gegebenenfalls ihren Wert an!

a) $\int_0^2 \frac{1}{x^2} dx$

∞

Lösung:

Es gilt

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^2 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{x} \right]_a^2 = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{a} \right) = \infty.$$

Also divergiert das Integral gegen ∞ .

b) $\int_0^2 \frac{1}{y} dy$

∞

Lösung:

Es gilt

$$\int_0^2 \frac{1}{y} dy = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^2 \frac{1}{y} dy = \lim_{a \rightarrow 0^+} [\ln(|y|)]_a^2 = \lim_{a \rightarrow 0^+} (\ln(2) - \ln(a)) = \infty.$$

Also divergiert das Integral gegen ∞ .

c) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$

1

Lösung:

Es gilt

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{1} \right) = 1.$$

Also konvergiert das Integral gegen 1.

d) $\int_1^\infty \frac{1}{y} dy$

∞

Lösung:

Es gilt

$$\int_1^\infty \frac{1}{y} dy = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{y} dy = \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln(|y|)]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln(b) - \ln(1)) = \infty.$$

Also divergiert das Integral gegen ∞ .

e) $\int_{2\pi}^\infty q \cdot \sin(q) dq$

div.

Lösung:

Seien $u(q) := q$ und $v(q) = -\cos(q)$. Dann sind $u'(q) = 1$ und $v'(q) = \sin(q)$.

Damit folgt

$$\begin{aligned}
 \int_{2\pi}^{\infty} q \cdot \sin(q) \, dq &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{2\pi}^b \underbrace{q}_{=u(q)} \cdot \underbrace{\sin(q)}_{=v'(q)} \, dq = \lim_{b \rightarrow \infty} \left([q \cdot (-\cos(q))]_{2\pi}^b - \int_{2\pi}^b 1 \cdot (-\cos(q)) \, dq \right) \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left([-q \cdot \cos(q)]_{2\pi}^b + \int_{2\pi}^b \cos(q) \, dq \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} [-q \cdot \cos(q) + \sin(q)]_{2\pi}^b \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} ((-b \cdot \cos(b) + \sin(b)) - (-2\pi \cdot \cos(2\pi) + \sin(2\pi))) \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} (-b \cdot \cos(b) + \sin(b) + 2\pi).
 \end{aligned}$$

Das Integral divergiert, denn zum Beispiel für $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0} = (2\pi n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-b_n \cdot \cos(b_n) + \sin(b_n) + 2\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-2\pi n \cdot 1 + 0 + 2\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - n) \cdot 2\pi = -\infty.$$

f) $\int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2} \, dt$ $\frac{1}{e}$

Lösung:

Seien $g(t) := -\frac{1}{t}$ und $f(x) := e^x$. Dann gilt $g'(t) = \frac{1}{t^2}$, $g(1) = -1$ und $g(a) = -\frac{1}{a}$ für alle $a \in \mathbb{R}$ mit $0 < a$. Damit folgt

$$\int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2} \, dt = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \underbrace{e^{-\frac{1}{t}}}_{=f(g(t))} \cdot \underbrace{\frac{1}{t^2}}_{=g'(t)} \, dt = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_{-\frac{1}{a}}^{-1} \underbrace{e^x}_{=f(x)} \, dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} [e^x]_{-\frac{1}{a}}^{-1} = \lim_{a \rightarrow 0^+} (e^{-1} - e^{-\frac{1}{a}}) = \frac{1}{e}.$$

Also konvergiert das Integral gegen $\frac{1}{e}$.

g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan(\varphi)} \, d\varphi$ ∞

Lösung:

Seien $g(\varphi) := \sin(\varphi)$ und $f(x) := \frac{1}{x}$. Dann gilt $g'(\varphi) = \cos(\varphi)$, $g(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $g(a) = \sin(a)$ und $g(b) = \sin(b)$ für alle $a \in \mathbb{R}$ und alle $b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < \frac{\pi}{4} < b < \frac{\pi}{2}$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan(\varphi)} \, d\varphi &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{\frac{1}{\sin(\varphi)}}_{=f(g(\varphi))} \cdot \underbrace{\cos(\varphi)}_{=g'(\varphi)} \, d\varphi + \lim_{b \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \int_{\frac{\pi}{4}}^b \underbrace{\frac{1}{\sin(\varphi)}}_{=f(g(\varphi))} \cdot \underbrace{\cos(\varphi)}_{=g'(\varphi)} \, d\varphi \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_{\sin(a)}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \underbrace{\frac{1}{x}}_{=f(x)} \, dx + \lim_{b \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sin(b)} \underbrace{\frac{1}{x}}_{=f(x)} \, dx \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0^+} [\ln(|x|)]_{\sin(a)}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \lim_{b \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} [\ln(|x|)]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sin(b)} \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \left(\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \ln(|\sin(a)|) \right) + \lim_{b \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(\ln(|\sin(b)|) - \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right) \\
 &= - \lim_{a \rightarrow 0^+} \ln(|\sin(a)|) + \ln(1) \\
 &= \infty.
 \end{aligned}$$

Also divergiert das Integral gegen ∞ .

h) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-u^2}} du$

$\frac{\pi}{2}$

Lösung:

Seien $g(u) := \frac{u}{2}$ und $f(t) := \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Dann gilt $g'(u) = \frac{1}{2}$, $g(0) = 0$ und $g(b) = \frac{b}{2}$ für alle $b \in \mathbb{R}$ mit $b < 2$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-u^2}} du &= \lim_{b \rightarrow 2^-} \int_0^b \underbrace{\frac{1}{2}}_{=g'(u)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{2}\right)^2}}}_{=f(g(u))} du = \lim_{b \rightarrow 2^-} \int_0^{\frac{b}{2}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}_{=f(t)} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow 2^-} [\arcsin(t)]_0^{\frac{b}{2}} = \lim_{b \rightarrow 2^-} \left(\arcsin\left(\frac{b}{2}\right) - \arcsin(0) \right) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Also konvergiert das Integral gegen $\frac{\pi}{2}$.

i) $\int_1^\infty \frac{1}{\mu \cdot (\mu + 4)} d\mu$

$\frac{\ln(5)}{4}$

Lösung:

Seien $A \in \mathbb{R}$ und $B \in \mathbb{R}$ mit $\frac{1}{\mu \cdot (\mu + 4)} = \frac{A}{\mu} + \frac{B}{\mu + 4}$ für alle $\mu \in \mathbb{R}$ mit $0 \neq \mu \neq -4$.
Dann gilt für alle $\mu \in \mathbb{R}$ mit $0 \neq \mu \neq -4$

$$1 = A \cdot (\mu + 4) + B \cdot \mu = (A + B) \cdot \mu + 4A.$$

Koeffizientenvergleich ergibt $4A = 1$ und $A + B = 0$ bzw. $A = \frac{1}{4}$ und $B = -\frac{1}{4}$.

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{\mu \cdot (\mu + 4)} d\mu &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \left(\frac{\frac{1}{4}}{\mu} + \frac{-\frac{1}{4}}{\mu + 4} \right) d\mu = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \cdot \int_1^b \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu + 4} \right) d\mu \\ &= \frac{1}{4} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln(|\mu|) - \ln(|\mu + 4|)]_1^b = \frac{1}{4} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\ln \left(\left| \frac{\mu}{\mu + 4} \right| \right) \right]_1^b \\ &= \frac{1}{4} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\ln \left(\left| \frac{1}{1 + \frac{4}{\mu}} \right| \right) \right]_1^b = \frac{1}{4} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\ln \left(\left| \frac{1}{1 + \frac{4}{b}} \right| \right) - \ln \left(\left| \frac{1}{1 + \frac{4}{1}} \right| \right) \right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot (\ln(1) + \ln(5)) = \frac{\ln(5)}{4}. \end{aligned}$$

Also konvergiert das Integral gegen $\frac{\ln(5)}{4}$.

j) $\int_0^\infty \ell^5 \cdot e^{-\ell^2} d\ell$

1

Lösung:

Wir berechnen zunächst $\int \ell^5 \cdot e^{-\ell^2} d\ell$.

Seien dazu $g(\ell) := -\ell^2$ und $f(t) := t^2 \cdot e^t$. Dann ist $g'(\ell) = -2\ell$ und es folgt

$$\int \ell^5 \cdot e^{-\ell^2} d\ell = -\frac{1}{2} \cdot \int \underbrace{(-2\ell)}_{=g'(\ell)} \cdot \underbrace{(-\ell^2)^2 \cdot e^{-\ell^2}}_{=f(g(\ell))} d\ell = -\frac{1}{2} \cdot \left[\underbrace{t^2 \cdot e^t}_{=f(t)} \right]_{t=-\ell^2}.$$

Seien nun $u(t) := t^2$, $v(t) := 2t$ und $w(t) := e^t$. Dann sind $u'(t) = 2t$, $v'(t) = 2$ und $w'(t) = e^t$.
Damit folgt

$$\begin{aligned} \int \underbrace{t^2}_{=u(t)} \cdot \underbrace{e^t}_{=w'(t)} dt &= \underbrace{t^2}_{=u(t)} \cdot \underbrace{e^t}_{=w(t)} - \int \underbrace{2t}_{=u'(t)} \cdot \underbrace{e^t}_{=w(t)} dt = t^2 \cdot e^t - \underbrace{2t}_{=v(t)} \cdot \underbrace{e^t}_{=w(t)} + \int \underbrace{2}_{=v'(t)} \cdot \underbrace{e^t}_{=w(t)} dt \\ &= t^2 \cdot e^t - 2t \cdot e^t + 2e^t = \left((t-1)^2 + 1 \right) \cdot e^t. \end{aligned}$$

Also ist

$$\int \ell^5 \cdot e^{-\ell^2} d\ell = -\frac{1}{2} \cdot \left[\left((t-1)^2 + 1 \right) \cdot e^t \right]_{t=-\ell^2} = -\frac{(\ell^2+1)^2+1}{2} \cdot e^{-\ell^2} = -\left(\frac{\ell^4}{2} + \ell^2 + 1 \right) \cdot e^{-\ell^2}.$$

Damit folgt nun

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \ell^5 \cdot e^{-\ell^2} d\ell &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \ell^5 \cdot e^{-\ell^2} d\ell = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\left(\frac{\ell^4}{2} + \ell^2 + 1 \right) \cdot e^{-\ell^2} \right]_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\left(\frac{b^4}{2} + b^2 + 1 \right) \cdot e^{-b^2} + \left(\frac{0^4}{2} + 0^2 + 1 \right) \cdot e^{-0^2} \right) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b^4 + b^2 + 1}{2e^{b^2}} + 1 = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{4b^3 + 2b}{2 \cdot 2b \cdot e^{b^2}} + 1 = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{2b^2 + 1}{2e^{b^2}} + 1 \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{4b}{2 \cdot 2b \cdot e^{b^2}} + 1 = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{b^2}} + 1 = 1. \end{aligned}$$

Also konvergiert das Integral gegen 1.

k) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh(z)} dz$

π

Lösung:

Wir berechnen zunächst $\int \frac{1}{\cosh(z)} dz$.

Seien $g(z) := e^z$ und $f(t) := \frac{1}{1+t^2}$. Dann ist $g'(z) = e^z$ und es folgt

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cosh(z)} dz &= \int \frac{1}{\frac{e^z + e^{-z}}{2}} dz = \int \frac{2}{e^{-z} \cdot (e^{2z} + 1)} dz = 2 \cdot \int \underbrace{e^z}_{=g'(z)} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+(e^z)^2}}_{=f(g(z))} dz \\ &= 2 \cdot \left[\int \frac{1}{1+t^2} dt \right]_{t=g(z)} = 2 \cdot [\arctan(t)]_{t=e^z} = 2 \cdot \arctan(e^z). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh(z)} dz &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{1}{\cosh(z)} dz + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{\cosh(z)} dz \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} [2 \cdot \arctan(e^z)]_a^0 + \lim_{b \rightarrow \infty} [2 \cdot \arctan(e^z)]_0^b \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} (2 \cdot \arctan(e^0) - 2 \cdot \arctan(e^a)) + \lim_{b \rightarrow \infty} (2 \cdot \arctan(e^b) - 2 \cdot \arctan(e^0)) \\ &= 2 \cdot \arctan(1) - 2 \cdot \arctan(0) + 2 \cdot \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \arctan(1) = \pi. \end{aligned}$$

Also konvergiert das Integral gegen π .

$$1) \int_1^e \frac{1}{s \cdot \sqrt[3]{\ln(s)}} ds$$

$\frac{3}{2}$

Lösung:

Seien $g(s) := \ln(s)$ und $f(x) := x^{-\frac{1}{3}}$. Dann sind $g'(s) = \frac{1}{s}$, $g(e) = 1$ und $g(a) = \ln(a)$ für alle $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{1}{s \cdot \sqrt[3]{\ln(s)}} ds &= \lim_{a \rightarrow 1} \int_a^e \underbrace{\frac{1}{s}}_{=g'(s)} \cdot \underbrace{(\ln(s))^{-\frac{1}{3}}}_{=f(g(s))} ds = \lim_{a \rightarrow 1} \int_{\ln(a)}^1 \underbrace{x^{-\frac{1}{3}}}_{=f(x)} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow 1} \left[\frac{3}{2} \cdot x^{\frac{2}{3}} \right]_{\ln(a)}^1 = \lim_{a \rightarrow 1} \left(\frac{3}{2} \cdot 1^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{\ln(a)}^2 \right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{\ln(1)}^2 = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Also konvergiert das Integral gegen $\frac{3}{2}$.

Tipp: Klammern Sie in Aufgabenteil k) e^{-z} im Nenner aus und substituieren Sie danach geschickt!



IntEinDim/Uneigentlich/Ag_Orthogonal_HermitePolynome.tex

Aufgabe 73.347 (Orthogonalität der Hermite-Polynome nachrechnen)

Die Hermite-Polynome $H_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sind unter anderem in der Physik von Bedeutung. Es gilt

$$\langle H_n(x), H_m(x) \rangle = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nm}$$

mit dem uneigentlichen Integral (L^2 -Skalarprodukt)

$$\langle H_n(x), H_m(x) \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx \quad \text{und} \quad \delta_{nm} := \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}.$$

Überprüfen Sie dies durch Berechnung der Integrale für $n = m = 0$, $n = 0$ und $m = 1$ sowie $n = m = 1$ mit $H_0(x) = 1$ und $H_1(x) = 2x$. Verwenden Sie dabei $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. Substitution für $-2xe^{-x^2}$ und partielle Integration für $e^{-x^2}(-2x)x$

Lösung:

$n = m = 0$:

$$\langle H_0(x), H_0(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} 1 \cdot 1 dx = \sqrt{\pi} = 2^0 0! \sqrt{\pi} \delta_{00}.$$

$n = 0, m = 1$, Berechnung des uneigentlichen Integrals mit $c \in \mathbb{R}$ beliebig:

$$\begin{aligned} \langle H_0(x), H_1(x) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} 1 \cdot 2x dx \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{-\alpha}^c -e^{-x^2} \cdot (-2x) dx + \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_c^{\beta} -e^{-x^2} \cdot (-2x) dx \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left[-e^{-x^2} \right]_{-\alpha}^c + \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left[-e^{-x^2} \right]_c^{\beta} \\ &= -e^{-c^2} - \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(-e^{-(\alpha)^2} \right) + \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(-e^{-\beta^2} \right) - \left(-e^{-c^2} \right) \\ &= -e^{-c^2} - 0 + 0 + e^{-c^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Bemerkung: Durch den schnell fallenden Faktor e^{-x^2} existieren die Integrale der Skalarprodukte im uneigentlichen Sinn und sind somit gleich dem Grenzwert des symmetrisch um Null berechneten Integrals (Cauchyscher Hauptwert). Da der Normierungsfaktor eine gerade Funktion ist, ist der Integrand für ein gerades und ein ungerades Polynom eine ungerade Funktion und das symmetrisch berechnete Integral ist stets Null. Tatsächlich sind gerade Hermite-Polynome auch gerade Polynome und ungerade Hermite-Polynome ungerade Polynome. Dies zeigt allerdings noch nicht, dass beispielsweise $\langle H_0(x), H_2(x) \rangle$ ebenfalls verschwindet.

$n = m = 1$, geschickte Aufteilung des Polynoms für partielle Integration und Substitution:

$$\begin{aligned}
 \langle H_1(x), H_1(x) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} 2x \cdot 2x dx \\
 &= -2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} (-2x) \cdot x dx \\
 &= -2 \left\{ \left[e^{-x^2} \cdot x \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cdot 1 dx \right\} \\
 &= -2 \{ 0 - \sqrt{\pi} \} \\
 &= 2\sqrt{\pi} \\
 &= 2^1 1! \sqrt{\pi} \delta_{11} .
 \end{aligned}$$

Auch hier müsste das uneigentliche Integral eigentlich (...) durch Aufteilung und Grenzwertbildung berechnet werden.


IntEinDim/Vermischt/Ag_IntEinDim_EinBetragDreiSubstRegelEinePIEineWahlbarZweiBeides.
tex

Aufgabe 74.348 (Vermischte Integrale)

kr

Berechnen Sie die folgenden Integrale und Stammfunktionen!

a) $\int_{-2}^2 |x - 1| dx$

5

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 |x - 1| dx &= \int_{-2}^1 |x - 1| dx + \int_1^2 |x - 1| dx = \int_{-2}^1 (-(x - 1)) dx + \int_1^2 (x - 1) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} \cdot x^2 + x\right]_{x=-2}^{x=1} + \left[\frac{1}{2} \cdot x^2 - x\right]_{x=1}^{x=2} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot 1^2 + 1 + \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 - (-2) + \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 + 1 \\ &= -\frac{1}{2} + 1 + 2 + 2 + 2 - 2 - \frac{1}{2} + 1 = 5. \end{aligned}$$

b) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{r} \cdot (1 + \sqrt{r})} dr$

 $2 \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

Lösung: Mit $g(x) := \frac{2}{x}$ und $h(r) := 1 + \sqrt{r}$ folgt wegen $h'(r) = \frac{1}{2\sqrt{r}}$, $h(1) = 1 + \sqrt{1} = 1 + 1 = 2$ und $h(4) = 1 + \sqrt{4} = 1 + 2 = 3$ aus der Substitutionsregel

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{r} \cdot (1 + \sqrt{r})} dr &= \int_1^4 \underbrace{\frac{2}{1 + \sqrt{r}}}_{=g(h(r))} \cdot \underbrace{\frac{1}{2 \cdot \sqrt{r}}}_{=h'(r)} dr = \int_{h(1)}^{h(4)} \underbrace{\frac{2}{x}}_{=g(x)} dx = 2 \cdot \int_2^3 \frac{1}{x} dx \\ &= 2 \cdot [\ln(|x|)]_{x=2}^{x=3} = 2 \cdot (\ln(3) - \ln(2)) = 2 \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{z^2}{2} \cdot \sin(2z) dz$

 $\frac{\pi^2 - 4}{16}$

Lösung: Mit $u(z) := \frac{z^2}{2}$ und $v(z) := -\frac{1}{2} \cdot \cos(2z)$ folgt $u'(z) = z$ und $v'(z) = \sin(2z)$. Eine partielle Integration liefert

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{z^2}{2}}_{=u(z)} \cdot \underbrace{\sin(2z)}_{=v'(z)} dz = \left[\underbrace{\frac{z^2}{2}}_{=u(z)} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{2} \cdot \cos(2z)\right)}_{=v(z)} \right]_{z=0}^{z=\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{z}_{=u'(z)} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{2} \cdot \cos(2z)\right)}_{=v(z)} dz.$$

Mit $p(z) := \frac{z}{2}$ und $q(z) := \frac{1}{2} \cdot \sin(2z)$ folgt $p'(z) = \frac{1}{2}$ und $q'(z) = \cos(2z)$. Eine zweite partielle

Integration liefert

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{z^2}{2} \cdot \sin(2z) \, dz &= -\frac{\pi^2}{16} \cdot \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + \frac{0^2}{4} \cdot \underbrace{\cos(0)}_{=1} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{z^2}{2}}_{=p(z)} \cdot \underbrace{\cos(2z)}_{=q'(z)} \, dz \\
 &= \frac{\pi^2}{16} + \left[\underbrace{\frac{z^2}{2}}_{=p(z)} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \sin(2z)}_{=q(z)} \right]_{z=0}^{z=\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{1}{2}}_{=p'(z)} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \sin(2z)}_{=q(z)} \, dz \\
 &= \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{8} \cdot \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} - \frac{0}{4} \cdot \underbrace{\sin(0)}_{=0} - \frac{1}{4} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin(2z)}_{=v'(z)} \, dz \\
 &= \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4} \cdot \left[-\frac{1}{2} \cdot \cos(2z) \right]_{z=0}^{z=\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{8} \cdot \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} - \frac{1}{8} \cdot \underbrace{\cos(0)}_{=1} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = \frac{\pi^2-4}{16}.
 \end{aligned}$$

d) $\int_1^e \frac{1}{\ell \cdot (1 + \ln(\ell))} \, d\ell$

$\ln(2)$

Lösung: Mit $g(x) := \frac{1}{x}$ und $h(\ell) := 1 + \ln(\ell)$ folgt wegen $h'(\ell) = \frac{1}{\ell}$, $h(1) = 1 + \ln(1) = 1 + 0 = 1$ und $h(e) = 1 + \ln(e) = 1 + 1 = 2$ aus der Substitutionsregel

$$\begin{aligned}
 \int_1^e \frac{1}{\ell \cdot (1 + \ln(\ell))} \, d\ell &= \int_1^e \underbrace{\frac{1}{1 + \ln(\ell)}}_{=g(h(\ell))} \cdot \underbrace{\frac{1}{\ell}}_{=h'(\ell)} \, d\ell = \int_{h(1)}^{h(e)} \underbrace{\frac{1}{x}}_{=g(x)} \, dx = \int_1^2 \frac{1}{x} \, dx \\
 &= [\ln(|x|)]_{x=1}^{x=2} = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2).
 \end{aligned}$$

e) $\int \frac{\varphi^3}{\sqrt{1 + \varphi^2}} \, d\varphi$

$$\frac{\varphi^2-2}{3} \cdot \sqrt{\varphi^2+1} + C$$

Lösung: Mit $g(x) := \frac{x-1}{2 \cdot \sqrt{x}}$ und $h(\varphi) := 1 + \varphi^2$ folgt wegen $h'(\varphi) = 2\varphi$ aus der Substitutionsregel

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\varphi^3}{\sqrt{1 + \varphi^2}} \, d\varphi &= \int \underbrace{\frac{(1 + \varphi^2) - 1}{2 \cdot \sqrt{1 + \varphi^2}}}_{=g(h(\varphi))} \cdot \underbrace{2\varphi}_{=h'(\varphi)} \, d\varphi \\
 &= \left[\int \underbrace{\frac{x-1}{2 \cdot \sqrt{x}}}_{=g(x)} \, dx \right]_{x=h(\varphi)} = \left[\int \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \right) \, dx \right]_{x=1+\varphi^2} \\
 &= \left[\frac{1}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} - \sqrt{x} + C \right]_{x=\varphi^2+1} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\varphi^2+1}^3 - \sqrt{\varphi^2+1} + C \\
 &= \frac{1}{3} \cdot (\varphi^2+1) \cdot \sqrt{\varphi^2+1} - \sqrt{\varphi^2+1} + C = \frac{\varphi^2-2}{3} \cdot \sqrt{\varphi^2+1} + C.
 \end{aligned}$$

f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \cdot \cos(t) \, dt$

$\frac{1}{2}$

Lösung mit der Substitutionsregel:

Mit $g(x) := x$ und $h(t) := \sin(t)$ folgt wegen $h'(t) = \cos(t)$, $h(0) = \sin(0) = 0$ und $h(\frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ aus der Substitutionsregel

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin(t)}_{=g(h(t))} \cdot \underbrace{\cos(t)}_{=h'(t)} dt = \int_{h(0)}^{h(\frac{\pi}{2})} \underbrace{x}_{=g(x)} dx = \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

Lösung mit partieller Integration:

Mit $u(t) := \sin(t)$ und $v(t) := \sin(t)$ folgt $u'(t) = \cos(t)$ und $v'(t) = \cos(t)$. Eine partielle Integration liefert

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin(t)}_{=u(t)} \cdot \underbrace{\cos(t)}_{=v'(t)} dt = \left[\underbrace{\sin(t)}_{=u(t)} \cdot \underbrace{\sin(t)}_{=v(t)} \right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos(t)}_{=u'(t)} \cdot \underbrace{\sin(t)}_{=v(t)} dt$$

Addiert man das Integral auf beiden Seiten dieser Gleichung, so folgt

$$2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \cdot \cos(t) dt = (\sin(\frac{\pi}{2}))^2 - (\sin(0))^2.$$

Mit $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ und $\sin(0) = 0$ folgt $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \cdot \cos(t) dt = \frac{1}{2}$ nach einer Division durch 2.

g) $\int y \cdot e^{2y^2} \cdot \sin(e^{y^2}) dy$

$$\frac{1}{2} \cdot (\sin(e^{y^2}) - e^{y^2} \cdot \cos(e^{y^2})) + C$$

Lösung: Mit $g(x) := \frac{x \cdot \sin(x)}{2}$ und $h(y) := e^{y^2}$ folgt wegen $h'(y) = e^{y^2} \cdot 2y$ aus der Substitutionsregel

$$\int y \cdot e^{2y^2} \cdot \sin(e^{y^2}) dy = \int \underbrace{\frac{e^{y^2} \cdot \sin(e^{y^2})}{2}}_{=g(h(y))} \cdot \underbrace{e^{y^2} \cdot 2y}_{=h'(y)} dy = \left[\underbrace{\frac{x \cdot \sin(x)}{2}}_{=g(x)} \right]_{x=e^{y^2}}.$$

Partielle Integration liefert mit $u(x) := \frac{x}{2}$ und $v(x) := -\cos(x)$ aus $u'(x) = \frac{1}{2}$ und $v'(x) = \sin(x)$

$$\begin{aligned} \int y \cdot e^{2y^2} \cdot \sin(e^{y^2}) dy &= \left[\int \underbrace{\frac{x}{2}}_{=u(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{=v'(x)} dx \right]_{x=e^{y^2}} \\ &= \left[\underbrace{\frac{x}{2}}_{=u(x)} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{=v(x)} - \int \underbrace{\frac{1}{2}}_{=u'(x)} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{=v(x)} dx \right]_{x=e^{y^2}} \\ &= \left[-\frac{x}{2} \cdot \cos(x) + \frac{1}{2} \cdot \int \cos(x) dx \right]_{x=e^{y^2}} \\ &= \left[-\frac{x}{2} \cdot \cos(x) + \frac{1}{2} \cdot \sin(x) + C \right]_{x=e^{y^2}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sin(e^{y^2}) - \frac{1}{2} \cdot e^{y^2} \cdot \cos(e^{y^2}) + C. \end{aligned}$$

h) $\int \cos(\sqrt{\omega}) d\omega$

$$2 \cdot \sqrt{\omega} \cdot \sin(\sqrt{\omega}) + 2 \cdot \cos(\sqrt{\omega}) + C$$

Lösung: Mit $g(x) := 2x \cdot \cos(x)$ und $h(\omega) := \sqrt{\omega}$ folgt wegen $h'(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\omega}}$ aus der Substitutionsregel

$$\int \cos(\sqrt{\omega}) \, d\omega = \int \underbrace{2 \cdot \sqrt{\omega} \cdot \cos(\sqrt{\omega})}_{=g(h(\omega))} \cdot \underbrace{\frac{1}{2 \cdot \sqrt{\omega}}}_{=h'(\omega)} \, d\omega = \left[\int \underbrace{2x \cdot \cos(x)}_{=g(x)} \, dx \right]_{x=\sqrt{\omega}}.$$

Partielle Integration liefert mit $u(x) := 2x$ und $v(x) := \sin(x)$ aus $u'(x) = 2$ und $v'(x) = \cos(x)$

$$\begin{aligned} \int \cos(\sqrt{\omega}) \, d\omega &= \left[\int \underbrace{2x}_{=u(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{=v'(x)} \, dx \right]_{x=\sqrt{\omega}} = \left[\underbrace{2x}_{=u(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{=v(x)} - \int \underbrace{2}_{=u'(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{=v(x)} \, dx \right]_{x=\sqrt{\omega}} \\ &= \left[2x \cdot \sin(x) - 2 \cdot \int \sin(x) \, dx \right]_{x=\sqrt{\omega}} = [2x \cdot \sin(x) - 2 \cdot (-\cos(x)) + C]_{x=\sqrt{\omega}} \\ &= 2 \cdot \sqrt{\omega} \cdot \sin(\sqrt{\omega}) + 2 \cdot \cos(\sqrt{\omega}) + C. \end{aligned}$$



IntEinDim/Vermischt/Ag_IntEinDim_KosinusHochDreiPartiellUndSubst.tex

Aufgabe 74.349 (Integral auf verschiedenen Wegen berechnen)

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := (\cos(x))^3$.

$$\sin(x) - \frac{1}{3} \cdot (\sin(x))^3$$

a) Finden Sie eine Stammfunktion von f mittels partieller Integration!

Lösung:

Mit $u(x) := \sin(x)$ und $v(x) := (\cos(x))^2$ folgt $u'(x) = \cos(x)$ und $v'(x) = 2 \cdot \cos(x) \cdot (-\sin(x))$.
Damit liefert eine partielle Integration

$$\begin{aligned} \int (\cos(x))^3 \, dx &= \int \underbrace{\cos(x)}_{=u'(x)} \cdot \underbrace{(\cos(x))^2}_{=v(x)} \, dx \\ &= \underbrace{\sin(x)}_{=u(x)} \cdot \underbrace{(\cos(x))^2}_{=v(x)} - \int \underbrace{\sin(x)}_{=u(x)} \cdot \underbrace{(-2 \cdot \cos(x) \cdot \sin(x))}_{=v'(x)} \, dx \\ &= \sin(x) \cdot (\cos(x))^2 + 2 \cdot \int (\sin(x))^2 \cdot \cos(x) \, dx \\ &= \sin(x) \cdot (1 - (\sin(x))^2) + 2 \cdot \int (1 - (\cos(x))^2) \cdot \cos(x) \, dx \\ &= \sin(x) - (\sin(x))^3 + 2 \cdot \int \cos(x) \, dx - 2 \cdot \int (\cos(x))^3 \, dx \\ &= \sin(x) - (\sin(x))^3 + 2 \cdot \sin(x) - 2 \cdot \int (\cos(x))^3 \, dx \\ &= 3 \cdot \sin(x) - (\sin(x))^3 - 2 \cdot \int (\cos(x))^3 \, dx. \end{aligned}$$

Addiert man $2 \cdot \int (\cos(x))^3 \, dx$ auf beiden Seiten der Gleichung, so erhält man

$$3 \cdot \int (\cos(x))^3 \, dx = 3 \cdot \sin(x) - (\sin(x))^3, \quad \text{sprich} \quad \int (\cos(x))^3 \, dx = \sin(x) - \frac{1}{3} \cdot (\sin(x))^3.$$

b) Finden Sie eine Stammfunktion von f mit Hilfe der Substitutionsregel!

Lösung:

Setzt man $g(t) := 1 - t^2$ und $h(x) := \sin(x)$, so liefert die Substitutionsregel wegen $h'(x) = \cos(x)$

$$\begin{aligned} \int (\cos(x))^3 dx &= \int (\cos(x))^2 \cdot \cos(x) dx = \int \underbrace{(1 - (\sin(x))^2)}_{=g(h(x))} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{=h'(x)} dx = \left[\int g(t) dt \right]_{t=h(x)} \\ &= \left[\int (1 - t^2) dt \right]_{t=\sin(x)} = \left[t - \frac{1}{3} \cdot t^3 \right]_{t=\sin(x)} = \sin(x) - \frac{1}{3} \cdot (\sin(x))^3. \end{aligned}$$

Tipp: Verwenden Sie den trigonometrischen Pythagoras!



IntEinDim/Vermischt/Ag_IntEinDim_KosinuspotenzenImNenner.tex

Aufgabe 74.350 (Negative Potenzen des Kosinus integrieren)

spf

In dieser Aufgabe wollen wir Stammfunktionen der Funktionen $f_n: \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \in \mathbb{R} : k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f_n(x) := \frac{1}{(\cos(x))^n}$ und $n \in \mathbb{N}$ berechnen.

a) Finden Sie ein $A \in \mathbb{R}$ und ein $B \in \mathbb{R}$ mit $\frac{1}{t^2-1} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1}$ für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$!

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t+1}$$

Lösung:

Für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, alle $A \in \mathbb{R}$ und alle $B \in \mathbb{R}$ gilt $\frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} = \frac{At+A+Bt-B}{(t-1) \cdot (t+1)} = \frac{(A+B) \cdot t + (A-B)}{t^2-1}$.

Ein Koeffizientenvergleich mit $\frac{0 \cdot t + 1}{t^2-1}$ liefert das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\left. \begin{array}{rcl} A+B & = & 0 \\ A-B & = & 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{addieren}} \left\{ \begin{array}{rcl} B & = & -A \\ 2A & = & 1 \end{array} \right\} \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{rcl} B & = & -\frac{1}{2} \\ A & = & \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Also gilt $\frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t+1}$ für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

b) Macht man im Fall $n = 1$ die Substitution $t = \sin(x)$, so erhält man mit Aufgabenteil a) eine Stammfunktion von f_1 . Geben Sie eine Stammfunktion von f_1 an!

$$\frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)} \right)$$

Lösung:

Seien $p(t) := \frac{1}{1-t^2}$ und $q(x) := \sin(x)$. Dann ist $q'(x) = \cos(x)$ und es folgt

$$\begin{aligned} \int f_1(x) dx &= \int \frac{1}{\cos(x)} dx = \int \frac{\cos(x)}{(\cos(x))^2} dx = \int \frac{1}{\underbrace{1 - (\sin(x))^2}_{=p(q(x))}} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{=q'(x)} dx \\ &= \left[\int p(t) dt \right]_{t=q(x)} = \left[\int \frac{1}{1-t^2} dt \right]_{t=\sin(x)} = \left[\frac{1}{2} \cdot \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt \right]_{t=\sin(x)} \\ &= \left[\frac{1}{2} \cdot (-\ln(|1-t|) + \ln(|1+t|)) \right]_{t=\sin(x)} = \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)} \right) \end{aligned}$$

wegen $|\sin(x)| < 1$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \in \mathbb{R} : k \in \mathbb{Z}\}$.

- c) Um uns auf den Fall $n = 3$ vorzubereiten, suchen wir zunächst eine Stammfunktion der Funktion $g: \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \in \mathbb{R} : k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto g(x) := \frac{\sin(x)}{(\cos(x))^3}$.

Integrieren Sie g mit Hilfe der Substitution $y = (\cos(x))^2$!

Bemerkung: Wenn Sie wollen, können Sie im Anschluss auch die Substitution $z = \cos(x)$ versuchen.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(\cos(x))^2}$$

Lösung:

Seien $r(t) := \frac{1}{t^2}$ und $s(x) := (\cos(x))^2$. Dann ist $s'(x) = -2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$ und es folgt

$$\begin{aligned} \int g(x) dx &= \int \frac{\sin(x)}{(\cos(x))^3} dx = \int \frac{\sin(x) \cdot \cos(x)}{(\cos(x))^4} dx \\ &= \frac{-1}{2} \cdot \int \underbrace{\frac{1}{((\cos(x))^2)^2}}_{=r(s(x))} \cdot \underbrace{(-2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x))}_{=s'(x)} dx = \frac{-1}{2} \cdot \left[\int r(t) dt \right]_{t=q(x)} \\ &= \frac{-1}{2} \cdot \left[\int \frac{1}{t^2} dt \right]_{t=(\cos(x))^2} = \left[\frac{-1}{2} \cdot \frac{-1}{t} \right]_{t=(\cos(x))^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(\cos(x))^2}. \end{aligned}$$

- d) Verwenden Sie im Fall $n = 3$ zunächst im Zähler den trigonometrischen Pythagoras, um unter Verwendung der partiellen Integration mit der Funktion aus Aufgabenteil c) und mit Hilfe des Falls $n = 1$ eine Stammfunktion von f_3 zu finden!

$$\frac{\sin(x)}{2 \cdot (\cos(x))^2} + \frac{1}{4} \cdot \ln \left(\frac{1 + \sin(x)}{1 - \sin(x)} \right)$$

Lösung:

Seien $h(x) := \sin(x)$ und $G(x) = \frac{1}{2 \cdot (\cos(x))^2}$. Dann gelten $h'(x) = \cos(x)$ und $G'(x) = \frac{\sin(x)}{(\cos(x))^3}$.

Mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} \int f_3(x) dx &= \int \frac{1}{(\cos(x))^3} dx = \int \frac{(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2}{(\cos(x))^3} dx \\ &= \int \underbrace{\frac{\sin(x)}{(\cos(x))^2}}_{=G'(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{=h(x)} dx + \int \frac{1}{\cos(x)} dx \\ &= \underbrace{\frac{1}{2 \cdot (\cos(x))^2}}_{=G(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{=h(x)} - \int \underbrace{\frac{1}{2 \cdot (\cos(x))^2}}_{=G(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{=h'(x)} dx + \int f_1(x) dx \\ &= \frac{\sin(x)}{2 \cdot (\cos(x))^2} - \frac{1}{2} \cdot \int f_1(x) dx + \int f_1(x) dx \\ &= \frac{\sin(x)}{2 \cdot (\cos(x))^2} + \frac{1}{4} \cdot \ln \left(\frac{1 + \sin(x)}{1 - \sin(x)} \right). \end{aligned}$$

- e) Für die geraden Potenzen $n = 2$ und $n = 4$ findet man „leicht“ Stammfunktionen, wobei man für $n = 4$ partiell integriert. Geben Sie Stammfunktionen von f_2 und f_4 an! $\tan(x), \frac{(\tan(x))^3}{3} + \tan(x)$

Lösung:

$$\int f_2(x) dx = \int \frac{1}{(\cos(x))^2} dx = \int (\tan(x))' dx = \tan(x) \text{ ist eine Stammfunktion von } f_2.$$

Mit $u(x) := \tan(x)$ und $v(x) := \frac{1}{(\cos(x))^2}$ folgt $u'(x) = \frac{1}{(\cos(x))^2}$ und $v'(x) = \frac{2 \cdot \sin(x)}{(\cos(x))^3}$.

Das liefert

$$\begin{aligned} \int f_4(x) dx &= \int \underbrace{\frac{1}{(\cos(x))^2}}_{=u'(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{(\cos(x))^2}}_{=v(x)} dx = \underbrace{\tan(x)}_{=u(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{(\cos(x))^2}}_{=v(x)} - \int \underbrace{\tan(x)}_{=u(x)} \cdot \underbrace{\frac{2 \cdot \sin(x)}{(\cos(x))^3}}_{=v'(x)} dx \\ &= \frac{\tan(x)}{(\cos(x))^2} - 2 \cdot \int \frac{(\sin(x))^2}{(\cos(x))^4} dx = \frac{\tan(x)}{(\cos(x))^2} - 2 \cdot \int \frac{1 - (\cos(x))^2}{(\cos(x))^4} dx \\ &= \frac{\tan(x)}{(\cos(x))^2} - 2 \cdot \int \frac{1}{(\cos(x))^4} dx + 2 \cdot \int \frac{1}{(\cos(x))^2} dx \\ &= \tan(x) \cdot (1 + (\tan(x))^2) - 2 \cdot \int f_4(x) dx + 2 \cdot \tan(x). \end{aligned}$$

Bringt man das Integral auf die linke Seite und dividiert danach durch 3, so folgt

$$\int f_4(x) dx = \frac{(\tan(x))^3}{3} + \tan(x).$$

f) Zeigen Sie folgende für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1; 2\}$ gültige Rekursionsformel:

$$\int f_n(x) dx = \frac{\sin(x)}{(n-1) \cdot (\cos(x))^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1} \cdot \int f_{n-2}(x) dx$$

Lösung:

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{1; 2\}$. Mit $u(x) := \tan(x)$ und $w_n(x) := \frac{1}{(\cos(x))^{n-2}}$ folgt $u'(x) = \frac{1}{(\cos(x))^2}$ und $w'_n(x) = \frac{(n-2) \cdot \sin(x)}{(\cos(x))^{n-1}}$. Das liefert

$$\begin{aligned} \int f_n(x) dx &= \int \underbrace{\frac{1}{(\cos(x))^2}}_{=u'(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{(\cos(x))^{n-2}}}_{=w_n(x)} dx \\ &= \underbrace{\tan(x)}_{=u(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{(\cos(x))^{n-2}}}_{=w_n(x)} - \int \underbrace{\tan(x)}_{=u(x)} \cdot \underbrace{\frac{(n-2) \cdot \sin(x)}{(\cos(x))^{n-1}}}_{=w'_n(x)} dx \\ &= \frac{\sin(x)}{(\cos(x))^{n-1}} - (n-2) \cdot \int \frac{(\sin(x))^2}{(\cos(x))^n} dx \\ &= \frac{\sin(x)}{(\cos(x))^{n-1}} - (n-2) \cdot \int \frac{1 - (\cos(x))^2}{(\cos(x))^n} dx \\ &= \frac{\sin(x)}{(\cos(x))^{n-1}} - (n-2) \cdot \int \frac{1}{(\cos(x))^n} dx + (n-2) \cdot \int \frac{1}{(\cos(x))^{n-2}} dx \\ &= \frac{\sin(x)}{(\cos(x))^{n-1}} - (n-2) \cdot \int f_n(x) dx + (n-2) \cdot \int f_{n-2}(x) dx. \end{aligned}$$

Addiert man $(n-2) \cdot \int f_n(x) dx$ und dividiert danach durch $n-1$, so folgt die Behauptung.



IntEinDim/Vermischt/Ag_Integrale_vermischt.tex

Aufgabe 74.351 (Vermischte Integrale)
Berechnen Sie die Integrale.

kr

a) $\int_{-2}^2 |t-1| dt$

5

Lösung:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 |t-1| dt &= \int_{-2}^1 |t-1| dt + \int_1^2 |t-1| dt = \int_{-2}^1 -(t-1) dt + \int_1^2 (t-1) dt \\ &= \left[-\frac{1}{2}t^2 + t \right]_{-2}^1 + \left[\frac{1}{2}t^2 - t \right]_1^2 \\ &= \left(\left(-\frac{1}{2} \cdot 1^2 + 1 \right) - \left(-\frac{1}{2} \cdot (-2)^2 + (-2) \right) \right) + \left(\left(\frac{1}{2} \cdot 2^2 - 2 \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2 - 1 \right) \right) \\ &= 5\end{aligned}$$

b) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t} \cdot (1 + \sqrt{t})} dt$

$2 \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

Lösung:

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}(1 + \sqrt{t})} dt &= \left[\begin{array}{ll} \text{Substitution:} & \\ 1 + \sqrt{t} = z & t = 1 \rightarrow z = 1 + \sqrt{1} = 2 \\ \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = dz & t = 4 \rightarrow z = 1 + \sqrt{4} = 3 \\ \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2dz & \end{array} \right] = \int_2^3 \frac{1}{z} \cdot 2dz = 2 \int_2^3 \frac{1}{z} dz \\ &= 2 [\ln |z|]_2^3 = 2 (\ln 3 - \ln 2) = 2 \ln \frac{3}{2}\end{aligned}$$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2} \cdot \sin(2t) dt$

$\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}$

Lösung:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} t^2 \sin(2t) dt &= \left[\begin{array}{l} \text{Partielle Integration:} \\ u = \frac{1}{2} t^2 \\ v' = \sin(2t) \Rightarrow v = -\frac{1}{2} \cos(2t) \end{array} \right] \\
 &= \left[\frac{1}{2} t^2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos(2t) \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cos(2t) dt \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos(\pi) \right) - \frac{1}{2} \cdot 0^2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos(0) \right) + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos(2t) dt \\
 &= \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos(2t) dt = \left[\begin{array}{l} \text{Partielle Integration:} \\ u = t \\ v' = \cos(2t) \Rightarrow v = \frac{1}{2} \sin(2t) \end{array} \right] \\
 &= \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2} \left(\left[t \cdot \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot \frac{1}{2} \sin(2t) dt \right) \\
 &= \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin(\pi) - 0 \cdot \frac{1}{2} \sin(0) - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t) dt \right) \\
 &= \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2} \left(0 - 0 - \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \cos(2t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) \\
 &= \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos(\pi) - \left(-\frac{1}{2} \cos(0) \right) \right) \\
 &= \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \right) = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

d) $\int_1^e \frac{1}{t \cdot (1 + \ln(t))} dt$

$\ln(2)$

Lösung:

$$\begin{aligned}
 \int_1^e \frac{1}{t(1 + \ln(t))} dt &= \left[\begin{array}{l} \text{Substitution:} \\ 1 + \ln(t) = z \quad t = 1 \rightarrow z = 1 + \ln(1) = 1 \\ \frac{1}{t} dt = dz \quad t = e \rightarrow z = 1 + \ln(e) = 2 \end{array} \right] \\
 &= \int_1^2 \frac{1}{z} dz = [\ln |z|]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2
 \end{aligned}$$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \cdot \cos(t) dt$

$\frac{1}{2}$

Lösung: Diese Aufgabe kann mit partieller Integration oder mit Substitution gelöst werden.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \cos(t) dt = \left[\begin{array}{l} \text{Substitution:} \\ \sin(t) = z \quad t = 0 \rightarrow z = \sin(0) = 0 \\ \cos(t) dt = dz \quad t = \frac{\pi}{2} \rightarrow z = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{array} \right] = \int_0^1 z dz = \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

f) $\int \frac{1}{t^2 + t^4} dt$

$-\frac{1}{t} - \arctan(t)$

Lösung: Hier ist die Partialbruchzerlegung notwendig. Nullstellen des Nenners:

$$t^2 + t^4 = 0 \Leftrightarrow t^2(1 + t^2) = 0$$

Damit haben wir eine zweifache Nullstelle $t_1 = 0$. Der Anteil $(1 + t^2)$ hat keine reelle Nullstellen. Damit ist der PBZ-Ansatz:

$$\frac{1}{t^2(1 + t^2)} \stackrel{!}{=} \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{Ct + D}{1 + t^2}$$

Die Brüche auf der rechten Seite werden jetzt zusammenaddiert:

$$\frac{1}{t^2(1 + t^2)} \stackrel{!}{=} \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{Ct + D}{1 + t^2} = \frac{At(1 + t^2) + B(1 + t^2) + (Ct + D)t}{t^2(1 + t^2)}$$

Die Nenner der beiden rationalen Funktionen oben sind gleich. Damit die Brüche für alle t 's gleich sind, müssen auch die Zähler gleich sein:

$$1 = 0 \cdot t^3 + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^1 + 1 \cdot t^0 \stackrel{!}{=} At(1 + t^2) + B(1 + t^2) + (Ct + D)t^2 = t^3(A + C) + t^2(B + D) + t^1 \cdot A + t^0 \cdot B$$

Zwei Polynome sind nur dann gleich, wenn die Koeffizienten bei allen Potenzen von t gleich sind. Damit muss gelten, dass

$$\begin{aligned} 0 &= A + C && \text{: vergleiche Koeffizienten bei } t^3 \\ 0 &= B + D && \text{: vergleiche Koeffizienten bei } t^2 \\ 0 &= A && \text{: vergleiche Koeffizienten bei } t^1 = t \\ 1 &= B && \text{: vergleiche Koeffizienten bei } t^0 = 1 \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$A = 0, \quad B = 1, \quad C = 0, \quad D = -1$$

Die gesuchte PBZ ist damit

$$\frac{1}{t^2(1 + t^2)} = \frac{1}{t^2} + \frac{-1}{1 + t^2} = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{1 + t^2}$$

Integral:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{t^2 + t^4} dt &= \int \frac{1}{t^2(1 + t^2)} dt = \int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{1 + t^2} \right) dt \\ &= \int \frac{1}{t^2} dt - \int \frac{1}{1 + t^2} dt = -\frac{1}{t} - \arctan(t) + C \end{aligned}$$

g) $\int \frac{\cos(\sqrt{t})}{2} dt$

$$\sqrt{t} \cdot \sin(\sqrt{t}) + \cos(\sqrt{t})$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \int \cos(\sqrt{t}) dt &= \left[\begin{array}{l} \text{Substitution:} \\ \sqrt{t} = z \\ \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = dz \Rightarrow dt = 2\sqrt{t} dz = 2z dz \end{array} \right] = \int \cos(z) \cdot 2z dz = 2 \int z \cos(z) dz \\ &= \left[\begin{array}{l} \text{Partielle Integration:} \\ u = z \\ v' = \cos(z) \Rightarrow v = \sin(z) \end{array} \right] = 2 \left(z \sin(z) - \int 1 \cdot \sin(z) dz \right) \\ &= 2(z \sin(z) + \cos(z)) + C = 2(\sqrt{t} \sin(\sqrt{t}) + \cos(\sqrt{t})) + C \end{aligned}$$

h) $\int \frac{t^2 + 1}{t^2 - 4} dt$

$$t + \frac{5}{4} \cdot \ln \left(\left| \frac{t-2}{t+2} \right| \right)$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2 + 1}{t^2 - 4} dt &= \int \frac{t^2 - 4 + 4 + 1}{t^2 - 4} dt = \int \left(\frac{t^2 - 4}{t^2 - 4} + \frac{5}{t^2 - 4} \right) dt = \int \left(1 + \frac{5}{t^2 - 4} \right) dt \\ &= t + 5 \int \frac{1}{t^2 - 4} dt =: t + 5I \end{aligned}$$

mit

$$I := \int \frac{1}{t^2 - 4} dt$$

Die rationale Funktion in Integral I muss mit PBZ behandelt werden.

$$\frac{1}{t^2 - 4} = \frac{1}{(t - 2)(t + 2)} \stackrel{!}{=} \frac{A}{t - 2} + \frac{B}{t + 2} = \frac{A(t + 2) + B(t - 2)}{(t - 2)(t + 2)}$$

Koeffizientenvergleich in Zähler liefert, dass

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} A + B \\ 1 &\stackrel{!}{=} 2A - 2B \end{aligned}$$

Die gesuchten Koeffizienten sind

$$A = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad B = -\frac{1}{4}$$

Der Teilintegral I ist

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{t^2 - 4} dt = \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{t - 2} + \frac{-\frac{1}{4}}{t + 2} \right) dt = \frac{1}{4} \int \frac{1}{t - 2} dt - \frac{1}{4} \int \frac{1}{t + 2} dt \\ &= \frac{1}{4} \ln |t - 2| - \frac{1}{4} \ln |t + 2| + C \end{aligned}$$

Der gesuchte Integral:

$$\int \frac{t^2 + 1}{t^2 - 4} dt = t + 5 \int \frac{1}{t^2 - 4} dt = t + 5I = t + \frac{5}{4} (\ln |t - 2| - \ln |t + 2|) + C$$



IntMehrDim/CavalieriRotation/Ag_Anwendung_Rotationsvolumen_mit_Funktion.tex

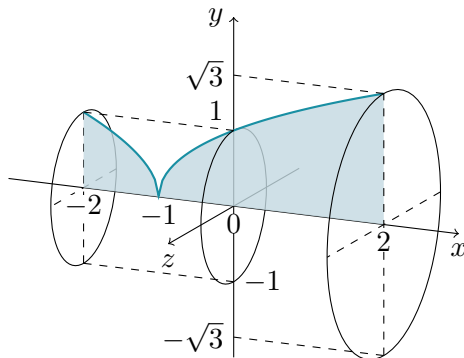
Aufgabe 75.352 (Volumen von Rotationskörpern)

VT

Die folgenden Rotationskörper entstehen durch Rotation der Fläche unterhalb des Graphen der Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x)$ um die x -Achse. Berechnen Sie das Volumen V dieser Rotationskörper!

a) $f(x) := \sqrt{|x+1|}$, $D := [-2; 2]$

$V = 5\pi$



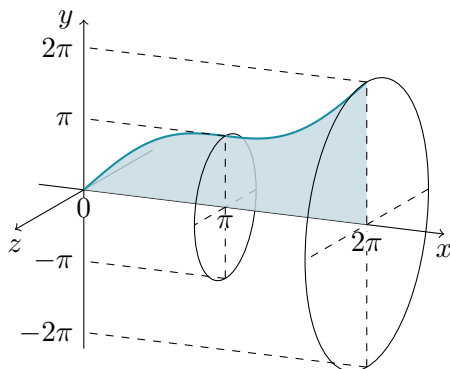
Lösung:

Volumen des Rotationskörpers mit nichtnegativer Funktion $f(x)$ ist

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-2}^2 f^2(x) dx = \pi \int_{-2}^2 \left(\sqrt{|x+1|} \right)^2 dx = \pi \int_{-2}^{-1} |x+1| dx + \pi \int_{-1}^2 |x+1| dx \\ &= \pi \int_{-2}^{-1} (-x-1) dx + \pi \int_{-1}^2 (x+1) dx = \pi \left[-\frac{x^2}{2} - x \right]_{-2}^{-1} + \pi \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^2 = 5\pi \end{aligned}$$

b) $f(x) := x + \sin(x)$, $D := [0; 2\pi]$

$V = \pi^2 \cdot \left(\frac{8\pi^2 - 9}{3} \right)$



Lösung:

Volumen des Rotationskörpers mit nichtnegativer Funktion $f(x)$ ist

$$V = \pi \int_0^{2\pi} f^2(x) dx = \pi \int_0^{2\pi} (x + \sin x)^2 dx = \pi \int_0^{2\pi} (x^2 + 2x \sin x + \sin^2 x) dx = \pi \cdot (I_1 + 2I_2 + I_3)$$

Wir berechnen die Teile des Integrals:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^{2\pi} = \frac{8\pi^3}{3}$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} x \sin x dx = [x \cdot (-\cos x)]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos x dx = 2\pi \cdot (-\cos(2\pi)) + [\sin x]_0^{2\pi} = -2\pi$$

$$I_3 = \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \left[\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin(2x) \right]_0^{2\pi} = \pi - \frac{1}{4} (\sin(4\pi) - \sin(0)) = \pi$$

Damit erhalten wir, dass

$$V = \pi \cdot (I_1 + 2I_2 + I_3) = \pi \left(\frac{8\pi^3}{3} - 2 \cdot 2\pi + \pi \right) = \pi^2 \cdot \frac{8\pi^2 - 9}{3}$$



IntMehrDim/CavalieriRotation/Ag_Cavalieri_KugelOhneZylinder1.tex

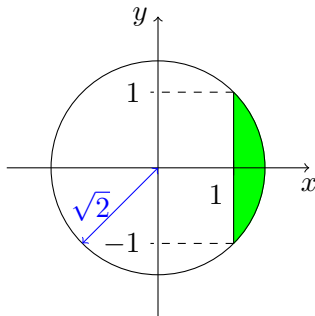
Aufgabe 75.353 (HM III - Klausur April 2021 (Aufgabe 2))

Es sei

$$N := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_2 \leq \sqrt{2}, x \geq 1 \right\}.$$

Lösung:

N ist der Bereich rechts von der Linie $x = 1$ innerhalb des Kreises mit Mittelpunkt in $(0, 0)$ und Radius $\sqrt{2}$.



Schnittpunkte der Geraden $x = 1$ mit dem Kreis:

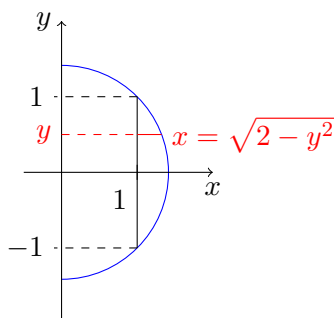
$$\begin{aligned} x = 1 &\implies \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{1^2 + y^2} \stackrel{!}{=} \sqrt{2} \\ &\iff 1 + y^2 = 2 \\ &\iff y = 1 \quad \text{oder} \quad y = -1 \end{aligned}$$

D.h., die beiden Schnittpunkte sind $(1, 1)$ und $(1, -1)$.

a) Stellen Sie N als Normalbereich bezüglich der y -Achse dar.

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1, 1 \leq x \leq \sqrt{2 - y^2} \right\}$$

Lösung:



Um N als Normalbereich bezüglich y aufzustellen, muss die Kreisgleichung nach x aufgelöst werden. Unter Beachtung dass in N gilt dass $x \geq 0$, erhalten wir

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{2} &\iff \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2} \\ &\iff x^2 + y^2 = 2 \iff x^2 = 2 - y^2 \stackrel{x \geq 0}{\iff} x = \sqrt{2 - y^2} \end{aligned}$$

D.h., für jedes $y \in [-1, 1]$ kann der entsprechende x zwischen 1 und $\sqrt{2 - y^2}$ variieren.

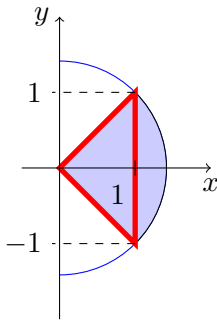
Damit ist

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1, 1 \leq x \leq \sqrt{2 - y^2} \right\}.$$

b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt $F(N)$ von N .

$$\frac{\pi}{2} - 1$$

Lösung:



Das Flächeninhalt $F(N)$ kann berechnet werden als Differenz zwischen der Fläche des Kreissektors und des Dreieckes.

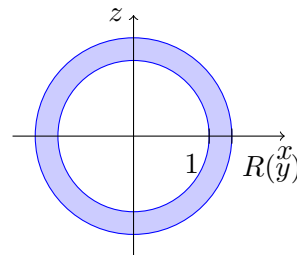
$$F(N) = \frac{1}{4}\pi(\sqrt{2})^2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{\pi}{2} - 1$$

c) Es sei L der Körper, der sich bei der Rotation von N um die y -Achse ergibt. Bestimmen Sie das Volumen $V(L)$ von L .

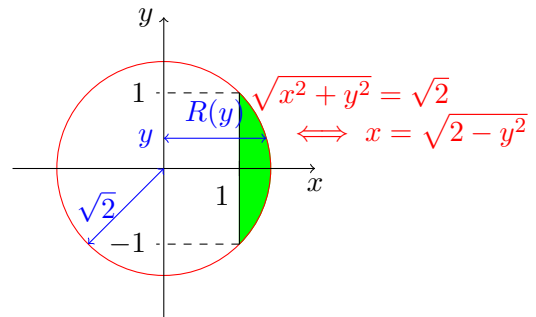
$$\frac{4\pi}{3}$$

Lösung:

Schnitt mit der Ebene parallel zu der $x - z$ Ebene auf der Höhe y :



Der Radius des äußeren Kreises ist $R(y) = \sqrt{2 - y^2}$:



Das Flächeninhalt der Schnitte ist

$$|A_y| = \pi((R(y))^2 - 1^2) = \pi((2 - y^2) - 1^2) = \pi(1 - y^2)$$

Der gesuchte Volumen ist

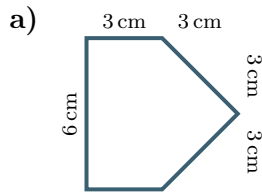
$$\begin{aligned} V(L) &= \int_{-1}^1 |A_y| dy = \int_{-1}^1 \pi(1 - y^2) dy = \pi \left[y - \frac{1}{3}y^3 \right]_{-1}^1 \\ &= \pi \left(1 - \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \left((-1) - \frac{1}{3}(-1)^3 \right) \right) = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$



Aufgabe 75.354 (Enden von Gardinenstangen)

spf

Eine Firma plant, Enden von Gardinenstangen herzustellen. Die gedrechselten Enden sollen die in den Aufgabenteilen angezeigten Querschnitte bekommen. Die gebogenen Begrenzungslinien in Aufgabenteil d) sind dabei alle Parabel-förmig mit Scheitel. Berechnen Sie jeweils das Volumen der Enden!



$$\pi \cdot 36 \text{ cm}^3$$

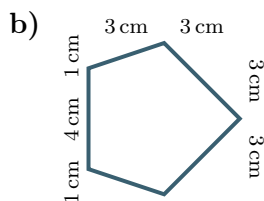
Lösung:

Legt man den Ursprung des Koordinatensystems in die Spitze und spiegelt den Querschnitt an der vertikalen Achse, so erhält man das Gardinenstangen-Ende durch eine Rotation des Graphen der folgenden Funktion um die horizontale Achse:

$$f: [0; 6] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto f(x) := \begin{cases} x, & \text{für } 0 \leq x \leq 3 \\ 3, & \text{für } 3 < x \leq 6 \end{cases}$$

Das Volumen des Gardinenstangen-Endes berechnet sich damit zu

$$\begin{aligned} \int_0^6 \pi \cdot (f(x))^2 dx &= \int_0^3 \pi \cdot (f(x))^2 dx + \int_3^6 \pi \cdot (f(x))^2 dx = \int_0^3 \pi \cdot x^2 dx + \int_3^6 \pi \cdot 3^2 dx \\ &= \left[\frac{\pi}{3} \cdot x^3 \right]_{x=0}^{x=3} + [9\pi x]_{x=3}^{x=6} = \frac{\pi}{3} \cdot 3^3 - \frac{\pi}{3} \cdot 0^3 + 9\pi \cdot 6 - 9\pi \cdot 3 \\ &= 9\pi - 0\pi + 54\pi - 27\pi = 36\pi. \end{aligned}$$



$$\pi \cdot 28 \text{ cm}^3$$

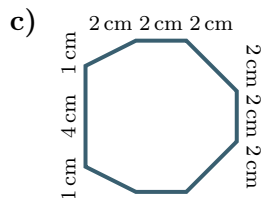
Lösung:

Legt man den Ursprung des Koordinatensystems in die Spitze und spiegelt den Querschnitt an der vertikalen Achse, so erhält man das Gardinenstangen-Ende durch eine Rotation des Graphen der folgenden Funktion um die horizontale Achse:

$$f: [0; 6] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto f(x) := \begin{cases} x, & \text{für } 0 \leq x \leq 3 \\ 4 - \frac{x}{3}, & \text{für } 3 < x \leq 6 \end{cases}$$

Das Volumen des Gardinenstangen-Endes berechnet sich damit zu

$$\begin{aligned} \int_0^6 \pi \cdot (f(x))^2 dx &= \int_0^3 \pi \cdot (f(x))^2 dx + \int_3^6 \pi \cdot (f(x))^2 dx \\ &= \int_0^3 \pi \cdot x^2 dx + \int_3^6 \pi \cdot \left(4 - \frac{x}{3}\right)^2 dx = \left[\frac{\pi}{3} \cdot x^3 \right]_{x=0}^{x=3} + \left[-\pi \cdot \left(4 - \frac{x}{3}\right)^3 \right]_{x=3}^{x=6} \\ &= \frac{\pi}{3} \cdot 3^3 - \frac{\pi}{3} \cdot 0^3 - \pi \cdot \left(4 - \frac{6}{3}\right)^3 + \pi \cdot \left(4 - \frac{3}{3}\right)^3 = 9\pi - 0\pi - 8\pi + 27\pi = 28\pi. \end{aligned}$$



$$\frac{\pi}{3} \cdot 118 \text{ cm}^3$$

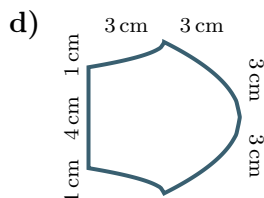
Lösung:

Legt man den Ursprung des Koordinatensystems in die Mitte der rechten Begrenzung und spiegelt den Querschnitt an der vertikalen Achse, so erhält man das Gardinenstangen-Ende durch eine Rotation des Graphen der folgenden Funktion um die horizontale Achse:

$$f: [0; 6] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto f(x) := \begin{cases} x + 1, & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ 3, & \text{für } 2 < x \leq 4 \\ 5 - \frac{x}{2}, & \text{für } 4 < x \leq 6 \end{cases}$$

Das Volumen des Gardinenstangen-Endes berechnet sich damit zu

$$\begin{aligned} \int_0^6 \pi \cdot (f(x))^2 dx &= \int_0^2 \pi \cdot (f(x))^2 dx + \int_2^4 \pi \cdot (f(x))^2 dx + \int_4^6 \pi \cdot (f(x))^2 dx \\ &= \int_0^2 \pi \cdot (x+1)^2 dx + \int_2^4 \pi \cdot 3^2 dx + \int_4^6 \pi \cdot \left(5 - \frac{x}{2}\right)^2 dx \\ &= \left[\frac{\pi}{3} \cdot (x+1)^3 \right]_{x=0}^{x=2} + [9\pi x]_{x=2}^{x=4} + \left[-\frac{2\pi}{3} \cdot \left(5 - \frac{x}{2}\right)^3 \right]_{x=4}^{x=6} \\ &= \frac{\pi}{3} \cdot (2+1)^3 - \frac{\pi}{3} \cdot (0+1)^3 + 9\pi \cdot 4 - 9\pi \cdot 2 - \frac{2\pi}{3} \cdot \left(5 - \frac{6}{2}\right)^3 + \frac{2\pi}{3} \cdot \left(5 - \frac{4}{2}\right)^3 \\ &= 9\pi - \frac{\pi}{3} + 36\pi - 18\pi - \frac{16\pi}{3} + 18\pi = \frac{27-1+108-16}{3} \cdot \pi = \frac{118\pi}{3}. \end{aligned}$$



$$\pi \cdot 30 \text{ cm}^3$$

Lösung:

Legt man den Ursprung des Koordinatensystems in den rechten Rand und spiegelt den Querschnitt an der vertikalen Achse, so erhält man das Gardinenstangen-Ende durch eine Rotation des Graphen einer der folgenden Funktionen um die horizontale Achse:

$$g_{a,b}: [0; 6] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad x \mapsto g_{a,b}(x) := \begin{cases} a \cdot \sqrt{x}, & \text{für } 0 \leq x \leq 3 \\ 3 - b \cdot \sqrt{x-3}, & \text{für } 3 < x \leq 6 \end{cases}$$

a und b können dabei aus den Bedingungen $g_{a,b}(3) = 3$ und $g_{a,b}(6) = 2$ berechnet werden. Die erste Bedingung liefert direkt $a = \sqrt{3}$, während sich die zweite Bedingung umstellen lässt zu

$$3 - b \cdot \sqrt{6-3} = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 = b \cdot \sqrt{3} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{3} = b.$$

Mit $f := g_{\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}}$ berechnet sich das Volumen des Gardinenstangen-Endes zu

$$\begin{aligned}
 & \int_0^6 \pi \cdot (f(x))^2 dx \\
 &= \int_0^3 \pi \cdot (f(x))^2 dx + \int_3^6 \pi \cdot (f(x))^2 dx \\
 &= \int_0^3 \pi \cdot \sqrt{3x}^2 dx + \int_3^6 \pi \cdot \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{x-3}\right)^2 dx \\
 &= \int_0^3 3\pi x dx + \int_3^6 \pi \cdot \left(9 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{x-3} + \frac{1}{3} \cdot (x-3)\right) dx \\
 &= \left[\frac{3\pi}{2} \cdot x^2\right]_{x=0}^{x=3} + \left[\pi \cdot \left(9x - \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{x-3}^3 + \frac{1}{6} \cdot (x-3)^2\right)\right]_{x=3}^{x=6} \\
 &= \frac{3\pi}{2} \cdot 3^2 - \frac{3\pi}{2} \cdot 0^2 + \pi \cdot \left(9 \cdot 6 - \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3}^3 + \frac{1}{6} \cdot 3^2\right) - \pi \cdot \left(9 \cdot 3 - \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{0}^3 + \frac{1}{6} \cdot 0^2\right) \\
 &= \frac{27\pi}{2} - 0\pi + 54\pi - 12\pi + \frac{3\pi}{2} - 27\pi + 0\pi - 0\pi = 30\pi.
 \end{aligned}$$



IntMehrDim/CavalieriRotation/Ag_RotInt_SektglasUndEichstrich.tex

spf

Aufgabe 75.355 (Sektglas eichen)

Das Innere eines Sektglases ist wie ein Paraboloid geformt. Die Randkurve des Paraboloids ist symmetrisch zur vertikalen Achse und geht durch die Punkte $(0, 12 \text{ cm})^T$ und $(3 \text{ cm}, 24 \text{ cm})^T$. Das Glas ist insgesamt 24 cm hoch.

a) Geben Sie die Funktionsgleichung der Randkurve an!

$$\left(\frac{4x^2}{3 \text{ cm}^2} + 12\right) \text{ cm}$$

Lösung:

Wir lassen im Folgenden die Einheit cm weg.

Seien $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ derart, dass $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := ax^2 + bx + c$ die Randkurve des Glasinneren darstellt.

Aus der Symmetrie der Kurve zur vertikalen Achse folgt $f(1) = f(-1)$.

Dies liefert $a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c$ bzw. $a + b + c = a - b + c$, also $2b = 0$. Deshalb gilt $b = 0$ und mit $f(0) = 12$ folgt

$$a \cdot 0^2 + 0 \cdot 0 + c = 12, \quad \text{also} \quad c = 12.$$

Mit $f(3) = 24$ folgt $a \cdot 3^2 + 0 \cdot 3 + 12 = 24$ bzw. $a \cdot 9 = 12$, also $a = \frac{4}{3}$.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist also $f(x) = \frac{4}{3} \cdot x^2 + 12$.

b) Bestimmen Sie die Füllmenge des Glases!

$$\frac{27\pi}{500} \text{ Liter}$$

Lösung:

Anstatt einen Ast der Randkurve um die Ordinatenachse zu rotieren, kann man auch die Umkehrfunktion der Randkurve um die Abszissenachse rotieren lassen.

Für alle $y \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $y \geq 12$, $x \geq 0$ und $y = f(x)$ gilt

$$y = \frac{4}{3} \cdot x^2 + 12 \quad \Longleftrightarrow \quad y - 12 = \frac{4}{3} \cdot x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{3}{4} \cdot (y - 12) = x^2.$$

Also ist $f_{\geq 0}^{-1}: [12; \infty) \rightarrow [0; \infty)$ mit $x \mapsto f_{\geq 0}^{-1}(x) := \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{x - 12}$ die Umkehrfunktion zu $f|_{[0; \infty)}$.

Für das Fassungsvermögen V des Glases bedeutet das

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_{12}^{24} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{x-12} \right)^2 dx = \frac{3\pi}{4} \cdot \int_{12}^{24} (x-12) dx = \frac{3\pi}{4} \cdot \left[\frac{x^2}{2} - 12x \right]_{x=12}^{x=24} \\ &= \frac{3\pi}{4} \cdot \left(\frac{24^2}{2} - 12 \cdot 24 - \frac{12^2}{2} + 12 \cdot 12 \right) = \frac{3\pi}{4} \cdot \left(24 \cdot 12 - 12 \cdot 24 + \frac{12^2}{2} \right) \\ &= \frac{3\pi}{4} \cdot 12 \cdot 6 = 3\pi \cdot 3 \cdot 6 = 54\pi. \end{aligned}$$

Diese Angabe ist in Kubikzentimetern, das heißt, das Glas fasst $\frac{27\pi}{500}$ Liter Flüssigkeit.

Es ist $\frac{27\pi}{500} \approx 0.169\,646$.

c) In welcher Höhe müssen Sie den Eichstrich für 0.1 Liter anbringen?

$$\left(12 + \frac{20}{3\pi} \cdot \sqrt{6\pi} \right) \text{ cm}$$

Lösung:

Für alle $h \in \mathbb{R}$ mit $12 \leq h \leq 24$ ist das Volumen des Glases bis zur Höhe h gegeben durch

$$\begin{aligned} V(h) &:= \pi \cdot \int_{12}^h \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{x-12} \right)^2 dx = \pi \cdot \int_{12}^h \frac{3}{4} \cdot (x-12) dx = \frac{3\pi}{4} \cdot \left[\frac{x^2}{2} - 12x \right]_{x=12}^{x=h} \\ &= \frac{3\pi}{4} \cdot \left(\frac{h^2}{2} - 12h - \frac{12^2}{2} + 12 \cdot 12 \right) = \frac{3\pi}{8} \cdot (h^2 - 2 \cdot h \cdot 12 + 12^2) = \frac{3\pi}{8} \cdot (h-12)^2. \end{aligned}$$

1 Liter entsprechen $1 \text{ dm}^3 = 1\,000 \text{ cm}^3$. Also suchen wir ein $h_{0.1} \in [12; 24]$ mit $V(h_{0.1}) = 100$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{3\pi}{8} \cdot (h_{0.1} - 12)^2 &= 100 & \iff & (h_{0.1} - 12)^2 = \frac{800}{3\pi} \\ \iff h_{0.1} &\geq 12 & \iff & h_{0.1} - 12 = \sqrt{\frac{800}{3\pi}} & \iff & h_{0.1} = 12 + \frac{20}{3\pi} \cdot \sqrt{6\pi}. \end{aligned}$$

Der Eichstrich für 0.1 Liter muss also in einer Höhe von $12 \text{ cm} + \frac{20}{3\pi} \cdot \sqrt{6\pi} \text{ cm} \approx 21.213\,177\,319\,235\,61 \text{ cm}$ angebracht werden.

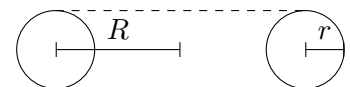
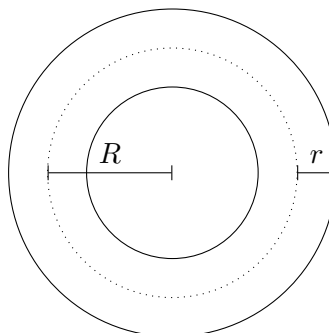
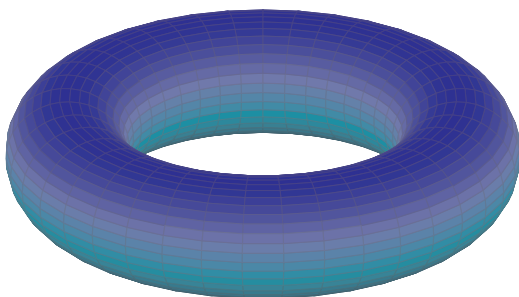


IntMehrDim/CavalieriRotation/Ag_RotInt_TorusVolumen.tex

Aufgabe 75.356 (Volumen eines Torus)

spf

Berechnen Sie das Volumen eines Torus'!



Ganz links sehen Sie die 3D-Darstellung, rechts davon die Draufsicht und oben den Querschnitt eines Torus'.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\int 2 \cdot \sqrt{a-t^2} dt = t \cdot \sqrt{a-t^2} + a \cdot \arcsin\left(\frac{t}{\sqrt{a}}\right)$ für alle $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und alle $t \in \mathbb{R}$ mit $-\sqrt{a} \leq t \leq \sqrt{a}$ gilt.

$$2\pi^2 \cdot Rr^2$$

Lösung als Differenz zweier Rotationsintegrale:

Wir stellen den Torus auf seine Außenkante und lassen also den Kreis mit dem Radius $r \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$, dessen Mittelpunkt sich im Punkt $(0; R)^T$ mit $R \in \mathbb{R}$ und $R > r$ befindet, um die horizontale Achse rotieren.

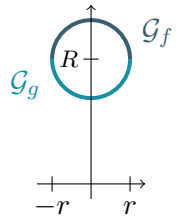
Die obere Begrenzungslinie des Kreises lässt sich beschreiben durch

$$f: [-r; r] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto f(x) := R + \sqrt{r^2 - x^2}$$

und die untere Begrenzungslinie lässt sich beschreiben durch $g := 2R - f$.

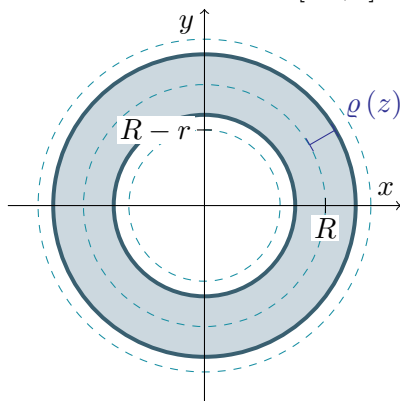
Zieht man das Rotationsvolumen zu g von dem zu f ab, so folgt

$$\begin{aligned} V_{\text{Torus}}(r, R) &:= \pi \cdot \int_{-r}^r (f(x))^2 dx - \pi \cdot \int_{-r}^r (g(x))^2 dx \\ &= \pi \cdot \int_{-r}^r \left(R + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx - \pi \cdot \int_{-r}^r \left(R - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx \\ &= \pi \cdot \int_{-r}^r \left(R^2 + 2 \cdot R \cdot \sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2\right) dx \\ &\quad - \pi \cdot \int_{-r}^r \left(R^2 - 2 \cdot R \cdot \sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2\right) dx \\ &= 2\pi R \cdot \int_{-r}^r 2 \cdot \sqrt{r^2 - x^2} dx \\ &= 2\pi R \cdot \left[x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} + r^2 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{r}\right) \right]_{x=-r}^{x=r} \\ &= 2\pi R \cdot \left(r \cdot \sqrt{r^2 - r^2} + r^2 \cdot \arcsin\left(\frac{r}{r}\right) - (-r) \cdot \sqrt{r^2 - (-r)^2} - r^2 \cdot \arcsin\left(\frac{-r}{r}\right) \right) \\ &= 2\pi R \cdot (0 + r^2 \cdot \arcsin(1) - 0 - r^2 \cdot \arcsin(-1)) \\ &= 2\pi R \cdot (r^2 \cdot \frac{\pi}{2} - r^2 \cdot (-\frac{\pi}{2})) \\ &= 2\pi^2 \cdot R r^2. \end{aligned}$$

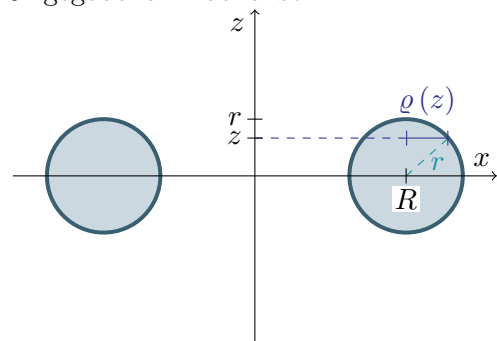


Lösung mit dem Prinzip von Cavalieri:

Der Schnitt des Torus mit einer zur xy -Ebene parallelen Ebene auf der Höhe $z \in [-r; r]$ ist



Der Schnitt des Torus mit der durch die Gleichung „ $y = 0$ “ gegebenen Ebene ist



Wie links zu sehen ist, handelt es sich bei dem Schnitt des Torus mit einer zur xy -Ebene parallelen Ebene auf der Höhe $z \in [-r; r]$ um einen Kreisring $Q(z)$ mit äußerem Radius $R + \rho(z)$ und innerem Radius $R - \rho(z)$. Die rechte Skizze zeigt, dass sich $\rho(z)$ über den Satz von Pythagoras berechnen lässt zu $\rho(z) = \sqrt{r^2 - z^2}$.

Das Prinzip von Cavalieri liefert also

$$\begin{aligned}
 V_{\text{Torus}}(r, R) &:= \int_{-r}^r |Q(z)|^2 dz = \int_{-r}^r \left(\pi \cdot (R + \varrho(z))^2 - \pi \cdot (R - \varrho(z))^2 \right) dz \\
 &= \int_{-r}^r \pi \cdot \left(R^2 + 2R\varrho(z) + (\varrho(z))^2 - R^2 + 2R\varrho(z) - (\varrho(z))^2 \right) dz \\
 &= \pi \cdot \int_{-r}^r 4R\varrho(z) dz = 2\pi R \cdot \int_{-r}^r 2 \cdot \sqrt{r^2 - z^2} dz \\
 &= 2\pi R \cdot \left[z \cdot \sqrt{r^2 - z^2} + r^2 \cdot \arcsin\left(\frac{z}{r}\right) \right]_{z=-r}^{z=r} \\
 &= 2\pi R \cdot \left(r \cdot \sqrt{r^2 - r^2} + r^2 \cdot \arcsin\left(\frac{r}{r}\right) - (-r) \cdot \sqrt{r^2 - (-r)^2} - r^2 \cdot \arcsin\left(\frac{-r}{r}\right) \right) \\
 &= 2\pi R \cdot \left(0 + r^2 \cdot \arcsin(1) - 0 - r^2 \cdot \arcsin(-1) \right) = 2\pi R \cdot \left(r^2 \cdot \frac{\pi}{2} - r^2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) \\
 &= 2\pi^2 \cdot Rr^2.
 \end{aligned}$$



IntMehrDim/CavalieriRotation/Text_IntMehrDim_ZylinderZentriertAusHalbkugelAusstanzen.txt

Aufgabe 75.357 ()

IntMehrDim/StandardSub/Ag_IntMehrDim_ZylinderZentriertAusHalbkugelAusstanzen kann auch mit Hilfe des Prinzips von Cavalieri gelöst werden.



IntMehrDim/Intervalle/Ag_IntMehrDim_Fubini2D0hneHuerdenNachStewCalc.tex

Aufgabe 76.358 (Satz von Fubini)

Berechnen Sie für $B := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ und } -3 \leq y \leq 3\}$

und $\Omega := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0; \frac{\pi}{2}] \text{ und } y \in [0; \frac{\pi}{3}]\}$ die folgenden Integrale!

a) $\int_B \frac{xy^2}{x^2+1} d(x, y)$

$$9 \cdot \ln(2)$$

Lösung: Mit $g(t) := \frac{1}{t}$ und $h(x) := x^2 + 1$ ergibt sich wegen $h'(x) = 2x$, $h(0) = 1$ und $h(1) = 2$ mit Hilfe der Substitutionsregel

$$\begin{aligned} \int_B \frac{xy^2}{x^2+1} d(x, y) &= \int_0^1 \left(\int_{-3}^3 \frac{xy^2}{x^2+1} dy \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{x}{x^2+1} \cdot \int_{-3}^3 y^2 dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} \cdot \left[\frac{y^3}{3} \right]_{y=-3}^{y=3} dx = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} \cdot \frac{27 - (-27)}{3} dx = \int_0^1 \frac{18x}{x^2+1} dx \\ &= 9 \cdot \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{x^2+1}}_{=g(h(x))} \cdot \underbrace{2x}_{=h'(x)} dx = 9 \cdot \int_{h(0)}^{h(1)} \underbrace{\frac{1}{t}}_{=g(t)} dt = 9 \cdot [\ln(|t|)]_{t=1}^{t=2} \\ &= 9 \cdot (\ln(2) - \ln(1)) = 9 \cdot (\ln(2) - 0) = 9 \cdot \ln(2). \end{aligned}$$

b) $\int_{\Omega} x \cdot \sin(x+y) d(x, y)$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Lösung: Mit $g_x(t) := x \cdot \sin(t)$ und $h_x(y) := x+y$ ergibt sich wegen $h'_x(y) = 1$, $h_x(0) = x$ und $h_x(\frac{\pi}{3}) = x + \frac{\pi}{3}$ mit Hilfe der Substitutionsregel

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} x \cdot \sin(x+y) d(x, y) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \underbrace{x \cdot \sin(x+y)}_{=g_x(h_x(y))} \cdot \underbrace{1}_{=h'_x(y)} dy \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{h_x(0)}^{h_x(\frac{\pi}{3})} \underbrace{x \cdot \sin(t)}_{=g_x(t)} dt \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-x \cdot \cos(t)]_{t=x}^{t=x+\frac{\pi}{3}} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot (-\cos(x+\frac{\pi}{3}) + \cos(x)) dx. \end{aligned}$$

Das Additionstheorem für den Kosinus liefert für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} -\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos(x) &= -\cos(x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos(x) \\ &= -\cos(x) \cdot \frac{1}{2} + \sin(x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos(x) = \frac{1}{2} \cdot (\cos(x) + \sqrt{3} \cdot \sin(x)). \end{aligned}$$

Mit $u(x) := x$ und $v(x) := \sin(x) - \sqrt{3} \cdot \cos(x)$ ergibt sich wegen $u'(x) = 1$ und $v'(x) =$

$\cos(x) + \sqrt{3} \cdot \sin(x)$ mit Hilfe von partieller Integration

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} x \cdot \sin(x+y) \, d(x,y) \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \left(-\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos(x) \right) dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{x}_{=u(x)} \cdot \underbrace{\left(\cos(x) + \sqrt{3} \cdot \sin(x) \right)}_{=v'(x)} dx \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left[\underbrace{x}_{=u(x)} \cdot \underbrace{\left(\sin(x) - \sqrt{3} \cdot \cos(x) \right)}_{=v(x)} \right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{1}_{=u'(x)} \cdot \underbrace{\left(\sin(x) - \sqrt{3} \cdot \cos(x) \right)}_{=v(x)} dx \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sqrt{3} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) - 0 \cdot \left(\sin(0) - \sqrt{3} \cdot \cos(0) \right) \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \cdot \left[-\cos(x) - \sqrt{3} \cdot \sin(x) \right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} \cdot 1 - \frac{\sqrt{3} \cdot \pi}{2} \cdot 0 \right) - \frac{1}{2} \cdot \left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(0) + \sqrt{3} \cdot \sin(0) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 0 + \sqrt{3} \cdot 1 - 1 - \sqrt{3} \cdot 0 \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}.
 \end{aligned}$$



IntMehrDim/Intervalle/Ag_IntMehrDim_Fubini3D0hneHuerdenNachArensHettlich.tex

Aufgabe 76.359 (Integrale über Quader) rk in Anlehnung an a) Arens/Hettlich, ..., Mathematik, S. 840, Beispiel (iteriertes Integral). b) Arens/Hettlich, ..., Mathematik, S. 864, Aufgabe 25.8 a). c) Arens/Hettlich, ..., Mathematik, S. 864, Aufgabe 25.8 b).

Berechnen Sie die Volumenintegrale $\int_B f(x, y, z) \, d(x, y, z)$ für die angegebenen Mengen $B \subseteq \mathbb{R}^3$ und Funktionen $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ als iterierte Integrale.

a) $f(x, y, z) = \frac{x \cdot (x+z)}{1+y^2}, B = [0; 1]^3$

$\frac{7\pi}{48}$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}
 \int_B \frac{x \cdot (x+z)}{1+y^2} \, d(x, y, z) &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 (x^2 + xz) \cdot \frac{1}{1+y^2} \, dy \right) dz \right) dx \\
 &= \int_0^1 \left(\int_0^1 [(x^2 + xz) \cdot \arctan(y)]_{y=0}^{y=1} dz \right) dx \\
 &= \int_0^1 \left(\int_0^1 (x^2 + xz) \cdot (\arctan(1) - \arctan(0)) dz \right) dx \\
 &= \int_0^1 [(x^2 z + \frac{x}{2} \cdot z^2) \cdot (\frac{\pi}{4} - 0)]_{z=0}^{z=1} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{\pi}{4} \cdot ((x^2 \cdot 1 + \frac{x}{2} \cdot 1^2) - (x^2 \cdot 0 + \frac{x}{2} \cdot 0^2)) dx \\
 &= \frac{\pi}{4} \cdot \int_0^1 (x^2 + \frac{x}{2} - 0 - 0) dx = \frac{\pi}{4} \cdot \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} \right]_{x=0}^{x=1} \\
 &= \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{4} - \frac{0^3}{3} - \frac{0^2}{4} \right) = \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{4}{12} + \frac{3}{12} - 0 - 0 \right) = \frac{7\pi}{48}.
 \end{aligned}$$

b) $f(x, y, z) = \frac{\sin(x+z)}{y+2}, B = [-\frac{\pi}{4}; 0] \times [0; 2] \times [0; \frac{\pi}{2}]$

$(\sqrt{2}-1) \cdot \ln(2)$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}
 \int_B \frac{\sin(x+z)}{y+2} d(x, y, z) &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 \sin(x+z) \cdot \frac{1}{y+2} dy \right) dz \right) dx \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(x+z) \cdot \ln(y+2)]_{y=0}^{y=2} dz \right) dx \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+z) \cdot (\ln(4) - \ln(2)) dz \right) dx \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 [-\cos(x+z) \cdot \ln\left(\frac{4}{2}\right)]_{z=0}^{z=\frac{\pi}{2}} dx \\
 &= \ln\left(\frac{4}{2}\right) \cdot \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 (-\cos(x+\frac{\pi}{2}) + \cos(x)) dx \\
 &= \ln(2) \cdot [-\sin(x+\frac{\pi}{2}) + \sin(x)]_{x=-\frac{\pi}{4}}^{x=0} \\
 &= \ln(2) \cdot (-\sin(\frac{\pi}{2}) + \sin(0) + \sin(\frac{\pi}{4}) - \sin(-\frac{\pi}{4})) \\
 &= \ln(2) \cdot (-1 + 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} - (-\frac{\sqrt{2}}{2})) = \ln(2) \cdot (\sqrt{2} - 1).
 \end{aligned}$$

c) $f(x, y, z) = \frac{xz}{(x^2 + y^2)^2}$, $B = \left[\frac{\sqrt{3}}{3}; 1\right] \times [0; 1]^2$

$$\frac{4 \cdot \sqrt{3} - 3}{48} \cdot \pi$$

Lösung: Mit den Substitutionen $g(t) := \frac{1}{4t^2}$ und $h_y(x) := x^2 + y^2$, also $h'_y(x) = 2x$, $h_y\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{3} + y^2$ und $h_y(1) = 1 + y^2$, sowie $v(s) = \frac{1}{1+s^2}$ und $w(y) = \sqrt{3} \cdot y$, also $w'(y) = \sqrt{3}$, $w(0) = 0$ und $w(1) = \sqrt{3}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \int_B \frac{xz}{(x^2 + y^2)^2} d(x, y, z) &= \int_0^1 \left(\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 \left(\int_0^1 \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} \cdot z dz \right) dx \right) dy \\
 &= \int_0^1 \left(\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 \left[\frac{x}{(x^2 + y^2)^2} \cdot \frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=1} dx \right) dy \\
 &= \int_0^1 \left(\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 \frac{1}{4 \cdot (x^2 + y^2)^2} \cdot 2x \cdot (1^2 - 0^2) dx \right) dy \\
 &= \int_0^1 \left(\int_{\frac{1}{3}+y^2}^{1+y^2} \frac{1}{4t^2} dt \right) dy = \int_0^1 \left[-\frac{1}{4t} \right]_{t=\frac{1}{3}+y^2}^{t=1+y^2} dy \\
 &= \int_0^1 \left(-\frac{1}{4 \cdot (1+y^2)} + \frac{1}{4 \cdot (\frac{1}{3} + y^2)} \right) dy \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \int_0^1 \frac{1}{1 + (\sqrt{3} \cdot y)^2} \cdot \sqrt{3} dy - \frac{1}{4} \cdot \int_0^1 \frac{1}{1 + y^2} dy \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1 + s^2} ds - \frac{1}{4} \cdot \int_0^1 \frac{1}{1 + y^2} dy \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot [\arctan(s)]_{s=0}^{s=\sqrt{3}} - \frac{1}{4} \cdot [\arctan(y)]_{y=0}^{y=1} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \arctan(\sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \arctan(0) - \frac{1}{4} \cdot \arctan(1) + \frac{1}{4} \cdot \arctan(0) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 0 - \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \cdot 0 = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \pi - 0 - \frac{1}{16} \cdot \pi + 0 = \frac{4 \cdot \sqrt{3} - 3}{48} \cdot \pi.
 \end{aligned}$$

d) $f(x, y, z) = \frac{\sinh(xz)}{y^2 + 1}$, $B = [\ln(2); 1] \times [0; \sqrt{3}] \times [-1; 1]$

0

Lösung: Mit der Substitution $g_{x,y}(t) := \frac{\sinh(t)}{x \cdot (y^2 + 1)}$ und $h_x(z) := xz$, also $h'_x(z) = x$, $h_x(-1) = -x$ und $h_x(1) = x$ ergibt sich mit $\cosh(-a) = \cosh(a)$ für alle $a \in \mathbb{R}$ und $0 \notin [\ln(2); 1]$

$$\begin{aligned} \int_B \frac{\sinh(xz)}{y^2 + 1} d(x, y, z) &= \int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_{\ln(2)}^1 \left(\int_{-1}^1 \frac{\sinh(xz)}{x \cdot (y^2 + 1)} \cdot x dz \right) dx \right) dy \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_{\ln(2)}^1 \left(\int_{-x}^x \frac{1}{x \cdot (y^2 + 1)} \cdot \sinh(t) dt \right) dx \right) dy \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_{\ln(2)}^1 \left[\frac{1}{x \cdot (y^2 + 1)} \cdot \cosh(t) \right]_{t=-x}^{t=x} dx \right) dy \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_{\ln(2)}^1 \frac{1}{x \cdot (y^2 + 1)} \cdot (\cosh(x) - \cosh(-x)) dx \right) dy \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_{\ln(2)}^1 \frac{1}{x \cdot (y^2 + 1)} \cdot 0 dx \right) dy = \int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_{\ln(2)}^1 0 dx \right) dy \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} [0]_{x=\ln(2)}^{x=1} dy = \int_0^{\sqrt{3}} (0 - 0) dy = [0]_{y=0}^{y=\sqrt{3}} = 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$



IntMehrDim/Intervalle/Ag_IntMehrDim_Fubini3DReihenfolgeVonUnwichtigNachWichtig.tex

Aufgabe 76.360 (Integrale über Quader)

spf

Berechnen Sie die folgenden Volumenintegrale als iterierte Integrale!

a) $\int_{[0;2] \times [-1;1] \times [1;3]} \frac{u \cdot (u^2 + v)}{w^3} d(u, v, w)$

$\frac{32}{9}$

Lösung: Der Integrand ist stetig auf $B := [0; 2] \times [-1; 1] \times [1; 3]$. Damit ist der Satz von Fubini anwendbar. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_B \frac{u \cdot (u^2 + v)}{w^3} d(u, v, w) &= \int_0^2 \left(\int_{-1}^1 \left(\int_1^3 u \cdot (u^2 + v) \cdot w^{-3} dw \right) dv \right) du \\ &= \int_0^2 \left(\int_{-1}^1 u \cdot (u^2 + v) \cdot \left[-\frac{1}{2} \cdot w^{-2} \right]_{w=1}^{w=3} dv \right) du \\ &= \int_0^2 u \cdot \left[u^2 \cdot v + \frac{1}{2} \cdot v^2 \right]_{v=-1}^{v=1} \cdot \left(-\frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{2 \cdot 1^2} \right) du \\ &= \int_0^2 u \cdot \left(u^2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 - u^2 \cdot (-1) - \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{9} + 1 \right) du \\ &= \int_0^2 \frac{8}{9} \cdot u^3 du = \left[\frac{2}{9} \cdot u^4 \right]_{u=0}^{u=2} = \frac{2}{9} \cdot 2^4 - \frac{2}{9} \cdot 0^4 = \frac{2}{9} \cdot 16 - \frac{2}{9} \cdot 0 = \frac{32}{9}. \end{aligned}$$

b) $\int_{[0;1]^3} \frac{\varphi \cdot (\psi + \vartheta)}{1 + \psi + \psi^2} d(\varphi, \psi, \vartheta)$

$\frac{\ln(3)}{4}$

Lösung: Der Integrand ist stetig auf $B := [0; 1]^3$. Damit ist der Satz von Fubini anwendbar. Seien $g(\alpha) := \frac{1}{\alpha}$ und $h(\psi) := \psi^2 + \psi + 1$. Dann gilt $h'(\psi) = 2\psi + 1$, $h(0) = 1$ und $h(1) = 3$. Mit der eindimensionalen Substitutionsregel ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \int_B \frac{\varphi \cdot (\psi + \vartheta)}{1 + \psi + \psi^2} d(\varphi, \psi, \vartheta) &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\varphi \cdot (\psi + \vartheta)}{1 + \psi + \psi^2} d\varphi \right) d\vartheta \right) d\psi \\
 &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\psi + \vartheta}{1 + \psi + \psi^2} \cdot \left(\int_0^1 \varphi d\varphi \right) d\vartheta \right) d\psi \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{1 + \psi + \psi^2} \cdot \left(\int_0^1 (\psi + \vartheta) \cdot \left[\frac{\varphi^2}{2} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=1} d\vartheta \right) d\psi \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{1 + \psi + \psi^2} \cdot \left(\int_0^1 (\psi + \vartheta) \cdot \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) d\vartheta \right) d\psi \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{\psi^2 + \psi + 1} \cdot \left(\int_0^1 \left[\left(\psi\vartheta + \frac{\vartheta^2}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} \right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=1} d\vartheta \right) d\psi \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{\psi^2 + \psi + 1} \cdot \left(\left(\psi \cdot 1 + \frac{1^2}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} - \left(\psi \cdot 0 + \frac{0^2}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} \right) d\psi \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{\psi^2 + \psi + 1} \cdot \left(\psi + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} d\psi = \frac{1}{4} \cdot \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{\psi^2 + \psi + 1}}_{=g(h(\psi))} \cdot \underbrace{(2\psi + 1)}_{=h'(\psi)} d\psi \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \int_{h(0)}^{h(1)} \underbrace{\frac{1}{\alpha}}_{=g(\alpha)} d\alpha = \frac{1}{4} \cdot [\ln(|\alpha|)]_{\alpha=1}^{\alpha=3} = \frac{1}{4} \cdot (\ln(|3|) - \ln(|1|)) \\
 &= \frac{1}{4} \cdot (\ln(3) - \ln(1)) = \frac{1}{4} \cdot (\ln(3) - 0) = \frac{1}{4} \cdot \ln(3).
 \end{aligned}$$

c) $\int_{[0; \frac{\pi}{12}] \times [0; \sqrt{3}] \times [0; 2]} \frac{rt^2 \cdot \cos(rt^3)}{1 + s^2} d(r, s, t)$

$\frac{\pi}{48}$

Lösung: Der Integrand ist stetig auf $B := [0; \frac{\pi}{12}] \times [0; \sqrt{3}] \times [0; 2]$. Damit ist der Satz von Fubini anwendbar. Seien $g(x) := \cos(x)$ und $h_r(t) := rt^3$ für alle $r \in \mathbb{R}$. Dann gilt $h'_r(t) = 3rt^2$, $h_r(0) = 0$ und $h_r(2) = 8r$. Mit der eindimensionalen Substitutionsregel ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \int_B \frac{rt^2 \cdot \cos(rt^3)}{1 + s^2} d(r, s, t) &= \int_0^{\frac{\pi}{12}} \left(\int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{3}} \frac{rt^2 \cdot \cos(rt^3)}{1 + s^2} ds \right) dt \right) dr \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{12}} \left(\int_0^2 rt^2 \cdot \cos(rt^3) \cdot [\arctan(s)]_{s=0}^{s=\sqrt{3}} dt \right) dr \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{1}{3} \cdot \left(\int_0^2 \underbrace{\cos(rt^3)}_{=g(h_r(t))} \cdot \underbrace{3rt^2}_{=h'_r(t)} \cdot (\arctan(\sqrt{3}) - \arccos(0)) dt \right) dr \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{3} - 0 \right) \cdot \left(\int_{h_r(0)}^{h_r(2)} \underbrace{\cos(x)}_{=g(x)} dx \right) dr = \int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{\pi}{9} \cdot [\sin(x)]_{x=0}^{x=8r} dr \\
 &= \frac{\pi}{9} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{12}} (\sin(8r) - \sin(0)) dr = \frac{\pi}{9} \cdot \left[-\frac{1}{8} \cdot \cos(8r) \right]_{r=0}^{r=\frac{\pi}{12}} \\
 &= \frac{\pi}{72} \cdot (-\cos(\frac{2\pi}{3}) + \cos(0)) = \frac{\pi}{72} \cdot (\cos(\pi - \frac{2\pi}{3}) + 1) \\
 &= \frac{\pi}{72} \cdot (\cos(\frac{\pi}{3}) + 1) = \frac{\pi}{72} \cdot (\frac{1}{2} + 1) = \frac{\pi}{72} \cdot \frac{3}{2} = \frac{\pi}{24} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{48}.
 \end{aligned}$$

d) $\int_{[1; 2]^2 \times [0; 1]} \frac{xy^2}{\sqrt{yx^2 + z}} d(x, y, z)$

Lösung: Der Integrand ist stetig auf $B := [1; 2]^2 \times [0; 1]$. Damit ist der Satz von Fubini anwendbar. Seien $g(t) := -t^{-\frac{3}{2}}$ und $h_y(x) := 1 + yx^2$. Dann gilt $h'_y(x) = 2xy$, $h_y(1) = 1 + y$ und $h_y(2) = 1 + 4y$. Seien weiterhin $u(y) := y$ und $v(y) := (4y + 1)^{\frac{1}{2}} - 4 \cdot (y + 1)^{\frac{1}{2}}$. Dann gilt $u'(y) = 1$ und $v'(y) = \frac{1}{2} \cdot (4y + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (y + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 = 2 \cdot (1 + 4y)^{-\frac{1}{2}} - 2 \cdot (1 + y)^{-\frac{1}{2}}$. Mit der eindimensionalen Substitutionsregel und einer partiellen Integration ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \int_B \frac{xy^2}{\sqrt{yx^2 + z}} d(x, y, z) &= \int_1^2 \left(\int_1^2 \left(\int_0^1 xy^2 \cdot (z + yx^2)^{-\frac{5}{2}} dz \right) dx \right) dy \\
 &= \int_1^2 \left(\int_1^2 \left[xy^2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot (z + yx^2)^{-\frac{3}{2}} \right]_{z=0}^{z=1} dx \right) dy \\
 &= \int_1^2 \left(\int_1^2 \left(-\frac{2}{3} \cdot xy^2 \cdot (1 + yx^2)^{-\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} \cdot xy^2 \cdot (yx^2)^{-\frac{3}{2}} \right) dx \right) dy \\
 &= \int_1^2 \frac{1}{3} \cdot \left(y \cdot \int_1^2 \underbrace{\left(-(1 + yx^2)^{-\frac{3}{2}} \right)}_{=g(h_y(x))} \cdot \underbrace{2xy}_{=h'_y(x)} dx + \int_1^2 \frac{2xy^2}{x^3 \cdot y^{\frac{3}{2}}} dx \right) dy \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \int_1^2 \left(y \cdot \int_{h_y(1)}^{h_y(2)} \underbrace{\left(-t^{-\frac{3}{2}} \right)}_{=g(t)} dt + \int_1^2 2y^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-2} dx \right) dy \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \int_1^2 \left(y \cdot \left[2t^{-\frac{1}{2}} \right]_{t=1+y}^{t=1+4y} + \left[-2y^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-1} \right]_{x=1}^{x=2} \right) dy \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \int_1^2 \left(\underbrace{y}_{=u(y)} \cdot \underbrace{\left(2 \cdot (1 + 4y)^{-\frac{1}{2}} - 2 \cdot (1 + y)^{-\frac{1}{2}} \right)}_{=v'(y)} - y^{\frac{1}{2}} + 2y^{\frac{1}{2}} \right) dy \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \left(\left[\underbrace{y}_{=u(y)} \cdot \underbrace{\left((4y + 1)^{\frac{1}{2}} - 4 \cdot (y + 1)^{\frac{1}{2}} \right)}_{=v(y)} \right]_{y=1}^{y=2} \right. \\
 &\quad \left. - \int_1^2 \underbrace{1}_{=u'(y)} \cdot \underbrace{\left((4y + 1)^{\frac{1}{2}} - 4 \cdot (y + 1)^{\frac{1}{2}} \right)}_{=v(y)} dy + \int_1^2 y^{\frac{1}{2}} dy \right) \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \left(2 \cdot (\sqrt{4 \cdot 2 + 1} - 4 \cdot \sqrt{2 + 1}) - 1 \cdot (\sqrt{4 \cdot 1 + 1} - 4 \cdot \sqrt{1 + 1}) \right) \\
 &\quad - \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{1}{6} \cdot (4y + 1)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{3} \cdot (y + 1)^{\frac{3}{2}} \right]_{y=1}^{y=2} + \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot y^{\frac{3}{2}} \right]_{y=1}^{y=2} \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \left(2 \cdot \sqrt{9} - 8 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{5} + 4 \cdot \sqrt{2} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{18} \cdot \left(\sqrt{9}^3 - 16 \cdot \sqrt{3}^3 - \sqrt{5}^3 + 16 \cdot \sqrt{2}^3 \right) + \frac{2}{9} \cdot \left(\sqrt{2}^3 - \sqrt{1}^3 \right) \\
 &= \frac{1}{18} \cdot \left(12 \cdot 3 - 48 \cdot \sqrt{3} - 6 \cdot \sqrt{5} + 24 \cdot \sqrt{2} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{18} \cdot \left(9 \cdot 3 - 48 \cdot \sqrt{3} - 5 \cdot \sqrt{5} + 32 \cdot \sqrt{2} \right) + \frac{1}{18} \cdot \left(8 \cdot \sqrt{2} - 4 \right) \\
 &= \frac{1}{18} \cdot \left(36 - 6 \cdot \sqrt{5} - 27 + 5 \cdot \sqrt{5} - 4 \right) \\
 &= \frac{5-\sqrt{5}}{18}.
 \end{aligned}$$



IntMehrDim/Intervalle/Ag_IntMehrDim_FubiniGegenbeispielSubstBetragsQuadrat.tex

Aufgabe 76.361 (Integrationsreihenfolge bei iterierten Integralen)

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy \cdot (x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3}, & \text{falls } x \neq 0 \text{ oder } y \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = y = 0. \end{cases}$$

- a) Berechnen Sie die beiden iterierten Integrale $\int_0^2 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx$ und $\int_0^1 \left(\int_0^2 f(x, y) dx \right) dy$ unter Verwendung der Substitution $u = x^2 + y^2$.

$$\frac{1}{5} \text{ und } -\frac{1}{20}$$

Lösung:

- Um das erste iterierte Integral zu berechnen, rechnen wir zunächst für ein festes $x \in [0; 2]$ das innere Integral $\int_0^1 f(x, y) dy$ aus:

$x = 0$: Für $x = 0$ ergibt sich

$$\int_0^1 f(0, y) dy = \int_0^1 \frac{0 \cdot y \cdot (0^2 - y^2)}{(0^2 + y^2)^3} dy = \int_0^1 0 dy = [0]_{y=0}^{y=1} = 0 - 0 = 0.$$

$x \neq 0$: Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ seien $g_x(u) := \frac{x \cdot (2x^2 - u)}{2 \cdot u^3}$ und $h_x(y) := x^2 + y^2$. Dann folgt $h'_x(y) = 2y$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und die eindimensionale Substitutionsregel liefert

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x, y) dy &= \int_0^1 \frac{xy \cdot (x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3} dy = \int_0^1 \underbrace{\frac{x \cdot (2x^2 - (x^2 + y^2))}{2 \cdot (x^2 + y^2)^3}}_{=g_x(h_x(y))} \cdot \underbrace{2y}_{=h'_x(y)} dy \\ &= \int_{h_x(0)}^{h_x(1)} \underbrace{\frac{x \cdot (2x^2 - u)}{2 \cdot u^3}}_{=g_x(u)} du = \int_{x^2+0^2}^{x^2+1^2} \left(\frac{x^3}{u^3} - \frac{x}{2u^2} \right) du \\ &= \left[\frac{-x^3}{2u^2} + \frac{x}{2u} \right]_{u=x^2}^{u=x^2+1} = \frac{-x^3}{2 \cdot (x^2+1)^2} + \frac{x}{2 \cdot (x^2+1)} - \frac{-x^3}{2 \cdot (x^2)^2} - \frac{x}{2 \cdot x^2} \\ &= \frac{-x^3 + x \cdot (x^2+1)}{2 \cdot (x^2+1)^2} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x} = \frac{x}{2 \cdot (x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Wegen $0 = \frac{0}{2 \cdot (0^2+1)^2}$ folgt also $\int_0^1 f(x, y) dy = \frac{x}{2 \cdot (x^2+1)^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Mit $g(t) := \frac{1}{4t^2}$ und $h(x) := x^2 + 1$ folgt $h'(x) = 2x$ und die eindimensionale Substitutionsregel liefert

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx &= \int_0^2 \frac{x}{2 \cdot (x^2+1)^2} dx = \int_0^2 \underbrace{\frac{1}{4 \cdot (x^2+1)^2}}_{=g(h(x))} \cdot \underbrace{2x}_{=h'(x)} dx = \int_{h(0)}^{h(2)} \underbrace{\frac{1}{4t^2}}_{=g(t)} dt \\ &= \left[\frac{-1}{4t} \right]_{t=0^2+1}^{t=2^2+1} = \frac{-1}{4 \cdot 5} - \frac{-1}{4 \cdot 1} = \frac{-1}{20} + \frac{1}{4} = \frac{-1+5}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

- Wir berechnen noch das zweite iterierte Integral: Dazu schauen wir uns wieder zunächst das innere Integral an, hier also $\int_0^2 f(x, y) dx$:

y = 0: Für $y = 0$ ergibt sich

$$\int_0^2 f(x, 0) \, dy = \int_0^2 \frac{x \cdot 0 \cdot (x^2 - 0^2)}{(x^2 + 0^2)^3} \, dx = \int_0^2 0 \, dx = [0]_{x=0}^{x=2} = 0 - 0 = 0.$$

y ≠ 0: Für alle $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ seien $r_y(u) := \frac{y \cdot (u - 2y^2)}{2 \cdot u^3}$ und $s_y(x) := x^2 + y^2$. Dann folgt $s'_y(x) = 2x$ für alle $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und die eindimensionale Substitutionsregel liefert

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x, y) \, dx &= \int_0^2 \frac{xy \cdot (x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3} \, dx = \int_0^2 \underbrace{\frac{y \cdot (x^2 + y^2 - 2y^2)}{2 \cdot (x^2 + y^2)^3}}_{=r_y(s_y(x))} \cdot \underbrace{2x}_{=s'_y(x)} \, dx \\ &= \int_{s_y(0)}^{s_y(2)} \underbrace{\frac{y \cdot (u - 2y^2)}{2 \cdot u^3}}_{=r_y(u)} \, du = \int_{0^2+y^2}^{2^2+y^2} \left(\frac{y}{2u^2} - \frac{y^3}{u^3} \right) \, du \\ &= \left[\frac{-y}{2u} - \frac{-y^3}{2u^2} \right]_{u=y^2}^{u=4+y^2} = \frac{-y}{2 \cdot (4 + y^2)} + \frac{y^3}{2 \cdot (4 + y^2)^2} - \frac{-y}{2 \cdot y^2} - \frac{y^3}{2 \cdot (y^2)^2} \\ &= \frac{-y \cdot (4 + y^2) + y^3}{2 \cdot (4 + y^2)^2} + \frac{1}{2y} - \frac{1}{2y} = \frac{-2y}{(y^2 + 4)^2}. \end{aligned}$$

Wegen $0 = \frac{-2 \cdot 0}{(0^2 + 4)^2}$ folgt also $\int_0^2 f(x, y) \, dx = \frac{-2y}{(y^2 + 4)^2}$ für alle $y \in \mathbb{R}$.

Mit $r(t) := \frac{1}{t^2}$ und $s(y) := y^2 + 4$ folgt $s'(y) = 2y$ und die eindimensionale Substitutionsregel liefert

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^2 f(x, y) \, dx \right) dy &= \int_0^1 \frac{-2y}{(y^2 + 4)^2} \, dy = \int_0^1 \underbrace{\frac{-1}{(y^2 + 4)^2}}_{=r(s(y))} \cdot \underbrace{2y}_{=s'(y)} \, dy = \int_{s(0)}^{s(1)} \underbrace{\frac{-1}{t^2}}_{=r(t)} \, dt \\ &= \left[\frac{1}{t} \right]_{t=0^2+4}^{t=1^2+4} = \frac{1}{5} - \frac{1}{4} = \frac{4-5}{20} = -\frac{1}{20}. \end{aligned}$$

b) Wieso erhalten Sie unterschiedliche Ergebnisse für die beiden iterierten Integrale?

f ist nicht integrierbar über $[0; 2] \times [0; 1]$

Lösung:

Die Funktion f ist nicht integrierbar über das Rechteck $[0; 2] \times [0; 1]$, denn sonst würden die beiden iterierten Integrale über f mit vertauschter Integrationsreihenfolge nach dem Satz von Fubini übereinstimmen.

Insbesondere muss f also unstetig sein. Tatsächlich ist f im Nullpunkt nicht stetig, denn für die Folge $\left(\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n} \right)^T \right)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt $\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n} \right)^T \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0)^T$ und

$$f \left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n} \right) = \frac{\frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{4}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right)}{\left(\frac{4}{n^2} + \frac{1}{n^2} \right)^3} = \frac{\frac{2 \cdot 3}{n^4}}{\left(\frac{5}{n^2} \right)^3} = \frac{6}{5^3} \cdot n^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$



IntMehrDim/Intervalle/Ag_IntMehrDim_IterierteIntegrale2DohneHuerdenNachStewCalc.tex

Aufgabe 76.362 (Iterierte zweidimensionale Integrale)

Berechnen Sie die folgenden Integrale!

a) $\int_1^3 \left(\int_0^1 (1 + 4xy) \, dx \right) dy$

10

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \int_1^3 \left(\int_0^1 (1 + 4xy) \, dx \right) dy &= \int_1^3 [x + 2x^2y]_{x=0}^{x=1} dy = \int_1^3 (1 + 2y - 0 - 0) dy \\ &= [y + y^2]_{y=1}^{y=3} = 3 + 9 - 1 - 1 = 10. \end{aligned}$$

b) $\int_0^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin(y) \, dy \right) dx$

2

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin(y) \, dy \right) dx &= \int_0^2 [x \cdot (-\cos(y))]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} dx = \int_0^2 (-x \cdot \cos(\frac{\pi}{2}) + x \cdot \cos(0)) dx \\ &= \int_0^2 (-x \cdot 0 + x \cdot 1) dx = \int_0^2 x \, dx \\ &= [\frac{1}{2} \cdot x^2]_{x=0}^{x=2} = \frac{1}{2} \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 = 2^1 - 0 = 2. \end{aligned}$$

c) $\int_0^1 \left(\int_1^2 \frac{x \cdot e^x}{y} \, dy \right) dx$

$\ln(2)$

Lösung: Mit $u(x) := x$ und $v(x) := e^x$ ergibt sich wegen $u'(x) = 1$ und $v'(x) = e^x$ mit Hilfe von partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_1^2 \frac{x \cdot e^x}{y} \, dy \right) dx &= \int_0^1 \left(x \cdot e^x \cdot \int_1^2 \frac{1}{y} \, dy \right) dx = \int_0^1 x \cdot e^x \cdot [\ln(|y|)]_{y=1}^{y=2} dx \\ &= \int_0^1 x \cdot e^x \cdot (\ln(2) - \underbrace{\ln(1)}_{=0}) dx = \ln(2) \cdot \int_0^1 \underbrace{x}_{=u(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{=v'(x)} dx \\ &= \ln(2) \cdot [\underbrace{x}_{=u(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{=v(x)}]_{x=0}^{x=1} - \ln(2) \cdot \int_0^1 \underbrace{1}_{=u'(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{=v(x)} dx \\ &= \ln(2) \cdot (1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0) - \ln(2) \cdot [e^x]_{x=0}^{x=1} \\ &= \ln(2) \cdot e - \ln(2) \cdot (e - 1) = \ln(2). \end{aligned}$$



IntMehrDim/Intervalle/Ag_IntMehrDim_IteriertesIntegral4D0hneHuerden.tex

Aufgabe 76.363 (Iteriertes vierdimensionales Integral)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-1}^1 \left(\int_0^2 \left(\int_{-1}^2 \left(\int_1^2 -\frac{x \cdot (w^2 \cdot x + y)}{(1+z)^2} \, dz \right) dy \right) dx \right) dw$$

$-\frac{17}{9}$

Lösung:

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^1 \left(\int_0^2 \left(\int_{-1}^2 \left(\int_1^2 -\frac{x \cdot (w^2 \cdot x + y)}{(1+z)^2} dz \right) dy \right) dx \right) dw \\
 &= \int_{-1}^1 \left(\int_0^2 \left(\int_{-1}^2 x \cdot (w^2 \cdot x + y) \cdot \left[\frac{1}{1+z} \right]_{z=1}^{z=2} dy \right) dx \right) dw && \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \right) \\
 &= -\frac{1}{6} \cdot \int_{-1}^1 \left(\int_0^2 \left(\int_{-1}^2 (w^2 \cdot x^2 + x \cdot y) dy \right) dx \right) dw \\
 &= -\frac{1}{6} \cdot \int_{-1}^1 \left(\int_0^2 \left[w^2 \cdot x^2 \cdot y + x \cdot \frac{y^2}{2} \right]_{y=-1}^{y=2} dx \right) dw && \begin{pmatrix} 2 - (-1) = 3 \\ 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{pmatrix} \\
 &= -\frac{1}{12} \cdot \int_{-1}^1 \left(\int_0^2 (6 \cdot w^2 \cdot x^2 + 3 \cdot x) dx \right) dw \\
 &= -\frac{1}{12} \cdot \int_{-1}^1 \left[2 \cdot w^2 \cdot x^3 + \frac{3 \cdot x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=2} dw = -\frac{1}{6} \cdot \int_{-1}^1 (8 \cdot w^2 + 3) dw \\
 &= -\frac{1}{6} \cdot \left[\frac{8 \cdot w^3}{3} + 3w \right]_{w=-1}^{w=1} = -\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{8}{3} + 3 - \frac{-8}{3} - (-3) \right) \\
 &= -\frac{1}{6} \cdot \frac{8+9+8+9}{3} = -\frac{34}{18} = -\frac{17}{9}.
 \end{aligned}$$



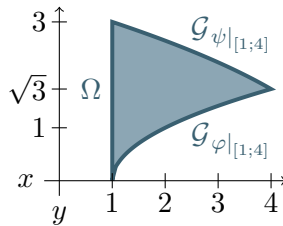
IntMehrDim/Normalbereiche/Ag_IntMehrDim_NB2DFahneDreieckFaecher.tex

Aufgabe 77.364 (Normalbereichsintegrale in der Ebene)

spf

Seien $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto \varphi(t) := \sqrt{|t-1|}$, $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto \psi(t) := \sqrt{|11-2t|}$, $a := 3 - \sqrt{3}$ und $\mathbb{R}_+ := \{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\}$. Überlegen Sie, bezüglich welcher Achsen die skizzierten Mengen Normalbereiche sind und integrieren Sie die angegebenen Funktionen über die Mengen!

a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto f(x, y) := xy\pi^4 \cdot \sin(\pi y^2)$



—π

Lösung als Normalbereich bzgl. der x-Achse:

Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \varphi(t) \leq \psi(t) &\iff \sqrt{|t-1|} \leq \sqrt{|11-2t|} \stackrel{(\cdot)^4}{\iff} (t-1)^2 \leq (11-2t)^2 \\ &\iff (t-1)^2 - (11-2t)^2 \leq 0 \iff (t-1-11+2t) \cdot (t-1+11-2t) \leq 0 \\ &\iff (3t-12) \cdot (-t+10) \leq 0 \iff t \leq 4 \text{ oder } t \geq 10. \end{aligned}$$

Deshalb ist $\Omega = \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 4 \text{ und } \sqrt{x-1} \leq y \leq \sqrt{11-2x} \right\}$ ein Normalbereich bzgl. der x -Achse. Sei $q(y) := \pi y^2$. Dann gilt $q'(y) = 2\pi y$, $q(\sqrt{x-1}) = \pi \cdot (x-1)$ und $q(\sqrt{11-2x}) = \pi \cdot (11-2x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $1 \leq x \leq 4$. Mit der eindimensionalen Substitutionsregel folgt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x, y) \, d(x, y) &= \int_1^4 \left(\int_{\sqrt{x-1}}^{\sqrt{11-2x}} xy\pi^4 \cdot \sin(\pi y^2) \, dy \right) dx \\ &= \int_1^4 \left(\frac{x\pi^3}{2} \cdot \int_{\sqrt{x-1}}^{\sqrt{11-2x}} \underbrace{\sin(\pi y^2)}_{=\sin(q(y))} \cdot \underbrace{2\pi y}_{=q'(y)} \, dy \right) dx \\ &= \int_1^4 \left(\frac{x\pi^3}{2} \cdot \int_{q(\sqrt{x-1})}^{q(\sqrt{11-2x})} \sin(z) \, dz \right) dx = \int_1^4 \frac{x\pi^3}{2} \cdot [-\cos(z)]_{z=\pi \cdot (x-1)}^{z=\pi \cdot (11-2x)} dx \\ &= \int_1^4 \frac{x\pi^3}{2} \cdot \left(-\cos(\pi \cdot (11-2x)) + \cos(\pi \cdot (x-1)) \right) dx \end{aligned}$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ liefern Periodizität, Symmetrie und Additionstheorem des Kosinus

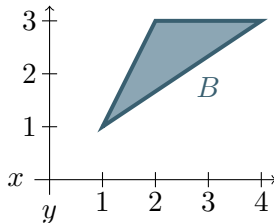
$$\begin{aligned} \cos(\pi \cdot (x-1)) &= \cos(\pi x + (-\pi)) = \cos(\pi x) \cdot \cos(-\pi) - \sin(\pi x) \cdot \sin(-\pi) \\ &= \cos(\pi x) \cdot (-1) - \sin(\pi x) \cdot 0 = -\cos(\pi x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{und } -\cos(\pi \cdot (11-2x)) &= -\cos(-2\pi x + 11\pi) = -\cos(-2\pi x + \pi + 5 \cdot 2\pi) \\ &= -\cos(-2\pi x + \pi) = -(\cos(-2\pi x) \cdot \cos(\pi) - \sin(-2\pi x) \cdot \sin(\pi)) \\ &= -\cos(2\pi x) \cdot (-1) + \sin(-2\pi x) \cdot 0 = \cos(2\pi x). \end{aligned}$$

Mit $u(x) := 2\pi x$ und $v(x) := \sin(2\pi x) - 2 \cdot \sin(\pi x)$ folgt $u'(x) = 2\pi$ und $v'(x) = 2\pi \cdot \cos(2\pi x) - 2\pi \cdot \cos(\pi x)$. Eine partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} f(x, y) \, d(x, y) &= \int_1^4 \frac{x\pi^3}{2} \cdot \left(-\cos(\pi \cdot (11 - 2x)) + \cos(\pi \cdot (x - 1)) \right) dx \\
 &= \int_1^4 \frac{x\pi^3}{2} \cdot (\cos(2\pi x) - \cos(\pi x)) \, dx = \frac{\pi}{8} \cdot \int_1^4 \underbrace{2\pi x}_{=u(x)} \cdot \underbrace{(2\pi \cdot \cos(2\pi x) - 2\pi \cdot \cos(\pi x))}_{=v'(x)} \, dx \\
 &= \frac{\pi}{8} \cdot [2\pi x \cdot (\sin(2\pi x) - 2 \cdot \sin(\pi x))]_{x=1}^{x=4} - \frac{\pi}{8} \cdot \int_1^4 \underbrace{2\pi}_{=u'(x)} \cdot \underbrace{(\sin(2\pi x) - 2 \cdot \sin(\pi x))}_{=v(x)} \, dx \\
 &= \left[\frac{\pi^2}{4} \cdot x \cdot \sin(2\pi x) - \frac{\pi^2}{2} \cdot x \cdot \sin(\pi x) - \frac{\pi}{8} \cdot (-\cos(2\pi x) + 4 \cdot \cos(\pi x)) \right]_{x=1}^{x=4} \\
 &= \frac{\pi^2}{4} \cdot 4 \cdot \underbrace{\sin(8\pi)}_{=0} - \frac{\pi^2}{4} \cdot 4 \cdot \underbrace{\sin(4\pi)}_{=0} + \frac{\pi}{8} \cdot \underbrace{\cos(8\pi)}_{=1} - \frac{\pi}{2} \cdot \underbrace{\cos(4\pi)}_{=1} \\
 &\quad - \frac{\pi^2}{4} \cdot 1 \cdot \underbrace{\sin(2\pi)}_{=0} + \frac{\pi^2}{4} \cdot 1 \cdot \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} - \frac{\pi}{8} \cdot \underbrace{\cos(2\pi)}_{=1} + \frac{\pi}{2} \cdot \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} \\
 &= 0 - 0 + \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2} - 0 + 0 - \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2} = -\pi.
 \end{aligned}$$

b) $g: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto g(x, y) := \left(\frac{6x}{y}\right)^2$



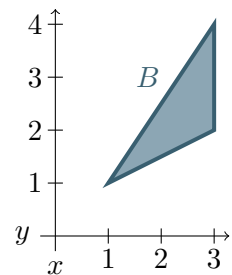
$$64 + 9 \cdot \ln(3)$$

Lösung als Normalbereich bzgl. der y -Achse:

$B = \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq y \leq 3 \text{ und } \frac{y+1}{2} \leq x \leq \frac{3y-1}{2} \right\}$ ist ein Normalbereich bzgl. der y -Achse.

Damit folgt

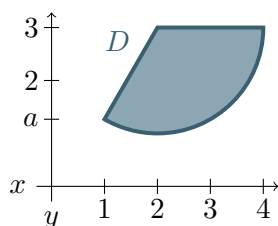
$$\begin{aligned}
 \int_B g(x, y) \, d(x, y) &= \int_1^3 \left(\int_{\frac{y+1}{2}}^{\frac{3y-1}{2}} \frac{36x^2}{y^2} \, dx \right) dy \\
 &= \int_1^3 \left[\frac{12}{y^2} \cdot x^3 \right]_{x=\frac{y+1}{2}}^{x=\frac{3y-1}{2}} dy \\
 &= \int_1^3 \left(\frac{12}{y^2} \cdot \frac{(3y-1)^3}{8} - \frac{12}{y^2} \cdot \frac{(y+1)^3}{8} \right) dy.
 \end{aligned}$$



Der binomische Satz liefert $(3y-1)^3 = 27y^3 - 27y^2 + 9y - 1$ und $(y+1)^3 = y^3 + 3y^2 + 3y + 1$. Voneinander subtrahiert ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \int_B g(x, y) \, d(x, y) &= \int_1^3 \frac{3}{2y^2} \cdot (26y^3 - 30y^2 + 6y - 2) \, dy = \int_1^3 \left(39y - 45 + \frac{9}{y} - \frac{3}{y^2} \right) dy \\
 &= \left[\frac{39}{2} \cdot y^2 - 45y + 9 \cdot \ln(|y|) + \frac{3}{y} \right]_{y=1}^{y=3} \\
 &= \frac{39}{2} \cdot 9 - 45 \cdot 3 + 9 \cdot \ln(3) + \frac{3}{3} - \frac{39}{2} \cdot 1 + 45 - 9 \cdot \ln(1) - \frac{3}{1} \\
 &= \frac{39}{2} \cdot 8 - 45 \cdot 2 + 9 \cdot \ln(3) + 1 - 3 = 156 - 90 - 2 + 9 \cdot \ln(3) \\
 &= 64 + 9 \cdot \ln(3).
 \end{aligned}$$

c) $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto h(x, y) := 5x^2 \cdot (y - 3)$



–122

Lösung als Normalbereich bzgl. der x -Achse:

$D = \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 4 \text{ und } 3 - \sqrt{4 - (x - 2)^2} \leq y \leq \min \{ \sqrt{3} \cdot (x - 2) + 3; 3 \} \right\}$ ist ein Normalbereich bzgl. der x -Achse.

Mit der Substitutionsregel folgt

$$\begin{aligned}
 \int_D h(x, y) \, d(x, y) &= \int_1^2 \left(\int_{3-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{3} \cdot (x-2)+3} 5x^2 \cdot (y-3) \, dy \right) dx + \int_2^4 \left(\int_{3-\sqrt{4x-x^2}}^3 5x^2 \cdot (y-3) \, dy \right) dx \\
 &= \int_1^2 \left[\frac{5x^2}{2} \cdot (y-3)^2 \right]_{y=3-\sqrt{4x-x^2}}^{y=\sqrt{3} \cdot (x-2)+3} dx + \int_2^4 \left[\frac{5x^2}{2} \cdot (y-3)^2 \right]_{y=3-\sqrt{4x-x^2}}^{y=3} dx \\
 &= \int_1^2 \frac{5x^2}{2} \cdot \left(\left(\sqrt{3} \cdot (x-2) \right)^2 - \left(-\sqrt{4x-x^2} \right)^2 \right) dx \\
 &\quad + \int_2^4 \frac{5x^2}{2} \cdot \left(0^2 - \left(-\sqrt{4x-x^2} \right)^2 \right) dx \\
 &= \int_1^2 \frac{5x^2}{2} \cdot (3x^2 - 12x + 12 - 4x + x^2) dx + \int_2^4 \frac{5x^2}{2} \cdot (-4x + x^2) dx \\
 &= \int_1^2 (10x^4 - 40x^3 + 30x^2) dx + \int_2^4 \left(\frac{5}{2} \cdot x^4 - 10x^3 \right) dx \\
 &= \left[2x^5 - 10x^4 + 10x^3 \right]_{x=1}^{x=2} + \left[\frac{1}{2} \cdot x^5 - \frac{5}{2} \cdot x^4 \right]_{x=2}^{x=4} \\
 &= 2 \cdot 32 - 10 \cdot 16 + 10 \cdot 8 - 2 \cdot 1 + 10 \cdot 1 - 10 \cdot 1 \\
 &\quad + \frac{1}{2} \cdot 1024 - \frac{5}{2} \cdot 256 - \frac{1}{2} \cdot 32 + \frac{5}{2} \cdot 16 \\
 &= 64 - 160 + 80 - 2 + 10 - 10 + 512 - 640 - 16 + 40 \\
 &= 144 - 162 + 552 - 656 = -18 - 104 = -122.
 \end{aligned}$$



IntMehrDim/Normalbereiche/Ag_IntMehrDim_NB3DNachStewartCalculus.tex

Aufgabe 77.365 (Integrale über 3-dimensionale Normalbereiche) rk in Anlehnung an a)
 Stewart, Calculus, page 1043, example 2 (iteriertes Integral, Normalbereich vom Typ 1). b) Stewart, Calculus, page 1044, example 3 (iteriertes Integral, Normalbereich vom Typ 1). c) Stewart, Calculus, page 1049, exercise (iteriertes Integral). d) Stewart, Calculus, page 1049, exercise (iteriertes Integral).

Berechnen Sie die Volumenintegrale $\int_B f(x, y, z) \, d(x, y, z)$ für die angegebenen Mengen $B \subseteq \mathbb{R}^3$ und Funktionen $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y, z)^T \mapsto f(x, y, z)$ als iterierte Integrale.

a) $f(x, y, z) := z, \quad B = \{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \min \{ x; y; z \} \text{ und } x + y + z \leq 1 \}$

Tip: B ist die durch die Ebenen $x = 0, y = 0, z = 0$ und $x + y + z = 1$ begrenzte Pyramide.

$\frac{1}{24}$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}
 \int_B f(x, y, z) \, d(x, y, z) &= \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-y-z} z \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \int_0^{1-z} [xz]_{x=0}^{x=1-y-z} \, dy \, dz \\
 &= \int_0^1 \int_0^{1-z} (z - yz - z^2 - 0) \, dy \, dz = \int_0^1 \left[yz - \frac{y^2}{2} \cdot z - yz^2 \right]_{y=0}^{y=1-z} \, dz \\
 &= \int_0^1 \left(z - z^2 - \frac{z}{2} + z^2 - \frac{z^3}{2} - z^2 + z^3 \right) \, dz = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \cdot z^3 - z^2 + \frac{z}{2} \right) \, dz \\
 &= \left[\frac{z^4}{8} - \frac{z^3}{3} + \frac{z^2}{4} \right]_{z=0}^{z=1} = \frac{1}{8} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0 + 0 - 0 = \frac{3-8+6}{24} = \frac{1}{24}.
 \end{aligned}$$

b) $f(x, y, z) := z \cdot \sqrt{x^2 + z^2}$, $B = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \leq y \leq 4 \text{ und } z \geq 0\}$

Tipp: B ist ein halbes um die y -Achse drehendes und durch die Ebene $y = 4$ begrenztes Rotationsparaboloid. Wählen Sie als Integrationsreihenfolge (von innen nach außen) $z \rightarrow y \rightarrow x$.

$\frac{32}{3}$

Lösung: Mit der Substitution $g(t) = t^{\frac{1}{2}}$, $h_x(z) = x^2 + z^2$, also $h'_x(z) = 2z$, $h_x(0) = x^2$ und $h_x(\sqrt{y-x^2}) = y$ folgt unter Verwendung der Achsensymmetrie von $\frac{64}{5} - 4 \cdot |x|^3 + \frac{3}{5} \cdot |x|^5$

$$\begin{aligned}
 \int_B f(x, y, z) \, d(x, y, z) &= \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 \int_0^{\sqrt{y-x^2}} z \cdot \sqrt{x^2 + z^2} \, dz \, dy \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 \int_0^{\sqrt{y-x^2}} \underbrace{\sqrt{x^2 + z^2}}_{=g(h_x(z))} \cdot \underbrace{2z}_{h'_x(z)} \, dz \, dy \, dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 \int_{x^2}^y \underbrace{t^{\frac{1}{2}}}_{=g(t)} \, dt \, dy \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 \left[\frac{2}{3} \cdot \sqrt{t}^3 \right]_{t=x^2}^{t=y} \, dy \, dx = \frac{1}{3} \cdot \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 (y^{\frac{3}{2}} - |x|^3) \, dy \, dx \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \int_{-2}^2 \left[\frac{2}{5} \cdot \sqrt{y}^5 - |x|^3 \cdot y \right]_{y=x^2}^{y=4} \, dz = \frac{1}{3} \cdot \int_{-2}^2 \left(\frac{2}{5} \cdot 32 - 4 \cdot |x|^3 - \frac{2}{5} \cdot |x|^5 + |x|^5 \right) \, dx \\
 &= \frac{2}{3} \cdot \int_0^2 \left(\frac{64}{5} - 4x^3 + \frac{3}{5} \cdot x^5 \right) \, dx = \frac{2}{3} \cdot \left[\frac{64}{5} \cdot x - x^4 + \frac{1}{10} \cdot x^6 \right]_{x=0}^{x=2} \\
 &= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{128}{5} - 16 + \frac{32}{5} - 0 + 0 - 0 \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{80}{5} = \frac{32}{3}.
 \end{aligned}$$

c) $f(x, y, z) := y^{-1} \cdot \exp\left(\frac{z}{y}\right)$, $B = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < y \leq 1, y \leq x \leq 1 \text{ und } 0 \leq z \leq xy\}$

$\frac{1}{2}$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}
 \int_B f(x, y, z) \, d(x, y, z) &= \int_0^1 \int_y^1 \int_0^{xy} y^{-1} \cdot e^{\frac{z}{y}} \, dz \, dx \, dy = \int_0^1 \int_y^1 \left[y^{-1} \cdot e^{\frac{z}{y}} \cdot y \right]_{z=0}^{z=xy} \, dx \, dy \\
 &= \int_0^1 \int_y^1 (e^x - 1) \, dx \, dy = \int_0^1 [e^x - x]_{x=y}^{x=1} \, dy = \int_0^1 (e - 1 - e^y + y) \, dy \\
 &= \left[ey - y - e^y + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} = e - 1 - e + \frac{1}{2} - 0 + 0 + 1 - 0 = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

d) $f(x, y, z) := z^3 + \sin(y) + 3x$, $B = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

0

Lösung:

Sei $D := \{(x, z)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + z^2 \leq 1\}$.

Dann gilt $B = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (x, z)^T \in D \text{ und } -\sqrt{1-x^2-z^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2-z^2}\}$.

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_B f(x, y, z) \, d(x, y, z) &= \int_D \int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{\sqrt{1-x^2-z^2}} (z^3 + \sin(y) + 3x) \, dy \, d(x, z) \\ &= \int_D [z^3 \cdot y - \cos(y) + 3xy]_{y=-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{y=\sqrt{1-x^2-z^2}} \, d(x, z) \\ &= \int_D \left(z^3 \cdot \sqrt{1-x^2-z^2} - \cos\left(\sqrt{1-x^2-z^2}\right) + 3x \cdot \sqrt{1-x^2-z^2} \right) \, d(x, z) \\ &\quad - \int_D \left(-z^3 \cdot \sqrt{1-x^2-z^2} - \cos\left(-\sqrt{1-x^2-z^2}\right) - 3x \cdot \sqrt{1-x^2-z^2} \right) \, d(x, z) \\ &= \int_D 2z^3 \cdot \sqrt{1-x^2-z^2} \, d(x, z) + \int_D 6x \cdot \sqrt{1-x^2-z^2} \, d(x, z). \end{aligned}$$

Verwendet man im ersten Integral die Substitution $t = x^2 + z^2$ mit der Darstellung $D = \{(x, z)^T \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1 \text{ und } -\sqrt{1-x^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2}\}$ und im zweiten Integral die Darstellung $D = \{(x, z)^T \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq z \leq 1 \text{ und } -\sqrt{1-z^2} \leq x \leq \sqrt{1-z^2}\}$ mit der Substitution $w = 1 - x^2 - z^2$, so folgt

$$\begin{aligned} \int_B f(x, y, z) \, d(x, y, z) &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} z^2 \cdot \sqrt{1-x^2-z^2} \cdot 2z \, dz \, dx - 3 \cdot \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \sqrt{1-x^2-z^2} \cdot (-2x) \, dx \, dz \\ &= \int_{-1}^1 \int_1^0 (t - x^2) \cdot \sqrt{1-t} \, dt \, dx - 3 \cdot \int_{-1}^1 \int_0^1 \sqrt{w} \, dw \, dz = \int_{-1}^1 0 \, dx + 3 \cdot \int_{-1}^1 0 \, dz = 0. \end{aligned}$$

Alternativer Lösungsweg:

Sei $D := \{(s, t)^T \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 + t^2 \leq 1\}$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} B &= \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (y, z)^T \in D \text{ und } -\sqrt{1-y^2-z^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2-z^2}\} \\ &= \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (x, z)^T \in D \text{ und } -\sqrt{1-x^2-z^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2-z^2}\} \\ &= \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y)^T \in D \text{ und } -\sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\}. \end{aligned}$$

Bezeichnet $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(s, t)^T \mapsto g(s, t) := \sqrt{1-s^2-t^2}$, so kann man das gesuchte Integral berechnen, indem man es auf drei Integrale aufteilt und in jedem Integral eine individuelle

Integrationsreihenfolge wählt:

$$\begin{aligned}
\int_B f(x, y, z) \, d(x, y, z) &= \int_B (z^3 + \sin(y) + 3x) \, d(x, y, z) \\
&= \int_B z^3 \, d(x, y, z) + \int_B \sin(y) \, d(x, y, z) + \int_B 3x \, d(x, y, z) \\
&= \int_D \int_{-g(x,y)}^{g(x,y)} z^3 \, dz \, d(x, y) + \int_D \int_{-g(x,z)}^{g(x,z)} \sin(y) \, dy \, d(x, z) + \int_D \int_{-g(y,z)}^{g(y,z)} 3x \, dx \, d(y, z) \\
&= \int_D \left[\frac{z^4}{4} \right]_{z=-g(x,y)}^{z=g(x,y)} d(x, y) + \int_D [-\cos(y)]_{y=-g(x,z)}^{y=g(x,z)} d(x, z) + \int_D \left[\frac{3x^2}{2} \right]_{x=-g(y,z)}^{x=g(y,z)} d(y, z) \\
&= \int_D \frac{(g(x, y))^4 - (-g(x, y))^4}{4} d(x, y) + \int_D (-\cos(g(x, z)) + \cos(-g(x, z))) d(x, z) \\
&\quad + \int_D \frac{3 \cdot (g(y, z))^2 - 3 \cdot (-g(y, z))^2}{2} d(y, z) \\
&= \int_D \frac{(g(x, y))^4 - (g(x, y))^4}{4} d(x, y) + \int_D (-\cos(g(x, z)) + \cos(g(x, z))) d(x, z) \\
&\quad + \int_D \frac{3 \cdot (g(y, z))^2 - 3 \cdot (g(y, z))^2}{2} d(y, z) \\
&= \int_D 0 \, d(x, y) + \int_D 0 \, d(x, z) + \int_D 0 \, d(y, z) = 0 + 0 + 0 = 0.
\end{aligned}$$



IntMehrDim/Normalbereiche/Ag_IntMehrDim_NB3NurRechnenOhneSkizze.tex

Aufgabe 77.366 (Integrale über 3-dimensionale Normalbereiche)

SPF

Berechnen Sie die folgenden Volumenintegrale!

a) $\int_D w \, d(u, v, w)$ mit $D := \{(u, v, w)^T \in \mathbb{R}^3 \mid u \geq 1, v \geq 2, u \cdot v \leq 6 \text{ und } 0 \leq u \cdot w \leq v\}$

8

Lösung:

Da $v \geq 2$ und $u \cdot v \leq 6$ sein müssen, kann u nicht größer als 3 werden. Mit $u \geq 1 > 0$ ergibt sich

$$D = \{(u, v, w)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq u \leq 3, 2 \leq v \leq \frac{6}{u} \text{ und } 0 \leq w \leq \frac{v}{u}\}.$$

Das Integral berechnet sich damit zu

$$\begin{aligned}
\int_D w \, d(u, v, w) &= \int_1^3 \left(\int_2^{\frac{6}{u}} \left(\int_0^{\frac{v}{u}} w \, dw \right) dv \right) du = \int_1^3 \left(\int_2^{\frac{6}{u}} \left[\frac{w^2}{2} \right]_{w=0}^{w=\frac{v}{u}} dv \right) du \\
&= \int_1^3 \left(\int_2^{\frac{6}{u}} \left(\frac{v^2}{2u^2} - 0 \right) dv \right) du = \int_1^3 \left[\frac{v^3}{6u^2} \right]_{v=2}^{v=\frac{6}{u}} du \\
&= \int_1^3 \left(\frac{6^3}{6u^2 \cdot u^3} - \frac{2^3}{6u^2} \right) du = \int_1^3 \left(\frac{6^2}{u^5} - \frac{2^2}{3u^2} \right) du \\
&= \left[\frac{36}{-4u^4} - \frac{4}{-3u} \right]_{u=1}^{u=3} = \left(-\frac{9}{3^4} + \frac{4}{3 \cdot 3} \right) - \left(-\frac{9}{1^4} + \frac{4}{3 \cdot 1} \right) \\
&= -\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + 9 - \frac{4}{3} = \frac{3}{9} + 9 - \frac{4}{3} = \frac{1}{3} + 9 - \frac{4}{3} = 9 - \frac{3}{3} = 9 - 1 = 8.
\end{aligned}$$

b) $\int_{\Omega} \sin(\varphi + \vartheta^2) \cdot r \, d(r, \vartheta, \varphi)$ mit $\Omega := \left\{ (r, \vartheta, \varphi)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \vartheta^2 \leq \varphi \text{ und } 0 \leq r \leq \sqrt{|\varphi \vartheta|} \right\}$

$\frac{\pi-1}{4}$

Lösung:

Um Ω als Normalbereich zu schreiben, müssen wir die mittlere Ungleichung $\vartheta^2 \leq \varphi$ umstellen. Da φ wegen der ersten Ungleichung nicht negativ werden kann, ergibt sich $-\sqrt{\varphi} \leq \vartheta \leq \sqrt{\varphi}$.

Das gesuchte Integral ergibt sich also zu

$$\begin{aligned} I &:= \int_{\Omega} \sin(\varphi + \vartheta^2) \cdot r \, d(r, \vartheta, \varphi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{-\sqrt{\varphi}}^{\sqrt{\varphi}} \left(\int_0^{\sqrt{|\varphi \vartheta|}} \sin(\varphi + \vartheta^2) \cdot r \, dr \right) d\vartheta \right) d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{-\sqrt{\varphi}}^{\sqrt{\varphi}} \left[\sin(\varphi + \vartheta^2) \cdot \frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=\sqrt{|\varphi \vartheta|}} d\vartheta \right) d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{-\sqrt{\varphi}}^{\sqrt{\varphi}} \left(\sin(\varphi + \vartheta^2) \cdot \frac{\sqrt{|\varphi \vartheta|^2}}{2} - 0 \right) d\vartheta \right) d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{-\sqrt{\varphi}}^{\sqrt{\varphi}} \sin(\varphi + \vartheta^2) \cdot |\varphi \vartheta| \, d\vartheta \right) d\varphi. \end{aligned}$$

Der Integrand ist gerade bzgl. ϑ . Deshalb kann statt über das symmetrisch zu 0 liegende Intervall auch nur über das halbe Intervall integriert werden, wenn dann das Ergebnis am Ende verdoppelt wird. Mit $g(\tau) := \sin(\tau)$ und $h_{\varphi}(\vartheta) := \varphi + \vartheta^2$ ergibt sich $h'_{\varphi}(\vartheta) = 2\vartheta$, $h_{\varphi}(0) = \varphi + 0^2 = \varphi$ und $h_{\varphi}(\sqrt{\varphi}) = \varphi + \sqrt{\varphi}^2 = 2\varphi$. Die Substitutionsregel liefert

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{-\sqrt{\varphi}}^{\sqrt{\varphi}} \sin(\varphi + \vartheta^2) \cdot |\varphi \vartheta| \, d\vartheta \right) d\varphi = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2 \cdot \int_0^{\sqrt{\varphi}} \sin(\varphi + \vartheta^2) \cdot |\varphi| \cdot |\vartheta| \, d\vartheta \right) d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(|\varphi| \cdot \int_0^{\sqrt{\varphi}} \underbrace{\sin(\varphi + \vartheta^2)}_{=g(h_{\varphi}(\vartheta))} \cdot \underbrace{2\vartheta}_{=h'_{\varphi}(\vartheta)} \, d\vartheta \right) d\varphi = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\varphi \cdot \int_{h_{\varphi}(0)}^{h_{\varphi}(\sqrt{\varphi})} g(\tau) \, d\tau \right) d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\varphi \cdot \int_{\varphi}^{2\varphi} \sin(\tau) \, d\tau \right) d\varphi = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \cdot [-\cos(\tau)]_{\tau=\varphi}^{\tau=2\varphi} d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \cdot (-\cos(2\varphi) + \cos(\varphi)) \, d\varphi. \end{aligned}$$

Mit $u(\varphi) := \varphi$ und $v(\varphi) := -\frac{1}{2} \cdot \sin(2\varphi) + \sin(\varphi)$ ergibt sich $u'(\varphi) = 1$ und $v'(\varphi) = -\cos(2\varphi) + \cos(\varphi)$. Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\varphi}_{=u(\varphi)} \cdot \underbrace{(-\cos(2\varphi) + \cos(\varphi))}_{=v'(\varphi)} \, d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\underbrace{\varphi}_{=u(\varphi)} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{2} \cdot \sin(2\varphi) + \sin(\varphi)\right)}_{=v(\varphi)} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{1}_{=u'(\varphi)} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{2} \cdot \sin(2\varphi) + \sin(\varphi)\right)}_{=v(\varphi)} \, d\varphi \\ &= \left[-\frac{1}{4} \cdot \varphi \cdot \sin(2\varphi) + \frac{1}{2} \cdot \varphi \cdot \sin(\varphi) - \frac{1}{8} \cdot \cos(2\varphi) + \frac{1}{2} \cdot \cos(\varphi) \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \\ &= \left(-\frac{\pi}{8} \cdot \sin(\pi) + \frac{\pi}{4} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{8} \cdot \cos(\pi) + \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) \\ &\quad - \left(-\frac{1}{4} \cdot 0 \cdot \sin(0) + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \sin(0) - \frac{1}{8} \cdot \cos(0) + \frac{1}{2} \cdot \cos(0) \right) \\ &= -\frac{\pi}{8} \cdot 0 + \frac{\pi}{4} \cdot 1 - \frac{1}{8} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 + \frac{1}{8} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 \\ &= 0 + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{8} + 0 + 0 - 0 + \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{\pi-1}{4}. \end{aligned}$$

c) $\int_B yz^2 \, d(x, y, z)$ mit $B := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \min(\{y, z\}) \text{ und } y + z \leq 2 - |x|\}$

Tipp: Eventuell können Sie $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \varphi_x := 2 - |x|$ als Abkürzung verwenden.

$\frac{16}{45}$

Lösung:

Zunächst schreiben wir B mit $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \varphi_x := 2 - |x|$ als Normalbereich um:

Die Ungleichung $0 \leq \min(\{y, z\})$ ist gleichbedeutend mit $(y \geq 0 \text{ und } z \geq 0)$.

Damit die Summe von y und z kleiner als $2 - |x|$ sein kann, muss also $2 - |x| \geq 0$ gelten. Das ist gleichbedeutend mit $2 \geq |x|$, also $-2 \leq x \leq 2$.

Die Summe von y und z ist genau dann höchstens $2 - |x| = \varphi_x$, wenn man z nach oben durch φ_x und y nach oben durch $\varphi_x - z$ beschränkt.

Das liefert mit $\varphi_x = 2 - |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$ also

$$B = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid -2 \leq x \leq 2, 0 \leq z \leq \varphi_x \text{ und } 0 \leq y \leq \varphi_x - z\}.$$

Das gesuchte Integral ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned} \int_B yz^2 \, d(x, y, z) &= \int_{-2}^2 \left(\int_0^{\varphi_x} \left(\int_0^{\varphi_x - z} yz^2 \, dy \right) dz \right) dx \\ &= \int_{-2}^2 \left(\int_0^{\varphi_x} \left[\frac{y^2}{2} \cdot z^2 \right]_{y=0}^{y=\varphi_x - z} dz \right) dx \\ &= \int_{-2}^2 \left(\int_0^{\varphi_x} \left(\frac{(\varphi_x - z)^2}{2} \cdot z^2 - 0 \right) dz \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_{-2}^2 \left(\int_0^{\varphi_x} (\varphi_x^2 \cdot z^2 - 2\varphi_x \cdot z^3 + z^4) dz \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_{-2}^2 \left[\varphi_x^2 \cdot \frac{z^3}{3} - \varphi_x \cdot \frac{z^4}{2} + \frac{z^5}{5} \right]_{z=0}^{z=\varphi_x} dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_{-2}^2 \left(\varphi_x^2 \cdot \frac{\varphi_x^3}{3} - \varphi_x \cdot \frac{\varphi_x^4}{2} + \frac{\varphi_x^5}{5} - 0 + 0 - 0 \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_{-2}^2 \varphi_x^5 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{10 - 15 + 6}{30} \cdot \int_{-2}^2 (2 - |x|)^5 dx. \end{aligned}$$

Der Integrand des verbliebenen Integrals ist gerade, so dass statt über das zu 0 symmetrische Intervall zu integrieren auch nur über das halbe Intervall integriert werden kann, wenn das Ergebnis am Ende verdoppelt wird. Mit $g(t) := t^5$ und $h(x) := 2 - x$ ergibt sich $h'(x) = -1$, $h(0) = 2 - 0 = 2$ und $h(2) = 2 - 2 = 0$. Die Substitutionsregel liefert

$$\begin{aligned} \int_B yz^2 \, d(x, y, z) &= \frac{1}{60} \cdot \int_{-2}^2 (2 - |x|)^5 dx = \frac{2}{60} \cdot \int_0^2 (2 - x)^5 dx \\ &= \frac{-1}{30} \cdot \int_0^2 \underbrace{(2 - x)^5}_{=g(h(x))} \cdot \underbrace{(-1)}_{=h'(x)} dx = \frac{-1}{30} \cdot \int_{h(0)}^{h(2)} g(t) dt = \frac{-1}{30} \cdot \int_2^0 t^5 dt \\ &= \frac{-1}{30} \cdot \left[\frac{t^6}{6} \right]_{t=2}^{t=0} = \frac{-1}{30} \cdot \left(0 - \frac{2^6}{6} \right) = \frac{2^6}{2 \cdot 15 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{2^4}{15 \cdot 3} = \frac{16}{45}. \end{aligned}$$

**Aufgabe 77.367** (Normalbereiche erkennen)

spf

Welche der folgenden Mengen B stellen einen Normalbereich bezüglich der x - bzw. y - bzw. ggf. z -Achse dar? Schreiben Sie die Mengen in der entsprechenden Form!

Berechnen Sie außerdem jeweils den Flächeninhalt bzw. das Volumen $\int_B 1 \, d\vec{r}$ der Figur!

Tipp: Eine Stammfunktion zu $\sqrt{a^2 - (t-b)^2}$ ergibt sich mit der Substitution $s = t - b$, partieller Integration mit dem Faktor 1, Addieren von $a^2 - a^2$, der Substitution $u = \frac{s}{|a|}$ und Integralgleichungsumstellung zu $\int \sqrt{a^2 - (t-b)^2} \, dt = \frac{1}{2} \cdot \left(a^2 \cdot \arcsin\left(\frac{t-b}{|a|}\right) + (t-b) \cdot \sqrt{a^2 - (t-b)^2} \right)$. Sie dürfen diese Aussage ohne Beweis verwenden.

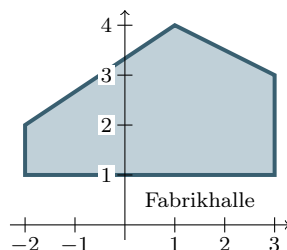
Nachrechnen des Tipps:

Mit partieller Integration mit einem Faktor 1 folgt

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - (t-b)^2} \, dt &= \underbrace{(t-b)}_{=v(t)} \cdot \underbrace{\sqrt{a^2 - (t-b)^2}}_{=w(t)} - \int (t-b) \cdot \frac{-2 \cdot (t-b) \cdot 1}{2 \cdot \sqrt{a^2 - (t-b)^2}} \, dt \\ &= (t-b) \cdot \sqrt{a^2 - (t-b)^2} - \int \frac{a^2 - (t-b)^2 - a^2}{\sqrt{a^2 - (t-b)^2}} \, dt \\ &= (t-b) \cdot \sqrt{a^2 - (t-b)^2} - \int \sqrt{a^2 - (t-b)^2} \, dt + a^2 \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{t-b}{|a|}\right)^2}} \cdot \frac{1}{|a|} \, dt \\ &= (t-b) \cdot \sqrt{a^2 - (t-b)^2} - \int \sqrt{a^2 - (t-b)^2} \, dt + a^2 \cdot \arcsin\left(\frac{t-b}{|a|}\right). \end{aligned}$$

Addieren des Integrals auf beiden Seiten und dividieren durch 2 liefert die Behauptung im Tipp.

a)



NB bzgl. der x - und der y -Achse, 11

Lösung:

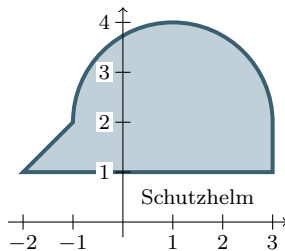
Seien $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := \begin{cases} \frac{2}{3} \cdot x + \frac{10}{3}, & \text{für } x \leq 1 \\ -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{9}{2}, & \text{für } x > 1 \end{cases}$,
 $y \mapsto p(y) := \begin{cases} -2, & \text{für } y \leq 2 \\ \frac{3}{2} \cdot y - 5, & \text{für } y > 2 \end{cases}$ und $y \mapsto q(y) := \begin{cases} 3, & \text{für } y \leq 3 \\ -2y + 9, & \text{für } y > 3 \end{cases}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} B &= \{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 3 \text{ und } 1 \leq y \leq f(x) \} \\ &= \{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq y \leq 4 \text{ und } p(y) \leq x \leq q(y) \}. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
 \int_B 1 \, d\vec{r} &= \int_{-2}^3 \left(\int_1^{f(x)} 1 \, dy \right) dx = \int_{-2}^1 \left(\int_1^{\frac{2}{3}x + \frac{10}{3}} 1 \, dy \right) dx + \int_1^3 \left(\int_1^{-\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}} 1 \, dy \right) dx \\
 &= \int_{-2}^1 [y]_{y=1}^{y=\frac{2}{3}x + \frac{10}{3}} dx + \int_1^3 [y]_{y=1}^{y=-\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}} dx \\
 &= \int_{-2}^1 \left(\frac{2}{3} \cdot x + \frac{10}{3} - 1 \right) dx + \int_1^3 \left(-\frac{1}{2} \cdot x + \frac{9}{2} - 1 \right) dx \\
 &= \left[\frac{x^2}{3} + \frac{7x}{3} \right]_{x=-2}^{x=1} + \left[-\frac{x^2}{4} + \frac{7x}{2} \right]_{x=1}^{x=3} = \frac{1}{3} + \frac{7}{3} - \frac{4}{3} - \frac{-14}{3} - \frac{9}{4} + \frac{21}{2} + \frac{1}{4} - \frac{7}{2} \\
 &= \frac{8}{3} + \frac{10}{3} - \frac{8}{4} + \frac{14}{2} = 6 - 2 + 7 = 11.
 \end{aligned}$$

b)



NB bzgl. der x - und der y -Achse, $\frac{9}{2} + 2\pi$

Lösung:

Seien $f: (-\infty; 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $p: (-\infty; 4] \rightarrow \mathbb{R}$ und $q: (-\infty; 4] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$x \mapsto f(x) := \begin{cases} x + 3, & \text{für } x \leq -1 \\ \sqrt{4 - (x - 1)^2} + 2, & \text{für } x > -1 \end{cases}, y \mapsto p(y) := \begin{cases} y - 3, & \text{für } y \leq 2 \\ -\sqrt{4 - (y - 2)^2} + 1, & \text{für } y > 2 \end{cases}$$

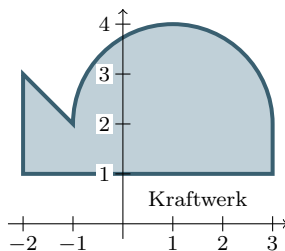
$$\text{und } y \mapsto q(y) := \begin{cases} 3, & \text{für } y \leq 2 \\ \sqrt{4 - (y - 2)^2} + 1, & \text{für } y > 2 \end{cases}. \text{ Dann gilt}$$

$$\begin{aligned}
 B &= \{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 3 \text{ und } 1 \leq y \leq f(x) \} \\
 &= \{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq y \leq 4 \text{ und } p(y) \leq x \leq q(y) \}.
 \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
 \int_B 1 \, d\vec{r} &= \int_{-2}^3 \left(\int_1^{f(x)} 1 \, dy \right) dx = \int_{-2}^{-1} \left(\int_1^{x+3} 1 \, dy \right) dx + \int_{-1}^3 \left(\int_1^{\sqrt{4-(x-1)^2}+2} 1 \, dy \right) dx \\
 &= \int_{-2}^{-1} [y]_{y=1}^{y=x+3} dx + \int_{-1}^3 [y]_{y=1}^{y=\sqrt{4-(x-1)^2}+2} dx \\
 &= \int_{-2}^{-1} (x + 3 - 1) dx + \int_{-1}^3 \left(\sqrt{4 - (x - 1)^2} + 2 - 1 \right) dx \\
 &= \left[\frac{x^2}{2} + 2x \right]_{x=-2}^{x=-1} + \left[\frac{x-1}{2} \cdot \sqrt{4 - (x-1)^2} + 2 \cdot \arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + x \right]_{x=-1}^{x=3} \\
 &= \frac{1}{2} - 2 - 2 + 4 + \left(\frac{2}{2} \cdot \sqrt{4 - 4} + 2 \cdot \arcsin\left(\frac{2}{2}\right) + 3 - \frac{-2}{2} \cdot \sqrt{4 - 4} - 2 \cdot \arcsin\left(\frac{-2}{2}\right) - (-1) \right) \\
 &= \frac{1}{2} + 0 + 2 \cdot \arcsin(1) + 3 + 0 - 2 \cdot \arcsin(-1) + 1 = \frac{9}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{9}{2} + 2\pi.
 \end{aligned}$$

c)



nur NB bzgl. der x -Achse, $\frac{11}{2} + 2\pi$

Lösung:

B ist kein Normalbereich bezüglich der y -Achse.

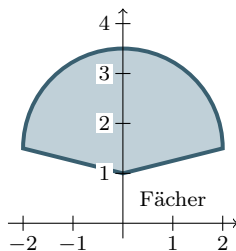
Sei $f: (-\infty; 3] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := \begin{cases} -x + 1, & \text{für } x \leq -1 \\ \sqrt{4 - (x - 1)^2} + 2, & \text{für } x > -1 \end{cases}$. Dann gilt

$$B = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 3 \text{ und } 1 \leq y \leq f(x)\}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_B 1 \, d\vec{r} &= \int_{-2}^3 \left(\int_1^{f(x)} 1 \, dy \right) dx = \int_{-2}^{-1} \left(\int_1^{-x+1} 1 \, dy \right) dx + \int_{-1}^3 \left(\int_1^{\sqrt{4-(x-1)^2}+2} 1 \, dy \right) dx \\ &= \int_{-2}^{-1} [y]_{y=1}^{y=-x+1} dx + \int_{-1}^3 [y]_{y=1}^{y=\sqrt{4-(x-1)^2}+2} dx \\ &= \int_{-2}^{-1} (-x + 1 - 1) dx + \int_{-1}^3 \left(\sqrt{4 - (x - 1)^2} + 2 - 1 \right) dx \\ &= \left[-\frac{x^2}{2} \right]_{x=-2}^{x=-1} + \left[\frac{x-1}{2} \cdot \sqrt{4 - (x-1)^2} + 2 \cdot \arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + x \right]_{x=-1}^{x=3} \\ &= -\frac{1}{2} + 2 + \left(\frac{2}{2} \cdot \sqrt{4-4} + 2 \cdot \arcsin\left(\frac{2}{2}\right) + 3 - \frac{-2}{2} \cdot \sqrt{4-4} - 2 \cdot \arcsin\left(\frac{-2}{2}\right) - (-1) \right) \\ &= \frac{3}{2} + 0 + 2 \cdot \arcsin(1) + 3 + 0 - 2 \cdot \arcsin(-1) + 1 = \frac{11}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{11}{2} + 2\pi. \end{aligned}$$

d)



NB bzgl. der x - und y -Achse, $1 + 2\pi$

Lösung:

Seien $f: [-2; 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $p: (-\infty; \frac{7}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ und $q: (-\infty; \frac{7}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$x \mapsto f(x) := \sqrt{4 - x^2} + \frac{3}{2}, \quad x \mapsto g(x) := \frac{|x|}{4} + 1, \quad y \mapsto p(y) := \begin{cases} -4y + 4, & \text{für } y \leq 1 \\ -\sqrt{4 - (y - \frac{3}{2})^2}, & \text{für } y > 1 \end{cases} \quad \text{und}$$

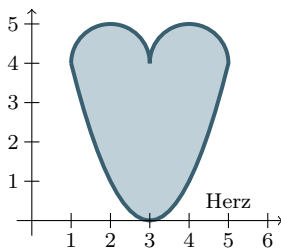
$$y \mapsto q(y) := \begin{cases} 4y - 4, & \text{für } y \leq 1 \\ \sqrt{4 - (y - \frac{3}{2})^2}, & \text{für } y > 1 \end{cases}. \quad \text{Dann gilt}$$

$$\begin{aligned} B &= \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2 \text{ und } \frac{|x|}{4} + 1 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2} + \frac{3}{2} \right\} \\ &= \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq y \leq \frac{7}{2} \text{ und } p(y) \leq x \leq q(y) \right\}. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\int_B 1 \, d\vec{r} &= \int_{-2}^2 \left(\int_{\frac{|x|}{4}+1}^{\sqrt{4-x^2}+\frac{3}{2}} 1 \, dy \right) dx = \int_{-2}^0 \left(\int_{-\frac{x}{4}+1}^{\sqrt{4-x^2}+\frac{3}{2}} 1 \, dy \right) dx + \int_0^2 \left(\int_{\frac{x}{4}+1}^{\sqrt{4-x^2}+\frac{3}{2}} 1 \, dy \right) dx \\
&= \int_{-2}^0 [y]_{y=-\frac{x}{4}+1}^{y=\sqrt{4-x^2}+\frac{3}{2}} dx + \int_0^2 [y]_{y=\frac{x}{4}+1}^{y=\sqrt{4-x^2}+\frac{3}{2}} dx \\
&= \int_{-2}^2 \left(\sqrt{4-x^2} + \frac{3}{2} \right) dx - \int_{-2}^0 \left(-\frac{x}{4} + 1 \right) dx - \int_0^2 \left(\frac{x}{4} + 1 \right) dx \\
&= \left[\frac{x}{2} \cdot \sqrt{4-x^2} + 2 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{3x}{2} \right]_{x=-2}^{x=2} - \left[-\frac{x^2}{8} + x \right]_{x=-2}^{x=0} - \left[\frac{x^2}{8} + x \right]_{x=0}^{x=2} \\
&= \frac{2}{2} \cdot \sqrt{4-4} + 2 \cdot \arcsin\left(\frac{2}{2}\right) + \frac{6}{2} - \frac{-2}{2} \cdot \sqrt{4-4} - 2 \cdot \arcsin\left(\frac{-2}{2}\right) - \frac{-6}{2} \\
&\quad - (-0 + 0 + \frac{4}{8} - (-2)) - (\frac{4}{8} + 2 - 0 - 0) \\
&= 2 \cdot \arcsin(1) + 3 - 2 \cdot \arcsin(-1) + 3 - \frac{5}{2} - \frac{5}{2} = 1 + 2 \cdot \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 2\pi.
\end{aligned}$$

e)



nur NB bzgl. der x -Achse, $\frac{32}{3} + \pi$

Lösung:

B ist kein Normalbereich bezüglich der y -Achse.

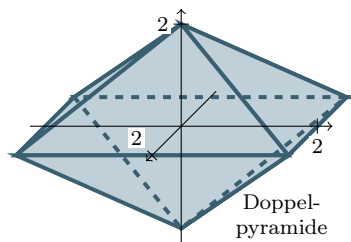
Sei $f: [1; 5] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := \begin{cases} \sqrt{1-(x-2)^2} + 4, & \text{für } x \leq 3 \\ \sqrt{1-(x-4)^2} + 4, & \text{für } x > 3 \end{cases}$. Dann gilt

$$B = \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 5 \text{ und } (x-3)^2 \leq y \leq f(x) \right\}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\int_B 1 \, d\vec{r} &= \int_1^5 \left(\int_{(x-3)^2}^{f(x)} 1 \, dy \right) dx = \int_1^3 \left(\int_{(x-3)^2}^{\sqrt{1-(x-2)^2}+4} 1 \, dy \right) dx + \int_3^5 \left(\int_{(x-3)^2}^{\sqrt{1-(x-4)^2}+4} 1 \, dy \right) dx \\
&= \int_1^3 [y]_{y=(x-3)^2}^{y=\sqrt{1-(x-2)^2}+4} dx + \int_3^5 [y]_{y=(x-3)^2}^{y=\sqrt{1-(x-4)^2}+4} dx \\
&= \int_1^3 \left(\sqrt{1-(x-2)^2} + 4 - (x-3)^2 \right) dx + \int_3^5 \left(\sqrt{1-(x-4)^2} + 4 - (x-3)^2 \right) dx \\
&= \left[\frac{x-2}{2} \cdot \sqrt{1-(x-2)^2} + \frac{1}{2} \cdot \arcsin(x-2) + 4x - \frac{1}{3} \cdot (x-3)^3 \right]_{x=1}^{x=3} \\
&\quad + \left[\frac{x-4}{2} \cdot \sqrt{1-(x-4)^2} + \frac{1}{2} \cdot \arcsin(x-4) + 4x - \frac{1}{3} \cdot (x-3)^3 \right]_{x=3}^{x=5} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{0} + \frac{1}{2} \cdot \arcsin(1) + 12 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 - \frac{-1}{2} \cdot \sqrt{0} - \frac{1}{2} \cdot \arcsin(-1) - 4 - \frac{1}{3} \cdot (-2)^3 \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{0} + \frac{1}{2} \cdot \arcsin(1) + 20 - \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{-1}{2} \cdot \sqrt{0} - \frac{1}{2} \cdot \arcsin(-1) - 12 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 \\
&= \frac{32}{3} + \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \frac{32}{3} + \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{32}{3} + \pi.
\end{aligned}$$

f)

NB bzgl. aller Achsen, $\frac{64}{3}$ **Lösung:**

Es gilt

$$\begin{aligned} B &= \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq 2, |y| \leq 2 \text{ und } |z| \leq 2 - \max\{|x|, |y|\}\} \\ &= \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid |z| \leq 2, |x| \leq 2 - |z| \text{ und } |y| \leq 2 - |z|\}. \end{aligned}$$

Wir betrachten nur einen Oktanten

$$D := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 \text{ und } 0 \leq z \leq 2 - \max\{x, y\}\}.$$

Aus Symmetriegründen ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_B 1 \, d\vec{r} &= 8 \cdot \int_D 1 \, d\vec{r} = 8 \cdot \int_0^2 \left(\int_0^2 \left(\int_0^{2-\max\{x,y\}} 1 \, dz \right) dy \right) dx \\ &= 8 \cdot \int_0^2 \left(\int_0^2 [z]_{z=0}^{z=2-\max\{x,y\}} dy \right) dx = 8 \cdot \int_0^2 \left(\int_0^2 (2 - \max\{x, y\}) dy \right) dx \\ &= 8 \cdot \int_0^2 \left(\int_0^x (2 - x) dy + \int_x^2 (2 - y) dy \right) dx \\ &= 8 \cdot \int_0^2 \left([2y - xy]_{y=0}^{y=x} + \left[2y - \frac{y^2}{2} \right]_{y=x}^{y=2} \right) dx = 8 \cdot \int_0^2 \left(2x - x^2 + 4 - 2 - 2x + \frac{x^2}{2} \right) dx \\ &= 8 \cdot \int_0^2 \left(2 - \frac{x^2}{2} \right) dx = 8 \cdot \left[2x - \frac{x^3}{6} \right]_0^2 = 8 \cdot \left(4 - \frac{8}{6} \right) = 8 \cdot \frac{12-4}{3} = \frac{64}{3}. \end{aligned}$$



IntMehrDim/Normalbereiche/Ag_IntMehrDim_NBIntegrationsReihenfolgeTauschen.tex

Aufgabe 77.368 (Integrationsreihenfolge vertauschen)

kr

Für eine auf dem angegebenen Integrationsgebiet B stetige Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto f(x, y)$ und $B \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^2$ sei ein Doppelintegral gegeben in der Form

$$I_f := \int_0^3 \left(\int_{x^2}^9 f(x, y) \, dy \right) dx.$$

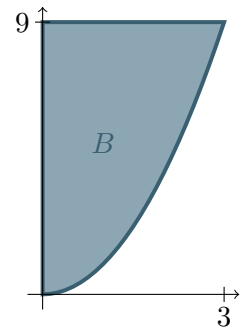
- a) Vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge, also finden Sie $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ sowie $g: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $h: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $y \mapsto g(y)$, $y \mapsto h(y)$ und $g(y) \leq h(y)$ für alle $y \in [a; b]$, so dass $I_f = \int_a^b \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) \, dx \right) dy$ gilt!

$$a := 0, b := 9, g(y) := 0, h(y) := \sqrt{y}$$

Lösung:

Bei der gegebenen Darstellung des Integrals ist die untere Grenze der y -Integration durch die Funktion $y = x^2$ und die obere Grenze durch die Funktion $y = 9$ gegeben. Die x -Integration läuft dann von 0 bis 3. Graphisch entspricht dies der rechts dargestellten Fläche in der xy -Ebene.

Vertauschen wir die Integrationsreihenfolge, so integrieren wir zuerst über x . Der Abbildung entnehmen wir, dass die untere (in der Abbildung linke) Grenze durch die Funktion $x = g(y) := 0$ gegeben ist und die obere (in der Abbildung rechte) Grenze durch die Funktion $x = h(y) := \sqrt{y}$ (Umkehrfunktion von $y = x^2$ für positive x -Werte). Der Bereich für die y -Integration ist dann von $a := 0$ bis $b := 9$.



- b) Testen Sie ihre Umparametrisierung aus Aufgabenteil a), indem Sie I_1 für $\mathbf{1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto \mathbf{1}(x, y) := 1$ über beide Parametrisierungen berechnen und die Ergebnisse vergleichen!

jeweils $I_1 = 18$

Lösung:

Mit der in der Aufgabenstellung gegebenen Parametrisierung berechnet sich I_1 zu

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^3 \left(\int_{x^2}^9 \mathbf{1}(x, y) dy \right) dx = \int_0^3 \left(\int_{x^2}^9 1 dy \right) dx = \int_0^3 [y]_{y=x^2}^{y=9} dx = \int_0^3 (9 - x^2) dx \\ &= \left[9x - \frac{1}{3} \cdot x^3 \right]_{x=0}^{x=3} = 9 \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 9 \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 0 = 27 - 3^2 - 0 + 0 = 27 - 9 = 18. \end{aligned}$$

Mit der Umparametrisierung aus Aufgabenteil a) berechnet sich I_1 zu

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_a^b \left(\int_{g(y)}^{h(y)} \mathbf{1}(x, y) dx \right) dy = \int_0^9 \left(\int_0^{\sqrt{y}} 1 dx \right) dy = \int_0^9 [x]_{x=0}^{x=\sqrt{y}} dy = \int_0^9 (\sqrt{y} - 0) dy \\ &= \left[\frac{2}{3} \cdot y^{\frac{3}{2}} \right]_{y=0}^{y=9} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{9}^3 - \frac{2}{3} \cdot \sqrt{0}^3 = \frac{2}{3} \cdot 3^3 - \frac{2}{3} \cdot 0^3 = 2 \cdot 3^2 - \frac{2}{3} \cdot 0 = 2 \cdot 9 - 0 = 18. \end{aligned}$$

- c) Berechnen Sie I_φ für $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto \varphi(x, y) := x \cdot e^{-y^2}$!

$$I_\varphi = \frac{e^{81}-1}{4 \cdot e^{81}}$$

Lösung:

Mit der Umparametrisierung aus Aufgabenteil a) berechnet sich I_φ zu

$$\begin{aligned} I_\varphi &= \int_a^b \left(\int_{g(y)}^{h(y)} \varphi(x, y) dx \right) dy = \int_0^9 \left(\int_0^{\sqrt{y}} x \cdot e^{-y^2} dx \right) dy = \int_0^9 \left[\frac{x^2}{2} \cdot e^{-y^2} \right]_{x=0}^{x=\sqrt{y}} dy \\ &= \int_0^9 \left(\frac{\sqrt{y}^2}{2} \cdot e^{-y^2} - \frac{0^2}{2} \cdot e^{-y^2} \right) dy = \frac{-1}{4} \cdot \int_0^9 e^{-y^2} \cdot (-2y) dy \stackrel{t=-y^2}{=} \frac{-1}{4} \cdot \int_{-0^2}^{-9^2} e^t dt \\ &= -\frac{1}{4} \cdot [e^t]_{t=0}^{t=-81} = -\frac{1}{4} \cdot (e^{-81} - e^0) = \frac{1}{4} \cdot (1 - e^{-81}) = \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{e^{81}} \right) = \frac{e^{81}-1}{4 \cdot e^{81}}. \end{aligned}$$



IntMehrDim/Normalbereiche/Ag_IntegralrechnungImRn_Normalbereiche2D_mittel.tex

Aufgabe 77.369 (Integrale über 2-dimensionale Normalbereiche) rk in Anlehnung an b) Burg/Haf/Wille/Meister, Höhere Mathematik für Ingenieure, Band I: Analysis, S. 516, Beispiel 7.3. a) Burg/Haf/Wille/Meister, Höhere Mathematik für Ingenieure, Band I: Analysis, S. 521, Übung 7.4. c) Burg/Haf/Wille/Meister, Höhere Mathematik für Ingenieure, Band I: Analysis, S. 516, Übung 7.5. d) Arens/Hettlich, ..., Mathematik, S. 864, Aufgabe 25.9 a) e) Arens/Hettlich, ..., Mathematik, S. 864, Aufgabe 25.9 b)

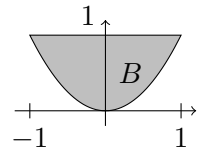
Skizzieren Sie nachfolgend jeweils den (Normal-)Bereich B und berechnen Sie das Integral $\int_B f(x, y) d(x, y)$ mit $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ und $(x, y)^T \mapsto f(x, y)$ als iterierte Integrale.

a) $f(x, y) := x^4 y + 3, \quad B = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1 \text{ und } x^2 \leq y \leq 1\}$

$\frac{184}{45}$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \int_B f(x, y) \, d(x, y) &= \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 (x^4 y + 3) \, dy \, dx = \int_{-1}^1 \left[\frac{x^4 y^2}{2} + 3y \right]_{y=x^2}^{y=1} dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{x^4}{2} + 3 - \frac{x^8}{2} - 3x^2 \right) dx = \left[\frac{x^5}{10} + 3x - \frac{x^9}{18} - x^3 \right]_{x=-1}^{x=1} \\ &= \left(\frac{1}{10} + 3 - \frac{1}{18} - 1 \right) - \left(-\frac{1}{10} - 3 + \frac{1}{18} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{5} + 6 - \frac{1}{9} - 2 = \frac{9+270-5-90}{45} = \frac{184}{45} \end{aligned}$$



und

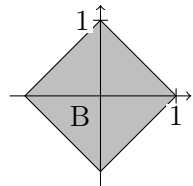
$$\begin{aligned} \int_B f(x, y) \, d(x, y) &= \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (x^4 y + 3) \, dx \, dy = \int_0^1 \left[\frac{x^5 y}{5} + 3x \right]_{x=-\sqrt{y}}^{x=\sqrt{y}} dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{2y^{\frac{7}{2}}}{5} + 6y^{\frac{1}{2}} \right) dy = \left[\frac{4y^{\frac{9}{2}}}{45} + 4y^{\frac{3}{2}} \right]_{y=0}^{y=1} \\ &= \left(\frac{4}{45} + 4 \right) - (0 + 0) = \frac{184}{45}. \end{aligned}$$

b) $f(x, y) := 5 - x^2 - y^2, \quad B = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$

$\frac{28}{3}$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \int_B (5 - x^2 - y^2) \, d^2(x, y) &= \int_{-1}^1 \int_{|x|-1}^{1-|x|} (5 - x^2 - y^2) \, dy \, dx \\ &= \int_{-1}^0 \int_{-x-1}^{1+x} (5 - x^2 - y^2) \, dy \, dx + \int_0^1 \int_{x-1}^{1-x} (5 - x^2 - y^2) \, dy \, dx \\ &= \int_{-1}^0 \left[5y - x^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_{-x-1}^{1+x} dx + \int_0^1 \left[5y - x^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_{x-1}^{1-x} dx \\ &= \int_{-1}^0 \left(5 \cdot (1+x) - x^2 \cdot (1+x) - \frac{(1+x)^3}{3} - 5 \cdot (-1-x) + x^2 \cdot (-1-x) + \frac{(-1-x)^3}{3} \right) dx \\ &\quad + \int_0^1 \left(5 \cdot (1-x) - x^2 \cdot (1-x) - \frac{(1-x)^3}{3} - 5 \cdot (x-1) + x^2 \cdot (x-1) + \frac{(x-1)^3}{3} \right) dx \\ &= \int_{-1}^0 \left(\frac{28}{3} + 8x - 4x^2 - \frac{8}{3} \cdot x^3 \right) dx + \int_0^1 \left(\frac{28}{3} - 8x - 4x^2 + \frac{8}{3} \cdot x^3 \right) dx \\ &= \left[\frac{28}{3} \cdot x + 4x^2 - \frac{4}{3} \cdot x^3 - \frac{2}{3} \cdot x^4 \right]_{-1}^0 + \left[\frac{28}{3} \cdot x - 4x^2 - \frac{4}{3} \cdot x^3 + \frac{2}{3} \cdot x^4 \right]_0^1 \\ &= 0 + \frac{28}{3} - 4 - \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{28}{3} - 4 - \frac{4}{3} + \frac{2}{3} - 0 = \frac{28-12-4+2+28-12-4+2}{3} = \frac{28}{3}. \end{aligned}$$



Da f und B symmetrisch in x und y sind, verläuft die Rechnung in umgekehrter Integrationsreihenfolge absolut identisch.

c) $f(x, y) := x^2 - y^2$, wobei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ die Menge zwischen den Graphen der Funktionen $x \mapsto x^2$ und $x \mapsto x^3$ ist (die x -Koordinate variiert zwischen den Schnittstellen der beiden Funktionen)

$\frac{2}{105}$

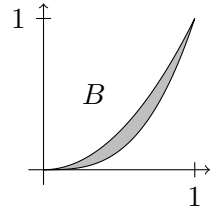
Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}\int_B f(x, y) \, d(x, y) &= \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} (x^2 - y^2) \, dy \, dx = \int_0^1 \left[x^2 y - \frac{1}{3} \cdot y^3 \right]_{y=x^3}^{y=x^2} dx \\ &= \int_0^1 \left(x^4 - \frac{1}{3} \cdot x^6 - x^5 + \frac{1}{3} \cdot x^9 \right) dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{30} \right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{21} - \frac{1}{6} + \frac{1}{30} - 0 + 0 + 0 - 0 = \frac{42-10-35+7}{5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{4}{210} = \frac{2}{105}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\int_B f(x, y) \, d(x, y) &= \int_0^1 \int_{\sqrt[3]{y}}^{\sqrt[3]{y}} (x^2 - y^2) \, dx \, dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{3} \cdot x^3 - xy^2 \right]_{x=\sqrt[3]{y}}^{x=\sqrt[3]{y}} dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} \cdot y - y^{\frac{7}{3}} - \frac{1}{3} \cdot y^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{5}{2}} \right) dy = \left[\frac{y^2}{6} - \frac{3y^{\frac{10}{3}}}{10} - \frac{2y^{\frac{5}{2}}}{15} + \frac{2y^{\frac{7}{2}}}{7} \right]_{y=0}^{y=1} \\ &= \frac{1}{6} - \frac{3}{10} - \frac{2}{15} + \frac{2}{7} - 0 + 0 + 0 - 0 = \frac{35-63-28+60}{5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{4}{210} = \frac{2}{105}.\end{aligned}$$

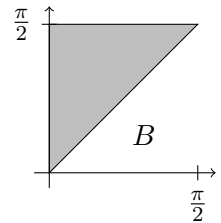
d) $f(x, y) := y^{-1} \cdot \sin(y), \quad B = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < y \leq \frac{\pi}{2}\}$



1

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}\int_B f(x, y) \, d(x, y) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^y y^{-1} \cdot \sin(y) \, dx \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [y^{-1} \cdot \sin(y) \cdot x]_{x=0}^{x=y} dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y^{-1} \cdot \sin(y) \cdot y - 0) \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(y) \, dy = [-\cos(y)]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(0) = -0 + 1 = 1.\end{aligned}$$



IntMehrDim/Normalbereiche/Ag_IntegrationMehrdimensional_Normalbereiche_Teil.tex

Aufgabe 77.370 (Integration in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$)

Berechnen Sie die Integralwerte

a) $\int_0^1 \int_0^{x^2} (x + 2y) \, dy \, dx$

$\frac{9}{20}$

Lösung:

Es gilt

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} (x + 2y) \, dy \, dx = \int_0^1 [xy + y^2]_{y=0}^{y=x^2} dx = \int_0^1 (x^3 + x^4) \, dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20}.$$

b) $\int_0^1 \int_0^v \sqrt{1-v^2} \, du \, dv$

$\frac{1}{3}$

Lösung:

Mit $g(v) = 1 - v^2$ und $h(t) = \sqrt{t}$ ergibt sich $g'(v) = -2v$, $g(0) = 1$ und $g(1) = 0$.

Die Substitutionsregel liefert

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^v \sqrt{1-v^2} \, du \, dv &= \int_0^1 \left[\sqrt{1-v^2} \cdot u \right]_{u=0}^{u=v} dv = \int_0^1 \sqrt{1-v^2} \cdot v \, dv \\ &= \frac{1}{-2} \cdot \int_0^1 \underbrace{\sqrt{1-v^2}}_{=h(g(v))} \cdot \underbrace{(-2v)}_{=g'(v)} dv = -\frac{1}{2} \cdot \int_{g(0)}^{g(1)} \underbrace{\sqrt{t}}_{=h(t)} dt \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \int_1^0 t^{\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}} \right]_{t=1}^{t=0} = -\frac{1}{3} \cdot (0-1) = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

c) $\int_0^1 \int_0^z \int_0^{x+z} (6xz) \, dy \, dx \, dz$

1

Lösung:

Es gilt

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^z \int_0^{x+z} (6xz) \, dy \, dx \, dz &= \int_0^1 \int_0^z [6xyz]_{y=0}^{y=x+z} dx \, dz = \int_0^1 \int_0^z (6x \cdot (x+z) \cdot z) dx \, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^z (6xz^2 + 6x^2z) dx \, dz = \int_0^1 \left[6z \cdot \frac{x^3}{3} + 6 \cdot \frac{x^2}{2} \cdot z^2 \right]_{x=0}^{x=z} dz \\ &= \int_0^1 (2z^4 + 3z^4) dz = \int_0^1 5z^4 dz = [z^5]_{z=0}^{z=1} = 1\end{aligned}$$

d) $\int_0^3 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} z \cdot e^y \, dx \, dz \, dy$

$\frac{1}{3} \cdot (e^3 - 1)$

Lösung:

Mit $g(z) = 1 - z^2$ und $h(t) = \sqrt{t}$ ergibt sich $g'(z) = -2z$, $g(0) = 1$ und $g(1) = 0$.

Die Substitutionsregel liefert

$$\begin{aligned}\int_0^3 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} z \cdot e^y \, dx \, dz \, dy &= \int_0^3 \int_0^1 [z \cdot e^y \cdot x]_{x=0}^{x=\sqrt{1-z^2}} dz \, dy = \int_0^3 \int_0^1 z \cdot e^y \cdot \sqrt{1-z^2} \, dz \, dy \\ &= \int_0^3 \frac{e^y}{-2} \cdot \int_0^1 \underbrace{\sqrt{1-z^2}}_{=h(g(z))} \cdot \underbrace{(-2z)}_{=g'(z)} dz \, dy = -\frac{1}{2} \cdot \int_0^3 e^y \cdot \int_{g(0)}^{g(1)} \underbrace{\sqrt{t}}_{=h(t)} dt \, dy \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \int_0^3 e^y \cdot \int_1^0 t^{\frac{1}{2}} dt \, dy = -\frac{1}{2} \cdot \int_0^3 e^y \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}} \right]_{t=1}^{t=0} dy \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \int_0^3 e^y \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) dy = \frac{1}{3} \cdot \int_0^3 e^y dy \\ &= \frac{1}{3} \cdot [e^y]_{y=0}^{y=3} = \frac{1}{3} \cdot (e^3 - e^0) = \frac{1}{3} \cdot (e^3 - 1)\end{aligned}$$

e) $\int_0^1 \int_x^{2x} \int_0^y (2xyz) \, dz \, dy \, dx$

$\frac{5}{8}$

Lösung:

Es gilt

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_x^{2x} \int_0^y (2xyz) \, dz \, dy \, dx &= \int_0^1 \int_x^{2x} \left[2xy \cdot \frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=y} dy \, dx = \int_0^1 \int_x^{2x} xy^3 \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \left[x \cdot \frac{y^4}{4} \right]_{y=x}^{y=2x} dx = \int_0^1 x \cdot \frac{16x^4 - x^4}{4} dx \\ &= \frac{15}{4} \cdot \int_0^1 x^5 dx = \frac{15}{4} \cdot \left[\frac{x^6}{6} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}.\end{aligned}$$



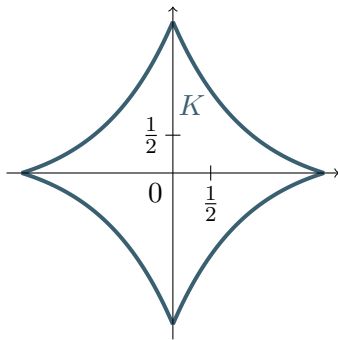
IntMehrDim/Normalbereiche/Ag_Mengen_NB0derNichtKartenAmpelHelden.tex

Aufgabe 77.371 (Normalbereich oder nicht)

Geben Sie an, welche der folgenden Mengen einen Normalbereich bezüglich der entsprechenden Achsen darstellt! (h für „horizontale Achse“, v für „vertikale Achse“, k für „keine der beiden Achsen“)

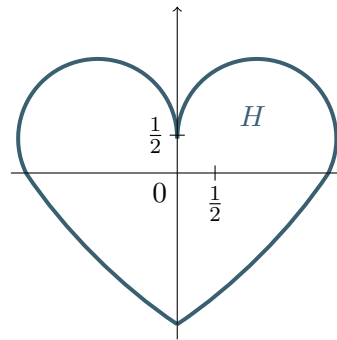
Die Mengen sind jeweils das Innere der gezeichneten Berandung inklusive des Rands.

a)

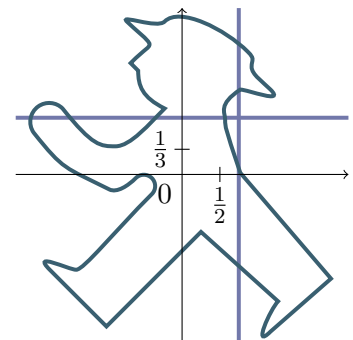


☒ h ☒ v ☐ k 1, 2

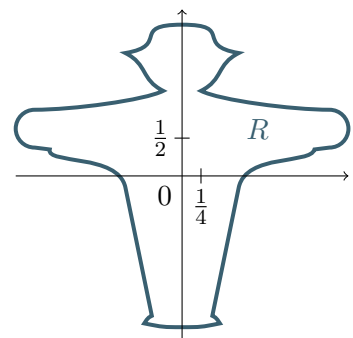
b)



☒ h ☐ v ☐ k

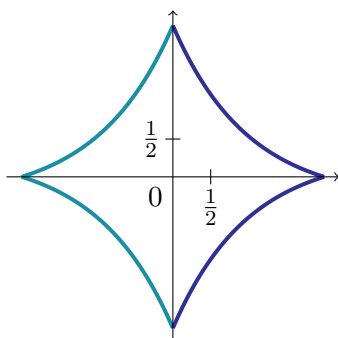
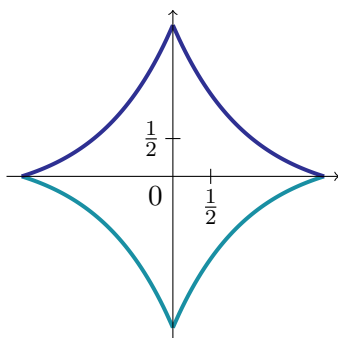


d)

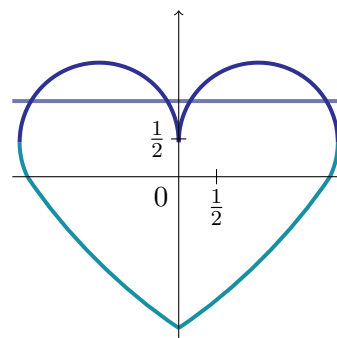


☐ h ☒ v ☐ k

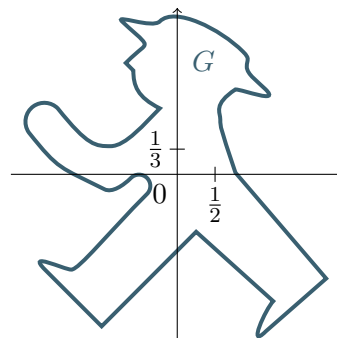
Lösung:



Lösung:

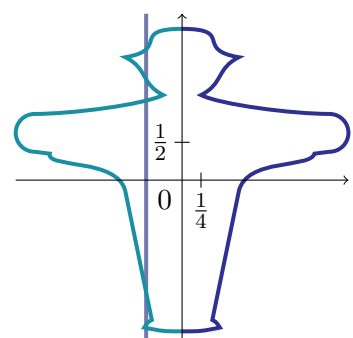


c)



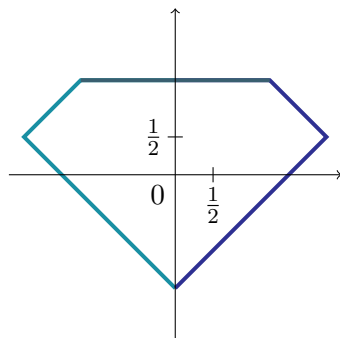
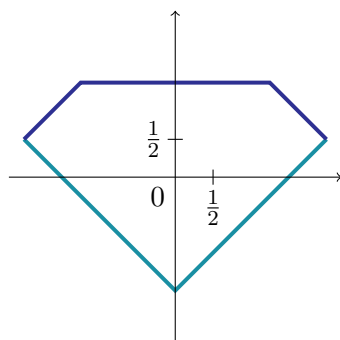
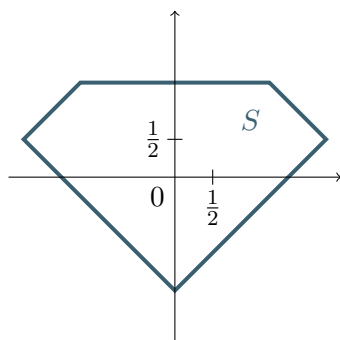
☐ h ☐ v ☒ k

Lösung:



Lösung:

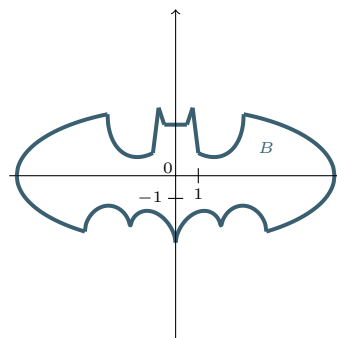
e)



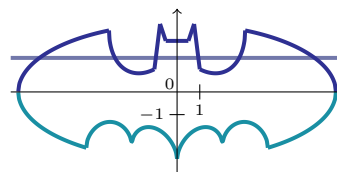
Lösung:

☒ h ☒ v ☐ k 1, 2

f)


☒ h ☐ v ☐ k

Lösung:



Die Schnittpunkte mit der horizontalen Achse liegen in Aufgabenteil e) bei $-\frac{3}{2}$ und $\frac{3}{2}$, die mit der vertikalen Achse bei $-\frac{5}{2}$ und $\frac{5}{4}$. Drei der fünf Innenwinkel haben ein Bogenmaß von $\frac{\pi}{2}$. Geben Sie die Menge S in Normalbereichsnotation bezüglich der Achse(n) an, bezüglich derer es sich um einen Normalbereich handelt!

$$S = \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2 \text{ und } |x| - \frac{3}{2} \leq y \leq \min\left(\left\{\frac{5}{4}; \frac{5}{2} - |x|\right\}\right) \right\}$$

$$S = \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{5}{4} \text{ und } |y - \frac{1}{2}| - 2 \leq x \leq 2 - |y - \frac{1}{2}| \right\}$$

Lösung:

Der linke Rand der Menge ist der Graph der um $\frac{1}{2}$ nach rechts und um 2 nach unten verschobenen Betragsfunktion. Der rechte Rand der Menge ist die Spiegelung des linken Rands an der vertikalen Achse.

Der untere Rand der Menge ist der Graph der um $\frac{3}{2}$ nach unten verschobenen Betragsfunktion.

Für die schrägen Anteile des oberen Rands wird die Betragsfunktion an der horizontalen Achse gespiegelt und dann um $\frac{5}{2}$ nach oben geschoben. Der gerade Anteil des oberen Rands ist ein Ausschnitt der horizontalen Geraden durch $\frac{5}{4}$.

Also ergibt sich

$$S = \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2 \text{ und } |x| - \frac{3}{2} \leq y \leq \min\left(\left\{\frac{5}{4}; \frac{5}{2} - |x|\right\}\right) \right\}$$

$$= \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{5}{4} \text{ und } |y - \frac{1}{2}| - 2 \leq x \leq 2 - |y - \frac{1}{2}| \right\}.$$



IntMehrDim/Normalbereiche/Ag_VollstInd_FaltungMitMonomDurchFortgesetztesIntegrieren.tex

Aufgabe 77.372 (Vollständige Induktion mit Integration über einen Normalbereich) spf

Seien $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$ mit $a \leq 0 \leq b$, $D := [a; b]$, $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto g(t)$ eine integrierbare Funktion, $f_0: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f_0(x) := \int_0^x g(t) dt$ und $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f_n(x) := \int_0^x f_{n-1}(t) dt$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

$$f_n(x) = \frac{1}{n!} \cdot \int_0^x g(t) \cdot (x-t)^n dt \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 \text{ und alle } x \in D \quad !$$

Lösung:

Induktionsanfang: ($n = 0$):

$$\text{Für alle } x \in D \text{ gilt } f_0(x) = \int_0^x g(t) dt = \frac{1}{1} \cdot \int_0^x g(t) \cdot 1 dt = \frac{1}{0!} \cdot \int_0^x g(t) \cdot (x-t)^0 dt.$$

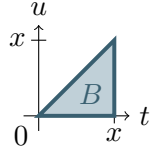
Induktionsvoraussetzung: ($n = N$):

Sei $N \in \mathbb{N}_0$ eine Zahl, für die $f_N(x) = \frac{1}{N!} \cdot \int_0^x g(t) \cdot (x-t)^N dt$ für alle $x \in D$ bereits gezeigt wurde.
Induktionsschluss: ($n = N + 1$): Dann gilt für alle $x \in D$ wegen der Rekursionsvorschrift für $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

$$f_{N+1}(x) = \int_0^x f_N(t) dt \stackrel{\text{IV}}{=} \int_0^x \left(\frac{1}{N!} \cdot \int_0^t g(u) \cdot (t-u)^N du \right) dt.$$

Der Integrationsbereich dieses zweidimensionalen Integrals ist (siehe rechts)

$$\begin{aligned} B &:= \{ (t, u)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq t \leq x \text{ und } 0 \leq u \leq t \} \\ &= \{ (t, u)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq u \leq x \text{ und } u \leq t \leq x \}. \end{aligned}$$



Es handelt sich also um einen Normalbereich sowohl bzgl. der t - als auch bzgl. der u -Achse. Vertauschen der Integrationsreihenfolge führt mit der Substitution $w_N(\tau) = \tau^N$ und $h_u(t) := t - u$, also $w_N(h_u(t)) = (t - u)^N$, $h'_u(t) = 1$, $h_u(u) = 0$ und $h_u(x) = x - u$ für alle $x \in D$ zu

$$\begin{aligned} f_{N+1}(x) &= \int_0^x \left(\frac{1}{N!} \cdot \int_0^t g(u) \cdot (t-u)^N du \right) dt = \int_0^x \left(\frac{1}{N!} \cdot \int_u^x g(u) \cdot (t-u)^N dt \right) du \\ &= \frac{1}{N!} \cdot \int_0^x \left(g(u) \cdot \underbrace{\int_u^x (t-u)^N dt}_{=w_N(h_u(t))} \cdot \underbrace{1}_{=h'_u(t)} du \right) = \frac{1}{N!} \cdot \int_0^x \left(g(u) \cdot \int_{h_u(u)}^{h_u(x)} \underbrace{\tau^N}_{=w_N(\tau)} d\tau \right) du \\ &= \frac{1}{N!} \cdot \int_0^x g(u) \cdot \left[\frac{\tau^{N+1}}{N+1} \right]_{\tau=0}^{\tau=x-u} du = \frac{1}{N!} \cdot \int_0^x g(u) \cdot \left(\frac{(x-u)^{N+1}}{N+1} - \frac{0^{N+1}}{N+1} \right) du \\ &= \frac{1}{N!} \cdot \int_0^x g(u) \cdot \frac{(x-u)^{N+1}}{N+1} du = \frac{1}{(N+1)!} \cdot \int_0^x g(t) \cdot (x-t)^{N+1} dt. \end{aligned}$$



IntMehrDim/StandardSub/Ag_IntMehrDim_3ZylKoord2KugelKoordKoerpernamenInAgText.tex

Aufgabe 78.373 (Integration in Zylinder- und Kugelkoordinaten)

spf

Berechnen Sie die folgenden Integrale über einen schrägen Halbzylinderstumpf, eine Viertelkugelschale, einen Halbzylinderring, einen Zylinder mit Paraboloid-Ausschnitt und eine Halbkugel!

a) $\int_{\Omega} xz \, d(x, y, z)$ mit $\Omega := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 16 + 6y \text{ und } 0 \leq x \leq z \leq 6\}$

Tipp: Hilft Ihnen eine quadratische Ergänzung und der trigonometrische Pythagoras?

$\frac{3250}{3}$

Lösung:

Mit einer quadratischen Ergänzung folgt für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 \leq 16 + 6y &\stackrel{-6y}{\iff} x^2 + y^2 - 6y \leq 16 \stackrel{+9}{\iff} x^2 + y^2 - 2 \cdot y \cdot 3 + 3^2 - 9 \leq 16 \\ &\stackrel{+9}{\iff} x^2 + (y - 3)^2 \leq 25 \iff x^2 + (y - 3)^2 \leq 5^2. \end{aligned}$$

Für die Transformationsfunktion $\vec{\Phi}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ t \end{pmatrix} \mapsto \vec{\Phi}(r, \varphi, t) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) + 3 \\ t \end{pmatrix}$ ergibt

sich $\Omega = \vec{\Phi}(B)$ mit $B := \{(r, \varphi, t)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq r \leq 5, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \text{ und } r \cdot \cos(\varphi) \leq t \leq 6\}$ und $|\det(\vec{\Phi}'(r, \varphi, t))| = r$ für alle $(r, \varphi, t)^T \in \mathbb{R}^3$.

Mit $h(\varphi) := \sin(\varphi)$ und $g(u) := 1 - u^2$ ergibt sich $h'(\varphi) = \cos(\varphi)$, $h(-\frac{\pi}{2}) = -1$ und $h(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Mit der mehrdimensionalen Substitutionsregel ergibt sich ein Normalbereichsintegral, welches sich mit Hilfe der eindimensionalen Substitutionsregel lösen lässt zu

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} xz \, d(x, y, z) &= \int_B r \cdot \cos(\varphi) \cdot t \cdot |\det(\vec{\Phi}'(r, \varphi, t))| \, d(r, \varphi, t) \\ &= \int_0^5 \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{r \cdot \cos(\varphi)}^6 r^2 \cdot \cos(\varphi) \cdot t \, dt \right) d\varphi \right) dr \\ &= \int_0^5 \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[r^2 \cdot \cos(\varphi) \cdot \frac{t^2}{2} \right]_{t=r \cdot \cos(\varphi)}^{t=6} d\varphi \right) dr \\ &= \int_0^5 \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{6^2}{2} \cdot r^2 \cdot \cos(\varphi) - \frac{r^4 \cdot (\cos(\varphi))^3}{2} \right) d\varphi \right) dr \\ &= \int_0^5 \left(3 \cdot 6 \cdot r^2 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\varphi) \, d\varphi - \frac{r^4}{2} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(1 - (\sin(\varphi))^2)}_{=g(h(\varphi))} \cdot \underbrace{\cos(\varphi)}_{=h'(\varphi)} d\varphi \right) dr \\ &= \int_0^5 \left(18r^2 \cdot [\sin(\varphi)]_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} - \frac{r^4}{2} \cdot \int_{h(-\frac{\pi}{2})}^{h(\frac{\pi}{2})} \underbrace{(1 - u^2)}_{=g(u)} du \right) dr \\ &= \int_0^5 \left(18r^2 \cdot (1 - (-1)) - \frac{r^4}{2} \cdot \left[u - \frac{u^3}{3} \right]_{u=-1}^{u=1} \right) dr \\ &= \int_0^5 \left(36 \cdot r^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1^3}{3} - (-1) + \frac{(-1)^3}{3} \right) \cdot r^4 \right) dr \\ &= \left[12r^3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{r^5}{5} \right]_{r=0}^{r=5} = 12 \cdot 125 - \frac{2}{3} \cdot 625 - 0 + 0 = 1500 - \frac{1250}{3} = \frac{3250}{3}. \end{aligned}$$

b) $\int_{\Omega} \frac{2xy}{x^2 + y^2} d(x, y, z)$ mit $\Omega := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16 \text{ und } \min\{x; y\} \geq 0\}$

42

Lösung unter Verwendung von Kugelkoordinaten mit Polarwinkel:

Für die Transformationsfunktion $\vec{\Phi}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\begin{pmatrix} r \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \vec{\Phi}(r, \vartheta, \varphi) := \begin{pmatrix} r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \sin(\varphi) \\ r \cdot \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$

folgt $\Omega = \vec{\Phi}([1; 4] \times [0; \pi] \times [0; \frac{\pi}{2}])$ und $|\det(\vec{\Phi}'(r, \vartheta, \varphi))| = r^2 \cdot \sin(\vartheta)$ für alle $(r, \vartheta, \varphi)^T \in \mathbb{R}^3$.

Mit $h(\varphi) := \sin(\varphi)$ und $g(u) := 2u$ ergibt sich $h'(\varphi) = \cos(\varphi)$, $h(0) = 0$ und $h(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Mit der mehrdimensionalen und der eindimensionalen Substitutionsregel ergibt sich

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{2xy}{x^2 + y^2} d(x, y, z) \\ &= \int_{[1;4] \times [0;\pi] \times [0;\frac{\pi}{2}]} \frac{2 \cdot r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(\varphi) \cdot r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \sin(\varphi)}{(r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(\varphi))^2 + (r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \sin(\varphi))^2} \cdot r^2 \cdot \sin(\vartheta) d(r, \vartheta, \varphi) \\ &= \int_{[1;4] \times [0;\pi] \times [0;\frac{\pi}{2}]} \frac{2r^4 \cdot (\sin(\vartheta))^3 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi)}{r^2 \cdot (\sin(\vartheta))^2 \cdot ((\cos(\varphi))^2 + (\sin(\varphi))^2)} d(r, \vartheta, \varphi) \\ &= \int_1^4 \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cdot \sin(\vartheta) \cdot \underbrace{2 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi)}_{=g(h(\varphi))} d\varphi \right) d\vartheta \right) dr \\ &= \int_1^4 \left(\int_0^\pi \left(\int_{h(0)}^{h(\frac{\pi}{2})} r^2 \cdot \sin(\vartheta) \cdot \underbrace{2u}_{=g(u)} du \right) d\vartheta \right) dr = \int_1^4 \left(\int_0^\pi r^2 \cdot \sin(\vartheta) \cdot [u^2]_{u=0}^{u=1} d\vartheta \right) dr \\ &= \int_1^4 \left(\int_0^\pi r^2 \cdot \sin(\vartheta) \cdot (1^2 - 0^2) d\vartheta \right) dr = \int_1^4 r^2 \cdot [-\cos(\vartheta)]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} dr \\ &= \int_1^4 r^2 \cdot (-\cos(\pi) + \cos(0)) dr = \left[\frac{1}{3} \cdot r^3 \cdot (-(-1) + 1) \right]_{r=1}^{r=4} \\ &= \frac{2}{3} \cdot 4^3 - \frac{2}{3} \cdot 1^3 = \frac{2}{3} \cdot 64 - \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3} \cdot 63 = 2 \cdot 21 = 42. \end{aligned}$$

Hinweis: Verwendet man statt des Polarwinkels ϑ die geographische Breite θ , so benötigt man alle $\theta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Im Integral bleibt der $\cos(\theta)$ statt des $\sin(\vartheta)$ stehen.

Wegen $\int_0^\pi \sin(\vartheta) d\vartheta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta) d\theta$ läuft die Rechnung komplett analog.

c) $\int_{\Omega} yz \cdot e^{xz} d(x, y, z)$ mit $\Omega := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 2 \leq e^{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 4, y \geq 0 \text{ und } -2 \leq z \leq 3\}$

$\frac{807}{64}$

Lösung:

Für die Transformationsfunktion $\vec{\Phi}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ t \end{pmatrix} \mapsto \vec{\Phi}(r, \varphi, t) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \\ t \end{pmatrix}$ ergibt

sich $\Omega = \vec{\Phi}([\ln(2); \ln(4)] \times [0; \pi] \times [-2; 3])$ und $|\det(\vec{\Phi}'(r, \varphi, t))| = r$ für alle $(r, \varphi, t)^T \in \mathbb{R}^3$.

Mit $u_{r,t}(\varphi) := rt \cdot \cos(\varphi)$ ergibt sich $u'_{r,t}(\varphi) = -rt \cdot \sin(\varphi)$, $u_{r,t}(0) = rt$ und $u_{r,t}(\pi) = -rt$.

Mit $v_r(t) := rt$ ergibt sich $v'_r(t) = r$, $v_r(-2) = -2r$ und $v_r(3) = 3r$.

Mit $w_r(t) := -rt$ ergibt sich $w'_r(t) = -r$, $w_r(-2) = 2r$ und $w_r(3) = -3r$.

Mit der mehrdimensionalen und der eindimensionalen Substitutionsregel ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} yz \cdot e^{xz} d(x, y, z) &= \int_{[\ln(2); \ln(4)] \times [0; \pi] \times [-2; 3]} r \cdot \sin(\varphi) \cdot t \cdot e^{r \cdot \cos(\varphi) \cdot t} \cdot r d(r, \varphi, t) \\
&= \int_{\ln(2)}^{\ln(4)} \left(\int_{-2}^3 \left(-r \cdot \int_0^{\pi} \underbrace{e^{rt \cdot \cos(\varphi)}}_{=\exp(u_{r,t}(\varphi))} \cdot \underbrace{(-rt \cdot \sin(\varphi))}_{=u'_{r,t}(\varphi)} d\varphi \right) dt \right) dr \\
&= \int_{\ln(2)}^{\ln(4)} \left(\int_{-2}^3 \left(-r \cdot \int_{u_{r,t}(0)}^{u_{r,t}(\pi)} \underbrace{e^s}_{=\exp(s)} ds \right) dt \right) dr \\
&= \int_{\ln(2)}^{\ln(4)} \left(\int_{-2}^3 (-r) \cdot [e^s]_{s=rt}^{s=-rt} dt \right) dr \\
&= \int_{\ln(2)}^{\ln(4)} \left(\int_{-2}^3 (-r) \cdot (e^{-rt} - e^{rt}) dt \right) dr \\
&= \int_{\ln(2)}^{\ln(4)} \left(\int_{-2}^3 \underbrace{e^{-rt}}_{=\exp(w_r(t))} \cdot \underbrace{(-r)}_{=w'_r(t)} dt + \int_{-2}^3 \underbrace{e^{rt}}_{=\exp(v_r(t))} \cdot \underbrace{r}_{=v'_r(t)} dt \right) dr \\
&= \int_{\ln(2)}^{\ln(4)} \left(\int_{w_r(-2)}^{w_r(3)} \underbrace{e^p}_{=\exp(p)} dp + \int_{v_r(-2)}^{v_r(3)} \underbrace{e^q}_{=\exp(q)} dq \right) dr \\
&= \int_{\ln(2)}^{\ln(4)} \left([e^p]_{p=2r}^{p=-3r} + [e^q]_{q=-2r}^{q=3r} \right) dr \\
&= \int_{\ln(2)}^{\ln(4)} (e^{-3r} - e^{2r} + e^{3r} - e^{-2r}) dr \\
&= \left[\frac{1}{-3} \cdot e^{-3r} - \frac{1}{2} \cdot e^{2r} + \frac{1}{3} \cdot e^{3r} - \frac{1}{-2} \cdot e^{-2r} \right]_{r=\ln(2)}^{r=\ln(4)} \\
&= -\frac{1}{3 \cdot 4^3} - \frac{4^2}{2} + \frac{4^3}{3} + \frac{1}{2 \cdot 4^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} \\
&= \frac{-1 - 3 \cdot 2^9 + 2^{12} + 3 \cdot 2^1 + 2^3 + 3 \cdot 2^7 - 2^9 - 3 \cdot 2^3}{3 \cdot 2^6} \\
&= \frac{-1 - 3 \cdot 512 + 4096 + 3 \cdot 2 + 8 + 3 \cdot 128 - 512 - 3 \cdot 8}{3 \cdot 64} \\
&= \frac{4095 - 1536 + 6 - 504 + 384 - 24}{192} \\
&= \frac{2559 - 498 + 360}{192} = \frac{2061 + 360}{192} = \frac{2421}{192} = \frac{807}{64}.
\end{aligned}$$

d) $\int_{\Omega} \frac{x + |y|}{z^2} d(x, y, z)$ mit $\Omega := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq z \leq 1 + x^2 + y^2 \leq 4\}$

Tipp: Für alle $w \in \mathbb{R}$ ist $\frac{w^2}{1+w^2} = \frac{1+w^2-1}{1+w^2}$.

$$\frac{4}{3} \cdot \pi$$

Lösung:

Für die Transformationsfunktion $\vec{\Phi}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ t \end{pmatrix} \mapsto \vec{\Phi}(r, \varphi, t) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \\ t \end{pmatrix}$ ergibt

sich $\Omega = \vec{\Phi}(B)$ mit $B := \{(r, \varphi, t)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq r \leq \sqrt{3}, -\pi < \varphi \leq \pi \text{ und } 1 \leq t \leq 1 + r^2\}$ und $|\det(\vec{\Phi}'(r, \varphi, t))| = r$ für alle $(r, \varphi, t)^T \in \mathbb{R}^3$.

Mit der mehrdimensionalen Substitutionsregel ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \frac{x+|y|}{z^2} d(x,y,z) &= \int_B \frac{r \cdot \cos(\varphi) + |r \cdot \sin(\varphi)|}{t^2} \cdot r d(r, \varphi, t) \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_1^{1+r^2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{r \cdot \cos(\varphi) + r \cdot |\sin(\varphi)|}{t^2} \cdot r d\varphi \right) dt \right) dr \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_1^{1+r^2} \frac{r^2}{t^2} \cdot \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\varphi) d\varphi + \int_{-\pi}^0 (-\sin(\varphi)) d\varphi + \int_0^{\pi} \sin(\varphi) d\varphi \right) dt \right) dr \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} r^2 \cdot \left(\int_1^{1+r^2} \frac{1}{t^2} \cdot \left([\sin(\varphi)]_{\varphi=-\pi}^{\varphi=\pi} + [\cos(\varphi)]_{\varphi=-\pi}^{\varphi=0} + [-\cos(\varphi)]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \right) dt \right) dr \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} r^2 \cdot (\sin(\pi) - \sin(-\pi) + \cos(0) - \cos(-\pi) - \cos(\pi) + \cos(0)) \cdot \left[-\frac{1}{t} \right]_{t=1}^{t=1+r^2} dr \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} r^2 \cdot (0 - 0 + 1 - (-1) - (-1) + 1) \cdot \left(-\frac{1}{1+r^2} + \frac{1}{1} \right) dr \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} \left(4r^2 - 4 \cdot \frac{1+r^2-1}{1+r^2} \right) dr = \int_0^{\sqrt{3}} \left(4r^2 - 4 + 4 \cdot \frac{1}{1+r^2} \right) dr \\
&= \left[\frac{4}{3} \cdot r^3 - 4r + 4 \cdot \arctan(r) \right]_{r=0}^{r=\sqrt{3}} \\
&= \frac{4}{3} \cdot \sqrt{3}^3 - 4 \cdot \sqrt{3} + 4 \cdot \arctan(\sqrt{3}) - 0 + 0 - 4 \cdot \arctan(0) \\
&= 4 \cdot \sqrt{3} - 4 \cdot \sqrt{3} + 4 \cdot \frac{\pi}{3} - 4 \cdot 0 = \frac{4}{3} \cdot \pi.
\end{aligned}$$

Hinweis: $B = \{(r, \varphi, t)^T \in \mathbb{R}^3 \mid -\pi < \varphi \leq \pi, 1 \leq t \leq 4 \text{ und } \sqrt{t-1} \leq r \leq \sqrt{3}\}$ ist auch ein Normalbereich bzgl. der (φ, t) -Ebene. In dieser Darstellung ergibt sich allerdings ein sehr schwieriges t -Integral.

e) $\int_{\Omega} z \cdot \sin(\sqrt{x^2 + y^2}) d(x, y, z)$ mit $\Omega := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq \pi^2 \text{ und } z \geq 0\}$

$6\pi^2$

Lösung unter Verwendung von Kugelkoordinaten mit Polarwinkel:

Für die Transformationsfunktion $\vec{\Phi}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\begin{pmatrix} r \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \vec{\Phi}(r, \vartheta, \varphi) := \begin{pmatrix} r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \sin(\varphi) \\ r \cdot \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$ ergibt sich $\Omega = \vec{\Phi}([0; \pi] \times [0; \frac{\pi}{2}] \times [0; 2\pi))$ und $|\det(\vec{\Phi}'(r, \vartheta, \varphi))| = r^2 \cdot \sin(\vartheta)$ für alle $(r, \vartheta, \varphi)^T \in \mathbb{R}^3$.

Mit $h_r(\vartheta) := r \cdot \sin(\vartheta)$ und $g(t) := t \cdot \sin(t)$ ergibt sich $h_r'(\vartheta) = r \cdot \cos(\vartheta)$, $h_r(0) = 0$ und $h_r(\frac{\pi}{2}) = r$.

Mit $u(t) := t$ und $v(t) := -\cos(t)$ ergibt sich $u'(t) = 1$ und $v'(t) = \sin(t)$.

Mit $p(r) := r^2$ und $q(r) := \sin(r)$ ergibt sich $p'(r) = 2r$ und $q'(r) = \cos(r)$.

Mit der mehrdimensionalen und der eindimensionalen Substitutionsregel sowie partieller Integra-

tion ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} z \cdot \sin(\sqrt{x^2 + y^2}) \, d(x, y, z) \\
&= \int_{[0; \pi] \times [0; \frac{\pi}{2}] \times [0; 2\pi)} r \cdot \cos(\vartheta) \cdot \sin(r \cdot \sin(\vartheta)) \cdot r^2 \cdot \sin(\vartheta) \, d(r, \vartheta, \varphi) \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \left(r \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \overbrace{r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \sin(r \cdot \sin(\vartheta))}^{=g(h_r(\vartheta))} \cdot \overbrace{r \cdot \cos(\vartheta)}^{=h'_r(\vartheta)} \, d\vartheta \right) dr \right) d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \left(r \cdot \int_{h_r(0)}^{h_r(\frac{\pi}{2})} \underbrace{t}_{=u(t)} \cdot \underbrace{\sin(t)}_{=v'(t)} \, dt \right) dr \right) d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} r \cdot \left(\left[\underbrace{t}_{=u(t)} \cdot \underbrace{(-\cos(t))}_{=v(t)} \right]_{t=0}^{t=r} - \int_0^r \underbrace{1}_{=u'(t)} \cdot \underbrace{(-\cos(t))}_{=v(t)} \, dt \right) dr \right) d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} r \cdot \left(-r \cdot \cos(r) + [\sin(t)]_{t=0}^{t=r} \right) dr \right) d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} r \cdot \sin(r) \, dr - \int_0^{\pi} \underbrace{r^2}_{=p(r)} \cdot \underbrace{\cos(r)}_{=q'(r)} \, dr \right) d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} r \cdot \sin(r) \, dr - \left(\left[\underbrace{r^2}_{=p(r)} \cdot \underbrace{\sin(r)}_{=q(r)} \right]_{r=0}^{r=\pi} - \int_0^{\pi} \underbrace{2r}_{=p'(r)} \cdot \underbrace{\sin(r)}_{=q(r)} \, dr \right) \right) d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(3 \cdot \int_0^{\pi} \underbrace{r}_{=u(r)} \cdot \underbrace{\sin(r)}_{=v(r)} \, dr \right) d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} 3 \cdot \left(\left[\underbrace{r}_{=u(r)} \cdot \underbrace{(-\cos(r))}_{=v(r)} \right]_{r=0}^{r=\pi} - \int_0^{\pi} \underbrace{1}_{=u'(r)} \cdot \underbrace{(-\cos(r))}_{=v(r)} \, dr \right) d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} 3 \cdot \left(-\pi \cdot \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + 0 + [\sin(r)]_{r=0}^{r=\pi} \right) d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} 3\pi \, d\varphi = [3\pi \cdot \varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = 3\pi \cdot 2\pi - 0 = 6\pi^2.
\end{aligned}$$

Hinweis: Verwendet man statt des Polarwinkels ϑ die geographische Breite θ , so benötigt man alle $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$. Wählt man als innere Funktion dann $h_r(\theta) := r \cdot \cos(\theta)$, so vertauschen sich im Vergleich zur obigen Rechnung nach der eindimensionalen Substitution die Integrationsgrenzen und durch die innere Ableitung bekommt man ein zusätzliches Minuszeichen. Beide Effekte heben sich also auf und die Rechnung läuft ansonsten komplett analog.



IntMehrDim/StandardSub/Ag_IntMehrDim_PolarKoordPacmanRegenbogenArchSpirale.tex

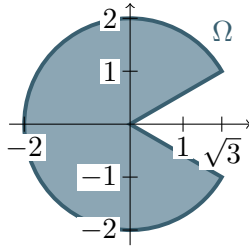
Aufgabe 78.374 (Integration in Polarkoordinaten)

spf

Sei $\vec{w}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $t \mapsto \vec{w}(t) := \begin{pmatrix} t \cdot \cos(\pi t) \\ -t \cdot \sin(\pi t) \end{pmatrix}$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ folgt dann $\vec{w}(t) = \begin{pmatrix} t \cdot \cos(2\pi - \pi t) \\ t \cdot \sin(2\pi - \pi t) \end{pmatrix}$.

Sei $\mathbb{R}_0^2 := \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$. Berechnen Sie die Integrale der gegebenen Funktionen über die skizzierten Mengen!

a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto f(x, y) := 3x + y$



–8

Lösung:

Für die Transformationsfunktion $\vec{\Phi}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \vec{\Phi}(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}$ ergibt sich

$\Omega = \vec{\Phi}([0; 2] \times [\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}])$ und $|\det(\vec{\Phi}'(r, \varphi))| = r$ für alle $(r, \varphi)^T \in \mathbb{R}^2$.

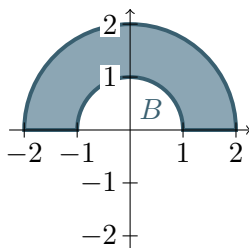
Es sind

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) &= \sin\left(\frac{11\pi}{6} - 2\pi\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \\ \text{und} \quad \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) &= \cos\left(\frac{11\pi}{6} - 2\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Mit der Substitutionsregel liefert der Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x, y) \, d(x, y) &= \int_{[0; 2] \times [\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}]} f(\vec{\Phi}(r, \varphi)) \cdot |\det(\vec{\Phi}'(r, \varphi))| \, d(r, \varphi) \\ &= \int_0^2 \left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} (3r \cdot \cos(\varphi) + r \cdot \sin(\varphi)) \cdot r \, d\varphi \right) dr \\ &= \int_0^2 [3r^2 \cdot \sin(\varphi) - r^2 \cdot \cos(\varphi)]_{\varphi=\frac{\pi}{6}}^{\varphi=\frac{11\pi}{6}} dr \\ &= \int_0^2 (3r^2 \cdot \sin(\frac{11\pi}{6}) - r^2 \cdot \cos(\frac{11\pi}{6}) - 3r^2 \cdot \sin(\frac{\pi}{6}) + r^2 \cdot \cos(\frac{\pi}{6})) dr \\ &= \int_0^2 \left(3r^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - r^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 3r^2 \cdot \frac{1}{2} + r^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) dr \\ &= \int_0^2 (-3r^2) dr = [-r^3]_{r=0}^{r=2} = -2^3 + 0^3 = -8. \end{aligned}$$

b) $g: \mathbb{R}_0^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto g(x, y) := \left(\frac{8xy}{x^2 + y^2} \right)^2$



12π

Lösung:

Für die Transformationsfunktion $\vec{\Phi}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \vec{\Phi}(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}$ ergibt sich

$B = \vec{\Phi}([1; 2] \times [0; \pi])$ und $|\det(\vec{\Phi}'(r, \varphi))| = r$ für alle $(r, \varphi)^T \in \mathbb{R}^2$.

Für alle $(r, \varphi)^T \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$ gilt wegen des trigonometrischen Pythagoras' und des Additionstheorems für doppelte Winkel im Sinus

$$\begin{aligned} g(\vec{\Phi}(r, \varphi)) &= \left(\frac{8 \cdot r \cdot \cos(\varphi) \cdot r \cdot \sin(\varphi)}{(r \cdot \cos(\varphi))^2 + (r \cdot \sin(\varphi))^2} \right)^2 = \left(\frac{4r^2 \cdot 2 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi)}{r^2 \cdot ((\sin(\varphi))^2 + (\cos(\varphi))^2)} \right)^2 \\ &= 16 \cdot (\sin(2\varphi))^2. \end{aligned}$$

Mit der Substitutionsregel liefert der Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \int_B g(x, y) \, d(x, y) &= \int_{[1;2] \times [0;\pi]} g(\vec{\Phi}(r, \varphi)) \cdot |\det(\vec{\Phi}'(r, \varphi))| \, d(r, \varphi) \\ &= \int_0^\pi \left(\int_1^2 16 \cdot (\sin(2\varphi))^2 \cdot r \, dr \right) d\varphi = \int_0^\pi \left[8r^2 \cdot (\sin(2\varphi))^2 \right]_{r=1}^{r=2} d\varphi \\ &= \int_0^\pi (\sin(2\varphi))^2 \cdot (8 \cdot 2^2 - 8 \cdot 1^2) \, d\varphi = \int_0^\pi 24 \cdot (\sin(2\varphi))^2 \, d\varphi. \end{aligned}$$

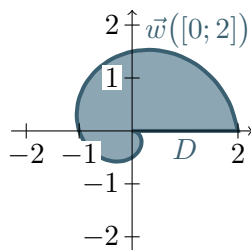
Definiert man $u(\varphi) := \sin(2\varphi)$ und $v(\varphi) := -12 \cdot \cos(2\varphi)$, so ergibt sich $u'(\varphi) = 2 \cdot \cos(2\varphi)$ und $v'(\varphi) = 24 \cdot \sin(2\varphi)$. Eine partielle Integration liefert unter Verwendung des Additionstheorems des Sinus für doppelte Winkel sowie des trigonometrischen Pythagoras'

$$\begin{aligned} \int 24 \cdot (\sin(2\varphi))^2 \, d\varphi &= \int \underbrace{\sin(2\varphi)}_{=u(\varphi)} \cdot \underbrace{24 \cdot \sin(2\varphi)}_{=v'(\varphi)} \, d\varphi \\ &= \underbrace{\sin(2\varphi)}_{=u(\varphi)} \cdot \underbrace{(-12) \cdot \cos(2\varphi)}_{=v(\varphi)} - \int \underbrace{2 \cdot \cos(2\varphi)}_{=u'(\varphi)} \cdot \underbrace{(-12) \cdot \cos(2\varphi)}_{=v(\varphi)} \, d\varphi \\ &= -6 \cdot 2 \cdot \sin(2\varphi) \cdot \cos(2\varphi) + \int 24 \cdot (\cos(2\varphi))^2 \, d\varphi \\ &= -6 \cdot \sin(2 \cdot 2\varphi) + \int 24 \cdot (1 - (\sin(2\varphi))^2) \, d\varphi \\ &= -6 \cdot \sin(4\varphi) + 24\varphi - \int 24 \cdot (\sin(2\varphi))^2 \, d\varphi. \end{aligned}$$

Addieren des äußeren Integrals auf beiden Seiten und Division durch 2 liefert

$$\begin{aligned} \int_B g(x, y) \, d(x, y) &= \int_0^\pi 24 \cdot (\sin(2\varphi))^2 \, d\varphi = [-3 \cdot \sin(4\varphi) + 12\varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \\ &= -3 \cdot \sin(4\pi) + 12\pi + 3 \cdot \sin(4 \cdot 0) + 12 \cdot 0 = -3 \cdot 0 + 12\pi + 3 \cdot 0 + 0 = 12\pi. \end{aligned}$$

c) $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto h(x, y) := \pi x$

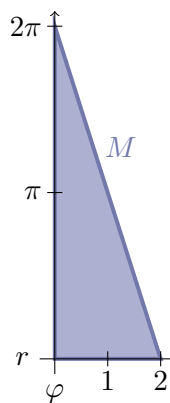


Lösung:

Für die Transformationsfunktion $\vec{\Phi}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \vec{\Phi}(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}$ ergibt sich $|\det(\vec{\Phi}'(r, \varphi))| = r$ für alle $(r, \varphi)^T \in \mathbb{R}^2$.

Nach der Vorbemerkung zu $\vec{w}$ gilt für den Rand der archimedischen Spirale D in Polarkoordinaten die Beziehung $\varphi = 2\pi - \pi r$. Die entsprechende Gerade bildet den oberen Rand der Menge M aus der rechtsstehenden Skizze. Da in der Spirale für jeden Winkel der Radius 0 zugelassen ist und die Menge an erlaubten Radien mit steigendem Winkel abnimmt, muss die Menge M das Dreieck umfassen, welches durch diese Gerade und die Koordinatenachsen beschränkt ist, damit $\vec{\Phi}(M) = D$ gilt.

M ist als Dreieck ein Normalbereich bezüglich beider Koordinatenachsen.



Lösung mit einem Normalbereich bezüglich der r -Achse:

Seien $u(r) := r^2$, $v(r) := \cos(\pi r)$, $p(r) := r$ und $q(r) := \sin(\pi r)$.

Dann sind $u'(r) = 2r$, $v'(r) = -\pi \cdot \sin(\pi r)$, $p'(r) = 1$ und $q'(r) = \pi \cdot \cos(\pi r)$.

Mit $M = \{(r, \varphi)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \leq 2 \text{ und } 0 \leq \varphi \leq 2\pi - \pi r\}$ und der Substitutionsregel liefert eine zweifache partielle Integration

$$\begin{aligned} \int_D h(x, y) \, d(x, y) &= \int_M h(\vec{\Phi}(r, \varphi)) \cdot |\det(\vec{\Phi}'(r, \varphi))| \, d(r, \varphi) = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi - \pi r} \pi \cdot r \cdot \cos(\varphi) \cdot r \, d\varphi \right) dr \\ &= \int_0^2 \pi r^2 \cdot [\sin(\varphi)]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi - \pi r} dr = \int_0^2 \pi r^2 \cdot (\sin(2\pi - \pi r) - \sin(0)) dr \\ &= \int_0^2 \pi r^2 \cdot \sin(-\pi r) dr = \int_0^2 \underbrace{r^2}_{=u(r)} \cdot \underbrace{(-\pi) \cdot \sin(\pi r)}_{=v'(r)} dr \\ &= \left[\underbrace{r^2}_{=u(r)} \cdot \underbrace{\cos(\pi r)}_{=v(r)} \right]_{r=0}^{r=2} - \int_0^2 \underbrace{2r}_{=u'(r)} \cdot \underbrace{\cos(\pi r)}_{=v(r)} dr \\ &= 2^2 \cdot \cos(2\pi) - 0^2 \cdot \cos(0) - \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^2 \underbrace{r}_{=p(r)} \cdot \underbrace{\pi \cdot \cos(\pi r)}_{=q'(r)} dr \\ &= 4 \cdot 1 - 0 \cdot 1 - \frac{2}{\pi} \cdot \left[\underbrace{r}_{=p(r)} \cdot \underbrace{\sin(\pi r)}_{=q(r)} \right]_{r=0}^{r=2} + \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^2 \underbrace{1}_{=p'(r)} \cdot \underbrace{\sin(\pi r)}_{=q(r)} dr \\ &= 4 - 0 - \frac{2}{\pi} \cdot 2 \cdot \sin(2\pi) + \frac{2}{\pi} \cdot 0 \cdot \sin(0) + \left[\frac{2}{\pi^2} \cdot \cos(\pi r) \right]_{r=0}^{r=2} \\ &= 4 - \frac{4}{\pi} \cdot 0 + 0 + \frac{2}{\pi^2} \cdot \cos(2\pi) - \frac{2}{\pi^2} \cdot \cos(0) = 4 - 0 + \frac{2}{\pi^2} \cdot 1 - \frac{2}{\pi^2} \cdot 1 = 4. \end{aligned}$$

Lösung mit einem Normalbereich bezüglich der φ -Achse:

Seien $u(\varphi) := (2\pi - \varphi)^3$, $v(\varphi) := \sin(\varphi)$, $p(\varphi) := (2\pi - \varphi)$, $q(\varphi) := \cos(\pi r)$ und $s(\varphi) := \varphi - 2\pi$. Dann sind $u'(\varphi) = -3 \cdot (2\pi - \varphi)^2$, $v'(\varphi) = \cos(\varphi)$, $p'(\varphi) = -2 \cdot (2\pi - \varphi)$, $q'(\varphi) = -\sin(\varphi)$ und $s'(\varphi) = 1$.

Mit $M = \{(r, \varphi)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi \text{ und } 0 \leq r \leq 2 - \frac{\varphi}{\pi}\}$ und der Substitutionsregel liefert eine

dreifache partielle Integration

$$\begin{aligned}
 \int_D h(x, y) \, d(x, y) &= \int_M h(\vec{\Phi}(r, \varphi)) \cdot \left| \det(\vec{\Phi}'(r, \varphi)) \right| \, d(r, \varphi) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2-\frac{\varphi}{\pi}} \pi \cdot r \cdot \cos(\varphi) \cdot r \, dr \right) \, d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \pi \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot r^3 \right]_{r=0}^{r=2-\frac{\varphi}{\pi}} \cdot \cos(\varphi) \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\pi}{3} \cdot \left(\left(2 - \frac{\varphi}{\pi} \right)^3 - 0^3 \right) \cdot \cos(\varphi) \, d\varphi \\
 &= \frac{1}{3\pi^2} \cdot \int_0^{2\pi} \underbrace{(2\pi - \varphi)^3}_{=u(\varphi)} \cdot \underbrace{\cos(\varphi)}_{=v'(\varphi)} \, d\varphi \\
 &= \frac{1}{3\pi^2} \cdot \left[\underbrace{(2\pi - \varphi)^3}_{=u(\varphi)} \cdot \underbrace{\sin(\varphi)}_{=v(\varphi)} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} - \frac{1}{3\pi^2} \cdot \int_0^{2\pi} \underbrace{\left(-3 \cdot (2\pi - \varphi)^2 \right)}_{=u'(\varphi)} \cdot \underbrace{\sin(\varphi)}_{=v(\varphi)} \, d\varphi \\
 &= \frac{1}{3\pi^2} \cdot (0 \cdot \sin(2\pi) - 8\pi^3 \cdot \sin(0)) - \frac{1}{\pi^2} \cdot \int_0^{2\pi} \underbrace{(2\pi - \varphi)^2}_{=p(\varphi)} \cdot \underbrace{(-\sin(\varphi))}_{=q'(\varphi)} \, d\varphi \\
 &= -\frac{1}{\pi^2} \cdot \left[\underbrace{(2\pi - \varphi)^2}_{=p(\varphi)} \cdot \underbrace{\cos(\varphi)}_{=q(\varphi)} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} + \frac{1}{\pi^2} \cdot \int_0^{2\pi} \underbrace{(-2 \cdot (2\pi - \varphi))}_{=p'(\varphi)} \cdot \underbrace{\cos(\varphi)}_{=q(\varphi)} \, d\varphi \\
 &= -\frac{1}{\pi^2} \cdot (0 \cdot \cos(2\pi) - 4\pi^2 \cdot \cos(0)) + \frac{2}{\pi^2} \cdot \int_0^{2\pi} \underbrace{(\varphi - 2\pi)}_{=s(\varphi)} \cdot \underbrace{\cos(\varphi)}_{=v'(\varphi)} \, d\varphi \\
 &= 4 \cdot 1 + \frac{2}{\pi^2} \cdot \left[\underbrace{(\varphi - 2\pi)}_{=s(\varphi)} \cdot \underbrace{\sin(\varphi)}_{=v(\varphi)} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} - \frac{2}{\pi^2} \cdot \int_0^{2\pi} \underbrace{1}_{=s'(\varphi)} \cdot \underbrace{\sin(\varphi)}_{=v(\varphi)} \, d\varphi \\
 &= 4 + \frac{2}{\pi^2} \cdot (0 \cdot \sin(2\pi) - 2\pi \cdot \sin(0)) - \frac{2}{\pi^2} \cdot [-\cos(\varphi)]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \\
 &= 4 - \frac{2}{\pi^2} \cdot (-\cos(2\pi) + \cos(0)) = 4 - \frac{2}{\pi^2} \cdot (-1 + 1) = 4.
 \end{aligned}$$

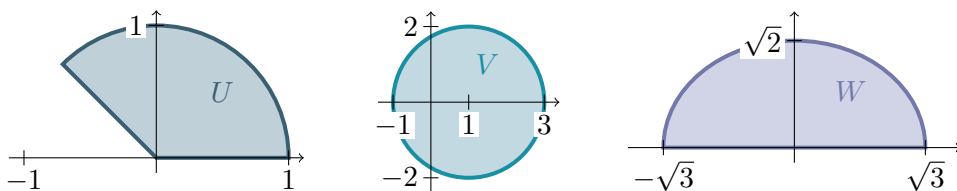
Tipp zu Aufgabenteil b): Verwenden Sie das Additionstheorem für doppelte Winkel im Sinus!

 IntMehrDim/StandardSub/Ag_IntMehrDim_PolarkoordOderNB.tex

Aufgabe 78.375 (Integration in Polarkoordinaten)

spf

Die folgenden Mengen sind Normalbereiche bezüglich beider Koordinatenachsen:



Berechnen Sie die folgenden Integrale möglichst geschickt!

a) $\int_U (x^3 + xy^2) \, d(x, y)$

$\frac{\sqrt{2}}{10}$

Lösung:

Wir transformieren das Integral in Polarkoordinaten

$$\vec{\Phi}: [0; \infty) \times [0; 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad (r, \varphi)^T \mapsto \vec{\Phi}(r, \varphi) := (r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi))^T.$$

Dazu benötigen wir die Funktionaldeterminante

$$\left| \det \left(\vec{\Phi}'(r, \varphi) \right) \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \cdot \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cdot \cos(\varphi) \end{pmatrix} \right| = \left| r \cdot (\cos(\varphi))^2 + r \cdot (\sin(\varphi))^2 \right| = |r| = r.$$

Mit $U = \left\{ \vec{\Phi}(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid r \in [0; 1] \text{ und } \varphi \in [0; \frac{3\pi}{4}] \right\}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_U (x^3 + xy^2) \, d(x, y) &= \int_{[0;1] \times [0; \frac{3\pi}{4}]} \left((r \cdot \cos(\varphi))^3 + r \cdot \cos(\varphi) \cdot (r \cdot \sin(\varphi))^2 \right) \cdot r \, d(r, \varphi) \\ &= \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \left(\int_0^1 r^4 \cdot \cos(\varphi) \cdot \underbrace{((\cos(\varphi))^2 + (\sin(\varphi))^2)}_{=1} \, dr \right) d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \left[\frac{1}{5} \cdot r^5 \cdot \cos(\varphi) \right]_{r=0}^{r=1} d\varphi = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \left(\frac{1}{5} \cdot \cos(\varphi) - 0 \right) d\varphi \\ &= \left[\frac{1}{5} \cdot \sin(\varphi) \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{5} \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \frac{1}{5} \cdot \sin(0) = \frac{1}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{5} \cdot 0 = \frac{\sqrt{2}}{10}. \end{aligned}$$

b) $\int_U x \cdot e^{\sqrt{2} \cdot y} \, d(x, y)$

$$\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Lösung:

Wir transformieren das Integral in Polarkoordinaten

$$\vec{\Phi}: [0; \infty) \times [0; 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad (r, \varphi)^T \mapsto \vec{\Phi}(r, \varphi) := (r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi))^T.$$

Dazu benötigen wir die Funktionaldeterminante

$$\left| \det \left(\vec{\Phi}'(r, \varphi) \right) \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \cdot \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cdot \cos(\varphi) \end{pmatrix} \right| = \left| r \cdot (\cos(\varphi))^2 + r \cdot (\sin(\varphi))^2 \right| = |r| = r.$$

Mit $U = \left\{ \vec{\Phi}(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid r \in [0; 1] \text{ und } \varphi \in [0; \frac{3\pi}{4}] \right\}$ ergibt sich unter Verwendung von $g(t) = e^t$, $h_r(\varphi) = \sqrt{2} \cdot r \cdot \sin(\varphi)$, $u(r) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot r$ und $v(r) = e^r - r$, also $h'_r(\varphi) = \sqrt{2} \cdot r \cdot \cos(\varphi)$, $u'(r) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $v'(r) = e^r - 1$, $h_r(0) = \sqrt{2} \cdot r \cdot \sin(0) = \sqrt{2} \cdot r \cdot 0 = 0$ und $h_r(\frac{3\pi}{4}) = \sqrt{2} \cdot r \cdot \sin(\frac{3\pi}{4}) = \sqrt{2} \cdot r \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = r$ mit der Substitutionsregel und partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_U x \cdot e^{\sqrt{2} \cdot y} \, d(x, y) &= \int_{[0;1] \times [0; \frac{3\pi}{4}]} r \cdot \cos(\varphi) \cdot e^{\sqrt{2} \cdot r \cdot \sin(\varphi)} \cdot r \, d(r, \varphi) \\ &= \int_0^1 \left(\frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \underbrace{e^{\sqrt{2} \cdot r \cdot \sin(\varphi)}}_{=g(h_r(\varphi))} \cdot \underbrace{\sqrt{2} \cdot r \cdot \cos(\varphi)}_{=h'_r(\varphi)} \, d\varphi \right) dr \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{2} \cdot r}{2} \cdot \int_0^r \underbrace{e^t}_{=g(t)} \, dt \right) dr = \int_0^1 \frac{\sqrt{2} \cdot r}{2} \cdot [e^t]_{t=0}^{t=r} dr \\ &= \int_0^1 \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot r}_{=u(r)} \cdot \underbrace{(e^r - 1)}_{=v'(r)} dr = \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot r \cdot (e^r - r) \right]_{r=0}^{r=1} - \int_0^1 \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{=u'(r)} \cdot \underbrace{(e^r - r)}_{=v(r)} dr \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left[r \cdot e^r - r^2 - e^r + \frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=1} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(1 \cdot e^1 - 1^2 - e^1 + \frac{1^2}{2} - 0 \cdot e^0 + 0^2 + e^0 - \frac{0^2}{2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (e - 1 - e + \frac{1}{2} - 0 + 0 + 1 - 0) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

c) $\int_V x^3 \, d(x, y)$

16π

Lösung:

Wir transformieren das Integral in verschobene Polarkoordinaten

$$\vec{\Psi}: [0; \infty) \times [0; 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad (r, \varphi)^T \mapsto \vec{\Psi}(r, \varphi) := (r \cdot \cos(\varphi) + 1, r \cdot \sin(\varphi))^T.$$

Dazu benötigen wir die Funktionaldeterminante

$$\left| \det \left(\vec{\Psi}'(r, \varphi) \right) \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \cdot \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cdot \cos(\varphi) \end{pmatrix} \right| = \left| r \cdot (\cos(\varphi))^2 + r \cdot (\sin(\varphi))^2 \right| = |r| = r.$$

Mit $V = \left\{ \vec{\Psi}(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid r \in [0; 2] \text{ und } \varphi \in [0; 2\pi) \right\}$ folgt

$$\begin{aligned} \int_V x^3 \, d(x, y) &= \int_{[0; 2] \times [0; 2\pi)} (r \cdot \cos(\varphi) + 1)^3 \cdot r \, d(r, \varphi) \\ &= \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(r^4 \cdot (\cos(\varphi))^3 + 3r^3 \cdot (\cos(\varphi))^2 + 3r^2 \cdot \cos(\varphi) + r \right) d\varphi \right) dr. \end{aligned}$$

Mit $g(t) = 1 - t^2$ und $h(\varphi) = \sin(\varphi)$ ergibt sich $h'(\varphi) = \cos(\varphi)$ und die eindimensionale Substitutionsregel liefert

$$\begin{aligned} \int (\cos(\varphi))^3 \, d\varphi &= \int (\cos(\varphi))^2 \cdot \cos(\varphi) \, d\varphi = \int \underbrace{(1 - (\sin(\varphi))^2)}_{=g(h(\varphi))} \cdot \underbrace{\cos(\varphi)}_{=h'(\varphi)} \, d\varphi \\ &= \left[\int (1 - t^2) \, dt \right]_{t=h(\varphi)} = \left[t - \frac{1}{3} \cdot t^3 \right]_{t=\sin(\varphi)} = \sin(\varphi) - \frac{1}{3} \cdot (\sin(\varphi))^3. \end{aligned}$$

Mit $u(\varphi) = \sin(\varphi)$ und $v(\varphi) = \cos(\varphi)$ folgt $u'(\varphi) = \cos(\varphi)$ und $v'(\varphi) = -\sin(\varphi)$. Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} \int (\cos(\varphi))^2 \, d\varphi &= \int \underbrace{\cos(\varphi)}_{=u'(\varphi)} \cdot \underbrace{\cos(\varphi)}_{=v(\varphi)} \, d\varphi = \underbrace{\sin(\varphi)}_{=u(\varphi)} \cdot \underbrace{\cos(\varphi)}_{=v(\varphi)} - \int \underbrace{\sin(\varphi)}_{=u(\varphi)} \cdot \underbrace{(-\sin(\varphi))}_{=v'(\varphi)} \, d\varphi \\ &= \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) + \int (\sin(\varphi))^2 \, d\varphi = \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) + \int (1 - (\cos(\varphi))^2) \, d\varphi \\ &= \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) + \varphi - \int (\cos(\varphi))^2 \, d\varphi. \end{aligned}$$

Addiert man das Integral auf beiden Seiten und dividiert durch 2, so folgt

$$\int (\cos(\varphi))^2 \, d\varphi = \frac{\varphi + \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi)}{2}.$$

Zusammengesetzt ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_V x^3 \, d(x, y) &= \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(r^4 \cdot (\cos(\varphi))^3 + 3r^3 \cdot (\cos(\varphi))^2 + 3r^2 \cdot \cos(\varphi) + r \right) d\varphi \right) dr \\
&= \int_0^2 \left[r^4 \cdot \left(\sin(\varphi) - \frac{1}{3} \cdot (\sin(\varphi))^3 \right) + \frac{3}{2} \cdot r^3 \cdot (\varphi + \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi)) + 3r^2 \cdot \sin(\varphi) + r\varphi \right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} dr \\
&= \int_0^2 \left(r^4 \cdot \left(\sin(2\pi) - \frac{1}{3} \cdot (\sin(2\pi))^3 \right) + \frac{3}{2} \cdot r^3 \cdot (2\pi + \sin(2\pi) \cdot \cos(2\pi)) + 3r^2 \cdot \sin(2\pi) + r \cdot 2\pi \right) dr \\
&\quad - \int_0^2 \left(r^4 \cdot \left(\sin(0) - \frac{1}{3} \cdot (\sin(0))^3 \right) + \frac{3}{2} \cdot r^3 \cdot (0 + \sin(0) \cdot \cos(0)) + 3r^2 \cdot \sin(0) + r \cdot 0 \right) dr \\
&= \int_0^2 (r^4 \cdot (0 - 0) + 3\pi r^3 + \frac{3}{2} \cdot r^3 \cdot 0 \cdot 1 + 3r^2 \cdot 0 + 2\pi r - r^4 \cdot (0 - 0) - \frac{3}{2} \cdot r^3 \cdot 0 \cdot 1 - 3r^2 \cdot 0) dr \\
&= \int_0^2 (3\pi r^3 + 2\pi r) dr = \left[\frac{3}{4} \cdot \pi r^4 + \pi r^2 \right]_{r=0}^{r=2} = \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot 16 + \pi \cdot 4 - 0 - 0 = 12\pi + 4\pi = 16\pi.
\end{aligned}$$

d) $\int_V (y^3 \cdot \sin(x)) \, d(x, y)$

0

Lösung:

Wegen $V = \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 3 \text{ und } -\sqrt{4 - (x-1)^2} \leq y \leq \sqrt{4 - (x-1)^2} \right\}$ ergibt sich mit $f: [-1; 3] \rightarrow \mathbb{R}$ und $x \mapsto f(x) := \sqrt{4 - (x-1)^2}$

$$\begin{aligned}
\int_V y^3 \cdot \sin(x) \, d(x, y) &= \int_{-1}^3 \int_{-f(x)}^{f(x)} y^3 \cdot \sin(x) \, dy \, dx = \int_{-1}^3 \left[\frac{y^4}{4} \cdot \sin(x) \right]_{y=-f(x)}^{y=f(x)} dx \\
&= \int_{-1}^3 \frac{\sin(x)}{4} \cdot \left((f(x))^4 - (-f(x))^4 \right) dx = \int_{-1}^3 \frac{\sin(x)}{4} \cdot \left((f(x))^4 - (f(x))^4 \right) dx \\
&= \int_{-1}^3 \frac{\sin(x)}{4} \cdot 0 \, dx = \int_{-1}^3 0 \, dx = [0]_{x=-1}^{x=3} = 0 - 0 = 0.
\end{aligned}$$

e) $\int_W \frac{y}{1+x^2} \, d(x, y)$

$$\frac{8\pi - 6\sqrt{3}}{9}$$

Lösung:

Bei W handelt es sich um die obere Hälfte einer Ellipse mit Mittelpunkt $(0, 0)^T$ und Halbachsen $\sqrt{3}$ und $\sqrt{2}$. Die zugehörige Ellipsengleichung $\left(\frac{x-0}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{y-0}{\sqrt{2}}\right)^2 \leq 1$ lässt sich umstellen zu $\frac{y^2}{2} \leq 1 - \frac{x^2}{3}$ bzw. $|y| \leq \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \sqrt{3 - x^2}$. Damit ergibt sich

$$W = \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} \text{ und } 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \sqrt{3 - x^2} \right\}.$$

Das liefert mit $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ und $\arctan(-\sqrt{3}) = -\arctan(\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$

$$\begin{aligned}\int_W \frac{y}{1+x^2} d(x,y) &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \sqrt{3-x^2}} \frac{y}{1+x^2} dy \right) dx = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left[\frac{y^2}{2 \cdot (1+x^2)} \right]_{y=0}^{y=\frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \sqrt{3-x^2}} dx \\&= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{\frac{6}{9} \cdot (3-x^2) - 0}{2 \cdot (1+x^2)} dx = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{4 - (1+x^2)}{3 \cdot (1+x^2)} dx \\&= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{3} \right) dx = \left[\frac{4}{3} \cdot \arctan(x) - \frac{1}{3} \cdot x \right]_{x=-\sqrt{3}}^{x=\sqrt{3}} \\&= \frac{4}{3} \cdot \arctan(\sqrt{3}) - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} - \frac{4}{3} \cdot \arctan(-\sqrt{3}) + \frac{1}{3} \cdot (-\sqrt{3}) \\&= \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{4\pi}{9} - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{4\pi}{9} = \frac{8\pi - 6\sqrt{3}}{9}.\end{aligned}$$

Hinweis: Funktionaldeterminante Ellipse: *abr*



IntMehrDim/StandardSub/Ag_IntMehrDim_Polarkoordinaten.tex

Aufgabe 78.376 (WiWi-HM III - Klausur Februar 2013 (Aufgabe 1, Teil 1))

a) Geben Sie die Polarkoordinatendarstellung der „Kurvengleichung“

$$(x^2 + y^2)^2 = 2 \cdot x^2 + y^2, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

an.

$$r = +\sqrt{1 + \cos^2(\varphi)}, \varphi \in [0, 2\pi]$$

Lösung:

Mit Polarkoordinatentransformation

$$x = r \cos \varphi \quad \text{und} \quad y = r \sin \varphi$$

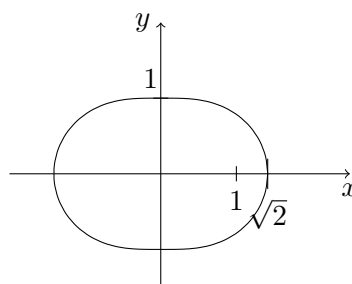
folgt

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2)^2 &= 2 \cdot x^2 + y^2 \\ \iff (r^2(\cos \varphi)^2 + r^2(\sin \varphi)^2)^2 &= 2 \cdot r^2(\cos \varphi)^2 + r^2(\sin \varphi)^2 \\ \iff (r^2((\cos \varphi)^2 + (\sin \varphi)^2))^2 &= r^2((\cos \varphi)^2 + (\cos \varphi)^2 + (\sin \varphi)^2) \\ \iff r^4 &= r^2((\cos \varphi)^2 + 1) \\ \iff r^2 = 0 \quad \text{oder} \quad r^2 &= (\cos \varphi)^2 + 1 \\ \iff r = 0 \quad \text{oder} \quad r &= \sqrt{(\cos \varphi)^2 + 1}.\end{aligned}$$

Da $r = 0$ ein isolierter Punkt ist, ist die gesuchte Kurvengleichung

$$r = \sqrt{(\cos \varphi)^2 + 1}, \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Skizze der Kurve:



b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Menge

$$M := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 \leq 2 \cdot x^2 + y^2 \text{ und } x^2 + y^2 \geq 1 \text{ und } x, y \geq 0 \right\}.$$

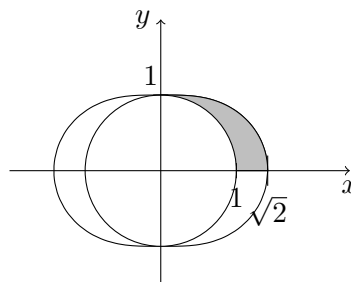
$\frac{\pi}{8}$

Hinweis: Es gilt:

$$\int 2 \cdot \cos^2(t) dt = \cos(t) \cdot \sin(t) + t + \text{const.}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lösung:

Das Gebiet M liegt im ersten Quadrant (Bedingung $x, y \geq 0$) zwischen dem Einheitskreis (Bedingung $x^2 + y^2 \geq 1$) und der in der vorherigen Teilaufgabe gefundenen Kurve.



Die Beschreibung des Gebietes in Polarkoordinaten ist

$$\Omega := \left\{ (r, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 1 \leq r \leq \sqrt{(\cos \varphi)^2 + 1} \right\}.$$

Flächeninhalt:

$$\begin{aligned} |M| &= \int_M 1 \, d(x, y) = \int_{\Omega} 1 \cdot r \, d(r, \varphi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{\sqrt{1+(\cos \varphi)^2}} 1 \cdot r \, dr d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_{r=1}^{\sqrt{1+(\cos \varphi)^2}} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + (\cos \varphi)^2 - 1) d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} [\cos \varphi \cdot \sin \varphi + \varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$



IntMehrDim/StandardSub/Ag_IntMehrDim_Substitution3D.tex

Aufgabe 78.377 (Substitution in $\mathbb{R}^3$)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \, d(x, y, z), \Omega := \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 16 \text{ und } -5 \leq z \leq 4 \right\}$ 384π

Lösung:

Wir beschreiben das Gebiet in Zylinderkoordinaten bzgl. der z -Achse:

$$(x, y, z)^T = \vec{\Phi}(r, \varphi, t) = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), t)^T$$

Grenzen für die neuen Variablen:

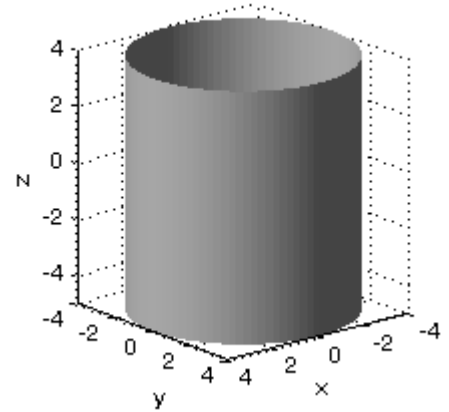
$$0 \leq r \leq 4, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \text{und} \quad -5 \leq t \leq 4$$

Die Funktionaldeterminante ergibt sich zu

$$\det(\vec{\Phi}'(r, \varphi, t)) = \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r.$$

Damit kann man das gesuchte Volumenintegral berechnen:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \, d(x, y, z) &= \int_{[0;4] \times [0;2\pi] \times [-5;4]} \sqrt{(r \cos(\varphi))^2 + (r \sin(\varphi))^2} \cdot r \, d(r, \varphi, t) \\ &= \int_0^4 \int_0^{2\pi} \int_{-5}^4 r \cdot r \, dt \, d\varphi \, dr = \int_0^4 \int_0^{2\pi} r^2 \cdot [t]_{t=-5}^{t=4} \, d\varphi \, dr \\ &= \int_0^4 \int_0^{2\pi} 9r^2 \, d\varphi \, dr = \int_0^4 9r^2 \cdot [\varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \, dr = 3 \cdot \int_0^4 3r^2 \cdot 2\pi \, dr \\ &= 6\pi \cdot [r^3]_{r=0}^{r=4} = 6\pi \cdot 64 = 384\pi \end{aligned}$$



- b) $\int_{\Omega} e^z \, d(x, y, z)$, Ω liegt zwischen den Flächen $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 + x^2 + y^2\}$, $\pi \cdot (e^6 - e - 5)$ $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 5\}$ und der xy -Ebene.

Lösung:

In diesem Beispiel kann in Zylinderkoordinaten bzgl. der z -Achse gearbeitet werden:

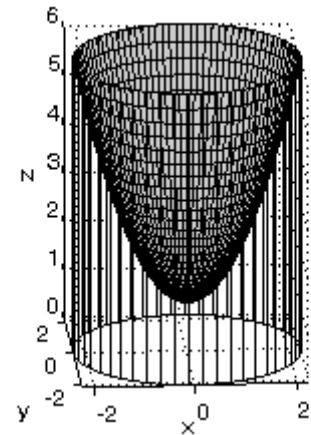
$$(x, y, z)^T = \vec{\Phi}(r, \varphi, t) = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), t)^T$$

Grenzen für die neuen Variablen:

$$0 \leq r \leq \sqrt{5}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \text{und} \quad 0 \leq t \leq 1 + r^2$$

Die Funktionaldeterminante ergibt sich zu

$$\det(\vec{\Phi}'(r, \varphi, t)) = \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r.$$



Mit $f(\varrho) := e^{\varrho} - 1$ und $g(r) := 1 + r^2$ folgt $g'(r) = 2r$, $g(0) = 1$ und $g(\sqrt{5}) = 6$.

Mit der (eindimensionalen) Substitutionsregel lässt sich das Volumenintegral bestimmen:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} e^z \, d(x, y, z) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{5}} \int_0^{1+r^2} e^t \cdot r \, dt \, dr \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{5}} r \cdot [e^t]_{t=0}^{t=1+r^2} \, dr \, d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{5}} \underbrace{2r}_{=g'(r)} \cdot \underbrace{(e^{1+r^2} - 1)}_{=f(g(r))} \, dr \, d\varphi = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \int_1^6 \underbrace{(e^{\varrho} - 1)}_{=f(\varrho)} \, d\varrho \, d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} [e^{\varrho} - \varrho]_{\varrho=1}^{\varrho=6} \, d\varphi = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} ((e^6 - 6) - (e^1 - 1)) \, d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \cdot [(e^6 - e - 5) \cdot \varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = (e^6 - e - 5) \cdot \pi. \end{aligned}$$

c) $\int_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) d(x, y, z)$, Ω ist die Einheitskugel $\left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \right\}$. $\frac{4\pi}{5}$

Lösung in Kugelkoordinaten:

Dieses Gebiet lässt sich am einfachsten in Kugelkoordinaten beschreiben:

$$(x, y, z)^T = \vec{\Phi}(r, \theta, \varphi) = (r \sin(\theta) \cos(\varphi), r \sin(\theta) \sin(\varphi), r \cos(\theta))^T$$

oder

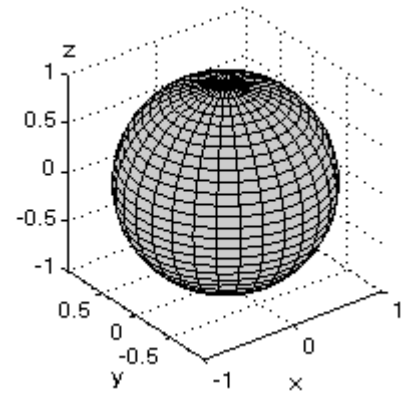
$$(x, y, z)^T = \vec{\Psi}(r, \varphi, \vartheta) = (r \cos(\vartheta) \cos(\varphi), r \cos(\vartheta) \sin(\varphi), r \sin(\vartheta))^T.$$

Grenzen für die neuen Variablen:

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \text{und} \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad \text{oder} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Die Funktionaldeterminante von $\vec{\Phi}$ ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \det(\vec{\Phi}'(r, \theta, \varphi)) &= \det \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) & r \cos(\theta) \cos(\varphi) & -r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) & r \cos(\theta) \sin(\varphi) & r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \end{pmatrix} \\ &= \cos(\theta) \cdot \det \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \cos(\varphi) & -r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ r \cos(\theta) \sin(\varphi) & r \sin(\theta) \cos(\varphi) \end{pmatrix} \\ &\quad + r \sin(\theta) \cdot \det \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) & -r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) & r \sin(\theta) \cos(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= \cos(\theta) \cdot (r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \cos^2(\varphi) + r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \sin^2(\varphi)) \\ &\quad + r \sin(\theta) \cdot (r \sin^2(\theta) \sin^2(\varphi) + r \sin^2(\theta) \cos^2(\varphi)) \\ &= r^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + r^2 \sin^3(\theta) = r^2 \sin(\theta). \end{aligned}$$



Die Funktionaldeterminante von $\vec{\Psi}$ ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \det(\vec{\Psi}'(r, \varphi, \vartheta)) &= \det \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \cos(\varphi) & -r \cos(\vartheta) \sin(\varphi) & -r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \sin(\varphi) & r \cos(\vartheta) \cos(\varphi) & -r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta) & 0 & r \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \\ &= \sin(\vartheta) \cdot \det \begin{pmatrix} -r \cos(\vartheta) \sin(\varphi) & -r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ r \cos(\vartheta) \cos(\varphi) & -r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \end{pmatrix} \\ &\quad + r \cos(\vartheta) \cdot \det \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \cos(\varphi) & -r \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \sin(\varphi) & r \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= \sin(\vartheta) \cdot (r^2 \cos(\vartheta) \sin(\vartheta) \sin^2(\varphi) + r^2 \cos(\vartheta) \sin(\vartheta) \cos^2(\varphi)) \\ &\quad + r \cos(\vartheta) \cdot (r \cos^2(\vartheta) \sin^2(\varphi) + r \cos^2(\vartheta) \cos^2(\varphi)) \\ &= r^2 \sin^2(\vartheta) \cos(\vartheta) + r^2 \cos^3(\vartheta) = r^2 \cos(\vartheta). \end{aligned}$$

Wegen $\sin(\theta) \geq 0$ und $\cos(\vartheta) \geq 0$ für alle $\theta \in [0; \pi]$ und alle $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ entsprechen diese Funktionaldeterminanten ihren Beträgen.

Außerdem gilt

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\varphi) + r^2 \sin^2(\theta) \sin^2(\varphi) + r^2 \cos^2(\theta) = r^2 \sin^2(\theta) + r^2 \cos^2(\theta) = r^2$$

bzw.

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \cos^2(\vartheta) \cos^2(\varphi) + r^2 \cos^2(\vartheta) \sin^2(\varphi) + r^2 \sin^2(\vartheta) = r^2 \cos^2(\vartheta) + r^2 \sin^2(\vartheta) = r^2.$$

Das gesuchte Volumenintegral:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \, d(x, y, z) &= \int_{[0;1] \times [0;2\pi] \times [0;2\pi]} r^2 \cdot r^2 \sin(\theta) \, d(r, \theta, \varphi) \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^4 \sin(\theta) \, d\theta \, d\varphi \, dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^4 \cdot [-\cos(\theta)]_{\theta=0}^{\theta=\pi} \, d\varphi \, dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^4 \cdot (-(-1) + 1) \, d\varphi \, dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2r^4 \, d\varphi \, dr \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \, d(x, y, z) &= \int_{[0;1] \times [0;2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]} r^2 \cdot r^2 \cos(\vartheta) \, d(r, \varphi, \vartheta) \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^4 \cos(\vartheta) \, d\vartheta \, d\varphi \, dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^4 \cdot [\sin(\vartheta)]_{\vartheta=-\frac{\pi}{2}}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} \, d\varphi \, dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^4 \cdot (1 - (-1)) \, d\varphi \, dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2r^4 \, d\varphi \, dr, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \, d(x, y, z) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2r^4 \, d\varphi \, dr = \int_0^1 [2r^4 \cdot \varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \, dr \\ &= \int_0^1 (2r^4 \cdot 2\pi - 2r^4 \cdot 0) \, dr = \int_0^1 4\pi r^4 \, dr = \left[\frac{4}{5} \cdot \pi r^5 \right]_{r=0}^{r=1} = \frac{4\pi}{5}. \end{aligned}$$

Lösung in Zylinderkoordinaten:

Alternativ kann man das Integral auch in Zylinderkoordinaten berechnen:

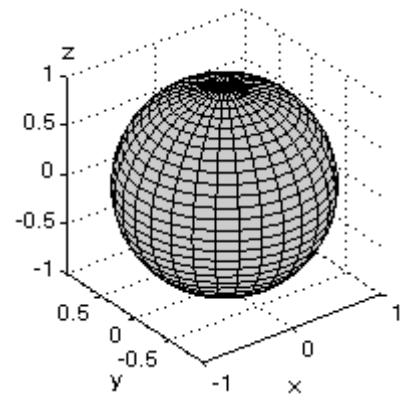
$$(x, y, z)^T = \vec{\Phi}(r, \varphi, t) = (r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi), t)^T.$$

Grenzen für die neuen Variablen:

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \text{und} \quad -\sqrt{1-r^2} \leq t \leq \sqrt{1-r^2}.$$

Die Funktionaldeterminante von $\vec{\Phi}$ ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \det(\vec{\Phi}'(r, \theta, \varphi)) &= \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \cdot \sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r \cdot \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \cdot \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cdot \cos(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= r \cdot (\cos(\varphi))^2 + r \cdot (\sin(\varphi))^2 \\ &= r. \end{aligned}$$



Wegen $r \geq 0$ für alle $r \in [0; 1]$ entspricht diese Funktionaldeterminante ihrem Betrag.

Außerdem gilt $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \cdot (\cos(\varphi))^2 + r^2 \cdot (\sin(\varphi))^2 + t^2 = r^2 + t^2$.

Mit $G := \left\{ (r, \varphi, t)^T \in [0; 1] \times [0; 2\pi] \times \mathbb{R} \mid r^2 + t^2 \leq 1 \right\}$ ergibt sich das Volumenintegral zu

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \, d(x, y, z) &= \int_G (r^2 + t^2) \cdot r \, d(r, \varphi, t) \\ &= \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} \int_0^{2\pi} (r^3 + rt^2) \, d\varphi \, dt \, dr = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} [(r^3 + rt^2) \cdot \varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \, dt \, dr \\ &= \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} (r^3 + rt^2) \cdot (2\pi - 0) \, dt \, dr = 2\pi \cdot \int_0^1 \left[tr^3 + \frac{rt^3}{3} \right]_{t=-\sqrt{1-r^2}}^{t=\sqrt{1-r^2}} \, dr \\ &= \frac{2\pi}{3} \cdot \int_0^1 \left(3r^3 \cdot \sqrt{1-r^2} + r \cdot \sqrt{1-r^2}^3 - 3r^3 \cdot (-\sqrt{1-r^2}) - r \cdot (-\sqrt{1-r^2})^3 \right) \, dr \\ &= \frac{4\pi}{3} \cdot \int_0^1 (3r^3 + r \cdot (1-r^2)) \cdot \sqrt{1-r^2} \, dr = \frac{4\pi}{3} \cdot \int_0^1 (2r^3 + r) \cdot \sqrt{1-r^2} \, dr. \end{aligned}$$

Mit $g(r) = 1 - r^2$ und $h(u) = (2 \cdot (1 - u) + 1) \cdot \sqrt{u}$ ergibt sich $g(0) = 1$, $g(1) = 0$, $g'(r) = -2r$ und $h(g(r)) = (2 \cdot (1 - (1 - r^2)) + 1) \cdot \sqrt{1 - r^2} = (2r^2 + 1) \cdot \sqrt{1 - r^2}$.

Die eindimensionale Substitutionsregel liefert

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \, d(x, y, z) &= \frac{4\pi}{3} \cdot \int_0^1 (2r^3 + r) \cdot \sqrt{1-r^2} \, dr \\ &= \frac{-2\pi}{3} \cdot \int_0^1 \underbrace{(2r^2 + r) \cdot \sqrt{1-r^2}}_{=h(g(r))} \cdot \underbrace{(-2r)}_{=g'(r)} \, dr = \frac{-2\pi}{3} \cdot \int_{g(0)}^{g(1)} \underbrace{(2 \cdot (1 - u) + 1) \cdot \sqrt{u}}_{=h(u)} \, du \\ &= \frac{-2\pi}{3} \cdot \int_1^0 (3 - 2u) \cdot \sqrt{u} \, du = \frac{2\pi}{3} \cdot \int_0^1 \left(3 \cdot u^{\frac{1}{2}} - 2 \cdot u^{\frac{3}{2}} \right) \, du = \frac{2\pi}{3} \cdot \left[2 \cdot u^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{5} \cdot u^{\frac{5}{2}} \right]_{u=0}^{u=1} \\ &= \frac{2\pi}{3} \cdot \left(2 - \frac{4}{5} - 0 + 0 \right) = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{10-4}{5} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{2\pi}{1} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4\pi}{5}. \end{aligned}$$

d) $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 (xz) \, dz \, dx \, dy$. Hinweis: Zylindrische Koordinaten.

0

Lösung in kartesischen Koordinaten:

Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 (xz) \, dz \, dx \, dy &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \left[\frac{xz^2}{2} \right]_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{z=2} \, dx \, dy \\ &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \left(2x - \frac{x^3}{2} - \frac{xy^2}{2} \right) \, dx \, dy = \int_{-2}^2 \left[x^2 - \frac{x^4}{8} - \frac{x^2 \cdot y^2}{4} \right]_{x=-\sqrt{4-y^2}}^{x=\sqrt{4-y^2}} \, dy \\ &= \int_{-2}^2 \left((4-y^2) - \frac{(4-y^2)^2}{8} - \frac{(4-y^2) \cdot y^2}{4} - (4-y^2) + \frac{(4-y^2)^2}{8} + \frac{(4-y^2) \cdot y^2}{4} \right) \, dy \\ &= \int_{-2}^2 0 \, dy = [1]_{y=-2}^{y=2} = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Lösung in Zylinderkoordinaten:

Das Integrationsgebiet ist

$$\begin{aligned} &\left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid -2 \leq y \leq 2, -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2} \text{ und } \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2 \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid -2 \leq y \leq 2, x^2 \leq 4-y^2 \text{ und } \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2 \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4 \text{ und } \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2 \right\}. \end{aligned}$$

Wir beschreiben das Gebiet in Zylinderkoordinaten bzgl. der z -Achse:

$$(x, y, z)^T = \vec{\Phi}(r, \varphi, t) = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), t)^T$$

Grenzen für die neuen Variablen:

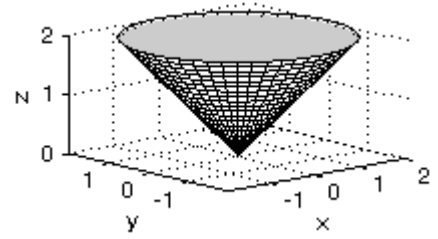
$$0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \text{und} \quad r \leq t \leq 2$$

Die Funktionaldeterminante ergibt sich zu

$$\det(\vec{\Phi}'(r, \varphi, t)) = \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r \cos^2(\varphi) + r \sin^2(\varphi) = r.$$

Damit kann man das gesuchte Volumenintegral berechnen:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 xz \, dz \, dx \, dy &= \int_0^2 \int_r^2 \int_0^{2\pi} r \cos(\varphi) \cdot t \cdot r \, d\varphi \, dt \, dr \\ &= \int_0^2 \int_r^2 tr^2 \cdot [\sin(\varphi)]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \, dt \, dr = \int_0^2 \int_r^2 tr^2 \cdot (0 - 0) \, dt \, dr = \int_0^2 \int_r^2 0 \, dt \, dr = 0. \end{aligned}$$



e) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} (xy) \, dz \, dy \, dx.$ Hinweis: Kugelkoordinaten. $\frac{4\sqrt{2}}{15} - \frac{1}{3}$

Lösung in kartesischen Koordinaten:

Seien $f: [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto f(t) := t^{\frac{1}{2}}$, $g_x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $y \mapsto g_x(y) := x^2 + y^2$ und $h_x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $y \mapsto h_x(y) := 2 - x^2 - y^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $g'_x(y) = 2y$, $g_x(0) = x^2$, $g_x(\sqrt{1-x^2}) = 1$, $h'_x(y) = -2y$, $h_x(0) = 2 - x^2$ und $h_x(\sqrt{1-x^2}) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $y \in \mathbb{R}$.

Die eindimensionale Substitutionsregel liefert

$$\begin{aligned} I &:= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} (xy) \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} [xyz]_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{z=\sqrt{2-x^2-y^2}} \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 x \cdot \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y \cdot (\sqrt{2-x^2-y^2} - \sqrt{x^2+y^2}) \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \frac{-x}{2} \cdot \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \underbrace{(-2y)}_{=h'_x(y)} \cdot \underbrace{\sqrt{2-x^2-y^2}}_{=f(h_x(y))} \, dy \, dx - \int_0^1 \frac{x}{2} \cdot \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \underbrace{2y}_{=g'_x(y)} \cdot \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{=f(g_x(y))} \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \frac{-x}{2} \cdot \int_{2-x^2}^1 t^{\frac{1}{2}} \, dt \, dx - \int_0^1 \frac{x}{2} \cdot \int_{x^2}^1 t^{\frac{1}{2}} \, dt \, dx = \int_0^1 \frac{-x}{2} \cdot \left[\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_{t=2-x^2}^{t=1} \, dx - \int_0^1 \frac{x}{2} \cdot \left[\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_{t=x^2}^{t=1} \, dx \\ &= \int_0^1 \frac{-x}{3} \cdot (1 - (2-x^2)^{\frac{3}{2}}) \, dx - \int_0^1 \frac{x}{3} \cdot (1 - x^3) \, dx = \frac{1}{3} \cdot \int_0^1 (x^4 - 2x + x \cdot (2-x^2)^{\frac{3}{2}}) \, dx. \end{aligned}$$

Seien $g: [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u \mapsto g(u) := u^{\frac{3}{2}}$ und $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto h(x) := 2 - x^2$. Dann gilt $h'(x) = -2x$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $h(0) = 2$ und $h(1) = 1$.

Die eindimensionale Substitutionsregel liefert

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3} \cdot \int_0^1 (x^4 - 2x + x \cdot (2-x^2)^{\frac{3}{2}}) \, dx = \frac{1}{3} \cdot \int_0^1 (x^4 - 2x) \, dx - \frac{1}{6} \cdot \int_0^1 \underbrace{(-2x)}_{=h'(x)} \cdot \underbrace{(2-x^2)^{\frac{3}{2}}}_{=g(h(x))} \, dx \\ &= \frac{1}{3} \cdot \int_0^1 (x^4 - 2x) \, dx - \frac{1}{6} \cdot \int_2^1 u^{\frac{3}{2}} \, du = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{x^5}{5} - x^2 \right]_{x=0}^{x=1} - \frac{1}{6} \cdot \left[\frac{2u^{\frac{5}{2}}}{5} \right]_{u=2}^{u=1} \\ &= \frac{1}{15} - \frac{1}{3} - 0 + 0 - \frac{1}{15} + \frac{\sqrt{2}^5}{15} = \frac{4\sqrt{2}}{15} - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Lösung in Kugelkoordinaten:

Das Integrationsgebiet ist

$$\begin{aligned} & \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \text{ und } \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{2-x^2-y^2} \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y, y^2 \leq 1-x^2, \sqrt{x^2+y^2} \leq z \text{ und } z^2 \leq 2-x^2-y^2 \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x, 0 \leq y, x^2+y^2 \leq 1, \sqrt{x^2+y^2} \leq z \text{ und } x^2+y^2+z^2 \leq 2 \right\}. \end{aligned}$$

Die ersten beiden Ungleichungen reduzieren das Gebiet auf die beiden von positiver x - und y -Achse eingeschlossenen Oktanten, die dritte auf den Kreiszylinder um die z -Achse mit Radius 1 und die letzte auf die Kugel um den Ursprung mit Radius $\sqrt{2}$. Die vierte Ungleichung beschreibt einen Kegel um die z -Achse mit Spitze im Ursprung oberhalb der xy -Ebene. Das Integrationsgebiet ist der Schnitt all dieser Körper.

Wegen der Kugelgestalt eignen sich am besten Kugelkoordinaten zur Berechnung des Integrals.

Wir messen dieses Mal den Winkel θ von der z -Achse aus:

$$(x, y, z)^T = \vec{\Phi}(r, \theta, \varphi) = (r \sin(\theta) \cos(\varphi), r \sin(\theta) \sin(\varphi), r \cos(\theta))^T.$$

(Die Messung von ϑ von der xy -Ebene aus liefert natürlich dasselbe Integrationsergebnis.)

Die neuen Integrationsgrenzen erhält man durch Einsetzen der Transformation in die das Integrationsgebiet definierenden Ungleichungen.

- $\sqrt{x^2+y^2} \leq z$ liefert $\sqrt{(r \sin(\theta) \cos(\varphi))^2 + (r \sin(\theta) \sin(\varphi))^2} \leq r \cos(\theta)$, was vereinfacht $\sqrt{r^2 \sin^2(\theta)} \leq r \cos(\theta)$ ergibt. Wegen $0 \leq \theta \leq \pi$ ist $\sin(\theta) \geq 0$ und mit $r \geq 0$ ergibt sich $r \sin(\theta) \leq r \cos(\theta)$, bzw. $\theta = \frac{\pi}{4}$, $r = 0$ oder $\tan(\theta) \leq 1$, also $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ oder $\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \pi$.

Wegen $0 \leq r \sin(\theta) \leq r \cos(\theta)$ muss auch $r = 0$ oder $\cos(\theta) \geq 0$, also $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ gelten.

- $0 \leq x$ liefert $0 \leq r \sin(\theta) \cos(\varphi)$, was wegen $r \geq 0$ und $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ zu $r = 0$, $\theta = 0$ oder $\cos(\varphi) \geq 0$, also $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ führt.
- $0 \leq y$ liefert $0 \leq r \sin(\theta) \sin(\varphi)$, was wegen $r \geq 0$ und $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ zu $r = 0$, $\theta = 0$ oder $\sin(\varphi) \geq 0$, also $0 \leq \varphi \leq \pi$ führt.

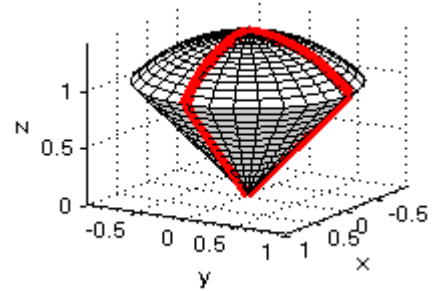
Da alle Ungleichungen gleichzeitig gelten, ergeben sich die Grenzen für die neuen Variablen zu

$$0 \leq r \leq \sqrt{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}.$$

Die Funktionaldeterminante ergibt sich zu

$$\det(\vec{\Phi}'(r, \theta, \varphi)) = \det \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) & r \cos(\theta) \cos(\varphi) & -r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) & r \cos(\theta) \sin(\varphi) & r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \end{pmatrix} = r^2 \sin(\theta).$$

Mit den eindimensionalen Substitutionen $f(t) = t^2 - 1$, $g(\alpha) = \cos(\alpha)$ und $h(s) = -s$ folgt $g'(\alpha) = -\sin(\alpha)$, $g(0) = 1$, $g(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $g(\frac{\pi}{2}) = 0$. Mit $\sin^3(\theta) = \sin(\theta) \cdot \sin^2(\theta) =$



$\sin(\theta) \cdot (1 - \cos^2(\theta))$ kann man das gesuchte Volumenintegral berechnen:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} (xy) \, dz \, dy \, dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \sin(\theta) \cos(\varphi) \cdot r \sin(\theta) \sin(\varphi) \cdot r^2 \sin(\theta) \, d\varphi \, d\theta \, dr \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^4 \sin^3(\theta) \cdot \underbrace{(-\cos(\varphi))}_{=h(g(\varphi))} \cdot \underbrace{(-\sin(\varphi))}_{=g'(\varphi)} \, d\varphi \, d\theta \, dr \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_1^0 r^4 \sin^3(\theta) \cdot \underbrace{(-s)}_{=h(s)} \, ds \, d\theta \, dr = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^4 \sin^3(\theta) \cdot \left[-\frac{s^2}{2} \right]_{s=1}^{s=0} \, d\theta \, dr \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{r^4}{2} \cdot \underbrace{(\cos^2(\theta) - 1)}_{=f(g(\theta))} \cdot \underbrace{(-\sin(\theta))}_{=g'(\theta)} \, d\theta \, dr = \int_0^{\sqrt{2}} \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{r^4}{2} \cdot \underbrace{(t^2 - 1)}_{=f(t)} \, dt \, dr \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \frac{r^4}{2} \cdot \left[\frac{t^3}{3} - t \right]_{t=1}^{t=\frac{\sqrt{2}}{2}} \, dr = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{r^4}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3} + 1 \right) \, dr \\
&= \frac{8-5\sqrt{2}}{12} \cdot \left[\frac{r^5}{10} \right]_{r=0}^{r=\sqrt{2}} = \frac{8-5\sqrt{2}}{12} \cdot \frac{4\sqrt{2}-0}{10} = \frac{8\sqrt{2}-10}{30} = \frac{4\sqrt{2}}{15} - \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

f) $\int_{\Omega} x^2 \cdot y \, d(x, y, z)$, Ω liegt innerhalb des Ellipsoids $\left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$. 0

Hinweis: Sie können zunächst die Substitution $x = |a|u$, $y = |b|v$, $z = |c|w$ verwenden.

Lösung in kartesischen Koordinaten:

Es gilt $\Omega = \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid -|b| \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}} \leq y \leq |b| \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}} \right\}$.

Das Normalbereichsintegral berechnet sich mit $G := \left\{ (x, z)^T \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$ also zu

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} x^2 \cdot y \, d(x, y, z) &= \int_G \int_{-|b|\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}}}^{|b|\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}}} x^2 \cdot y \, dy \, d(x, z) = \int_G \left[\frac{x^2 \cdot y^2}{2} \right]_{y=-|b|\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}}}^{y=|b|\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}}} \, d(x, z) \\
&= \int_G \frac{x^2}{2} \cdot \left(|b|^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}}^2 - (-|b|)^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}}^2 \right) \, d(x, z) \\
&= \int_G \frac{x^2}{2} \cdot (b^2 - b^2) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} \right) \, d(x, z) = \int_G 0 \, d(x, z) = 0.
\end{aligned}$$

Lösung mit der mehrdimensionalen Substitutionsregel:

Zur Lösung der Aufgabe eignen sich am besten Ellipsoid-Koordinaten, z.B.:

$$(x, y, z)^T = \vec{\Theta}(r, \varphi, \vartheta) = (|a| r \cos(\vartheta) \cos(\varphi), |b| r \cos(\vartheta) \sin(\varphi), |c| r \sin(\vartheta))^T$$

mit $r \in [0; 1]$, $\varphi \in [0; 2\pi]$ und $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

Wir werden diese Transformation (aus didaktischen Gründen) in zwei Schritte aufteilen.

Zunächst transformieren wir das Ellipsoid in eine Kugel:

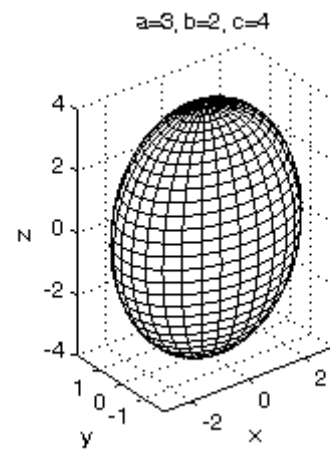
$$(x, y, z)^T = \vec{\Phi}(u, v, w) = (|a|u, |b|v, |c|w)^T$$

Aus $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ ergibt sich

$$\frac{(au)^2}{a^2} + \frac{(bv)^2}{b^2} + \frac{(cw)^2}{c^2} \leq 1 \iff u^2 + v^2 + w^2 \leq 1.$$

Die Funktionaldeterminante ergibt sich zu

$$\det(\vec{\Phi}'(u, v, w)) = \det \begin{pmatrix} |a| & 0 & 0 \\ 0 & |b| & 0 \\ 0 & 0 & |c| \end{pmatrix} = |abc|.$$



Bezeichnen wir die Einheitskugel $\{(u, v, w)^T \in \mathbb{R}^3 \mid u^2 + v^2 + w^2 \leq 1\}$ mit E , so transformiert sich das Integral zu

$$\int_{\Omega} x^2 y \, d(x, y, z) = \int_E (|a|u)^2 \cdot (|b|v) \cdot |abc| \, d(u, v, w) = |a^3 b^2 c| \cdot \int_E u^2 \cdot v \, d(u, v, w).$$

Die Kugelform von E impliziert die Verwendung von (vollständigen) Kugelkoordinaten. Wir entscheiden uns für die Variante, in der der Winkel $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ zur uv -Ebene gemessen wird:

$$(u, v, w)^T = \vec{\Psi}(r, \varphi, \vartheta) = (r \cos(\vartheta) \cos(\varphi), r \cos(\vartheta) \sin(\varphi), r \sin(\vartheta))^T.$$

Die Funktionaldeterminante ist

$$\det(\vec{\Psi}'(r, \varphi, \vartheta)) = \det \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \cos(\varphi) & -r \cos(\vartheta) \sin(\varphi) & -r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \sin(\varphi) & r \cos(\vartheta) \cos(\varphi) & -r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta) & 0 & r \cos(\vartheta) \end{pmatrix} = r^2 \cos(\vartheta).$$

Mit der eindimensionalen Substitution $f(t) = t^2$, $g(\varphi) = \cos(\varphi)$, also $g'(\varphi) = -\sin(\varphi)$, $g(0) = 1$ und $g(2\pi) = 1$, lässt sich nun das Volumenintegral berechnen:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} x^2 y \, d(x, y, z) &= |a^3 b^2 c| \cdot \int_E u^2 \cdot v \, d(u, v, w) \\ &= |a^3 b^2 c| \cdot \int_{[0;1] \times [0;2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]} r^2 \cos^2(\vartheta) \cos^2(\varphi) \cdot r \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \cdot r^2 \cos(\vartheta) \, d(r, \varphi, \vartheta) \\ &= -|a^3 b^2 c| \cdot \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} r^5 \cos^4(\vartheta) \cdot \underbrace{\cos^2(\varphi)}_{=f(g(\varphi))} \cdot \underbrace{(-\sin(\varphi))}_{=g'(\varphi)} \, d\varphi \, d\vartheta \, dr \\ &= -|a^3 b^2 c| \cdot \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_1^1 r^5 \cos^4(\vartheta) \cdot \underbrace{t^2}_{=f(t)} \, dt \, d\vartheta \, dr \\ &= -|a^3 b^2 c| \cdot \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 0 \, d\vartheta \, dr = 0. \end{aligned}$$



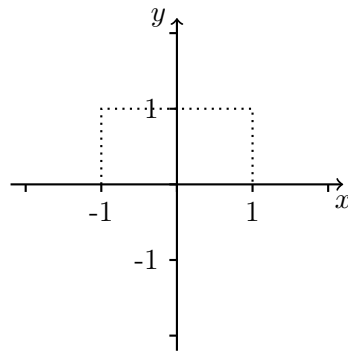
IntMehrDim/StandardSub/Ag_IntMehrDim_WiWi_HMIII_2012_April.tex

Aufgabe 78.378 (WiWi-HM III - Klausur April 2012 (Aufgabe 1))

Gegeben sei die Menge

$$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [0, 1], x^2 + y^2 \leq 2, y \geq |x|\}.$$

- a) Skizzieren Sie die Schnittmenge von A mit der xy -Ebene im gegebenen Koordinatensystem.

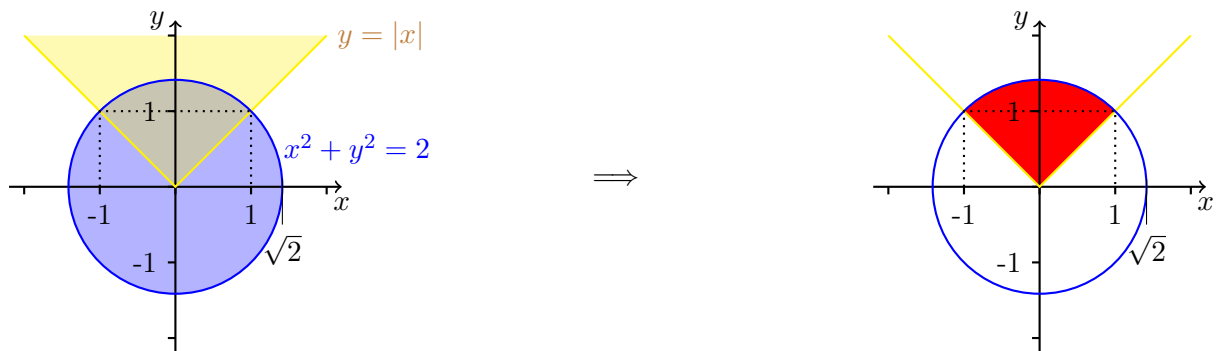


Lösung:

Schnittmenge mit der xy -Ebene: setze $z = 0$. Dann erhält man die Menge

$$A_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, y \geq |x|\} .$$

Diese Menge ist die Schnittmenge vom Kreis mit Radius $\sqrt{2}$ (blau) und der Viertelebene $y \geq |x|$ (gelb).



Schnitt des Kreises mit der Linie $y = |x|$: löse

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y = |x| \end{cases} \implies x^2 + x^2 = 2 \implies x^2 = 1 \implies x = 1 \text{ oder } x = -1 .$$

Damit sind die Schnittpunkte $(1, 1)$ und $(-1, 1)$.

- b) Beschreiben Sie die Menge A mit Hilfe von Zylinderkoordinaten. Vereinfachen Sie dabei so weit wie möglich.

$$\{(r, \varphi, z) \in [0, \sqrt{2}] \times [\pi/4, 3\pi/4] \times [0, 1]\}$$

Lösung:

Zylinderkoordinaten:

$$(x, y, z) = T(r, \varphi, z) \text{ mit } x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z .$$

Die Grenzen der Variablen:

- $z \in [0, 1]$ (Direkt aus der Beschreibung der Menge A)
- Die Bedingung $x^2 + y^2 \leq 2$ ist äquivalent zu $r^2 \leq 2 \iff r \in [0, \sqrt{2}]$

- Die Grenzen für ϕ können entweder der Skizze in der vorherigen Teilaufgabe entnommen werden ($\varphi \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$) oder aus der Bedingung $y \geq |x|$ berechnet werden:

$$y \geq |x| \iff r \sin \varphi \geq |r \cos \varphi| \iff \sin \varphi \geq |\cos \varphi| \iff \varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right].$$

Damit ist $A = T(M)$ mit

$$M = \left\{ (r, \varphi, z) : r \in [0, \sqrt{2}], \varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right], z \in [0, 1] \right\}.$$

- c) Transformieren Sie das Integral

$$I := \int_A (x^2 + y^2) e^{(x^2+y^2)z} d(x, y, z)$$

von kartesischen Koordinaten in Zylinderkoordinaten und vereinfachen Sie den Integranden.

$$\int_0^1 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{2}} r^3 e^{r^2 z} dr d\varphi dz$$

Lösung:

$$I = \int_A (x^2 + y^2) e^{(x^2+y^2)z} d(x, y, z) = \int_M r^2 \cdot e^{r^2 \cdot z} \cdot r d(r, \varphi, z) = \int_M r^3 \cdot e^{r^2 \cdot z} d(r, \varphi, z).$$

- d) Berechnen Sie den Wert von I . Sie können dabei eine Formel als Zwischenergebnis angeben, um bei Rechenfehlern Teilpunkte zu erhalten.

$$\frac{\pi}{4} (e^2 - 3)$$

Lösung:

$$\begin{aligned} I &= \int_M r^3 \cdot e^{r^2 \cdot z} d(r, \varphi, z) = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^1 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} r^3 \cdot e^{r^2 \cdot z} d\varphi dz dr = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^1 \left[r^3 e^{r^2 z} \cdot \varphi \right]_{\varphi=\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} dz dr \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^1 r^2 e^{r^2 z} dz dr = \frac{\pi}{2} \int_0^{\sqrt{2}} \left[r^3 \cdot \frac{1}{r^2} e^{r^2 z} \right]_{z=0}^1 dr = \frac{\pi}{2} \int_0^{\sqrt{2}} r \cdot (e^{r^2} - e^0) dr. \end{aligned}$$

Nebenrechnungen:

$$\begin{aligned} &\int_0^{\sqrt{2}} r e^{r^2} dr \\ &= \left[r^2 = t \Rightarrow 2r dr = dt \Rightarrow dr = \frac{1}{2r} dt; \text{Grenzen: } r = 0 \Rightarrow t = 0, r = \sqrt{2} \Rightarrow t = 2 \right] \\ &= \int_0^2 r \cdot e^t \cdot \frac{1}{2r} dt = \frac{1}{2} \int_0^2 e^t dt = \frac{1}{2} (e^2 - e^0) = \frac{1}{2} (e^2 - 1), \\ &\int_0^{\sqrt{2}} r dr = \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1. \end{aligned}$$

Damit ist

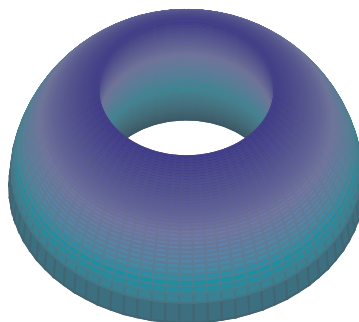
$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\sqrt{2}} r \cdot (e^{r^2} - 1) dr = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} (e^2 - 1) - 1 \right) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{e^2}{2} - \frac{3}{2} \right) = \frac{\pi}{4} (e^2 - 3).$$

**Aufgabe 78.379** (Volumen eines Körpers, Klausuraufgabe vom Frühjahr 2013, ETIT)

spf

Gegeben ist der Körper

$$B := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\} \cap \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \geq 1 \text{ und } z \geq 0\}.$$

Skizzieren Sie B und berechnen Sie das Volumen von B . B ist eine Halbkugel vom Radius 2, aus der ein Zylinder mit Radius 1 ausgestanzt ist, mit $|B| = 2\pi \cdot \sqrt{3}$.**Lösung (Skizze von B):****Lösung in Zylinderkoordinaten:**

Es handelt sich um eine Halbkugel, aus der ein Zylinder ausgestanzt wurde.

Das Volumen lässt sich in Zylinderkoordinaten berechnen:

$$(x, y, z)^T = \vec{\Phi}(r, \varphi, t) = (r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi), t)^T.$$

Die Funktionaldeterminante von $\vec{\Phi}$ ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \det(\vec{\Phi}'(r, \varphi, t)) &= \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \cdot \sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r \cdot \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \cdot \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cdot \cos(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= r \cdot (\cos(\varphi))^2 + r \cdot (\sin(\varphi))^2 = r \cdot \underbrace{((\cos(\varphi))^2 + \sin((\varphi))^2)}_{=1} = r. \end{aligned}$$

Die Ungleichungen in den beiden Mengen transformieren sich zu

$$\begin{aligned} 4 &\geq (r \cdot \cos(\varphi))^2 + (r \cdot \sin(\varphi))^2 + t^2 = r^2 \cdot \underbrace{((\cos(\varphi))^2 + \sin((\varphi))^2)}_{=1} + t^2 = r^2 + t^2, \\ 1 &\leq (r \cdot \cos(\varphi))^2 + (r \cdot \sin(\varphi))^2 = r^2 \cdot \underbrace{((\cos(\varphi))^2 + \sin((\varphi))^2)}_{=1} = r^2 \end{aligned}$$

und $0 \geq t$.Es ergibt sich also wegen $\sqrt{4-t^2} < 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t > \sqrt{3}$

$$\begin{aligned} B = \vec{\Phi}(D) \quad \text{mit} \quad D &:= \{(r, \varphi, t)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi \in [0; 2\pi), 0 \leq t \leq \sqrt{3} \text{ und } 1 \leq r \leq \sqrt{4-t^2}\} \\ &= \{(r, \varphi, t)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi \in [0; 2\pi), 1 \leq r \leq 2 \text{ und } 0 \leq t \leq \sqrt{4-r^2}\}. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$\begin{aligned}
|B| &= \int_B 1 \, d(x, y, z) = \int_D 1 \cdot r \, d(r, \varphi, t) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_1^{\sqrt{4-t^2}} r \, dr \right) dt \right) d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{3}} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=1}^{r=\sqrt{4-t^2}} dt \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{4-t^2}{2} - \frac{1}{2} \right) dt \right) d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{3}{2} - \frac{t^2}{2} \right) dt \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{3t}{2} - \frac{t^3}{6} \right]_{t=0}^{t=\sqrt{3}} d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} - \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{6} - \frac{3 \cdot 0}{2} - \frac{0^3}{6} \right) d\varphi = \left[\sqrt{3} \cdot \varphi \right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = 2\pi \cdot \sqrt{3} - 0 = 2\pi \cdot \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Lösung in Kugelkoordinaten mit Polarwinkel:

Es handelt sich um eine Halbkugel, aus der ein Zylinder ausgestanzt wurde.

Dieser Körper lässt sich in Kugelkoordinaten mit Polarwinkel beschreiben:

$$(x, y, z)^T = \vec{\Phi}(r, \vartheta, \varphi) = (r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \sin(\varphi), r \cdot \cos(\vartheta))^T.$$

Die Funktionaldeterminante von $\vec{\Phi}$ ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
\det(\vec{\Phi}'(r, \vartheta, \varphi)) &= \det \begin{pmatrix} \sin(\vartheta) \cdot \cos(\varphi) & r \cdot \cos(\vartheta) \cdot \cos(\varphi) & -r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta) \cdot \sin(\varphi) & r \cdot \cos(\vartheta) \cdot \sin(\varphi) & r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta) & -r \cdot \sin(\vartheta) & 0 \end{pmatrix} \\
&= \cos(\vartheta) \cdot \det \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\vartheta) \cdot \cos(\varphi) & -r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \sin(\varphi) \\ r \cdot \cos(\vartheta) \cdot \sin(\varphi) & r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(\varphi) \end{pmatrix} \\
&\quad + r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \det \begin{pmatrix} \sin(\vartheta) \cdot \cos(\varphi) & -r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta) \cdot \sin(\varphi) & r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(\varphi) \end{pmatrix} \\
&= \cos(\vartheta) \cdot \left(r^2 \cdot \cos(\vartheta) \cdot \sin(\vartheta) \cdot (\cos(\varphi))^2 + r^2 \cdot \cos(\vartheta) \cdot \sin(\vartheta) \cdot (\sin(\varphi))^2 \right) \\
&\quad + r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \left(r \cdot (\sin(\vartheta))^2 \cdot (\sin(\varphi))^2 + r \cdot (\sin(\vartheta))^2 \cdot (\cos(\varphi))^2 \right) \\
&= r^2 \cdot (\cos(\vartheta))^2 \cdot \sin(\vartheta) + r^2 \cdot (\sin(\vartheta))^3 = r^2 \cdot \sin(\vartheta).
\end{aligned}$$

Wegen $\sin(\vartheta) \geq 0$ für alle $\vartheta \in [0; \pi]$ entspricht diese Funktionaldeterminante ihrem Betrag.

Die Ungleichungen in den beiden geschnittenen Mengen transformieren sich zu

$$\begin{aligned}
4 &\geq (r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(\varphi))^2 + (r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \sin(\varphi))^2 + (r \cdot \cos(\vartheta))^2 \\
&= r^2 \cdot (\sin(\vartheta))^2 \cdot ((\cos(\varphi))^2 + (\sin(\varphi))^2) + r^2 \cdot (\cos(\vartheta))^2 = r^2 \cdot ((\cos(\vartheta))^2 + (\sin(\vartheta))^2) = r^2, \\
1 &\leq (r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(\varphi))^2 + (r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \sin(\varphi))^2 \\
&= r^2 \cdot (\sin(\vartheta))^2 \cdot ((\cos(\varphi))^2 + (\sin(\varphi))^2) = r^2 \cdot (\sin(\vartheta))^2 \quad \text{und} \\
0 &\geq r \cdot \cos(\vartheta).
\end{aligned}$$

Für alle $r \in [0; \infty)$ und alle $\vartheta \in [0; \pi]$ vereinfachen sich diese drei Gleichungen also zu

$$2 \geq r, \quad 1 \leq r \cdot \sin(\vartheta) \quad \text{und} \quad 0 \geq r \cdot \cos(\vartheta).$$

Aus der Kombination der ersten beiden Ungleichungen ergibt sich zusätzlich $1 \leq 2 \cdot \sin(\vartheta)$.

Wegen $\cos(\vartheta) \geq 0$ für alle $\vartheta \in [0; \frac{\pi}{2}]$ und $\sin(\vartheta) \geq \frac{1}{2}$ für alle $\vartheta \in [\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}]$ ergibt sich also

$$B = \vec{\Phi}(D) \quad \text{mit} \quad D := \left\{ (r, \vartheta, \varphi)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi \in [0; 2\pi), \vartheta \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ und } \frac{1}{\sin(\vartheta)} \leq r \leq 2 \right\}.$$

Insgesamt folgt mit $\left(\frac{\cos(t)}{\sin(t)}\right)' = \frac{-(\sin(t))^2 - (\cos(t))^2}{(\sin(t))^2} = -\frac{1}{(\sin(t))^2}$

$$\begin{aligned}
|B| &= \int_B 1 \, d(x, y, z) = \int_D 1 \cdot r^2 \cdot \sin(\vartheta) \, d(r, \vartheta, \varphi) = \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{1}{\sin(\vartheta)}}^2 r^2 \cdot \sin(\vartheta) \, dr \right) d\vartheta \right) d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3} \cdot \sin(\vartheta) \right]_{r=\frac{1}{\sin(\vartheta)}}^{r=2} d\vartheta \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{8}{3} \cdot \sin(\vartheta) - \frac{1}{3 \cdot (\sin(\vartheta))^2} \right) d\vartheta \right) d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{8}{3} \cdot \cos(\vartheta) + \frac{\cos(\vartheta)}{3 \cdot \sin(\vartheta)} \right]_{\vartheta=\frac{\pi}{6}}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{8}{3} \cdot 0 + \frac{0}{3 \cdot 1} + \frac{8}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{3 \cdot \frac{1}{2}} \right) d\varphi \\
&= \left[\sqrt{3} \cdot \varphi \right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = 2\pi \cdot \sqrt{3} - 0 = 2\pi \cdot \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Lösung in Kugelkoordinaten mit geographischer Breite:

Es handelt sich um eine Halbkugel, aus der ein Zylinder ausgestanzt wurde.

Dieser Körper lässt sich in Kugelkoordinaten mit geographischer Breite beschreiben:

$$(x, y, z)^T = \vec{\Phi}(r, \varphi, \theta) = (r \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\theta), r \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\theta), r \cdot \sin(\theta))^T.$$

Die Funktionaldeterminante von $\vec{\Phi}$ ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
\det(\vec{\Phi}'(r, \varphi, \theta)) &= \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot \cos(\theta) & -r \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\theta) & -r \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\theta) \\ \sin(\varphi) \cdot \cos(\theta) & r \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\theta) & -r \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & 0 & r \cdot \cos(\theta) \end{pmatrix} \\
&= \sin(\theta) \cdot \det \begin{pmatrix} -r \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\theta) & -r \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\theta) \\ r \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\theta) & -r \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\theta) \end{pmatrix} \\
&\quad + r \cdot \cos(\theta) \cdot \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot \cos(\theta) & -r \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\theta) \\ \sin(\varphi) \cdot \cos(\theta) & r \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\theta) \end{pmatrix} \\
&= \sin(\theta) \cdot \left(r^2 \cdot (\sin(\varphi))^2 \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) + r^2 \cdot (\cos(\varphi))^2 \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \right) \\
&\quad + r \cdot \cos(\theta) \cdot \left(r \cdot (\cos(\varphi))^2 \cdot (\cos(\theta))^2 + r \cdot (\sin(\varphi))^2 \cdot (\cos(\theta))^2 \right) \\
&= r^2 \cdot (\sin(\theta))^2 \cdot \cos(\theta) + r^2 \cdot (\cos(\theta))^3 = r^2 \cdot \cos(\theta).
\end{aligned}$$

Wegen $\cos(\theta) \geq 0$ für alle $\theta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ entspricht diese Funktionaldeterminante ihrem Betrag.

Die Ungleichungen in den beiden geschnittenen Mengen transformieren sich zu

$$\begin{aligned}
4 &\geq (r \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\theta))^2 + (r \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\theta))^2 + (r \cdot \sin(\theta))^2 \\
&= r^2 \cdot \left((\cos(\varphi))^2 + (\sin(\varphi))^2 \right) \cdot (\cos(\theta))^2 + r^2 \cdot (\sin(\theta))^2 = r^2 \cdot \left((\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2 \right) = r^2, \\
1 &\leq (r \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\theta))^2 + (r \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\theta))^2 \\
&= r^2 \cdot \left((\cos(\varphi))^2 + (\sin(\varphi))^2 \right) \cdot (\cos(\theta))^2 = r^2 \cdot (\cos(\theta))^2 \quad \text{und} \\
0 &\geq r \cdot \sin(\theta).
\end{aligned}$$

Für alle $r \in [0; \infty)$ und alle $\theta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ vereinfachen sich diese drei Gleichungen also zu

$$2 \geq r, \quad 1 \leq r \cdot \cos(\theta) \quad \text{und} \quad 0 \geq r \cdot \sin(\theta).$$

Aus der Kombination der ersten beiden Ungleichungen ergibt sich zusätzlich $1 \leq 2 \cdot \cos(\theta)$.

Wegen $\sin(\theta) \geq 0$ für alle $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$ und $\cos(\theta) \geq \frac{1}{2}$ für alle $\theta \in [-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}]$ ergibt sich also

$$B = \vec{\Phi}(D) \quad \text{mit} \quad D := \left\{ (r, \varphi, \theta)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi \in [0; 2\pi), \theta \in [0; \frac{\pi}{3}] \text{ und } \frac{1}{\cos(\theta)} \leq r \leq 2 \right\}.$$

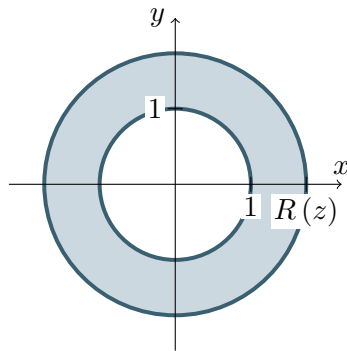
Insgesamt folgt mit $\left(\frac{\sin(t)}{\cos(t)}\right)' = \frac{(\cos(t))^2 + (\sin(t))^2}{(\cos(t))^2} = \frac{1}{(\cos(t))^2}$

$$\begin{aligned}
 |B| &= \int_B 1 \, d(x, y, z) = \int_D 1 \cdot r^2 \cdot \cos(\theta) \, d(r, \varphi, \theta) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_{\frac{1}{\cos(\theta)}}^2 r^2 \cdot \cos(\theta) \, dr \right) d\theta \right) d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[\frac{r^3}{3} \cdot \cos(\theta) \right]_{r=\frac{1}{\cos(\theta)}}^{r=2} d\theta \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{8}{3} \cdot \cos(\theta) - \frac{1}{3 \cdot (\cos(\theta))^2} \right) d\theta \right) d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{8}{3} \cdot \sin(\theta) - \frac{\sin(\theta)}{3 \cdot \cos(\theta)} \right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{3}} d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{8}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{3 \cdot \frac{1}{2}} - \frac{8}{3} \cdot 0 + \frac{0}{3 \cdot 1} \right) d\varphi \\
 &= \left[\sqrt{3} \cdot \varphi \right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = 2\pi \cdot \sqrt{3} - 0 = 2\pi \cdot \sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

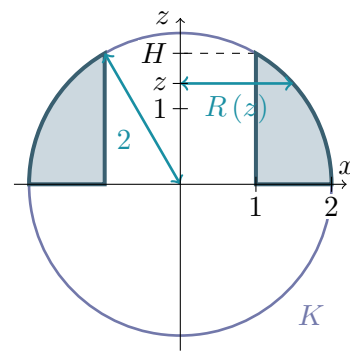
Lösung mit dem Prinzip von Cavalieri:

Wir bezeichnen die Gesamthöhe des Körpers mit H und den äußeren Radius des Körpers auf der Höhe $z \in [0; H]$ mit $R(z)$.

Der Schnitt des Körpers mit der zur xy -Ebene parallelen Ebene auf der Höhe $z \in [0; H]$ ist



Der Schnitt des Körpers mit der durch die Gleichung „ $y = 0$ “ gegebenen Ebene ist



Der Kreisrand K in der rechten Skizze ist gegeben durch $K = \{(x, 0, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 0^2 + z^2 = 2^2\}$. Stellt man die Gleichung aus K nach x um, so erhält man

$$R(z) = \sqrt{4 - z^2}.$$

Zur Berechnung von H nutzen wir in der rechten Skizze den Satz von Pythagoras:

$$H^2 + 1^2 = 2^2 \stackrel{H \geq 0}{\iff} H = \sqrt{2^2 - 1^2} \iff H = \sqrt{3}.$$

Wie aus der linken Skizze ersichtlich sind die Schnitte $Q(z)$ des Körpers mit den zur xy -Ebene parallelen Ebenen auf der Höhe $z \in [0; \sqrt{3}]$ Kreise mit innerem Radius 1 und äußerem Radius $R(z)$.

Damit ist für alle $z \in [0; \sqrt{3}]$ wegen $R(z) = \sqrt{4 - z^2}$

$$|Q(z)| = \pi \cdot (R(z))^2 - \pi \cdot 1^2 = \pi \cdot (4 - z^2 - 1) = \pi \cdot (3 - z^2).$$

Das Prinzip von Cavalieri liefert für das Volumen des Körpers

$$|B| = \int_0^H |Q(z)| \, dz = \int_0^{\sqrt{3}} \pi \cdot (3 - z^2) \, dz = \pi \cdot \left[3z - \frac{z^3}{3} \right]_{z=0}^{z=\sqrt{3}} = \pi \left(3 \cdot \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}^3}{3} \right) = 2\pi \cdot \sqrt{3}.$$



IntMehrDim/Substitution/Ag_InegrationMehrDim_LineareSubs.tex

Aufgabe 79.380 ((Affin-)lineare Koordinatentransformation)

VI

Berechnen Sie das Integral $\int_B f(x, y) d(x, y)$ mit

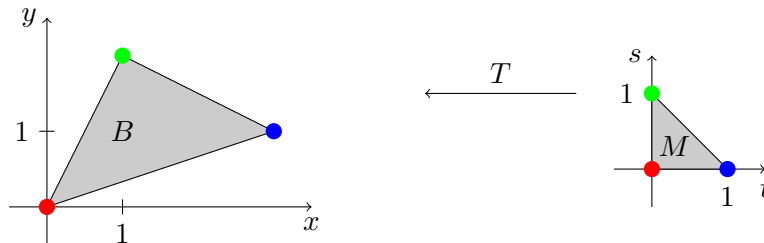
- a) $f(x, y) = e^x$, B ist ein Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 2)$ und $(3, 1)$.

$$5 \left(\frac{1}{6} e^3 - \frac{1}{2} e + \frac{1}{3} \right)$$

Lösung:

Schreibe zuerst den Dreieck B als lineare Transformation T eines rechtwinkligen Dreieckes M mit einem Eckpunkt im Null. Bei Dreiecken, dessen eine Ecke im Nullpunkt liegt, ist es immer möglich.

Sei M der Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$.



Sei

$$T(t, s) = A \cdot \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}t + a_{12}s \\ a_{21}t + a_{22}s \end{pmatrix}.$$

Eine lineare Transformation transformiert Ecken zu Ecken und (Verbindungs-)geraden zu (Verbindungs-)geraden.

Nach der Festlegung, welche Ecke zu welchen Ecke abgebildet werden soll, ist die Transformation eindeutig festgelegt. Es muss gelten:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x = 0 \\ y = 0 \end{pmatrix} &= T(t = 0, s = 0) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad : \text{wahr} \\ \begin{pmatrix} x = 3 \\ y = 1 \end{pmatrix} &= T(t = 1, s = 0) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \implies a_{11} = 3, a_{21} = 1 \\ \begin{pmatrix} x = 1 \\ y = 2 \end{pmatrix} &= T(t = 0, s = 1) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \implies a_{12} = 1, a_{22} = 2. \end{aligned}$$

Damit ist die gesuchte Koordinatentransformation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T(t, s) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t + s \\ t + 2s \end{pmatrix}$$

mit der Funktionaldeterminante

$$|T'(t, s)| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5.$$

Der gesuchte Integral ist

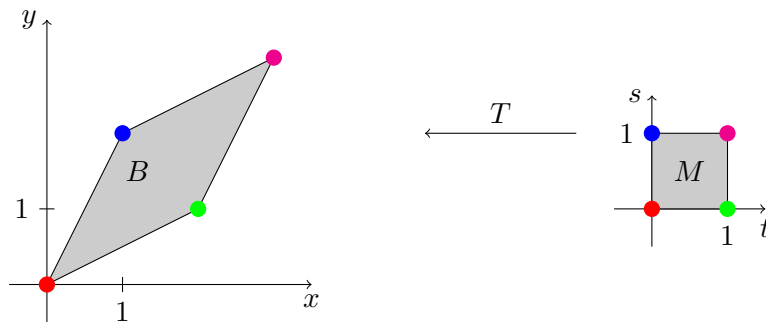
$$\begin{aligned}
 \int_{B=T(M)} e^x d(x, y) &= \int_T e^{x(t,s)} \cdot \|T'(t, s)\| d(t, s) = \int_T e^{3t+s} \cdot 5 d(t, s) \\
 &= 5 \int_0^1 \int_0^{1-t} e^{3t} \cdot e^s ds dt = 5 \int_0^1 e^{3t} [e^s]_{s=0}^{1-t} dt \\
 &= 5 \int_0^1 e^{3t} (e^{1-t} - e^0) dt = 5 \int_0^1 (e^{3t+1-t} - e^{3t}) dt = 5 \int_0^1 (e \cdot e^{2t} - e^{3t}) dt \\
 &= 5 \left[e \cdot \frac{1}{2} e^{2t} - \frac{1}{3} e^{3t} \right]_0^1 = 5 \left(\frac{1}{2} \cdot e \cdot e^2 - \frac{1}{3} e^3 - \left(\frac{1}{2} e \cdot e^0 - \frac{1}{3} e^0 \right) \right) \\
 &= 5 \left(\frac{1}{6} e^3 - \frac{1}{2} e + \frac{1}{3} \right)
 \end{aligned}$$

b) $f(x, y) = x \cdot y$, B ist ein Viereck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$ und $(3, 3)$.

$\frac{31}{4}$

Lösung:

Schreibe zuerst das Viereck B als lineare Transformation des Einheitsquadrates M . Das ist für Parallelogramme mit einem Eck im Nullpunkt möglich.



Die Transformation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T(t, s) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix}$$

muss erfüllen:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} x=0 \\ y=0 \end{pmatrix} &= T(0, 0) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &: \text{wahr} \\
 \begin{pmatrix} x=2 \\ y=1 \end{pmatrix} &= T(1, 0) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \implies a_{11} = 2, a_{21} = 1 \\
 \begin{pmatrix} x=1 \\ y=2 \end{pmatrix} &= T(0, 1) = \begin{pmatrix} 2 & a_{12} \\ 1 & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \implies a_{12} = 1, a_{22} = 2 \\
 \begin{pmatrix} x=3 \\ y=3 \end{pmatrix} &= T(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} &: \text{wahr}.
 \end{aligned}$$

D.h., die gesuchte lineare Transformation ist

$$\begin{pmatrix} x(t, s) \\ y(t, s) \end{pmatrix} = T(t, s) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t + s \\ t + 2s \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad |T'(t, s)| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

Der gesuchte Integral ist

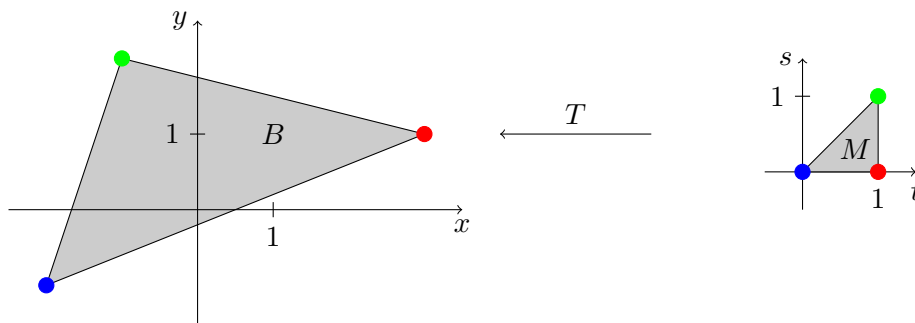
$$\begin{aligned}
 \int_{B=T(M)} xy \, d(x, y) &= \int_M x(t, s) \cdot y(t, s) \cdot \|T'(t, s)\| \, d(t, s) \\
 &= \int_M (2t + s) \cdot (t + 2s) \cdot 3 \, d(t, s) = 3 \int_0^1 \int_0^1 (2t^2 + 5ts + 2s^2) \, ds \, dt \\
 &= 3 \int_0^1 \left[2t^2 s + 5t \cdot \frac{1}{2} s^2 + 2 \cdot \frac{1}{3} s^3 \right]_{s=0}^1 \, dt = 3 \int_0^1 \left(2t^2 + \frac{5}{2} t + \frac{2}{3} \right) \, dt \\
 &= 3 \left[2 \cdot \frac{1}{3} t^3 + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} t^2 + \frac{2}{3} t \right]_0^1 \\
 &= 3 \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{4} + \frac{2}{3} \right) = \frac{31}{4}
 \end{aligned}$$

c) $f(x, y) = x - 2y$, B ist ein Dreieck mit den Eckpunkten $(-2, -1)$, $(3, 1)$ und $(-1, 2)$.

$-\frac{13}{3}$

Lösung:

Zuerst schreibe das Dreieck B als affin lineare Transformation T des Dreieckes M mit Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(1, 1)$. Für beliebige Dreiecke ist es immer möglich.



Auch affin lineare Transformationen bilden Ecken zu Ecken und Verbindungsgeraden zu Verbindungsgeraden ab.

Die Transformation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T(t, s) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

muss erfüllen:

$$\begin{pmatrix} x = -2 \\ y = -1 \end{pmatrix} = T(0, 0) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \implies a_0 = -2, b_0 = -1$$

$$\begin{pmatrix} x = 3 \\ y = 1 \end{pmatrix} = T(1, 0) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - 2 \\ a_{21} - 1 \end{pmatrix} \implies a_{11} = 5, a_{21} = 2$$

$$\begin{pmatrix} x = -1 \\ y = 2 \end{pmatrix} = T(1, 1) = \begin{pmatrix} 5 & a_{12} \\ 2 & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + a_{12} - 2 \\ 2 + a_{22} - 1 \end{pmatrix} \implies a_{12} = -4, a_{22} = 1.$$

Die gesuchte Transformation ist damit

$$\begin{pmatrix} x(t, s) \\ y(t, s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5t - 4s - 2 \\ 2t + s - 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } |T'(t, s)| = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 13.$$

Integral:

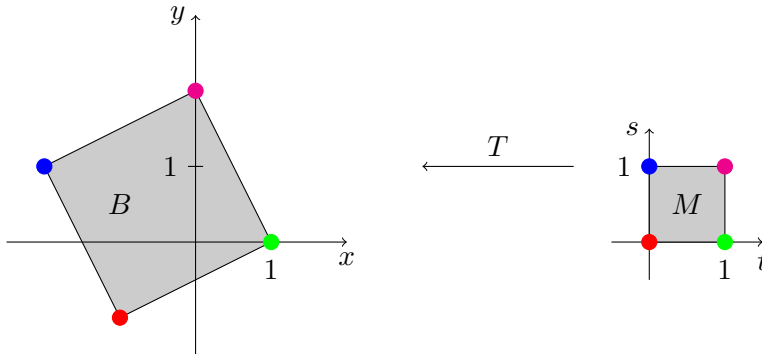
$$\begin{aligned}
 \int_{B=T(M)} (x-2y) \, d(x,y) &= \int_M (x(t,s) - 2y(t,s)) \cdot \|T'(t,s)\| \, d(t,s) \\
 &= \int_0^1 \int_0^t ((5t-4s-2) - 2(2t+s-1)) \cdot 13 \, ds \, dt \\
 &= 13 \int_0^1 \int_0^t (t-6s) \, ds \, dt = 13 \int_0^1 [ts - 3s^2]_{s=0}^t \, dt \\
 &= 13 \int_0^1 (t^2 - 3t^2) \, dt = -26 \int_0^1 t^2 \, dt = -\frac{26}{3}.
 \end{aligned}$$

- d) $f(x,y) = x - y$, B ist ein Viereck mit den Eckpunkten $(-1, -1)$, $(1, 0)$, $(0, 2)$ und $(-2, 1)$.

-5

Lösung:

Schreibe zuerst das Viereck B als affin lineare Transformation des Einheitsquadrates M . Für Parallelelogramme ist es immer möglich.



Die Transformation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T(t,s) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

muss erfüllen

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} x = -1 \\ y = -1 \end{pmatrix} &= T(0,0) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \implies a_0 = -1, b_0 = -1 \\
 \begin{pmatrix} x = 1 \\ y = 0 \end{pmatrix} &= T(1,0) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - 1 \\ a_{21} - 1 \end{pmatrix} \implies a_{11} = 2, a_{21} = 1 \\
 \begin{pmatrix} x = -2 \\ y = 1 \end{pmatrix} &= T(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & a_{12} \\ 1 & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} - 1 \\ a_{22} - 1 \end{pmatrix} \implies a_{12} = -1, a_{22} = 2 \\
 \begin{pmatrix} x = 0 \\ y = 2 \end{pmatrix} &= T(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 1 - 1 \\ 1 + 2 - 1 \end{pmatrix} : \text{ wahr.}
 \end{aligned}$$

Die gesuchte affinlineare Transformation ist

$$\begin{pmatrix} x(t,s) \\ y(t,s) \end{pmatrix} = T(t,s) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t - s - 1 \\ t + 2s - 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$|T'(t,s)| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5.$$

Jetzt kann der Wert des Integrals berechnet werden:

$$\begin{aligned}
 \int_{B=T(M)} (x-y) d(x,y) &= \int_M (x(t,s) - y(t,s)) \cdot \|T'(t,s)\| d(t,s) \\
 &= \int_M ((2t-s-1) - (t+2s-1)) \cdot 5 d(t,s) = 5 \int_0^1 \int_0^1 (t-3s) ds dt \\
 &= 5 \int_0^1 \left[ts - 3 \cdot \frac{1}{2} s^2 \right]_{s=0}^1 dt = 5 \int_0^1 \left(t - \frac{3}{2} \right) dt = 5 \left[\frac{1}{2} t^2 - \frac{3}{2} t \right]_0^1 \\
 &= 5 \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \right) = -5.
 \end{aligned}$$

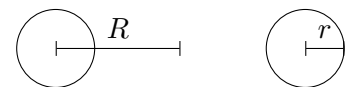
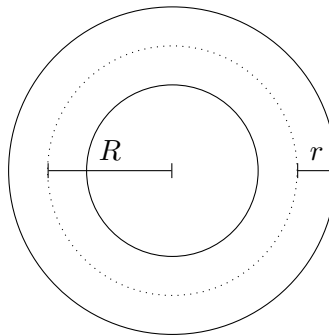
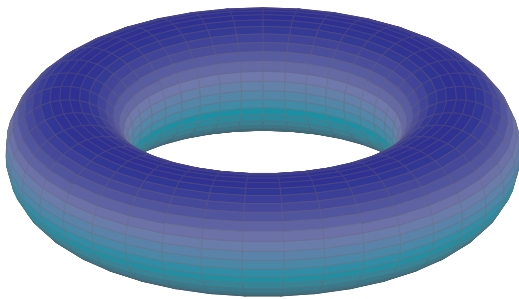


IntMehrDim/Substitution/Ag_IntMehrDimSubst_TorusVolumen.tex

Aufgabe 79.381 (Volumen eines Torus)

spf

Berechnen Sie das Volumen eines Torus'!



Ganz links sehen Sie die 3D-Darstellung, rechts davon die Draufsicht und oben den Querschnitt eines Torus'.

Hinweis: Der Torus mit $R \geq r > 0$ ist das Bild $f_R([0;r] \times [0;2\pi]^2)$ der Funktion $f_R: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $(\varrho, \varphi, \psi)^T \mapsto f_R(\varrho, \varphi, \psi) := ((R + \varrho \cdot \cos(\psi)) \cdot \cos(\varphi), (R + \varrho \cdot \cos(\psi)) \cdot \sin(\varphi), \varrho \cdot \sin(\psi))^T$.
 $2\pi^2 \cdot Rr^2$

Lösung:

Das Volumen des Torus' $V_{\text{Torus}}(r, R) := \int_{f_R([0;r] \times [0;2\pi]^2)} 1 d(x, y, z)$ lässt sich mit Hilfe der mehrdimensionalen Substitutionsregel berechnen. Dazu benötigt man die Funktionaldeterminante von f_R :

$$\begin{aligned}
 \det(J_{f_R}(\varrho, \varphi, \psi)) &= \det \begin{pmatrix} \cos(\psi) \cdot \cos(\varphi)^+ & -(R + \varrho \cdot \cos(\psi)) \cdot \sin(\varphi) & -\varrho \cdot \sin(\psi) \cdot \cos(\varphi) \\ \cos(\psi) \cdot \sin(\varphi) & (R + \varrho \cdot \cos(\psi)) \cdot \cos(\varphi)^+ & -\varrho \cdot \sin(\psi) \cdot \sin(\varphi) \\ \sin(\psi)^+ & 0^- & \varrho \cdot \cos(\psi)^+ \end{pmatrix} \\
 &= \sin(\psi) \cdot \det \begin{pmatrix} -(R + \varrho \cdot \cos(\psi)) \cdot \sin(\varphi) & -\varrho \cdot \sin(\psi) \cdot \cos(\varphi) \\ (R + \varrho \cdot \cos(\psi)) \cdot \cos(\varphi) & -\varrho \cdot \sin(\psi) \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix} \\
 &\quad + \varrho \cdot \cos(\psi) \cdot \det \begin{pmatrix} \cos(\psi) \cdot \cos(\varphi) & -(R + \varrho \cdot \cos(\psi)) \cdot \sin(\varphi) \\ \cos(\psi) \cdot \sin(\varphi) & (R + \varrho \cdot \cos(\psi)) \cdot \cos(\varphi) \end{pmatrix} \\
 &= \sin(\psi) \cdot (R + \varrho \cdot \cos(\psi)) \cdot \sin(\varphi) \cdot \varrho \cdot \sin(\psi) \cdot \sin(\varphi) \\
 &\quad + \sin(\psi) \cdot (R + \varrho \cdot \cos(\psi)) \cdot \cos(\varphi) \cdot \varrho \cdot \sin(\psi) \cdot \cos(\varphi) \\
 &\quad + \varrho \cdot \cos(\psi) \cdot \cos(\psi) \cdot \cos(\varphi) \cdot (R + \varrho \cdot \cos(\psi)) \cdot \cos(\varphi) \\
 &\quad + \varrho \cdot \cos(\psi) \cdot \cos(\psi) \cdot \sin(\varphi) \cdot (R + \varrho \cdot \cos(\psi)) \cdot \sin(\varphi) \\
 &= \varrho \cdot (R + \varrho \cdot \cos(\psi)) \cdot ((\sin(\psi))^2 \cdot (\sin(\varphi))^2 + (\sin(\psi))^2 \cdot (\cos(\varphi))^2) \\
 &\quad + \varrho \cdot (R + \varrho \cdot \cos(\psi)) \cdot ((\cos(\psi))^2 \cdot (\cos(\varphi))^2 + (\cos(\psi))^2 \cdot (\sin(\varphi))^2) \\
 &= \varrho \cdot (R + \varrho \cdot \cos(\psi)) \cdot ((\cos(\psi))^2 + (\sin(\psi))^2) \\
 &= \varrho \cdot (R + \varrho \cdot \cos(\psi)).
 \end{aligned}$$

Wegen $0 \leq \varrho \leq r \leq R$ gilt also $\det(J_{f_R}) \geq 0$ auf $[0; r] \times [0; 2\pi]^2$. Damit folgt

$$\begin{aligned} V_{\text{Torus}}(r, R) &= \int_{f_R([0; r] \times [0; 2\pi]^2)} 1 \, d(x, y, z) = \int_{[0; r] \times [0; 2\pi]^2} 1 \cdot |\det(J_{f_R}(\varrho, \varphi, \psi))| \, d(\varrho, \varphi, \psi) \\ &= \int_0^r \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \varrho \cdot (R + \varrho \cdot \cos(\psi)) \, d\varphi \right) d\psi \right) d\varrho \\ &= \int_0^r \left(\int_0^{2\pi} [(R\varrho + \varrho^2 \cdot \cos(\psi)) \cdot \varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\psi \right) d\varrho \\ &= \int_0^r 2\pi \cdot [R\varrho\psi + \varrho^2 \cdot \sin(\psi)]_{\psi=0}^{\psi=2\pi} d\varrho \\ &= \int_0^r 2\pi \cdot (2\pi R\varrho + \varrho^2 \cdot \underbrace{\sin(2\pi)}_{=0} - \varrho^2 \cdot \underbrace{\sin(0)}_{=0}) d\varrho \\ &= 4\pi^2 \cdot R \cdot \left[\frac{\varrho^2}{2} \right]_{\varrho=0}^{\varrho=r} = 4\pi^2 \cdot R \cdot \left(\frac{r^2}{2} - 0 \right) = 2\pi^2 \cdot Rr^2. \end{aligned}$$



IntMehrDim/Substitution/Ag_IntegrationMehrdimensional_Substitution2D.tex

Aufgabe 79.382 (Substitution im $\mathbb{R}^2$)

Stewart's Calculus

Berechnen Sie die Integrale $\int_{\Omega} f(x, y) \, d(x, y)$ mit $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $(x, y)^T \mapsto f(x, y)$, indem Sie die angegebenen Substitutionen verwenden:

a) Mit der Substitution in Polarkoordinaten: $x = r \cdot \cos(\varphi)$, $y = r \cdot \sin(\varphi)$

(i) $f(x, y) := xy$, Ω ist der Kreis mit Radius 3 und Mittelpunkt $(0, 0)^T$.

(ii) $f(x, y) := x+y$, Ω ist der links der y -Achse liegende Teil von $\left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \in [1; 4] \right\}$

(iii) $f(x, y) := x + y$, $\Omega := \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1 \text{ und } y \leq x \leq \sqrt{2 - y^2} \right\}$.

$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Lösung:

Als erstes berechnen wir die Funktionaldeterminante für die Substitution

$$\Phi(r, \varphi) = (x(r, \varphi), y(r, \varphi))^T = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))^T$$

Dann gilt für die Jacobimatrix von Φ

$$J_{\Phi}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix} \Rightarrow |\det J_{\Phi}(r, \varphi)| = |r(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi))| = |r| = r.$$

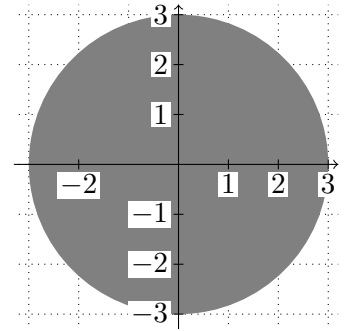
Die Integrationsgrenzen hängen vom jeweiligen Integrationsbereich ab.

(i) Für den Kreis mit Radius 3 und Mittelpunkt in $(0, 0)^T$ sind die Grenzen für die Substitutionsvariablen $r \in [0; 3]$ und $\varphi \in [0; 2\pi]$.

Mit $f(t) := t$ und $g(\varphi) := \sin(\varphi)$ ergibt sich $g'(\varphi) = \cos(\varphi)$, $g(0) = 0$ und $g(2\pi) = 0$.

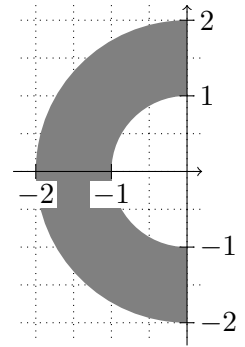
Damit ergibt sich das gesuchte Integral zu

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} xy \, d(x, y) &= \int_{[0;3] \times [0;2\pi]} r \cos(\varphi) \cdot r \sin(\varphi) \cdot r \, d(r, \varphi) \\ &= \int_0^3 r^3 \cdot \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin(\varphi)}_{=f(g(\varphi))} \cdot \underbrace{\cos(\varphi)}_{=g'(\varphi)} \, d\varphi \, dr \\ &= \int_0^3 r^3 \cdot \int_0^0 \underbrace{t}_{=f(t)} \, dt \, dr = \int_0^3 r^3 \cdot 0 \, dr = 0.\end{aligned}$$



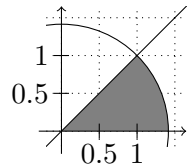
(ii) Hier sind die Integrationsgrenzen $r \in [1; 2]$ und $\varphi \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$. Damit folgt

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} (x + y) \, d(x, y) &= \int_{[1;2] \times [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]} (r \cos(\varphi) + r \sin(\varphi)) \cdot r \, d(r, \varphi) \\ &= \int_1^2 r^2 \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (\cos(\varphi) + \sin(\varphi)) \, d\varphi \, dr \\ &= \int_1^2 r^2 \cdot [\sin(\varphi) - \cos(\varphi)]_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\varphi=\frac{3\pi}{2}} \, dr \\ &= \int_1^2 r^2 \cdot (-2) \, dr = -2 \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot r^3 \right]_{r=1}^{r=2} = -\frac{14}{3}.\end{aligned}$$



(iii) Zuerst bestimmen wir die Integrationsgrenzen.

Für y gilt $0 \leq y \leq 1$. x liegt rechts von der Gerade $y = x$ und links von der Kurve $x = \sqrt{2 - y^2}$. Die Punkte auf der Kurve $x = \sqrt{2 - y^2}$ erfüllen auch die Gleichung $x^2 = 2 - y^2 \iff x^2 + y^2 = 2$, d.h., diese liegen auf dem Kreis mit Radius $\sqrt{2}$ um $(0, 0)^T$. Der Kreis schneidet die Gerade $x = y$ im Punkt $(1, 1)^T$. Dementsprechend ist der Integrationsbereich der markierte Sektor im Bild und damit folgt $r \in [0, \sqrt{2}]$ und $\varphi \in [0; \frac{\pi}{4}]$.



Mit $(\sin(\frac{\pi}{4}) - \cos(\frac{\pi}{4})) - (\sin(0) - \cos(0)) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 + 1 = 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} (x + y) \, d(x, y) &= \int_{[0; \sqrt{2}] \times [0; \frac{\pi}{4}]} (r \cos(\varphi) + r \sin(\varphi)) \cdot r \, d(r, \varphi) \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos(\varphi) + \sin(\varphi)) \, d\varphi \, dr \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \cdot [\sin(\varphi) - \cos(\varphi)]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} \, dr \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \, dr = \left[\frac{1}{3} \cdot r^3 \right]_{r=0}^{r=\sqrt{2}} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2}.\end{aligned}$$

b) $f(x, y) := x^2$, Ω ist das Innere der Ellipse $9x^2 + 4y^2 = 36$. Substitution: $x = 2u$, $y = 3v$. 6π

Lösung:

Als erstes bestimmen wir die Grenzen für die Substitutionsvariablen u und v .

$$\begin{aligned}(x, y)^T \in \Omega &\iff 9x^2 + 4y^2 \leq 36 &\iff 9 \cdot (2u)^2 + 4 \cdot (3v)^2 \leq 36 \\ &\iff 36u^2 + 36v^2 \leq 36 &\iff u^2 + v^2 \leq 1,\end{aligned}$$

d.h., die Variablen u und v liegen innerhalb des Einheitskreises. Sei also

$$D := \left\{ (u, v)^T \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq 1 \right\}.$$

Als nächstes bestimmen wir die Funktionaldeterminante für die Transformation $\Phi = (2u, 3v)^T$:

$$J_{\Phi}(u, v) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \implies |\det J_{\Phi}(u, v)| = 6.$$

Damit folgt

$$\int_{\Omega} x^2 \, d(x, y) = \int_D (2u)^2 \cdot 6 \, d(u, v) = 24 \cdot \int_D u^2 \, d(u, v).$$

Für die Integration über den Einheitskreis D verwenden wir noch eine Substitution in Polarkoordinaten:

$$\Psi(r, \varphi) = (u(r, \varphi), v(r, \varphi))^T = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))^T.$$

Die Funktionaldeterminante dieser Substitution wurde bereits in Aufgabenteil a) berechnet und ist $\det J_{\Psi}(r, \varphi) = r$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} x^2 \, d(x, y) &= 24 \cdot \int_D u^2 \, d(u, v) = 24 \cdot \int_{[0;1] \times [0;2\pi]} r^2 \cos^2(\varphi) \cdot r \, d(r, \varphi) \\ &= 6 \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi) \cdot \int_0^1 4r^3 \, dr \, d\varphi = 6 \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi) \cdot [r^4]_{r=0}^{r=1} \, d\varphi \\ &= 6 \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi) \, d\varphi = 6 \cdot \left[\frac{\cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi) + \varphi}{2} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = 6\pi. \end{aligned}$$

c) $f(x, y) := x^2 - xy + y^2$, Ω ist das Innere der Ellipse $x^2 - xy + y^2 = 2$.

Substitution: $x = \sqrt{2} \cdot u - \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot v$, $y = \sqrt{2} \cdot u + \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot v$.

$$\frac{4 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi}{3}$$

Lösung:

Zunächst stellen wir f in u und v dar:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 - xy + y^2 \\ &= \left(\sqrt{2} \cdot u - \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot v \right)^2 - \left(\sqrt{2} \cdot u - \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot v \right) \cdot \left(\sqrt{2} \cdot u + \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot v \right) + \left(\sqrt{2} \cdot u + \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot v \right)^2 \\ &= 2u^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot u \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot v + \frac{6}{9} \cdot v^2 - 2u^2 + \frac{6}{9} \cdot v^2 + 2u^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot u \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot v + \frac{6}{9} \cdot v^2 \\ &= 2u^2 + 2v^2. \end{aligned}$$

Wegen $\Omega = \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) \leq 2 \right\}$ liegen auch in diesem Beispiel die Substitutionsvariablen innerhalb des Einheitskreises $D := \left\{ (u, v)^T \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq 1 \right\}$.

Wir berechnen die Funktionaldeterminante zur angegebenen Substitution:

$$\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cdot u - \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot v \\ \sqrt{2} \cdot u + \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot v \end{pmatrix}, \quad J_{\Phi}(u, v) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \sqrt{2} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}, \quad |\det J_{\Phi}(u, v)| = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{3}.$$

Erneut ergibt sich mit der Transformation in Polarkoordinaten (siehe Aufgabenteil a))

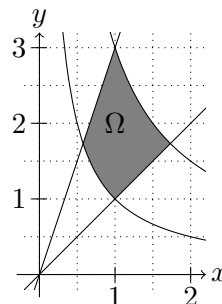
$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x, y) \, d(x, y) &= \int_D (2u^2 + 2v^2) \cdot \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{3} \, d(u, v) \\ &= \frac{8 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot \int_{[0;1] \times [0;2\pi]} (r^2 \cos^2(\varphi) + r^2 \sin^2(\varphi)) \cdot r \, d(r, \varphi) \\ &= \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^1 4r^3 \, dr \, d\varphi = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot \int_0^{2\pi} [r^4]_{r=0}^{r=1} \, d\varphi \\ &= \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot \int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot [\varphi]_{\varphi=0}^{2\pi} = \frac{4 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi}{3}. \end{aligned}$$

- d) $f(x, y) := xy$, Ω liegt im ersten Quadranten (also $\Omega \subseteq \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \text{ und } 0 \leq x \right\}$) zwischen den Linien $y = x$, $y = 3x$, $xy = 1$ und $xy = 3$. Substitution: $x = u/v$, $y = v$. $2 \cdot \ln(3)$

Lösung:

Als erstes bestimmen wir das Integrationsgebiet G für die Variablen u und v .

- Da $xy \geq 1$ in Ω gilt (Skizze!), gilt auch $\frac{u}{v} \cdot v = u \geq 1$ in G .
- Die Ungleichung $xy \leq 3$ in Ω (Skizze!) liefert genauso $u \leq 3$ in G .
- Da $y \geq x$ in Ω gilt, folgt $v \geq \frac{u}{v}$ bzw. $u \leq v^2$, also $v \geq \sqrt{u}$ in G .
- Die Ungleichung $y \leq 3x$ in Ω liefert genauso $v \leq \sqrt{3u}$ in G .



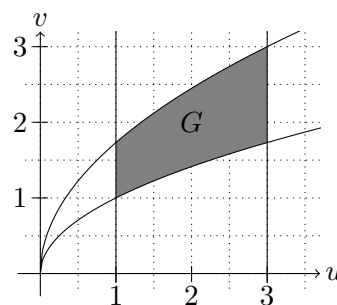
Der Integrationsbereich für u und v ist links skizziert:

$$G = \left\{ (u, v)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq u \leq 3 \text{ und } \sqrt{u} \leq v \leq \sqrt{3u} \right\}$$

Für die Transformation $\Phi(u, v) = \left(\frac{u}{v}, v\right)^T$ ergibt sich als Funktionaldeterminante

$$J_{\Phi}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{also} \quad |\det(J_{\Phi}(u, v))| = \frac{1}{v}$$

Das gesuchte Integral ist also



$$\begin{aligned} \int_{\Omega} xy \, d(x, y) &= \int_G u \cdot \frac{1}{v} \, d(u, v) = \int_1^3 \int_{\sqrt{u}}^{\sqrt{3u}} \frac{u}{v} \, dv \, du = \int_1^3 u \cdot [\ln(|v|)]_{v=\sqrt{u}}^{v=\sqrt{3u}} \, du \\ &= \int_1^3 u \cdot \left(\ln(\sqrt{3u}) - \ln(\sqrt{u}) \right) \, du = \int_1^3 u \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{3u}}{\sqrt{u}}\right) \, du = \int_1^3 u \cdot \ln(\sqrt{3}) \, du \\ &= \left[\frac{1}{2} \cdot u^2 \cdot \ln\left(3^{\frac{1}{2}}\right) \right]_1^3 = \frac{1}{2} \cdot (9 - 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln(3) = \frac{1}{4} \cdot 8 \cdot \ln(3) = 2 \cdot \ln(3). \end{aligned}$$



IntMehrDim/Theorie/Ag_IntegralrechnungImRn_2dimGebietsintegralNichtFubini.tex

Aufgabe 80.383 (Integral über 2-dimensionalen Bereich — Fubini anwendbar?) [rk in Anlehnung an Arens/Hettlich, ..., Mathematik, S. 842, Beispiel \(Integrationsreihenfolge iteriertes Integral\)](#)

Berechnen Sie die beiden iterierten Integrale $-\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$. Kein Fubini, da z.B. $\frac{x-0}{(x+0)^3}$ nicht integrierbar über $[0; 1]$

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx dy \quad \text{und} \quad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy dx \quad !$$

Kann man hier den Satz von Fubini anwenden? Wenn ja, zeigen Sie, dass die Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind! Wenn nein, geben Sie eine Voraussetzung des Satzes an, die verletzt ist!

Hinweis: Wenn Sie möchten, können Sie nur das erste iterierte Integral explizit berechnen (*Tipp:* 0 addieren) und den Wert des zweiten Integrals durch eine Symmetrieüberlegung ermitteln.

Lösung:

Mit Hilfe der Substitutionsregel erhält man

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy dx \stackrel{x=s, y=t}{=} \int_0^1 \int_0^1 \frac{s-t}{(s+t)^3} dt ds = - \int_0^1 \int_0^1 \frac{t-s}{(t+s)^3} dt ds \stackrel{t=x, s=y}{=} - \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx dy.$$

Die beiden Integrale sind also nur dann gleich, wenn sie verschwinden. Es gilt aber

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx dy &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{x+y-2y}{(x+y)^3} dx dy = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{-2y}{(x+y)^3} \right) dx dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{-1}{x+y} + \frac{y}{(x+y)^2} \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 \left(\frac{-1}{1+y} - \frac{-1}{0+y} + \frac{y}{(1+y)^2} - \frac{y}{(0+y)^2} \right) dy \\ &= \int_0^1 \frac{-1 \cdot (1+y) + y}{(1+y)^2} dy = \int_0^1 \frac{-1}{(1+y)^2} dy = \left[\frac{1}{1+y} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{1+1} - \frac{1}{1+0} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Also kann der Satz von Fubini nicht anwendbar sein.

Tatsächlich ist der Integrand z.B. für $y = 0$ nicht über $[0; 1]$ nach x integrierbar:

$$\int_0^1 \frac{x-0}{(x+0)^3} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[\frac{-1}{x} \right]_a^1 = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left(\frac{-1}{1} - \frac{-1}{a} \right) = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{a} - 1 \right) = \infty.$$



IntMehrDim/Theorie/Ag_RiemannIntegrierbar_IntegrierbarkeitUebepuefen.tex

Aufgabe 80.384 (Integrierbarkeit überprüfen)

VT

Verwenden Sie die Zerlegungen

$$Z_n := \left\{ \left(\frac{i}{2^n}, \frac{j}{2^n} \right) ; i, j \in \{0, 1, \dots, 2^n\} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

des Quadrates $[0, 1]^2$ um zu zeigen, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = x^2 + y$$

über $[0, 1]^2$ Riemann-integrierbar ist.

Bemerkung: Das Riemann-Integral selbst brauchen Sie nicht auszurechnen!

Lösung:

Aus der Vorlesung ist der folgende Satz bekannt: Eine Beschränkte Funktion $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann über (dem Rechteck) Q integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z gibt mit

$$O(f; Z) - U(f; Z) \leq \varepsilon.$$

Dabei sind $O(f; Z)$ die Obersumme und $U(f; Z)$ die Untersumme zu der Zerlegung Z .
Berechne die Differenz der Ober- und Untersumme für die vorgegebenen Zerlegungen Z_n :

$$O(f; Z_n) - U(f; Z_n) = \sum_{i=1}^{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} \sup(f(Q_{ij})) \cdot |Q_{ij}| - \sum_{i=1}^{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} \inf(f(Q_{ij})) \cdot |Q_{ij}|$$

Die einzelnen Rechtecke Q_{ij} sind

$$Q_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \\ \Rightarrow |Q_{ij}| = (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}) = \left(\frac{i}{2^n} - \frac{i-1}{2^n}\right) \cdot \left(\frac{j}{2^n} - \frac{j-1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

Die Funktion $f(x, y)$ ist monoton wachsend in x und y für $(x, y) \in Q = [0, 1]^2$. Dementsprechend wird das Supremum am oberen rechten Ecke (x_i, y_j) des Rechteckes und das Infimum am unteren linken Ecke (x_{i-1}, y_{j-1}) des Rechteckes erreicht:

$$\sup(f(Q_{ij})) = f(x_i, y_j) = (x_i)^2 + y_j \quad \text{und} \quad \inf(f(Q_{ij})) = f(x_{i-1}, y_{j-1}) = (x_{i-1})^2 + y_{j-1}.$$

Wegen der endlichen Summen können die Summanden unter einer Summe zusammengebracht werden und die gesuchte Differenz ist:

$$\begin{aligned} O(f; Z_n) - U(f; Z_n) &= \sum_{i=1}^{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} \sup(f(Q_{ij})) \cdot |Q_{ij}| - \sum_{i=1}^{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} \inf(f(Q_{ij})) \cdot |Q_{ij}| \\ &= \sum_{i=1}^{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} (\sup(f(Q_{ij})) - \inf(f(Q_{ij}))) \cdot |Q_{ij}| \\ &= \sum_{i=1}^{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} (f(x_i, y_j) - f(x_{i-1}, y_{j-1})) \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n} \\ &= \sum_{i=1}^{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} ((x_i)^2 + y_j - ((x_{i-1})^2 + y_{j-1})) \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n} \\ &= \sum_{i=1}^{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} ((x_i)^2 - (x_{i-1})^2 + y_j - y_{j-1}) \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Weiter verwenden wir dass

$$y_j - y_{j-1} = \frac{j}{2^n} - \frac{j-1}{2^n} = \frac{1}{2^n}$$

und

$$(x_i)^2 - (x_{i-1})^2 = (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i + x_{i-1}) = \left(\frac{i}{2^n} - \frac{i-1}{2^n}\right) \cdot \left(\frac{i}{2^n} + \frac{i-1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{2i-1}{2^n}.$$

Eingesetzt in der Differenz der Ober- und Untersumme liefert es:

$$\begin{aligned}
 O(f; Z_n) - U(f; Z_n) &= \sum_{i=1}^{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} \left(\frac{1}{2^n} \cdot \frac{2i-1}{2^n} + \frac{1}{2^n} \right) \cdot \left(\frac{1}{2^n} \right)^2 \\
 &= \left(\frac{1}{2^n} \right)^3 \sum_{i=1}^{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} \left(\frac{2i-1}{2^n} + 1 \right) = \left(\frac{1}{2^n} \right)^3 \sum_{i=1}^{2^n} \left(\frac{2i-1}{2^n} + 1 \right) \cdot 2^n \\
 &= \left(\frac{1}{2^n} \right)^3 \sum_{i=1}^{2^n} (2i-1 + 2^n) = \left(\frac{1}{2^n} \right)^3 \left(2 \sum_{i=1}^{2^n} i - \sum_{i=1}^{2^n} 1 + \sum_{i=1}^{2^n} 2^n \right) \\
 &= \left(\frac{1}{2^n} \right)^3 \left(2 \cdot \frac{2^n(2^n+1)}{2} - 2^n + 2^n \cdot 2^n \right) = \left(\frac{1}{2^n} \right)^2 (2^n + 1 - 1 + 2^n) \\
 &= \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}
 \end{aligned}$$

Sei jetzt $\varepsilon > 0$. Suche ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass

$$\begin{aligned}
 O(f; Z_{n_0}) - U(f; Z_{n_0}) = \frac{1}{2^{n_0-1}} \leq \varepsilon &\iff \frac{1}{\varepsilon} \leq 2^{n_0-1} \iff \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \leq \ln 2^{n_0-1} \\
 &\iff \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \leq (n_0 - 1) \ln 2 \iff \frac{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}{\ln 2} \leq n_0 - 1 \iff n_0 \geq \frac{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}{\ln 2} + 1
 \end{aligned}$$

Nehme

$$n_0 = \max \left\{ \left\lceil \frac{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}{\ln 2} + 1 \right\rceil, 1 \right\}.$$

Dann ist

$$O(f; Z_{n_0}) - U(f; Z_{n_0}) \leq \varepsilon,$$

d.h., für jedes $\varepsilon > 0$ kann eine geeignete Zerlegung gefunden werden und die Funktion ist damit Riemann-integrierbar.



IntMehrDim/Theorie/Ag_RiemannIntegrierbar_MitSummenIntegrieren.tex

Aufgabe 80.385 (Mit Summen integrieren)

vr

Bestimmen Sie das Riemann-Integral der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = x - y$$

über $Q = [0, 1]^2$ als Grenzwert von Ober- und Untersummen.

Verwenden Sie dafür die Zerlegungen

$$Z_n := \left\{ \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right), i, j \in \{0, 1, \dots, n\} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

0

Lösung:

In jedem einzelnen Teilrechteck $Q_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ aus der Zerlegung Z_n gilt:

$$|Q_{ij}| = (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}) = \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} \right) \cdot \left(\frac{j}{n} - \frac{j-1}{n} \right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$$

sowie

$$\inf f(Q_{ij}) = f(x_{i-1}, y_j) = x_{i-1} - y_j = \frac{i-1}{n} - \frac{j}{n} = \frac{i-j-1}{n}$$

und

$$\sup f(Q_{ij}) = f(x_i, y_{j-1}) = x_i - y_{j-1} = \frac{i}{n} - \frac{j-1}{n} = \frac{i-j+1}{n}.$$

Untersummen sind damit

$$\begin{aligned}
 U(f; Z_n) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \inf(f(Q_{ij})) |Q_{ij}| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{i-j-1}{n} \cdot \frac{1}{n^2} \\
 &= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i-j-1) = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \left(i \cdot n - \frac{n(n+1)}{2} - n \right) \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \left(i - \frac{n+1}{2} - 1 \right) = \frac{1}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n+1}{2} \cdot n - n \right) \\
 &= \frac{1}{n} \left(\frac{n+1}{2} - \frac{n+1}{2} - 1 \right) = -\frac{1}{n}.
 \end{aligned}$$

Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U(f; Z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} = 0 \implies \underline{J}(f, Q) = \sup\{U(f; Z) : Z \text{ ist eine Zerlegung}\} \geq 0.$$

Die Obersummen werden sehr ähnlich berechnet:

$$\begin{aligned}
 O(f; Z_n) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sup(f(Q_{ij})) |Q_{ij}| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{i-j+1}{n} \cdot \frac{1}{n^2} \\
 &= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i-j+1) = \frac{1}{n}.
 \end{aligned}$$

Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} O(f; Z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \implies \bar{J}(f, Q) = \inf\{O(f; Z) : Z \text{ ist eine Zerlegung}\} \leq 0.$$

Wegen

$$0 \leq \underline{J}(f; Q) \leq \bar{J}(f, Q) \leq 0$$

ist

$$\int_Q f(x, y) d(x, y) = \underline{J}(f; Q) = \bar{J}(f, Q) = 0.$$



IntMehrDim/Theorie/Ag_RiemannIntegrierbar_NichtIntegrierbar.tex

Aufgabe 80.386 (Nicht integrierbare Funktion)

VI

Zeigen Sie mit Hilfe der Untersummen, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y} & , y \neq 0 \\ 0 & , y = 0 \end{cases}$$

über $Q = [0, 1]^2$ nicht Riemann-integrierbar ist.

Lösung:

Nehme die Zerlegung

$$Z_n = \left\{ \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right), i, j \in \{0, 1, \dots, n\} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt

$$\inf f(Q_{ij}) = \frac{x_{i-1}}{y_j} = \frac{\frac{i-1}{n}}{\frac{j}{n}} = \frac{i-1}{j}$$

und

$$|Q_{ij}| = (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}) = \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} \right) \cdot \left(\frac{j}{n} - \frac{j-1}{n} \right) = \frac{1}{n^2}.$$

Die Untersumme zu der Zerlegung Z_n ist

$$\begin{aligned}
 U(f; Z_n) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \inf f(Q_{ij}) |Q_{ij}| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{i-1}{j} \cdot \frac{1}{n^2} \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{j} = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \left(\sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n 1 \right) \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \left(\frac{n(n+1)}{2} - n \right) = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \left(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \right) = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} (n-1) .
 \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
 \underline{J}(f; Q) &= \sup \{ U(f, Z) : Z \text{ ist eine Zerlegung} \} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} U(f; Z_n) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} (n-1) > \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \cdot n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} = \infty
 \end{aligned}$$

da über die harmonische Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$$

bekannt ist, dass diese divergent ist.

Deswegen kann $\underline{J}(f; Q)$ keine endliche Zahl sein und die Funktion f ist über Q nicht integrierbar.



IntTrafo/Fourier/Ag_FouTrafo_IntegralUeberRuecktrafoBerechnen.tex

Aufgabe 81.387 (Uneigentliches Integral mit Hilfe der (inversen) Fourier-Transformation berechnen) spf

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto g(x) := \frac{1}{1+x^2}$ absolut integrierbar ist!

π

Lösung:

Die Funktion g ist absolut integrierbar, wenn $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx$ existiert.

Das werden wir jetzt nachrechnen:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left| \frac{1}{1+x^2} \right|}_{>0} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} [\arctan(x)]_{x=a}^{x=0} + \lim_{b \rightarrow \infty} [\arctan(x)]_{x=0}^{x=b} \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \underbrace{(\arctan(0) - \arctan(a))}_{=0} + \lim_{b \rightarrow \infty} \underbrace{(\arctan(b) - \arctan(0))}_{=0} \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \underbrace{(-\arctan(a))}_{\rightarrow -\frac{\pi}{2}} + \lim_{b \rightarrow \infty} \underbrace{(\arctan(b))}_{\rightarrow \frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi < \infty. \end{aligned}$$

b) Ermitteln Sie eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\mathcal{F}f = g$, indem Sie das Ergebnis einer bereits gelösten Aufgabe auf diesem Blatt zur Hilfe nehmen!

Hinweis: Man nennt diese Vorgehensweise „Rücktransformation durch Nachschlagen in einer Transformationstabelle“.

$$f(t) = \pi \cdot e^{-|t|}$$

Lösung:

Wir haben in einer früheren Aufgabe gesehen, dass die Fouriertransformierte von

$$u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad t \mapsto u(t) := e^{-|t|}$$

die Funktion

$$\mathcal{F}u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \omega \mapsto (\mathcal{F}u)(\omega) := \frac{1}{\pi \cdot (1 + \omega^2)}$$

ist. Dies ist genau die Funktion g — bis auf den Faktor π im Nenner. Da aber die Fourier-Transformation linear ist, können wir einfach die Ausgangsfunktion mit π skalieren und erhalten damit die Funktion

$$f := \pi \cdot u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad t \mapsto f(t) = \pi \cdot e^{-|t|}$$

mit Fouriertransformierter $\mathcal{F}f = g$.

c) Berechnen Sie das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot \exp(i \cdot x) dx$ mit Hilfe der inversen Fourier-Transformation!

$\frac{\pi}{e}$

Lösung:

Die inverse Fourier-Transformation sagt uns, dass für alle $t \in \mathbb{R}$, in denen f stetig ist, folgende Formel gilt:

$$\text{CH-} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) \cdot e^{i\omega \cdot t} d\omega = f(t).$$

Weil die Funktion g (nach Aufgabenteil a)) absolut integrierbar ist, dürfen wir das Cauchy-Hauptwert-Integral durch ein gewöhnliches (absolut konvergentes) Integral ersetzen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\omega^2} \cdot e^{i\omega \cdot t} d\omega = \text{CH-} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\omega^2} \cdot e^{i\omega \cdot t} d\omega = \text{CH-} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) \cdot e^{i\omega \cdot t} d\omega = f(t) = \pi \cdot e^{-|t|}.$$

Diese Formel gilt für alle $t \in \mathbb{R}$, weil die Funktion f überall stetig ist. Insbesondere folgt für $t = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot \exp(i \cdot x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \cdot e^{i \cdot x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\omega^2} \cdot e^{i\omega \cdot 1} d\omega = \pi \cdot e^{-|1|} = \frac{\pi}{e}.$$

d) Verwenden Sie den Integralwert aus Aufgabenteil c), um das reelle uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx$$

zu berechnen! Dies ist mit elementaren Mitteln (ohne Fourier-Transformation) nicht möglich.

$\frac{\pi}{e}$

Lösung:

Der Integralwert der komplexwertigen Funktion (einer *reellen* Variablen) aus Aufgabenteil c) ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \cdot \exp(i \cdot x) dx = \frac{\pi}{e}.$$

Wenn wir nun auf beiden Seiten den Realteil nehmen, erhalten wir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \cdot \text{Re}(\exp(i \cdot x)) dx = \text{Re}\left(\frac{\pi}{e}\right),$$

also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \cdot \cos(x) dx = \frac{\pi}{e}.$$

Anmerkung: Verwendet man den Imaginärteil statt des Realteils, so erhält man den Integralwert

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \cdot \sin(x) dx = 0,$$

der sich aber bereits aus der Symmetrie des Integranden ermitteln ließe.



IntTrafo/Fourier/Ag_Fouriertrans_AbgeschnitteneSignumFktInklFaltung.tex

Aufgabe 81.388 (Fouriertransformierte und Faltung)

spf

Für eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x)$, welche stückweise stetig und absolut integrierbar ist, bildet $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $s \mapsto \hat{f}(s) := \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-isx} dx$ die Fouriertransformierte von f .

Für zwei quadratisch integrierbare Funktionen $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto g(x)$ und $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto h(x)$ bildet $g * h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto (g * h)(t) := \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(t-x) \cdot h(x) dx$ die Faltung von g und h .

Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$, sowie

$$y_{\alpha,b}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto y_{\alpha,b}(x) := \begin{cases} b, & \text{für } 0 < x \leq \alpha \\ -b, & \text{für } -\alpha \leq x < 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\hat{y}_{\alpha,b}$!

$\hat{y}_{\alpha,b}(0) = 0$ und $\hat{y}_{\alpha,b}(s) = \frac{ib}{\pi s} \cdot (\cos(\alpha s) - 1)$ für alle $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Lösung:

Es gilt

$$\begin{aligned}\hat{y}_{\alpha,b}(0) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y_{\alpha,b}(x) \cdot e^{-i \cdot 0 \cdot x} dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y_{\alpha,b}(x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{-\alpha} 0 dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\alpha}^0 (-b) dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{\alpha} b dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\alpha}^{\infty} 0 dx \\ &= 0 + \frac{1}{2\pi} \cdot [-bx]_{x=-\alpha}^{x=0} + \frac{1}{2\pi} \cdot [bx]_{x=0}^{x=\alpha} + 0 = \frac{1}{2\pi} \cdot (-0 + b \cdot (-\alpha) + b\alpha - 0) = 0.\end{aligned}$$

Für alle $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$\begin{aligned}\hat{y}_{\alpha,b}(s) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y_{\alpha,b}(x) \cdot e^{-isx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{-\alpha} 0 dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\alpha}^0 (-b) \cdot e^{-isx} dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{\alpha} b \cdot e^{-isx} dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\alpha}^{\infty} 0 dx \\ &= 0 + \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{-b}{-is} \cdot e^{-isx} \right]_{x=-\alpha}^{x=0} + \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{b}{-is} \cdot e^{-isx} \right]_{x=0}^{x=\alpha} + 0 \\ &= \frac{ib}{2\pi s} \cdot (-e^{-is \cdot 0} + e^{is\alpha} + e^{-is\alpha} - e^{-is \cdot 0}) = \frac{ib}{2\pi s} \cdot (-1 + 2 \cdot \cos(s\alpha) - 1) \\ &= \frac{ib}{\pi s} \cdot (\cos(\alpha s) - 1).\end{aligned}$$

b) Berechnen Sie die Faltung von $y_{\alpha,b}$ mit sich selbst!

Tipp: Fallunterscheidung für $t \in (-\infty; -2\alpha) \cup [-2\alpha; -\alpha) \cup [-\alpha; 0) \cup [0; \alpha] \cup (\alpha; 2\alpha] \cup (2\alpha; \infty)$.

$(y_{\alpha,b} * y_{\alpha,b})(t) = 0$ für $|t| > 2\alpha$, $(y_{\alpha,b} * y_{\alpha,b})(t) = \frac{b^2}{2\pi} \cdot (-|t| + 2\alpha)$ für $\alpha < |t| \leq 2\alpha$, $(y_{\alpha,b} * y_{\alpha,b})(t) = \frac{b^2}{2\pi} \cdot (|3t| - 2\alpha)$ für $|t| \leq \alpha$

Lösung:

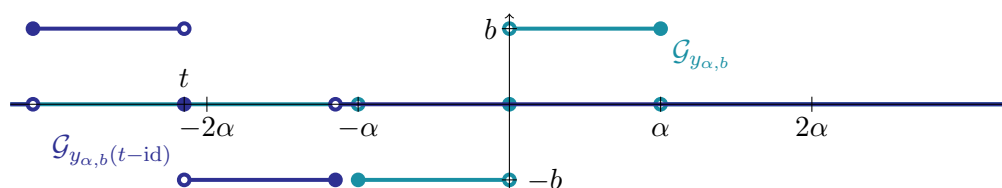
Für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$y_{\alpha,b}(t-x) = \begin{cases} b, & \text{für } 0 < t-x \leq \alpha \\ -b, & \text{für } -\alpha \leq t-x < 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} b, & \text{für } t-\alpha \leq x < t \\ -b, & \text{für } t < x \leq t+\alpha \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Sei $z_{\alpha,b} := y_{\alpha,b} * y_{\alpha,b}$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}z_{\alpha,b}(t) &= (y_{\alpha,b} * y_{\alpha,b})(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y_{\alpha,b}(t-x) \cdot y_{\alpha,b}(x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\alpha}^0 y_{\alpha,b}(t-x) \cdot (-b) dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{\alpha} y_{\alpha,b}(t-x) \cdot b dx.\end{aligned}$$

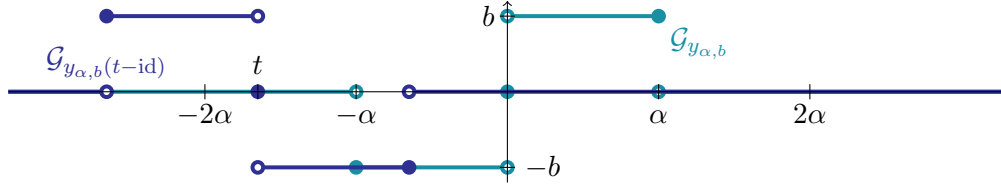
Fall 1 ($t < -2\alpha$): Für $t < -2\alpha$ ergibt sich folgendes Bild:



Für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t < -2\alpha$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $-\alpha \leq x \leq \alpha$ ist $t - x < -\alpha$. Damit folgt für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t < -2\alpha$

$$z_{\alpha,b}(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\alpha}^0 0 \cdot (-b) dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{\alpha} 0 \cdot b dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\alpha}^0 0 dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{\alpha} 0 dx = 0.$$

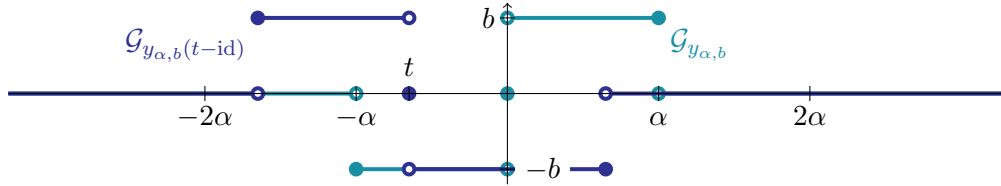
Fall 2 ($-2\alpha \leq t < -\alpha$): Für $-2\alpha \leq t < -\alpha$ ergibt sich folgendes Bild:



Für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $-2\alpha \leq t < -\alpha$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq x \leq \alpha$ ist $t - x < -\alpha$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $-2\alpha \leq t < -\alpha$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $-\alpha \leq x \leq 0$ ist $t - x < 0$ und $t - x \geq -\alpha$ genau dann, wenn $-\alpha \leq x \leq t + \alpha$ gilt. Damit folgt für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $-2\alpha \leq t < -\alpha$

$$\begin{aligned} z_{\alpha,b}(t) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\alpha}^{t+\alpha} (-b) \cdot (-b) dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{t+\alpha}^0 0 \cdot (-b) dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{\alpha} 0 \cdot b dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\alpha}^{t+\alpha} b^2 dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{t+\alpha}^0 0 dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{\alpha} 0 dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot [b^2 \cdot x]_{x=-\alpha}^{x=t+\alpha} + 0 + 0 = \frac{1}{2\pi} \cdot b^2 \cdot ((t+\alpha) - (-\alpha)) = \frac{b^2}{2\pi} \cdot (t+2\alpha). \end{aligned}$$

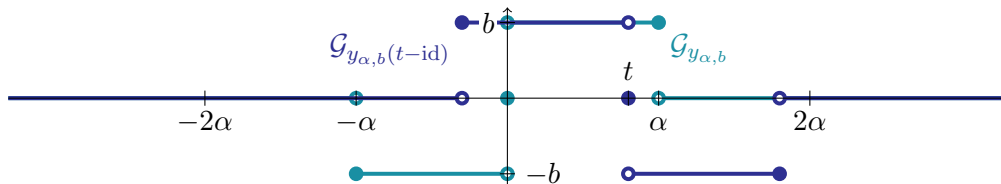
Fall 3 ($-\alpha \leq t < 0$): Für $-\alpha \leq t < 0$ ergibt sich folgendes Bild:



Für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $-\alpha \leq t < 0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq x \leq \alpha$ ist $t - x < 0$ und $t - x \geq -\alpha$ genau dann, wenn $0 \leq x \leq t + \alpha$ gilt. Für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $-\alpha \leq t < 0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $-\alpha \leq x \leq 0$ ist $0 > t - x \geq -\alpha$ genau dann, wenn $t < x \leq 0$ gilt. Für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $-\alpha \leq t < 0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $-\alpha \leq x \leq 0$ ist $0 < t - x \leq \alpha$ genau dann, wenn $-\alpha \leq x < t$ gilt. Damit folgt für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $-\alpha \leq t < 0$

$$\begin{aligned} z_{\alpha,b}(t) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\alpha}^t b \cdot (-b) dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_t^0 (-b) \cdot (-b) dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{t+\alpha} (-b) \cdot b dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{t+\alpha}^{\alpha} 0 \cdot b dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\alpha}^t (-b^2) dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_t^0 b^2 dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{t+\alpha} (-b^2) dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{t+\alpha}^{\alpha} 0 dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot [-b^2 \cdot x]_{x=-\alpha}^{x=t} + \frac{1}{2\pi} \cdot [b^2 \cdot x]_{x=t}^0 + \frac{1}{2\pi} \cdot [-b^2 \cdot x]_{x=0}^{x=t+\alpha} + 0 \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot b^2 \cdot (-t + (-\alpha) + 0 - t - (t+\alpha) + 0) = \frac{b^2}{2\pi} \cdot (-3t - 2\alpha). \end{aligned}$$

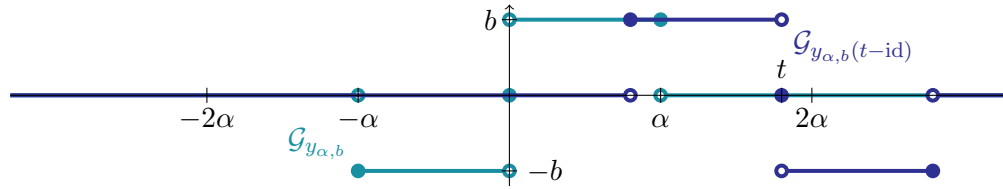
Fall 4 ($0 \leq t \leq \alpha$): Für $0 \leq t \leq \alpha$ ergibt sich folgendes Bild:



Für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq t \leq \alpha$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $-\alpha \leq x \leq 0$ ist $t - x > 0$ und $t - x \leq \alpha$ genau dann, wenn $t - \alpha \leq x \leq 0$ gilt. Für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq t \leq \alpha$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq x \leq \alpha$ ist $0 < t - x \leq \alpha$ genau dann, wenn $0 \leq x < t$ gilt. Für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq t \leq \alpha$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq x \leq \alpha$ ist $-\alpha \leq t - x \leq 0$ genau dann, wenn $t \leq x \leq \alpha$ gilt. Damit folgt für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq t \leq \alpha$

$$\begin{aligned}
& z_{\alpha,b}(t) \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\alpha}^{t-\alpha} 0 \cdot (-b) dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{t-\alpha}^0 b \cdot (-b) dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^t b \cdot b dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_t^\alpha (-b) \cdot b dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\alpha}^{t-\alpha} 0 dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{t-\alpha}^0 (-b^2) dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^t b^2 dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_t^\alpha (-b^2) dx \\
&= 0 + \frac{1}{2\pi} \cdot [-b^2 \cdot x]_{x=t-\alpha}^{x=0} + \frac{1}{2\pi} \cdot [b^2 \cdot x]_{x=0}^t + \frac{1}{2\pi} \cdot [-b^2 \cdot x]_{x=t}^{x=\alpha} + 0 \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot b^2 \cdot (-0 + (t - \alpha) + t - 0 - \alpha + t) = \frac{b^2}{2\pi} \cdot (3t - 2\alpha).
\end{aligned}$$

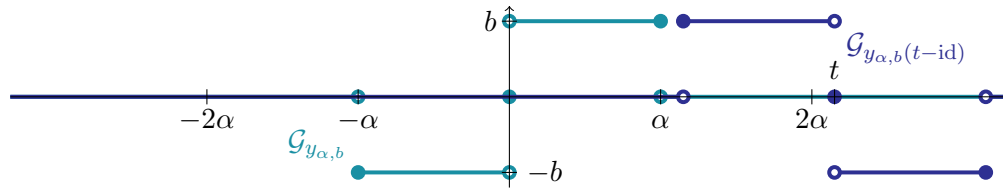
Fall 5 ($\alpha < t \leq 2\alpha$): Für $\alpha < t \leq 2\alpha$ ergibt sich folgendes Bild:



Für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < t \leq 2\alpha$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $-\alpha \leq x < 0$ ist $t - x > \alpha$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < t \leq 2\alpha$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq x \leq \alpha$ ist $t - x > 0$ und $t - x \leq \alpha$ genau dann, wenn $t - \alpha \leq x \leq \alpha$ gilt. Damit folgt für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < t \leq 2\alpha$

$$\begin{aligned}
z_{\alpha,b}(t) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\alpha}^0 0 \cdot (-b) dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{t-\alpha} 0 \cdot b dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{t-\alpha}^\alpha b \cdot b dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\alpha}^0 0 dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{t-\alpha} 0 dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{t-\alpha}^\alpha b^2 dx \\
&= 0 + 0 + \frac{1}{2\pi} \cdot [b^2 \cdot x]_{x=t-\alpha}^{x=\alpha} = \frac{1}{2\pi} \cdot b^2 \cdot (\alpha - (t - \alpha)) = \frac{b^2}{2\pi} \cdot (-t + 2\alpha).
\end{aligned}$$

Fall 6 ($t > 2\alpha$): Für $t > 2\alpha$ ergibt sich folgendes Bild:

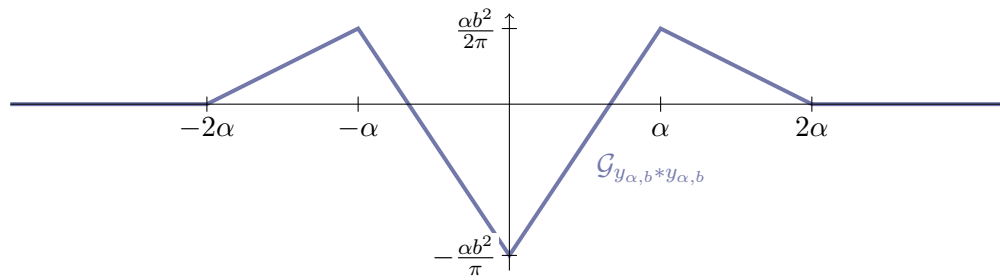


Für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 2\alpha$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $-\alpha \leq x \leq \alpha$ ist $t - x > \alpha$. Damit folgt für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 2\alpha$

$$z_{\alpha,b}(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\alpha}^0 0 \cdot (-b) dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^\alpha 0 \cdot b dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\alpha}^0 0 dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^\alpha 0 dx = 0.$$

Insgesamt folgt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$z_{\alpha,b}(t) = (y_{\alpha,b} * y_{\alpha,b})(t) = \begin{cases} \frac{b^2}{2\pi} \cdot (|3t| - 2\alpha), & \text{für } |t| \leq \alpha \\ \frac{b^2}{2\pi} \cdot (-|t| + 2\alpha), & \text{für } \alpha < |t| \leq 2\alpha \\ 0, & \text{für } |t| > 2\alpha \end{cases}$$



c) Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Faltung aus Aufgabenteil b)!

$$\widehat{y_{\alpha,b} * y_{\alpha,b}}(0) = 0 \text{ und } \widehat{y_{\alpha,b} * y_{\alpha,b}}(s) = \frac{-b^2}{\pi^2 \cdot s^2} \cdot (\cos(\alpha s) - 1)^2 \text{ f\"ur alle } s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Lösung mit Hilfe des Faltungssatzes:

Der Faltungssatz liefert mit Hilfe von Aufgabenteil a)

$$\begin{aligned} \widehat{y_{\alpha,b} * y_{\alpha,b}}(0) &= \hat{y}_{\alpha,b}(0) \cdot \hat{y}_{\alpha,b}(0) = 0 \cdot 0 = 0 \\ \text{und} \quad \widehat{y_{\alpha,b} * y_{\alpha,b}}(s) &= \hat{y}_{\alpha,b}(s) \cdot \hat{y}_{\alpha,b}(s) = \frac{ib}{\pi s} \cdot (\cos(\alpha s) - 1) \cdot \frac{ib}{\pi s} \cdot (\cos(\alpha s) - 1) \\ &= \frac{-b^2}{\pi^2 \cdot s^2} \cdot (\cos(\alpha s) - 1)^2 \quad \text{f\"ur alle } s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Lösung ohne Verwendung des Faltungssatzes:

Es gilt

$$\begin{aligned} \widehat{y_{\alpha,b} * y_{\alpha,b}}(0) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (y_{\alpha,b} * y_{\alpha,b})(x) \cdot e^{-i \cdot 0 \cdot x} dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (y_{\alpha,b} * y_{\alpha,b})(x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{-2\alpha} 0 dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-2\alpha}^{-\alpha} \frac{b^2}{2\pi} \cdot (x + 2\alpha) dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\alpha}^0 \frac{b^2}{2\pi} \cdot (-3x - 2\alpha) dx \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{\alpha} \frac{b^2}{2\pi} \cdot (3x - 2\alpha) dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\alpha}^{2\alpha} \frac{b^2}{2\pi} \cdot (-x + 2\alpha) dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{2\alpha}^{\infty} 0 dx \\ &= 0 + \frac{b^2}{4\pi^2} \cdot \left[\frac{x^2}{2} + 2\alpha x \right]_{x=-2\alpha}^{x=-\alpha} + \frac{b^2}{4\pi^2} \cdot \left[-\frac{3x^2}{2} - 2\alpha x \right]_{x=-\alpha}^{x=0} \\ &\quad + \frac{b^2}{4\pi^2} \cdot \left[\frac{3x^2}{2} - 2\alpha x \right]_{x=0}^{x=\alpha} + \frac{b^2}{4\pi^2} \cdot \left[-\frac{x^2}{2} + 2\alpha x \right]_{x=\alpha}^{x=2\alpha} + 0 \\ &= \frac{b^2}{4\pi^2} \cdot \left(\frac{\alpha^2}{2} - 2\alpha^2 - \frac{4\alpha^2}{2} + 4\alpha^2 - 0 - 0 + \frac{3\alpha^2}{2} - 2\alpha^2 \right) \\ &\quad + \frac{b^2}{4\pi^2} \cdot \left(\frac{3\alpha^2}{2} - 2\alpha^2 - 0 + 0 - \frac{4\alpha^2}{2} + 4\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2} - 2\alpha^2 \right) \\ &= \frac{b^2 \cdot \alpha^2}{4\pi^2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 2 - 2 + 4 + \frac{3}{2} - 2 + \frac{3}{2} - 2 - 2 + 4 + \frac{1}{2} - 2 \right) \\ &= \frac{b^2 \cdot \alpha^2}{4\pi^2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 2 \right) = 0. \end{aligned}$$

Für alle $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ liefert partielle Integration

$$\begin{aligned}
\widehat{y_{\alpha,b} * y_{\alpha,b}}(s) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (y_{\alpha,b} * y_{\alpha,b})(x) \cdot e^{-isx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{-2\alpha} 0 \cdot e^{-isx} dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-2\alpha}^{-\alpha} \frac{b^2}{2\pi} \cdot (x+2\alpha) \cdot e^{-isx} dx \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\alpha}^0 \frac{b^2}{2\pi} \cdot (-3x-2\alpha) \cdot e^{-isx} dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{\alpha} \frac{b^2}{2\pi} \cdot (3x-2\alpha) \cdot e^{-isx} dx \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\alpha}^{2\alpha} \frac{b^2}{2\pi} \cdot (-x+2\alpha) \cdot e^{-isx} dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{2\alpha}^{\infty} 0 \cdot e^{-isx} dx \\
&= 0 + \frac{b^2}{4\pi^2} \cdot \left[(x+2\alpha) \cdot \frac{e^{-isx}}{-is} \right]_{x=-2\alpha}^{x=-\alpha} - \frac{b^2}{4\pi^2} \cdot \int_{-2\alpha}^{-\alpha} 1 \cdot \frac{e^{-isx}}{-is} dx \\
&\quad + \frac{b^2}{4\pi^2} \cdot \left[(-3x-2\alpha) \cdot \frac{e^{-isx}}{-is} \right]_{x=-\alpha}^{x=0} - \frac{b^2}{4\pi^2} \cdot \int_{-\alpha}^0 (-3) \cdot \frac{e^{-isx}}{-is} dx \\
&\quad + \frac{b^2}{4\pi^2} \cdot \left[(3x-2\alpha) \cdot \frac{e^{-isx}}{-is} \right]_{x=0}^{x=\alpha} - \frac{b^2}{4\pi^2} \cdot \int_0^{\alpha} 3 \cdot \frac{e^{-isx}}{-is} dx \\
&\quad + \frac{b^2}{4\pi^2} \cdot \left[(-x+2\alpha) \cdot \frac{e^{-isx}}{-is} \right]_{x=\alpha}^{x=2\alpha} - \frac{b^2}{4\pi^2} \cdot \int_{\alpha}^{2\alpha} (-1) \cdot \frac{e^{-isx}}{-is} dx + 0 \\
&= \frac{ib^2}{4s\pi^2} \cdot (\alpha e^{is\alpha} - 0 - 2\alpha e^0 - \alpha \cdot e^{is\alpha} + \alpha e^{-is\alpha} + 2\alpha e^0 + 0 - \alpha \cdot e^{-is\alpha}) \\
&\quad - \frac{b^2}{4\pi^2} \cdot \left(\left[\frac{e^{-isx}}{(-is)^2} \right]_{x=-2\alpha}^{x=-\alpha} + \left[\frac{-3e^{-isx}}{(-is)^2} \right]_{x=-\alpha}^{x=0} + \left[\frac{3e^{-isx}}{(-is)^2} \right]_{x=0}^{x=\alpha} + \left[\frac{-1e^{-isx}}{(-is)^2} \right]_{x=\alpha}^{x=2\alpha} \right) \\
&= \frac{b^2}{4\pi^2 \cdot s^2} \cdot (e^{is\alpha} - e^{is2\alpha} - 3e^0 + 3e^{is\alpha} + 3e^{-is\alpha} - 3e^0 - e^{-is2\alpha} + e^{-is\alpha}) \\
&= \frac{b^2}{2\pi^2 \cdot s^2} \cdot (-\cos(2\alpha s) + 4 \cdot \cos(\alpha s) - 3) \\
&= \frac{b^2}{2\pi^2 \cdot s^2} \cdot \left(-(\cos(\alpha s))^2 + (\sin(\alpha s))^2 + 4 \cdot \cos(\alpha s) - 3 \right) \\
&= \frac{b^2}{2\pi^2 \cdot s^2} \cdot \left(-(\cos(\alpha s))^2 + 1 - (\cos(\alpha s))^2 + 4 \cdot \cos(\alpha s) - 3 \right) \\
&= \frac{b^2}{2\pi^2 \cdot s^2} \cdot \left(-2 \cdot (\cos(\alpha s))^2 + 4 \cdot \cos(\alpha s) - 2 \right) \\
&= \frac{-b^2}{\pi^2 \cdot s^2} \cdot \left((\cos(\alpha s))^2 - 2 \cdot \cos(\alpha s) + 1 \right) \\
&= \frac{-b^2}{\pi^2 \cdot s^2} \cdot (\cos(\alpha s) - 1)^2.
\end{aligned}$$



IntTrafo/Fourier/Ag_Fouriertrans_DGLMitFouriertransLoesenRSIstEHochMinusBetrag.tex

Aufgabe 81.389 (Lösen einer Differentialgleichung mit Hilfe von Fouriertransformation)

spf

Sei $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto b(t) := -e^{-|t|}$.

Sei $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto y(t)$ zweimal differenzierbar auf $\mathbb{R}$, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$y''(t) - y(t) = b(t).$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung!

$$y_H(t) = C \cdot e^t + D \cdot e^{-t}$$

Lösung:

Die homogene Lösung y_H der Differentialgleichung löst die Gleichung $y_H''(t) - y_H(t) = 0$.

Um ein Fundamentalsystem dieser linearen Differentialgleichung höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten zu erhalten, bietet es sich an, den Ansatz $y_{H,\lambda}(t) = e^{\lambda t}$ in die homogene Differentialgleichung einzusetzen. Mit $y_{H,\lambda}(t) = e^{\lambda t}$, $y'_{H,\lambda}(t) = \lambda \cdot e^{\lambda t}$ und $y''_{H,\lambda}(t) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda t}$ liefert die Differentialgleichung

$$0 = y''_{H,\lambda}(t) - y_{H,\lambda}(t) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda t} - e^{\lambda t} = e^{\lambda t} \cdot (\lambda^2 - 1) = e^{\lambda t} \cdot (\lambda - 1) \cdot (\lambda + 1).$$

Diese Gleichung wird nur von $\lambda = 1$ und $\lambda = -1$ gelöst. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ergibt sich damit als Linearkombination von $y_{H,1}$ und $y_{H,-1}$ zu

$$y_H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad t \mapsto y_H(t) := C \cdot e^t + D \cdot e^{-t}, \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad D \in \mathbb{R}.$$

- b) Für die Fouriertransformierte $\widehat{b}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $s \mapsto \widehat{b}(s) := \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} b(t) \cdot e^{-ist} dt$ gilt

$$\widehat{b}(s) = \frac{-1}{\pi \cdot (1 + s^2)} \quad \text{für alle } s \in \mathbb{R}.$$

Wenden Sie auf beide Seiten der Differentialgleichung die Fouriertransformation an, um eine Darstellung der Fouriertransformierten $\widehat{y_P}$ einer partikulären Lösung y_P der Differentialgleichung zu erhalten!

$$\widehat{y_P}(s) = \frac{1}{\pi \cdot (1 + s^2)^2}$$

Lösung:

Sei nun $y_P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto y_P(t)$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung mit $y''_P - y_P = b$.

Ist $\widehat{y_P}$ die Fouriertransformierte von y_P , so folgt für alle $s \in \mathbb{R}$ mit dem Satz über die Fouriertransformierte der Ableitung

$$\widehat{y'_P}(s) = is \cdot \widehat{y_P}(s) \quad \text{und} \quad \widehat{y''_P}(s) = \widehat{\left((y'_P)'\right)}(s) = is \cdot \widehat{y'_P}(s) = is \cdot is \cdot \widehat{y_P}(s) = -s^2 \cdot \widehat{y_P}(s).$$

Die Linearität der Fouriertransformation liefert dann unter Verwendung der Differentialgleichung für alle $s \in \mathbb{R}$

$$\widehat{b}(s) = \widehat{(y''_P - y_P)}(s) = \widehat{y''_P}(s) - \widehat{y_P}(s) = -s^2 \cdot \widehat{y_P}(s) - \widehat{y_P}(s) = -(s^2 + 1) \cdot \widehat{y_P}(s).$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $\frac{-1}{s^2+1}$, so ergibt sich mit der in der Aufgabenstellung gegebenen Fouriertransformierten von b für alle $s \in \mathbb{R}$

$$\widehat{y_P}(s) = \frac{-1}{s^2 + 1} \cdot \widehat{b}(s) = \frac{-1}{s^2 + 1} \cdot \frac{-1}{\pi \cdot (1 + s^2)} = \frac{1}{\pi \cdot (1 + s^2)^2}.$$

- c) Mit Hilfe des Faltungssatzes lässt sich die partikuläre Lösung als Faltung zweier Funktionen aufschreiben. Geben Sie eine integralfreie Darstellung der partikulären Lösung an!

Tipp: Machen Sie eine Fallunterscheidung für $t \geq 0$ und $t < 0$!

Teilen Sie in beiden Fällen das zu berechnende Integral an t und an 0 auf!

$$y_P(t) = \frac{1+|t|}{2} \cdot e^{-|t|}$$

Lösung:

Nach Aufgabenteil b) gilt für alle $s \in \mathbb{R}$ wegen der Linearität der Fouriertransformation

$$\begin{aligned} \widehat{y_P}(s) &= \frac{1}{\pi \cdot (1 + s^2)^2} = \frac{\pi}{\pi^2 \cdot (1 + s^2)^2} = \pi \cdot \frac{-1}{\pi \cdot (1 + s^2)} \cdot \frac{-1}{\pi \cdot (1 + s^2)} \\ &= \pi \cdot \widehat{b}(s) \cdot \widehat{b}(s) = \widehat{\pi b}(s) \cdot \widehat{b}(s). \end{aligned}$$

Der Faltungssatz für Fouriertransformierte liefert $y_P = \pi b * b$.

Zu berechnen ist für alle $t \in \mathbb{R}$ also das folgende Faltungsintegral:

$$\begin{aligned} y_P(t) &= (\pi b * b)(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (\pi b)(t-x) \cdot b(x) dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \pi \cdot e^{-|t-x|} \cdot e^{-|x|} dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\min\{0;t\}} e^{-(t-x)} \cdot e^{-(-x)} dx + \frac{1}{2} \cdot \int_{\min\{0;t\}}^{\max\{0;t\}} e^{-|t-x|} \cdot e^{-|x|} dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \int_{\max\{0;t\}}^{\infty} e^{-(-(t-x))} \cdot e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\min\{0;t\}} e^{2x-t} dx + \frac{1}{2} \cdot \int_{\min\{0;t\}}^{\max\{0;t\}} e^{-|t-x|} \cdot e^{-|x|} dx + \frac{1}{2} \cdot \int_{\max\{0;t\}}^{\infty} e^{t-2x} dx. \end{aligned}$$

Um das Minimum und das Maximum aufzulösen, machen wir eine Fallunterscheidung:

Fall 1: $t \geq 0$: Für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t \geq 0$ folgt

$$\begin{aligned} y_P(t) &= (\pi b * b)(t) = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^0 e^{2x-t} dx + \frac{1}{2} \cdot \int_0^t e^{-(t-x)} \cdot e^{-x} dx + \frac{1}{2} \cdot \int_t^{\infty} e^{t-2x} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{e^{2x-t}}{2} \right]_{x=a}^{x=0} + \frac{1}{2} \cdot \int_0^t e^{-t} dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{e^{t-2x}}{-2} \right]_{x=t}^{x=b} \\ &= \frac{1}{4} \cdot e^{-t} - \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{4} \cdot e^{2a} \cdot e^{-t} + \frac{1}{2} \cdot [e^{-t} \cdot x]_{x=0}^{x=t} - \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \cdot e^t \cdot e^{-2b} + \frac{1}{4} \cdot e^{t-2t} \\ &= \frac{1}{4} \cdot e^{-t} - 0 + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot e^{-t} \cdot 0 - 0 + \frac{1}{4} \cdot e^{-t} = \frac{1}{2} \cdot e^{-t} \cdot (1+t). \end{aligned}$$

Fall 2: $t < 0$: Für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t < 0$ folgt

$$\begin{aligned} y_P(t) &= (\pi b * b)(t) = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^t e^{2x-t} dx + \frac{1}{2} \cdot \int_t^0 e^{-(-(t-x))} \cdot e^{-(-x)} dx + \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\infty} e^{t-2x} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{e^{2x-t}}{2} \right]_{x=a}^{x=t} + \frac{1}{2} \cdot \int_t^0 e^t dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{e^{t-2x}}{-2} \right]_{x=0}^{x=b} \\ &= \frac{1}{4} \cdot e^{2t-t} - \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{4} \cdot e^{2a} \cdot e^t + \frac{1}{2} \cdot [e^t \cdot x]_{x=t}^{x=0} - \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \cdot e^t \cdot e^{-2b} + \frac{1}{4} \cdot e^t \\ &= \frac{1}{4} \cdot e^t - 0 + \frac{1}{2} \cdot e^t \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot e^t \cdot t - 0 + \frac{1}{4} \cdot e^t = \frac{1}{2} \cdot e^t \cdot (1-t). \end{aligned}$$

Für alle $t \in \mathbb{R}$ ergibt sich also $y_P(t) = \begin{cases} \frac{1+t}{2} \cdot e^{-t}, & \text{falls } t \geq 0 \text{ ist} \\ \frac{1-t}{2} \cdot e^t, & \text{falls } t < 0 \text{ ist} \end{cases}$.

- d) Berechnen Sie die Lösung der Differentialgleichung, welche die Randwerte $y(-1) = y(1) = 0$ erfüllt!

$$y(t) = \frac{-2}{1+e^2} \cdot \cosh(t) + \frac{1+|t|}{2} \cdot e^{-|t|}$$

Lösung:

Insgesamt folgt für die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = C \cdot e^t + D \cdot e^{-t} + \begin{cases} \frac{1+t}{2} \cdot e^{-t}, & \text{falls } t \geq 0 \text{ ist} \\ \frac{1-t}{2} \cdot e^t, & \text{falls } t < 0 \text{ ist} \end{cases} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Inbesondere folgt also

$$\begin{aligned} y(-1) &= C \cdot e^{-1} + D \cdot e^{-(-1)} + \frac{1-(-1)}{2} \cdot e^{-1} = C \cdot e^{-1} + D \cdot e + e^{-1} \\ \text{und} \quad y(1) &= C \cdot e^1 + D \cdot e^{-1} + \frac{1+1}{2} \cdot e^1 = C \cdot e + D \cdot e^{-1} + e^1. \end{aligned}$$

Damit beide Randwerte verschwinden, müssen C und D also das folgende lineare Gleichungssystem erfüllen:

$$\begin{pmatrix} e^{-1} & e & | & -e^{-1} \\ e & e^{-1} & | & -e^{-1} \end{pmatrix} \left\| \cdot \begin{pmatrix} -e^2 \\ + \end{pmatrix} \right. \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & e^2 & | & -1 \\ 0 & e^{-1} - e^3 & | & e - e^{-1} \end{pmatrix} \left\| \cdot \frac{1}{e^{-1} - e^3} \right. \\ \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & e^2 & | & -1 \\ 0 & 1 & | & \frac{e - e^{-1}}{e^{-1} - e^3} \end{pmatrix} \left\| \cdot \begin{pmatrix} + \\ -e^2 \end{pmatrix} \right. \cdot \begin{pmatrix} - \\ -e \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -1 + \frac{e^2}{1+e^2} = \frac{-1-e^2+e^2}{1+e^2} = \frac{-1}{1+e^2} \\ 0 & 1 & | & -\frac{1-e^2}{1-e^4} = -\frac{1-e^2}{(1+e^2) \cdot (1-e^2)} = \frac{-1}{1+e^2} \end{pmatrix}$$

Für die Lösung des Anfangswertproblems ergibt sich für alle $t \in \mathbb{R}$

$$y(t) = \frac{-1}{1+e^2} \cdot e^t + \frac{-1}{1+e^2} \cdot e^{-t} + y_P(t) = \frac{-2}{1+e^2} \cdot \cosh(t) + \frac{1+|t|}{2} \cdot e^{-|t|}.$$



IntTrafo/Fourier/Ag_Fouriertrans_FaltungEinesRechteckimpulsesMitSichSelbst.tex

Aufgabe 81.390 (Faltung und Fouriertransformation)

Gegeben sei die Funktion $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit der Vorschrift $t \mapsto h(t) := \begin{cases} 1, & \text{für } -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$.

a) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\widehat{h}$ von h .

$$\widehat{h}(s) = \frac{1}{\pi s} \cdot \sin\left(\frac{s}{2}\right) \text{ für alle } s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \widehat{h}(0) = \frac{1}{2\pi}$$

Lösung:

Für alle $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist

$$\begin{aligned} \widehat{h}(s) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-ist} dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-ist} dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{-is} \cdot e^{-ist} \right]_{t=-\frac{1}{2}}^{t=\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{-2i \cdot \pi s} \left(e^{-i\frac{s}{2}} - e^{i\frac{s}{2}} \right) = \frac{1}{\pi s} \cdot \frac{e^{i\frac{s}{2}} - e^{-i\frac{s}{2}}}{2i} = \frac{1}{\pi s} \cdot \sin\left(\frac{s}{2}\right). \end{aligned}$$

$$\text{Für } s = 0 \text{ ergibt sich } \widehat{h}(0) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot 1 dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 dt = \frac{1}{2\pi}.$$

b) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte $\widehat{h * h}$, ohne die Faltung $h * h$ auszurechnen.

Tipp: Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis durch Anwenden des trigonometrischen Pythagoras und des Additionstheorems $\cos(x+y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$ mit $x = y = \frac{s}{2}$.

$$\left(\widehat{h * h}\right)(s) = \frac{1 - \cos(s)}{2s^2\pi^2} \text{ für alle } s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \left(\widehat{h * h}\right)(0) = \frac{1}{4\pi^2}$$

Lösung:

Die Funktion h ist stetig, absolut integrierbar und beschränkt. Für alle $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt daher

$$\left(\widehat{h * h}\right)(s) = \widehat{h}(s) \cdot \widehat{h}(s) = \frac{1}{\pi s} \cdot \sin\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \frac{1}{\pi s} \cdot \sin\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{\pi^2 s^2} \cdot \left(\sin\left(\frac{s}{2}\right)\right)^2 = \frac{1 - \cos(s)}{2\pi^2 s^2}.$$

Im letzten Schritt haben wir das Additionstheorem $\cos(x+y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$ ausgenutzt, woraus wir für $x = y = \frac{s}{2}$ zusammen mit dem trigonometrischen Pythagoras

$$\left(\sin\left(\frac{s}{2}\right)\right)^2 = 1 - \left(\cos\left(\frac{s}{2}\right)\right)^2 = 1 - \left(\cos(s) + \left(\sin\left(\frac{s}{2}\right)\right)^2\right) = 1 - \cos(s) - \left(\sin\left(\frac{s}{2}\right)\right)^2$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ erhalten.

Damit ergibt sich für alle $s \in \mathbb{R}$ $\left(\sin\left(\frac{s}{2}\right)\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(s))$.

Außerdem gilt

$$\left(\widehat{h * h}\right)(0) = \widehat{h}(s) \cdot \widehat{h}(0) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{4\pi^2}.$$

c) Berechnen Sie jetzt die Faltung $h * h$ mit Hilfe der Definition der Faltung.

$$(h * h)(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \max(\{0; 1 - |t|\})$$

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$h(t-x) \neq 0 \iff -\frac{1}{2} \leq t-x \leq \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{2}-t \leq -x \leq \frac{1}{2}-t \iff t+\frac{1}{2} \geq x \geq t-\frac{1}{2}$$

und damit

$$\begin{aligned} h(t-x) \cdot h(x) \neq 0 &\iff t-\frac{1}{2} \leq x \leq t+\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ &\iff \max\left\{-\frac{1}{2}; t-\frac{1}{2}\right\} \leq x \leq \min\left\{\frac{1}{2}; t+\frac{1}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Damit es überhaupt $x \in \mathbb{R}$ gibt, die diese Ungleichung erfüllen, muss also insbesondere für $t \in \mathbb{R}$

$$t-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad t+\frac{1}{2} \geq -\frac{1}{2}, \quad \text{sprich} \quad -1 \leq t \leq 1 \quad \text{gelten.}$$

Wegen $\max\left\{-\frac{1}{2}; t-\frac{1}{2}\right\} = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & \text{für } t < 0 \\ t-\frac{1}{2}, & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$ und $\min\left\{\frac{1}{2}; t+\frac{1}{2}\right\} = \begin{cases} t+\frac{1}{2}, & \text{für } t < 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$ bietet sich die folgende Fallunterscheidung an:

Fall 1: $-1 \leq t < 0$: Für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $-1 \leq t < 0$ folgt

$$\begin{aligned} (h * h)(t) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(t-x) \cdot h(x) \, dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} 1 \, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot [x]_{x=-\frac{1}{2}}^{x=t+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(t + \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2\pi} \cdot (1+t). \end{aligned}$$

Fall 2: $0 \leq t \leq 1$: Für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq t \leq 1$ folgt

$$\begin{aligned} (h * h)(t) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(t-x) \cdot h(x) \, dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{t-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 \, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot [x]_{x=t-\frac{1}{2}}^{x=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{2} - \left(t - \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2\pi} \cdot (1-t). \end{aligned}$$

Fall 3: $|t| > 1$: Für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| > 1$ folgt

$$(h * h)(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(t-x) \cdot h(x) \, dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} 0 \, dx = 0.$$

Insgesamt folgt also für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$(h * h)(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \begin{cases} (1+t), & -1 \leq t < 0 \\ (1-t), & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

d) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis aus Aufgabenteil b), indem Sie $\widehat{h * h}$ mit Hilfe der Definition der Fouriertransformation ausrechnen. Welcher Weg zur Bestimmung von $\widehat{h * h}$ ist einfacher?

Lösung:

Die Fouriertransformierte von $h * h$ kann nach Aufgabenteil c) wie folgt berechnet werden: Für alle $s \in \mathbb{R}$ ist

$$\left(\widehat{h * h}\right)(s) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (h * h)(t) \cdot e^{-ist} \, dt = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \left(\int_{-1}^0 (1+t) \cdot e^{-ist} \, dt + \int_0^1 (1-t) \cdot e^{-ist} \, dt \right).$$

Partielle Integration liefert für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{(1 \pm t)}_{=u_{\pm}(t)} \cdot \underbrace{e^{-ist}}_{=v'(t)} dt &= \underbrace{(1 \pm t)}_{=u_{\pm}(t)} \cdot \underbrace{\frac{1}{-is}}_{=v(t)} \cdot e^{-ist} - \int \underbrace{(\pm 1)}_{=u'_{\pm}(t)} \cdot \underbrace{\frac{1}{-is}}_{=v(t)} \cdot e^{-ist} dt \\
&= i \cdot \frac{1 \pm t}{s} \cdot e^{-ist} \mp \frac{i}{s} \cdot \int e^{-ist} dt = i \cdot \frac{1 \pm t}{s} \cdot e^{-ist} \mp \frac{i}{s} \cdot \left(\frac{1}{-is} \cdot e^{-ist} \right) \\
&= \left(i \cdot \frac{1 \pm t}{s} \pm \frac{1}{s^2} \right) \cdot e^{-ist} = \frac{is \cdot (1 \pm t) \pm 1}{s^2} \cdot e^{-ist}.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für alle $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned}
(\widehat{h * h})(s) &= \frac{1}{4\pi^2} \cdot \left(\int_{-1}^0 (1+t) \cdot e^{-ist} dt + \int_0^1 (1-t) \cdot e^{-ist} dt \right) \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \cdot \left(\left[\frac{is \cdot (1+t) + 1}{s^2} \cdot e^{-ist} \right]_{t=-1}^{t=0} + \left[\frac{is \cdot (1-t) - 1}{s^2} \cdot e^{-ist} \right]_{t=0}^{t=1} \right) \\
&= \frac{(is+1) \cdot 1 - 1 \cdot e^{is} + (-1) \cdot e^{-is} - (is-1) \cdot 1}{4s^2\pi^2} \\
&= \frac{is+1 - e^{is} - e^{-is} - is+1}{4s^2\pi^2} = \frac{2 - e^{is} - e^{-is}}{4s^2\pi^2} \\
&= \frac{2}{4s^2\pi^2} - \frac{1}{2s^2\pi^2} \cdot \frac{e^{is} + e^{-is}}{2} = \frac{1 - \cos(s)}{2s^2\pi^2}.
\end{aligned}$$

Zu guter Letzt folgt noch

$$\begin{aligned}
(\widehat{h * h})(0) &= \frac{1}{4\pi^2} \cdot \left(\int_{-1}^0 (1+t) \cdot e^{-i \cdot 0 \cdot t} dt + \int_0^1 (1-t) \cdot e^{-i \cdot 0 \cdot t} dt \right) \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \cdot \left(\int_{-1}^0 (1+t) dt + \int_0^1 (1-t) dt \right) = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \left(\left[t + \frac{t^2}{2} \right]_{t=-1}^{t=0} + \left[t - \frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^{t=1} \right) \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \cdot \left((0 + \frac{0}{2}) - (-1 + \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{2}) - (0 - \frac{0}{2}) \right) = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \left(-(-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4\pi^2}.
\end{aligned}$$



IntTrafo/FourierAusrechnen/Ag_FouTrafoAusrechnen_AbklingendeExpMalHeaviside.tex

Aufgabe 82.391 (Eine nützliche Korrespondenz)

kr

Seien $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto \sigma(t) := \begin{cases} 1, & \text{für } t \geq 0 \\ 0, & \text{für } t < 0 \end{cases}$ die Einheitssprung- bzw. Heavisidefunktion, $b \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$ und $f_b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto f_b(t) := e^{-bt} \cdot \sigma(t)$. Beweisen Sie durch Integration, dass $\mathcal{F}f_b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\omega \mapsto (\mathcal{F}f_b)(\omega) := \frac{b-i\omega}{2\pi \cdot (b^2 + \omega^2)}$ die Fouriertransformierte von f_b ist!

Lösung:

Für alle $\omega \in \mathbb{R}$ gilt wegen der linearen Substitutionsregel

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}f_b)(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_b(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-bt} \cdot \sigma(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{\infty} e^{(-b-i\omega) \cdot t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{(-b-i\omega) \cdot t}}{-b-i\omega} \right]_{t=0}^{t=a} = \frac{1}{2\pi} \cdot \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{(-b-i\omega) \cdot a}}{-b-i\omega} - \frac{e^{(-b-i\omega) \cdot 0}}{-b-i\omega} \right) \end{aligned}$$

Für alle $a \in \mathbb{R}$ und alle $\omega \in \mathbb{R}$ gilt

$$\left| \frac{e^{(-b-i\omega) \cdot a}}{-b-i\omega} \right| = \frac{|e^{-ba}| \cdot |e^{-i\omega a}|}{|-b-i\omega|} = \frac{e^{-ba}}{\sqrt{b^2 + \omega^2}} \xrightarrow{a \rightarrow \infty} \frac{0}{\sqrt{b^2 + \omega^2}} = 0 \quad \text{wegen } b > 0.$$

Insgesamt folgt für alle $\omega \in \mathbb{R}$

$$(\mathcal{F}f_b)(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{(-b-i\omega) \cdot a}}{-b-i\omega} - \frac{e^{(-b-i\omega) \cdot 0}}{-b-i\omega} \right) = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(0 + \frac{1}{b+i\omega} \right) = \frac{b-i\omega}{2\pi \cdot (b^2 + \omega^2)}.$$



IntTrafo/FourierAusrechnen/Ag_FouTrafoAusrechnen_DreiExpUndEineLineare.tex

Aufgabe 82.392 (Fouriertransformationen ausrechnen)

SPF

Berechnen Sie jeweils die Fouriertransformierte der angegebenen Funktion!

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := \begin{cases} e^{-x}, & \text{falls } x \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

$$(\mathcal{F}f)(\omega) = \frac{1-i\omega}{2\pi \cdot (1+\omega^2)} \quad \text{für } \omega \in \mathbb{R}$$

Lösung:

Für alle $\omega \in \mathbb{R}$ gilt mit der linearen Substitutionsregel

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}f)(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^0 0 \cdot e^{-i\omega x} dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{\infty} e^{-x-i\omega x} dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{(-1-i\omega) \cdot x} dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{(-1-i\omega) \cdot x}}{-1-i\omega} \right]_{x=0}^{x=b} \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{(-1-i\omega) \cdot b}}{-1-i\omega} - \frac{e^{(-1-i\omega) \cdot 0}}{-1-i\omega} \right) = \frac{1}{2\pi} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+i\omega} - \frac{e^{-b} \cdot e^{-i\omega b}}{1+i\omega} \right). \end{aligned}$$

Für alle $\omega \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{e^{-b} \cdot e^{-i\omega b}}{1+i\omega} = 0$ wegen

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left| \frac{e^{-b} \cdot e^{-i\omega b}}{1+i\omega} \right| = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{|e^{-b}| \cdot |e^{-i\omega b}|}{|1+i\omega|} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{e^{-b}}{\sqrt{1+\omega^2}} = \frac{0}{\sqrt{1+\omega^2}} = 0.$$

Insgesamt folgt also für alle $\omega \in \mathbb{R}$

$$(\mathcal{F}f)(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+i\omega} - \frac{e^{-b} \cdot e^{-i\omega b}}{1+i\omega} \right) = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{1-i\omega}{(1+i\omega) \cdot (1-i\omega)} - 0 \right) = \frac{1-i\omega}{2\pi \cdot (1+\omega^2)}.$$

b) $f \circ |\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(|x|) = e^{-|x|}$

$$(\mathcal{F}(f \circ |\cdot|))(\omega) = \frac{1}{\pi \cdot (1+\omega^2)} \text{ für } \omega \in \mathbb{R}$$

Lösung:

Für alle $\omega \in \mathbb{R}$ gilt mit der linearen Substitutionsregel

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}(f \circ |\cdot|))(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(|x|) \cdot e^{-ix\omega} dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^0 e^x \cdot e^{-ix\omega} dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot e^{-ix\omega} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^0 e^{x-i\omega x} dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{\infty} e^{-x-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^{(1-i\omega) \cdot x} dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{(-1-i\omega) \cdot x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^{(1-i\omega) \cdot x}}{1-i\omega} \right]_{x=a}^{x=0} + \frac{1}{2\pi} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{(-1-i\omega) \cdot x}}{-1-i\omega} \right]_{x=0}^{x=b} \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{(1-i\omega) \cdot 0}}{1-i\omega} - \frac{e^{(1-i\omega) \cdot a}}{1-i\omega} \right) + \frac{1}{2\pi} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{(-1-i\omega) \cdot b}}{-1-i\omega} - \frac{e^{(-1-i\omega) \cdot 0}}{-1-i\omega} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{1-i\omega} - \frac{e^a \cdot e^{-i\omega a}}{1-i\omega} \right) + \frac{1}{2\pi} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+i\omega} - \frac{e^{-b} \cdot e^{-i\omega b}}{1+i\omega} \right). \end{aligned}$$

Für alle $\omega \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{e^a \cdot e^{-i\omega a}}{1-i\omega} = 0$ und $\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{e^{-b} \cdot e^{-i\omega b}}{1+i\omega} = 0$ wegen

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow -\infty} \left| \frac{e^a \cdot e^{-i\omega a}}{1-i\omega} \right| &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{|e^a| \cdot |e^{-i\omega a}|}{|1-i\omega|} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{e^a}{\sqrt{1+\omega^2}} = \frac{0}{\sqrt{1+\omega^2}} = 0 \\ \text{und} \quad \lim_{b \rightarrow \infty} \left| \frac{e^{-b} \cdot e^{-i\omega b}}{1+i\omega} \right| &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{|e^{-b}| \cdot |e^{-i\omega b}|}{|1+i\omega|} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{e^{-b}}{\sqrt{1+\omega^2}} = \frac{0}{\sqrt{1+\omega^2}} = 0. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt also für alle $\omega \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}(f \circ |\cdot|))(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{1-i\omega} - \frac{e^a \cdot e^{-i\omega a}}{1-i\omega} \right) + \frac{1}{2\pi} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+i\omega} - \frac{e^{-b} \cdot e^{-i\omega b}}{1+i\omega} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{1-i\omega} - 0 \right) + \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{1+i\omega} - 0 \right) = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1+i\omega + 1-i\omega}{(1+i\omega) \cdot (1-i\omega)} = \frac{1}{\pi \cdot (1+\omega^2)}. \end{aligned}$$

c) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto g(t) := \begin{cases} 3t-2, & \text{falls } -4 \leq t \leq 4 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

$$(\mathcal{F}g)(\omega) = -\frac{2}{\pi\omega} \cdot \sin(4\omega) + i \cdot \frac{3}{\pi\omega^2} \cdot (4\omega \cdot \cos(4\omega) - \sin(4\omega)) \text{ für } \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, (\mathcal{F}g)(0) = -\frac{8}{\pi}$$

Lösung:

Es gilt

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{F}g)(0) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-it \cdot 0} dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{R} \setminus (-4;4)} 0 dt + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-4}^4 (3t-2) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot 0 + \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot t^2 - 2t \right]_{t=-4}^{t=4} = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot 16 - 2 \cdot 4 - \frac{3}{2} \cdot 16 + 2 \cdot (-4) \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot (3 \cdot 8 - 8 - 3 \cdot 8 - 8) = \frac{1}{2\pi} \cdot (-16) = -\frac{8}{\pi}.
 \end{aligned}$$

Für alle $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ liefert eine partielle Integration mit $u(t) := 3t-2$ und $v_{\omega}(t) := \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}$ wegen $u'(t) := 3$ und $v'_{\omega}(t) := e^{-i\omega t}$

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{F}g)(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-it\omega} dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{R} \setminus (-4;4)} 0 \cdot e^{-it\omega} dt + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-4}^4 \underbrace{(3t-2)}_{=u(t)} \cdot \underbrace{e^{-it\omega}}_{=v'_{\omega}(t)} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\underbrace{(3t-2)}_{=u(t)} \cdot \underbrace{\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}}_{=v_{\omega}(t)} \right]_{t=-4}^{t=4} - \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-4}^4 \underbrace{3}_{=u'(t)} \cdot \underbrace{\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}}_{=v_{\omega}(t)} dt \\
 &= \frac{i}{2\pi\omega} \cdot \left((3 \cdot 4 - 2) \cdot e^{-i\omega \cdot 4} - (3 \cdot (-4) - 2) \cdot e^{-i\omega \cdot (-4)} \right) - \frac{3i}{2\pi\omega} \cdot \int_{-4}^4 e^{-i\omega t} dt \\
 &= \frac{i}{2\pi\omega} \cdot \left(12 \cdot (e^{i \cdot 4\omega} + e^{-i \cdot 4\omega}) + 2 \cdot (e^{i \cdot 4\omega} - e^{-i \cdot 4\omega}) \right) - \frac{3i}{2\pi\omega} \cdot \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_{t=-4}^{t=4} \\
 &= \frac{12i}{\pi\omega} \cdot \cos(4\omega) + \frac{2i}{\pi\omega} \cdot i \cdot \sin(4\omega) + \frac{3}{2\pi\omega^2} \cdot (e^{-i\omega \cdot 4} - e^{-i\omega \cdot (-4)}) \\
 &= -\frac{2}{\pi\omega} \cdot \sin(4\omega) + \frac{12i}{\pi\omega} \cdot \cos(4\omega) - \frac{3i}{\pi\omega^2} \cdot \sin(4\omega).
 \end{aligned}$$

d) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi \mapsto h(\varphi) := \begin{cases} \cos(\varphi), & \text{falls } -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

$$(\mathcal{F}h)(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi \cdot (\omega^2 - 1)} \cdot (\omega \cdot \sin(\frac{\pi\omega}{4}) - \cos(\frac{\pi\omega}{4})) \text{ für } \omega \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}, (\mathcal{F}h)(1) = (\mathcal{F}h)(-1) = \frac{\pi+2}{8\pi}$$

Lösung:

Für alle $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ gilt mit der linearen Substitutionsregel

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{F}h)(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(\varphi) \cdot e^{-i\varphi\omega} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{R} \setminus (-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4})} 0 \cdot e^{-i\varphi\omega} d\varphi + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(\varphi) \cdot e^{-i\varphi\omega} d\varphi \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \cdot e^{-i\varphi\omega} d\varphi = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (e^{i \cdot (1-\omega) \cdot \varphi} + e^{i \cdot (-1-\omega) \cdot \varphi}) d\varphi \\
 &= \frac{1}{4\pi} \cdot \left[\frac{e^{i \cdot (1-\omega) \cdot \varphi}}{i \cdot (1-\omega)} + \frac{e^{i \cdot (-1-\omega) \cdot \varphi}}{i \cdot (-1-\omega)} \right]_{\varphi=-\frac{\pi}{4}}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} \\
 &= \frac{i}{4\pi} \cdot \left(\frac{e^{i \cdot (1-\omega) \cdot \frac{\pi}{4}}}{\omega - 1} - \frac{e^{i \cdot (1-\omega) \cdot (-\frac{\pi}{4})}}{\omega - 1} + \frac{e^{i \cdot (-1-\omega) \cdot \frac{\pi}{4}}}{\omega + 1} - \frac{e^{i \cdot (-1-\omega) \cdot (-\frac{\pi}{4})}}{\omega + 1} \right) \\
 &= \frac{i}{4\pi} \cdot \left(\frac{e^{i \cdot \frac{\pi}{4}} \cdot e^{-i \cdot \frac{\pi\omega}{4}}}{\omega - 1} - \frac{e^{-i \cdot \frac{\pi}{4}} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi\omega}{4}}}{\omega - 1} + \frac{e^{-i \cdot \frac{\pi}{4}} \cdot e^{-i \cdot \frac{\pi\omega}{4}}}{\omega + 1} - \frac{e^{i \cdot \frac{\pi}{4}} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi\omega}{4}}}{\omega + 1} \right).
 \end{aligned}$$

Mit $e^{i \cdot \frac{\pi}{4}} = \cos(\frac{\pi}{4}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $e^{-i \cdot \frac{\pi}{4}} = \cos(-\frac{\pi}{4}) + i \cdot \sin(-\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

folgt also für alle $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{F}h)(\omega) &= \frac{i \cdot \sqrt{2}}{8\pi} \cdot \left(\frac{(1+i) \cdot e^{-i \cdot \frac{\pi\omega}{4}}}{\omega-1} - \frac{(1-i) \cdot e^{i \cdot \frac{\pi\omega}{4}}}{\omega-1} + \frac{(1-i) \cdot e^{-i \cdot \frac{\pi\omega}{4}}}{\omega+1} - \frac{(1+i) \cdot e^{i \cdot \frac{\pi\omega}{4}}}{\omega+1} \right) \\
 &= \frac{i \cdot \sqrt{2}}{8\pi} \cdot \frac{((1+i) \cdot (\omega+1) + (1-i) \cdot (\omega-1)) \cdot e^{-i \cdot \frac{\pi\omega}{4}}}{(\omega-1) \cdot (\omega+1)} \\
 &\quad - \frac{i \cdot \sqrt{2}}{8\pi} \cdot \frac{((1-i) \cdot (\omega+1) + (1+i) \cdot (\omega-1)) \cdot e^{i \cdot \frac{\pi\omega}{4}}}{(\omega-1) \cdot (\omega+1)} \\
 &= \frac{i \cdot \sqrt{2}}{8\pi \cdot (\omega^2-1)} \cdot (\omega+1 + i\omega + i + \omega - 1 - i\omega + i) \cdot e^{-i \cdot \frac{\pi\omega}{4}} \\
 &\quad - \frac{i \cdot \sqrt{2}}{8\pi \cdot (\omega^2-1)} \cdot (\omega+1 - i\omega - i + \omega - 1 + i\omega - i) \cdot e^{i \cdot \frac{\pi\omega}{4}} \\
 &= \frac{i \cdot \sqrt{2}}{8\pi \cdot (\omega^2-1)} \cdot (2\omega + 2i) \cdot e^{-i \cdot \frac{\pi\omega}{4}} - \frac{i \cdot \sqrt{2}}{8\pi \cdot (\omega^2-1)} \cdot (2\omega - 2i) \cdot e^{i \cdot \frac{\pi\omega}{4}} \\
 &= \frac{i \cdot \sqrt{2} \cdot \omega}{4\pi \cdot (\omega^2-1)} \cdot \left(e^{-i \cdot \frac{\pi\omega}{4}} - e^{i \cdot \frac{\pi\omega}{4}} \right) - \frac{\sqrt{2}}{4\pi \cdot (\omega^2-1)} \cdot \left(e^{-i \cdot \frac{\pi\omega}{4}} + e^{i \cdot \frac{\pi\omega}{4}} \right) \\
 &= \frac{i \cdot \sqrt{2} \cdot \omega}{4\pi \cdot (\omega^2-1)} \cdot \left(-2i \cdot \sin\left(\frac{\pi\omega}{4}\right) \right) - \frac{\sqrt{2}}{4\pi \cdot (\omega^2-1)} \cdot 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi\omega}{4}\right) \\
 &= \frac{\sqrt{2} \cdot \omega}{2\pi \cdot (\omega^2-1)} \cdot \sin\left(\frac{\pi\omega}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2\pi \cdot (\omega^2-1)} \cdot \cos\left(\frac{\pi\omega}{4}\right).
 \end{aligned}$$

Außerdem gilt wegen $e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} = i$, $e^{-i \cdot \frac{\pi}{2}} = -i$ und der linearen Substitutionsregel

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{F}h)(1) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(\varphi) \cdot e^{-i\varphi \cdot 1} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{R} \setminus (-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4})} 0 \cdot e^{-i\varphi} d\varphi + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(\varphi) \cdot e^{-i\varphi} d\varphi \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \cdot e^{-i\varphi} d\varphi = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + e^{-i \cdot 2\varphi}) d\varphi = \frac{1}{4\pi} \cdot \left[\varphi + \frac{e^{-i \cdot 2\varphi}}{-i \cdot 2} \right]_{\varphi=-\frac{\pi}{4}}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} \\
 &= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{i}{8\pi} \cdot e^{-i \cdot \frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4\pi} \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{i}{8\pi} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{16} + \frac{1}{8\pi} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8\pi} = \frac{\pi+2}{8\pi} \quad \text{und} \\
 (\mathcal{F}h)(-1) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(\varphi) \cdot e^{-i\varphi \cdot (-1)} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{R} \setminus (-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4})} 0 \cdot e^{i\varphi} d\varphi + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(\varphi) \cdot e^{i\varphi} d\varphi \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \cdot e^{i\varphi} d\varphi = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (e^{i \cdot 2\varphi} + 1) d\varphi = \frac{1}{4\pi} \cdot \left[\frac{e^{i \cdot 2\varphi}}{i \cdot 2} + \varphi \right]_{\varphi=-\frac{\pi}{4}}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} \\
 &= \frac{-i}{8\pi} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{-i}{8\pi} \cdot e^{-i \cdot \frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4\pi} \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{8\pi} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8\pi} + \frac{1}{16} = \frac{\pi+2}{8\pi}.
 \end{aligned}$$



IntTrafo/FourierAusrechnen/Ag_FouTrafoAusrechnen_Dreiecksimpuls.tex

Aufgabe 82.393 (Fouriertransformierte)

ahs

Bestimmen Sie die Fouriertransformierte des Dreieckimpulses

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad t \mapsto f(t) := \begin{cases} 1+t, & \text{für } -1 \leq t \leq 0 \\ 1-t, & \text{für } 0 < t \leq 1 \\ 0, & \text{für } |t| > 1 \end{cases}.$$

$$\text{Mit } (\mathcal{F}f)(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \text{ folgt } (\mathcal{F}f)(\omega) = \frac{1 - \cos(\omega)}{\pi\omega^2} \text{ für } \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ und } (\mathcal{F}f)(0) = \frac{1}{2\pi}.$$

Hinweise: Die Fouriertransformierte ist reellwertig, da f eine gerade Funktion ist.

Mittels partieller Integration lässt sich $\int x \cdot e^{-ikx} dx = \frac{ix}{k} \cdot e^{-ikx} + \frac{1}{k^2} \cdot e^{-ikx} + C$ zeigen.

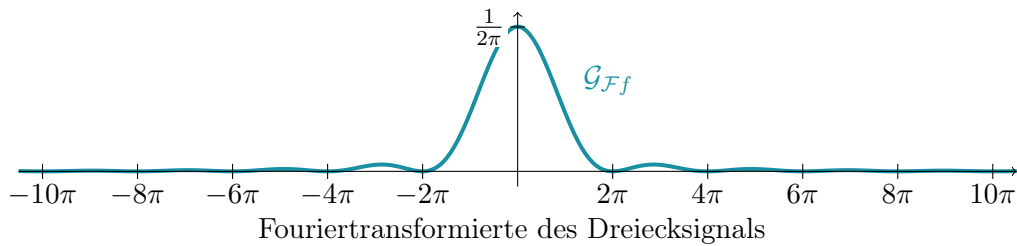
Lösung mit Hilfe der Formel im Hinweis:

Nach Definition der Fouriertransformation ist mit dem Hinweis für alle $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{F}f)(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\int_{-1}^0 (1+t) \cdot e^{-i\omega t} dt + \int_0^1 (1-t) \cdot e^{-i\omega t} dt \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-1}^1 e^{-i\omega t} dt + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-1}^0 t \cdot e^{-i\omega t} dt - \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^1 t \cdot e^{-i\omega t} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_{t=-1}^{t=1} + \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{it}{\omega} \cdot e^{-i\omega t} + \frac{1}{\omega^2} \cdot e^{-i\omega t} \right]_{t=-1}^{t=0} - \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{it}{\omega} \cdot e^{-i\omega t} + \frac{1}{\omega^2} \cdot e^{-i\omega t} \right]_{t=0}^{t=1} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{i\omega \cdot (e^{-i\omega} - e^{i\omega})}{\omega^2} + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{0 + 1 + i\omega \cdot e^{i\omega} - e^{i\omega}}{\omega^2} - \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{i\omega \cdot e^{-i\omega} + e^{-i\omega} - 0 - 1}{\omega^2} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2 - e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{\omega^2} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2}{\omega^2} \cdot \left(1 - \frac{e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{2} \right) = \frac{1 - \cos(\omega)}{\pi\omega^2}.
 \end{aligned}$$

Für $\omega = 0$ ergibt sich hingegen

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{F}f)(0) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i \cdot 0 \cdot t} dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\int_{-1}^0 (1+t) dt + \int_0^1 (1-t) dt \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\left[t + \frac{t^2}{2} \right]_{t=-1}^{t=0} + \left[t - \frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^{t=1} \right) = \frac{1}{2\pi} \cdot (0 + 0 - (-1) - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} - 0 + 0) = \frac{1}{2\pi}.
 \end{aligned}$$



Lösung mit Hilfe der Symmetrieeigenschaften von Sinus, Kosinus und f :

Wir verwenden im Fourierintegral die eulersche Formel $e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i \cdot \sin(\omega t)$:

$$(\mathcal{F}f)(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-1}^1 f(t) \cdot \cos(\omega t) dt - \frac{1}{2\pi} \cdot i \cdot \int_{-1}^1 f(t) \cdot \sin(\omega t) dt.$$

Wir untersuchen die Symmetrieeigenschaften von f :

Für $t = 0$ gilt $f(-0) = f(0)$.

Für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $0 < t \leq 1$ gilt $f(-t) \stackrel{-1 \leq t < 0}{=} 1 + (-t) = 1 - t \stackrel{0 < t \leq 1}{=} f(t)$.

Für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $-1 \leq t < 0$ gilt $f(-t) \stackrel{0 < t \leq 1}{=} 1 - (-t) = 1 + t \stackrel{-1 \leq t < 0}{=} f(t)$.

Für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| > 1$ gilt $f(-t) \stackrel{|-t| = |t| > 1}{=} 0 \stackrel{|t| > 1}{=} f(t)$.

Insgesamt folgt also $f(-t) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Damit folgt für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $\omega \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 f(-t) \cdot \cos(\omega \cdot (-t)) &= f(t) \cdot \cos(-\omega t) = f(t) \cdot \cos(\omega t) \\
 \text{und} \quad f(-t) \cdot \sin(\omega \cdot (-t)) &= f(t) \cdot \sin(-\omega t) = f(t) \cdot (-\sin(\omega t)) = -f(t) \cdot \sin(\omega t).
 \end{aligned}$$

Die Symmetrieeigenschaften für Integrale liefern, da der Integrationsbereich symmetrisch zur 0 ist,

$$\int_{-1}^1 f(t) \cdot \cos(\omega t) dt = 2 \cdot \int_0^1 f(t) \cdot \cos(\omega t) dt \quad \text{und} \quad \int_{-1}^1 f(t) \cdot \sin(\omega t) dt = 0.$$

Für die Fouriertransformierte folgt damit

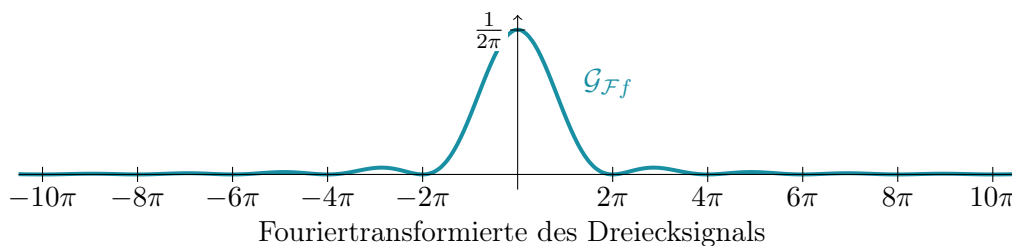
$$(\mathcal{F}f)(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-1}^1 f(t) \cdot \cos(\omega t) dt - \frac{1}{2\pi} \cdot i \cdot \int_{-1}^1 f(t) \cdot \sin(\omega t) dt = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^1 f(t) \cdot \cos(\omega t) dt.$$

Für $\omega = 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}f)(0) &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^1 f(t) \cdot \cos(0 \cdot t) dt = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^1 (1-t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \left[t - \frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{\pi} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} - 0 + 0 \right) = \frac{1}{2\pi}. \end{aligned}$$

Für $\omega \neq 0$ ergibt sich aus $u(t) := 1-t$ und $v_\omega(t) := \frac{\sin(\omega t)}{\omega}$ wegen $u'(t) := -1$ und $v'_\omega(t) := \cos(\omega t)$ mit partieller Integration

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}f)(\omega) &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^1 f(t) \cdot \cos(\omega t) dt = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^1 \underbrace{(1-t)}_{=u(t)} \cdot \underbrace{\cos(\omega t)}_{=v'_\omega(t)} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \left[\underbrace{(1-t)}_{=u(t)} \cdot \underbrace{\frac{\sin(\omega t)}{\omega}}_{=v_\omega(t)} \right]_{t=0}^{t=1} - \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^1 \underbrace{(-1)}_{=u'(t)} \cdot \underbrace{\frac{\sin(\omega t)}{\omega}}_{=v_\omega(t)} dt \\ &= \frac{1}{\pi\omega} \cdot ((1-1) \cdot \sin(\omega) - (1-0) \cdot \sin(0)) + \frac{1}{\pi\omega} \cdot \int_0^1 \sin(\omega t) dt \\ &= \frac{1}{\pi\omega} \cdot \left[\frac{-\cos(\omega t)}{\omega} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{\pi\omega^2} \cdot (-\cos(\omega) + \cos(0)) = \frac{1 - \cos(\omega)}{\pi\omega^2}. \end{aligned}$$



IntTrafo/FourierAusrechnen/Ag_FouTrafoAusrechnen_ProduktMitCharFkt.tex

Aufgabe 82.394 (Fourier-Transformationen ausrechnen)

spf

Es ist $\text{id}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto \text{id}(t) := t$. Sei $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto g(t) := e^{-|t|}$. Berechnen Sie die Fourier-Transformierte des Produkts der angegebenen Funktion mit der charakteristischen Funktion

$$\mathbf{1}_D: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto \mathbf{1}_D(x) := \begin{cases} 1, & \text{für } x \in D \\ 0, & \text{für } x \notin D \end{cases} \quad \text{für das zugehörige } D \subseteq \mathbb{R} \quad !$$

$$(\mathcal{F}f)(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \cdot f(t) dt$$

a) id auf $D := [-5; 5]$

$$\lim_{x \rightarrow \omega} \frac{i \cdot (5x \cdot \cos(5x) - \sin(5x))}{\pi x^2}$$

Lösung: Sei $f := \text{id} \cdot \mathbf{1}_D$. Mit partieller Integration ergibt sich für alle $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{F}f)(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \cdot t \cdot \mathbf{1}_{[-5;5]}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-5}^5 \underbrace{e^{-i\omega t}}_{=u'(t)} \cdot \underbrace{t}_{=v(t)} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\underbrace{\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}}_{=u(t)} \cdot \underbrace{t}_{=v(t)} \right]_{t=-5}^{t=5} - \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-5}^5 \underbrace{\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}}_{=u(t)} \cdot \underbrace{1}_{=v'(t)} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{5 \cdot e^{-i \cdot 5\omega} + 5 \cdot e^{i \cdot 5\omega}}{-i\omega} - \frac{i}{2\pi\omega} \cdot \int_{-5}^5 e^{-i\omega t} dt = \frac{5i}{\pi\omega} \cdot \frac{e^{i \cdot 5\omega} + e^{-i \cdot 5\omega}}{2} - \frac{i}{2\pi\omega} \cdot \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_{t=-5}^{t=5} \\
 &= \frac{5i}{\pi\omega} \cdot \cos(5\omega) - \frac{i}{2\pi\omega} \cdot \frac{e^{-i \cdot 5\omega} - e^{i \cdot 5\omega}}{-i\omega} = \frac{5i}{\pi\omega} \cdot \cos(5\omega) - \frac{i}{\pi\omega^2} \cdot \frac{e^{i \cdot 5\omega} - e^{-i \cdot 5\omega}}{2i} \\
 &= \frac{i}{\pi\omega^2} \cdot (5\omega \cdot \cos(5\omega) - \sin(5\omega)) = \lim_{x \rightarrow \omega} \frac{i \cdot (5x \cdot \cos(5x) - \sin(5x))}{\pi x^2}.
 \end{aligned}$$

Für $\omega = 0$ erhält man mit der Regel von de l'Hospital

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{F}f)(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \cdot 0 \cdot t} \cdot t \cdot \mathbf{1}_{[-5;5]}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-5}^5 t dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{t^2}{2} \right]_{t=-5}^{t=5} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{25 - 25}{2} = 0 \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-25i \cdot \sin(5x)}{2\pi} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5i \cdot \cos(5x) - 25i \cdot x \cdot \sin(5x) - 5i \cdot \cos(5x)}{2\pi x} \\
 &\stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5i \cdot x \cdot \cos(5x) - i \cdot \sin(5x)}{\pi x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{i \cdot (5x \cdot \cos(5x) - \sin(5x))}{\pi x^2}.
 \end{aligned}$$

Also ist $(\mathcal{F}f)(\omega) = \lim_{x \rightarrow \omega} \frac{i \cdot (5x \cdot \cos(5x) - \sin(5x))}{\pi x^2}$ für alle $\omega \in \mathbb{R}$.

b) g auf $D := \mathbb{R}$

$$\frac{1}{\pi \cdot (1 + \omega^2)}$$

Lösung: Sei $f := g \cdot \mathbf{1}_D$. Mit der linearen Substitutionsregel ergibt sich für alle $\omega \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{F}f)(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \cdot e^{-|t|} \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{R}}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} \cdot e^{-t} dt + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^0 e^{-i\omega t} \cdot e^t dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{\infty} e^{(-i\omega - 1) \cdot t} dt + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^0 e^{(-i\omega + 1) \cdot t} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{e^{(-i\omega - 1) \cdot t}}{-i\omega - 1} \right]_{t=0}^{t=\infty} + \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{e^{(-i\omega + 1) \cdot t}}{-i\omega + 1} \right]_{t=-\infty}^{t=0} = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(0 - \frac{1}{-i\omega - 1} \right) + \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{-i\omega + 1} - 0 \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{1+i\omega} + \frac{1}{1-i\omega} \right) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1-i\omega+1+i\omega}{(1+i\omega) \cdot (1-i\omega)} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2}{1^2 - (i\omega)^2} = \frac{1}{\pi \cdot (1 + \omega^2)}.
 \end{aligned}$$

c) $\sin$ auf $D := [-\pi; \pi]$

$$\lim_{x \rightarrow \omega} \frac{i \cdot \sin(\pi x)}{\pi \cdot (x^2 - 1)}$$

Lösung: Sei $f := \sin \cdot \mathbf{1}_D$. Mit partieller Integration ergibt sich für alle $\omega \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 \int \underbrace{e^{-i\omega x}}_{=u(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{=v'(x)} dx &= \underbrace{e^{-i\omega x}}_{=u(x)} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{=v(x)} - \int \underbrace{(-i\omega \cdot e^{-i\omega x})}_{=u'(x)} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{=v(x)} dx \\
 &= -e^{-i\omega x} \cdot \cos(x) - i\omega \cdot \int \underbrace{e^{-i\omega x}}_{=u(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{=w'(x)} dx \\
 &= -e^{-i\omega x} \cdot \cos(x) - i\omega \cdot \underbrace{e^{-i\omega x}}_{=u(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{=w(x)} - (-i\omega) \cdot \int \underbrace{(-i\omega \cdot e^{-i\omega x})}_{=u'(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{=w(x)} dx \\
 &= -e^{-i\omega x} \cdot (\cos(x) + i\omega \cdot \sin(x)) + \omega^2 \cdot \int e^{-i\omega x} \cdot \sin(x) dx.
 \end{aligned}$$

Subtrahiert man für alle $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ den Term $\omega^2 \cdot \int e^{-i\omega x} \cdot \sin(x) dx$ auf beiden Seiten der äußeren Gleichung und teilt im Anschluss durch $(1 - \omega^2)$, so folgt

$$\int e^{-i\omega x} \cdot \sin(x) dx = \frac{e^{-i\omega x} \cdot (i\omega \cdot \sin(x) + \cos(x))}{\omega^2 - 1}.$$

Für alle $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ ergibt sich mit $\sin(-\pi) = \sin(\pi) = 0$ und $\cos(-\pi) = \cos(\pi) = -1$

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}f)(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \cdot \sin(x) \cdot \mathbf{1}_{[-\pi; \pi]}(x) dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\omega x} \cdot \sin(x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{e^{-i\omega x} \cdot (i\omega \cdot \sin(x) + \cos(x))}{\omega^2 - 1} \right]_{x=-\pi}^{x=\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{-e^{-i\omega\pi} + e^{i\omega\pi}}{\omega^2 - 1} \\ &= \frac{i}{\pi \cdot (\omega^2 - 1)} \cdot \frac{e^{i\pi\omega} - e^{-i\pi\omega}}{2i} = \frac{i}{\pi \cdot (\omega^2 - 1)} \cdot \sin(\pi\omega) = \lim_{x \rightarrow \omega} \frac{i \cdot \sin(\pi x)}{\pi \cdot (x^2 - 1)}. \end{aligned}$$

Für $\omega = 1$ erhält man mit der Regel von de l'Hospital und $e^{-2i\pi} = e^{2i\pi} = 1$

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}f)(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \cdot 1 \cdot x} \cdot \sin(x) \cdot \mathbf{1}_{[-\pi; \pi]}(x) dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix} \cdot \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} dx \\ &= \frac{-i}{4\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} (1 - e^{-2ix}) dx = \frac{-i}{4\pi} \cdot \left[x - \frac{e^{-2ix}}{-2i} \right]_{x=-\pi}^{x=\pi} = \frac{-i\pi}{4\pi} - \frac{e^{-2i\pi}}{8\pi} - \frac{i\pi}{4\pi} + \frac{e^{2i\pi}}{8\pi} = -\frac{i}{2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{i \cdot \pi \cdot \cos(\pi x)}{\pi \cdot 2x} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{i \cdot \sin(\pi x)}{\pi \cdot (x^2 - 1)}. \end{aligned}$$

Für $\omega = -1$ erhält man mit der Regel von de l'Hospital und $e^{2i\pi} = e^{-2i\pi} = 1$

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}f)(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \cdot (-1) \cdot x} \cdot \sin(x) \cdot \mathbf{1}_{[-\pi; \pi]}(x) dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix} \cdot \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} dx \\ &= \frac{-i}{4\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} (e^{2ix} - 1) dx = \frac{-i}{4\pi} \cdot \left[\frac{e^{2ix}}{2i} - x \right]_{x=-\pi}^{x=\pi} = -\frac{e^{2i\pi}}{8\pi} - \frac{-i\pi}{4\pi} + \frac{e^{-2i\pi}}{8\pi} + \frac{i\pi}{4\pi} = \frac{i}{2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{i \cdot \pi \cdot \cos(\pi x)}{\pi \cdot 2x} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{i \cdot \sin(\pi x)}{\pi \cdot (x^2 - 1)}. \end{aligned}$$

Also ist $(\mathcal{F}f)(\omega) = \lim_{x \rightarrow \omega} \frac{i \cdot \sin(\pi x)}{\pi \cdot (x^2 - 1)}$ für alle $\omega \in \mathbb{R}$.

d) $\sin$ auf $D := [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$$\lim_{x \rightarrow \omega} \frac{i \cdot x \cdot \cos(\frac{\pi}{2} \cdot x)}{\pi \cdot (x^2 - 1)}$$

Lösung: Sei $f := \sin \cdot \mathbf{1}_D$. Mit partieller Integration ergibt sich für alle $\omega \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \int \underbrace{e^{-i\omega z}}_{=u(z)} \cdot \underbrace{\sin(z)}_{=v'(z)} dz &= \underbrace{e^{-i\omega z}}_{=u(z)} \cdot \underbrace{(-\cos(z))}_{=v(z)} - \int \underbrace{(-i\omega \cdot e^{-i\omega z})}_{=u'(z)} \cdot \underbrace{(-\cos(z))}_{=v(z)} dz \\ &= -e^{-i\omega z} \cdot \cos(z) - i\omega \cdot \int \underbrace{e^{-i\omega z}}_{=u(z)} \cdot \underbrace{\cos(z)}_{=w'(z)} dz \\ &= -e^{-i\omega z} \cdot \cos(z) - i\omega \cdot \underbrace{e^{-i\omega z}}_{=u(z)} \cdot \underbrace{\sin(z)}_{=w(z)} - (-i\omega) \cdot \int \underbrace{(-i\omega \cdot e^{-i\omega z})}_{=u'(z)} \cdot \underbrace{\sin(z)}_{=w(z)} dz \\ &= -e^{-i\omega z} \cdot (\cos(z) + i\omega \cdot \sin(z)) + \omega^2 \cdot \int e^{-i\omega z} \cdot \sin(z) dz. \end{aligned}$$

Subtrahiert man für alle $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ den Term $\omega^2 \cdot \int e^{-i\omega z} \cdot \sin(z) dz$ auf beiden Seiten der äußeren Gleichung und teilt im Anschluss durch $(1 - \omega^2)$, so folgt

$$\int e^{-i\omega z} \cdot \sin(z) dz = \frac{e^{-i\omega z} \cdot (i\omega \cdot \sin(z) + \cos(z))}{\omega^2 - 1}.$$

Für alle $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ ergibt sich mit $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ und $\cos(-\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}f)(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega z} \cdot \sin(z) \cdot \mathbf{1}_{[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]}(z) dz = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-i\omega z} \cdot \sin(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{e^{-i\omega z} \cdot (i\omega \cdot \sin(z) + \cos(z))}{\omega^2 - 1} \right]_{z=-\frac{\pi}{2}}^{z=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{i\omega \cdot e^{-i\omega \cdot \frac{\pi}{2}} + i\omega \cdot e^{i\omega \cdot \frac{\pi}{2}}}{\omega^2 - 1} \\ &= \frac{i\omega}{\pi \cdot (\omega^2 - 1)} \cdot \frac{e^{i\omega \cdot \frac{\pi}{2}} + e^{-i\omega \cdot \frac{\pi}{2}}}{2} = \frac{i\omega}{\pi \cdot (\omega^2 - 1)} \cdot \cos\left(\frac{\pi\omega}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \omega} \frac{i \cdot x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)}{\pi \cdot (x^2 - 1)}. \end{aligned}$$

Für $\omega = 1$ erhält man mit der Regel von de l'Hospital und $e^{-i\pi} = e^{i\pi} = -1$

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}f)(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \cdot 1 \cdot z} \cdot \sin(z) \cdot \mathbf{1}_{[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]}(z) dz = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-iz} \cdot \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} dz \\ &= \frac{-i}{4\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} (1 - e^{-2iz}) dz = \frac{-i}{4\pi} \cdot \left[z - \frac{e^{-2iz}}{-2i} \right]_{z=-\frac{\pi}{2}}^{z=\frac{\pi}{2}} = \frac{-i\pi}{8\pi} - \frac{e^{-i\pi}}{8\pi} - \frac{i\pi}{8\pi} + \frac{e^{i\pi}}{8\pi} = -\frac{i}{4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{i \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) - i \cdot x \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)}{\pi \cdot 2x} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{i \cdot x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)}{\pi \cdot (x^2 - 1)}. \end{aligned}$$

Für $\omega = -1$ erhält man mit der Regel von de l'Hospital und $e^{-i\pi} = e^{i\pi} = -1$

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}f)(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \cdot (-1) \cdot z} \cdot \sin(z) \cdot \mathbf{1}_{[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]}(z) dz = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz} \cdot \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} dz \\ &= \frac{-i}{4\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} (e^{2iz} - 1) dz = \frac{-i}{4\pi} \cdot \left[\frac{e^{2iz}}{2i} - z \right]_{z=-\frac{\pi}{2}}^{z=\frac{\pi}{2}} = -\frac{e^{i\pi}}{8\pi} - \frac{-i\pi}{8\pi} + \frac{e^{-i\pi}}{8\pi} + \frac{i\pi}{8\pi} = \frac{i}{4} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{i \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) - i \cdot x \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)}{\pi \cdot 2x} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{i \cdot x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)}{\pi \cdot (x^2 - 1)}. \end{aligned}$$

Also ist $(\mathcal{F}f)(\omega) = \lim_{x \rightarrow \omega} \frac{i \cdot x \cdot \cos(\frac{\pi}{2} \cdot x)}{\pi \cdot (x^2 - 1)}$ für alle $\omega \in \mathbb{R}$.

e) $\cosh$ auf $D := [-1; 1]$

$$\frac{(e^2 + 1) \cdot \omega \cdot \sin(\omega) + (e^2 - 1) \cdot \cos(\omega)}{2e\pi \cdot (\omega^2 + 1)}$$

Lösung: Sei $f := \cosh \cdot \mathbf{1}_D$. Mit partieller Integration ergibt sich für alle $\omega \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \int \underbrace{e^{-i\omega y}}_{=u(y)} \cdot \underbrace{\cosh(y)}_{=v'(y)} dy &= \underbrace{e^{-i\omega y}}_{=u(y)} \cdot \underbrace{\sinh(y)}_{=v(y)} - \int \underbrace{(-i\omega \cdot e^{-i\omega y})}_{=u'(y)} \cdot \underbrace{\sinh(y)}_{=v(y)} dy \\ &= e^{-i\omega y} \cdot \sinh(y) + i\omega \cdot \int \underbrace{e^{-i\omega y}}_{=u(y)} \cdot \underbrace{\sinh(y)}_{=w'(y)} dy \\ &= e^{-i\omega y} \cdot \sinh(y) + i\omega \cdot \underbrace{e^{-i\omega y}}_{=u(y)} \cdot \underbrace{\cosh(y)}_{=w(y)} - i\omega \cdot \int \underbrace{(-i\omega \cdot e^{-i\omega y})}_{=u'(y)} \cdot \underbrace{\cosh(y)}_{=w(y)} dy \\ &= e^{-i\omega y} \cdot (\sinh(y) + i\omega \cdot \cosh(y)) - \omega^2 \cdot \int e^{-i\omega y} \cdot \cosh(y) dy. \end{aligned}$$

Addiert man für alle $\omega \in \mathbb{R}$ den Term $\omega^2 \cdot \int e^{-i\omega y} \cdot \cosh(y) dy$ auf beiden Seiten der äußeren Gleichung und teilt im Anschluss durch $(1 + \omega^2)$, so folgt

$$\int e^{-i\omega y} \cdot \cosh(y) dy = \frac{e^{-i\omega y} \cdot (i\omega \cdot \cosh(y) + \sinh(y))}{\omega^2 + 1}.$$

Für alle $\omega \in \mathbb{R}$ ergibt sich mit $\cosh(-1) = \frac{e^{-1}+e^1}{2} = \frac{e^1+e^{-1}}{2} = \cosh(1) = \frac{e^2+1}{2e}$ und $\sinh(-1) = \frac{e^{-1}-e^1}{2} = -\frac{e^1-e^{-1}}{2} = -\sinh(1) = -\frac{e^2-1}{2e}$

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}f)(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega y} \cdot \cosh(y) \cdot \mathbf{1}_{[-1;1]}(y) dy = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-1}^1 e^{-i\omega y} \cdot \cosh(y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{e^{-i\omega y} \cdot (i\omega \cdot \cosh(y) + \sinh(y))}{\omega^2 + 1} \right]_{y=-1}^{y=1} \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{-i\omega} \cdot \left(i\omega \cdot \frac{e^2+1}{2e} + \frac{e^2-1}{2e} \right) - e^{i\omega} \cdot \left(i\omega \cdot \frac{e^2+1}{2e} - \frac{e^2-1}{2e} \right)}{\omega^2 + 1} \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\omega \cdot (e^2 + 1) \cdot \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i} + (e^2 - 1) \cdot \frac{e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{2}}{e \cdot (\omega^2 + 1)} \\ &= \frac{(e^2 + 1) \cdot \omega \cdot \sin(\omega) + (e^2 - 1) \cdot \cos(\omega)}{2e\pi \cdot (\omega^2 + 1)}. \end{aligned}$$



KomplAna/Laurentreihen/Ag_Laurentreihe2.tex

Aufgabe 83.395 (Laurentreihen)

kr

Entwickeln Sie die Funktionen jeweils in eine Laurentreihe für $0 < |z - z_0| < R$ und geben Sie das Residuum $\text{res}(f; z_0)$ an:

a) $f(z) = \frac{1}{z^3 - z^4}$ für $z_0 = 0, R = 1$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-3} = \sum_{k=-3}^{\infty} z^k, \text{res}(f; 0) = 1$$

Lösung:

Mit der Hilfe der geometrischen Reihe $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ für $|z| < 1$ ergibt sich:

$$f(z) = \frac{1}{z^3 - z^4} = \frac{1}{z^3(1-z)} = \frac{1}{z^3} \cdot \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z^3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-3} = \sum_{k=-3}^{\infty} z^k$$

Im letzten Schritt haben wir noch eine Indexverschiebung $k := n - 3$ vorgenommen.

b) $f(z) = \frac{1}{z \cdot (z+5)}$ für $z_0 = 0, R = 5$
 $\text{res}(f; 0) = \frac{1}{5}$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{5^{k+1}} z^{k-1} = \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{5^{n+2}} z^n,$$

Lösung:

Mit der Hilfe der geometrischen Reihe $\frac{1}{1-(-\frac{z}{5})} = \sum_{k=0}^{\infty} (-\frac{z}{5})^k$ für $|z/5| < 1$ bzw. $|z| < 5$ ergibt sich:

$$f(z) = \frac{1}{z \cdot (z+5)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{5(\frac{z}{5}+1)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{5} \frac{1}{1-(-\frac{z}{5})} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{5} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-\frac{z}{5})^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{5^{k+1}} z^{k-1} = \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{5^{n+2}} z^n$$

Im letzten Schritt haben wir noch eine Indexverschiebung $n := k - 1$ vorgenommen.

c) $f(z) = \frac{z}{z^2 - 9}$ für $z_0 = 3, R = 6$

$$f(z) = \frac{1}{2}(z-3)^{-1} + \frac{1}{12} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 6^{-k} (z-3)^k, \text{res}(f; 3) = \frac{1}{2}$$

Lösung:

$f(z) = \frac{z}{z^2 - 9} = \frac{z}{(z-3)(z+3)} = \frac{A}{z-3} + \frac{B}{z+3}$ wobei wir eine Partialbruchzerlegung mit zwei Unbekannten A, B angestzt haben. Multiplikation mit dem Hauptnenner $(z-3)(z+3)$ ergibt die für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{3, -3\}$ gültige Gleichung

$$z = A(z+3) + B(z-3) \Leftrightarrow z = z(A+B) + 3A - 3B$$

Koeffizientenvergleich ergibt das lineare Gleichungssystem $1 = A + B, 0 = 3A - 3B$. Die einzige Lösung davon ist $A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}$. Damit und mit der geometrischen Reihe $\frac{1}{1-(-\frac{z-3}{6})} = \sum_{k=0}^{\infty} (-\frac{z-3}{6})^k$ für $|(z-3)/6| < 1$ bzw. $|z-3| < 6$ ergibt sich:

$$f(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{z-3} + \frac{1}{2} \frac{1}{z+3} = \frac{1}{2} \frac{1}{z-3} + \frac{1}{2} \frac{1}{z-3+6} = \frac{1}{2} \frac{1}{z-3} + \frac{1}{2} \frac{1}{6+z-3} = \frac{1}{2} \frac{1}{z-3} + \frac{1}{2} \frac{1}{6(1+\frac{z-3}{6})} = \frac{1}{2} \frac{1}{z-3} + \frac{1}{12} \frac{1}{1-(-\frac{z-3}{6})} = \frac{1}{2} \frac{1}{z-3} + \frac{1}{12} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 6^{-k} (z-3)^k = \frac{1}{2}(z-3)^{-1} + \frac{1}{12} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 6^{-k} (z-3)^k$$

d) $f(z) = \frac{2}{(z-1)^2(z+1)}$ für $z_0 = 1, R = 2$
 $\text{res}(f; 1) = -\frac{1}{2}$

$$f(z) = (z-1)^{-2} - \frac{1}{2}(z-1)^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^{-k-2} (z-1)^k,$$

Lösung: $f(z) = \frac{2}{(z-1)^2(z+1)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{(z-1)^2} + \frac{C}{z+1}$ wobei wir eine Partialbruchzerlegung mit drei Unbekannten A, B, C angestzt haben. Multiplikation mit dem Hauptnenner $(z-1)^2(z+1)$ ergibt die für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$ gültige Gleichung

$$2 = A(z-1)(z+1) + B(z+1) + C(z-1)^2 \Leftrightarrow 2 = A(z^2-1) + B(z+1) + C(z^2-2z+1) \Leftrightarrow 2 = z^2(A+C) + z(B-2C) + (-A+B+C)$$

Koeffizientenvergleich ergibt das lineare Gleichungssystem $0 = A+C, 0 = B-2C, 2 = -A+B+C$. Die einzige Lösung davon ist $A = -\frac{1}{2}, B = 1, C = \frac{1}{2}$. Damit und mit der geometrischen Reihe

$\frac{1}{1 - (-\frac{z-1}{2})} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{z-1}{2}\right)^k$ für $|(z-1)/2| < 1$ bzw. $|z-1| < 2$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{2} \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{z+1} = -\frac{1}{2} \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{z-1+2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2+(z-1)} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{z-1}{2}} = -\frac{1}{2} \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{1 - (-\frac{z-1}{2})} = -\frac{1}{2} \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{z-1}{2}\right)^k = \\ &= (z-1)^{-2} - \frac{1}{2}(z-1)^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^{-k-2} (z-1)^k \end{aligned}$$

e) $f(z) = z^5 \cdot e^{\frac{1}{z}}$ für $z_0 = 0, R = \infty$

$$f(z) = \sum_{n=0}^5 \frac{z^n}{(5-n)!} + \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{(n+5)!}, \text{res}(f; 0) = \frac{1}{6!}$$

Lösung:

Wir verwenden die Taylorreihe für die Exponentialfunktion:

$$e^{\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \xi^k, \xi \in \mathbb{C}$$

$$f(z) = z^5 e^{\frac{1}{z}} = z^5 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{z}\right)^k = z^5 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{5-k}}{k!}$$

Für weitere Umformungen verwenden wir eine Indexverschiebung $k-5 := n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{5-k}}{k!} = \sum_{n=-5}^{\infty} \frac{z^{-n}}{(n+5)!} = \sum_{n=-5}^0 \frac{z^{-n}}{(n+5)!} + \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{(n+5)!} \\ &= \sum_{n=0}^5 \frac{z^n}{(5-n)!} + \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{(n+5)!} \end{aligned}$$



KomplAna/Residuensatz/Ag_Residuensatz_reelleKurvenintegrale.tex

Aufgabe 84.396 (Reelle Integrale mit Residuensatz 1)

kr, u.a. nach TUM, ahs

Berechnen Sie die Integrale

$$\text{a) } \int_0^{2\pi} \frac{1}{3 + \cos(t)} dt \quad \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad \text{b) } \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta)}{3 - 2 \sin(\theta)} d\theta \quad \frac{3\sqrt{5}-5}{5} \pi$$

indem Sie diese als Kurvenintegrale in der komplexen Ebene (Kurve: Kreis um Ursprung mit Radius 1) auffassen.



KomplAna/Residuensatz/Ag_Residuensatz_reelleKurvenintegrale2.tex

Aufgabe 84.397 (Reelle Integrale mit Residuensatz 2)

kr, u.a. nach TUM, Uni Giessen

Berechnen Sie die Integrale mit Hilfe der Formel

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^S \text{Res}(f; z_k)$$

wobei $z_1, \dots, z_S$ die Pole von $f(z)$ mit $\text{Im}(z_k) > 0$ sind. (Gilt für $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(Re^{it}) \cdot Re^{it} dt = 0$.)

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx & \pi/2 & \text{c) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 4)^2} dx \quad \pi/4 \quad \text{e) } \int_0^{\infty} \frac{x \sin(x)}{x^4 + 1} dx \\ \text{b) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - a^2}{x^4 + 1} dx & \pi(1 - \frac{\pi}{2} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\frac{1}{\sqrt{2}})}) & \text{d) } \int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^6 + 1} dx \quad \pi/6 \end{array}$$

Lösung:

Unsere Strategie bei der Lösung der Aufgabe ist, die Funktionen als komplexe Funktionen $f(z)$ aufzufassen und dann das Kurvenintegral über die geschlossene Kurve $\gamma_R = \gamma_1 + \gamma_2$ zu berechnen, wobei γ_1 die Kurve von $-R$ bis R auf der reellen Achse ist und γ_2 einen Halbkreis in der oberen Hälfte der Koordinatenebene von R nach $-R$ beschreibt:

$$\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_2(t) := e^{i\pi \cdot t}.$$

Für ein sehr großes R liegen alle Residuen der gegebenen Funktionen, die in der oberen Halbebene liegen auch innerhalb der Kurve γ und es gilt:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\alpha} \text{Res}_{\alpha} f.$$

Dabei wird über alle Residuen von f in der oberen Halbebene summiert. Das Integral $\int_{\gamma} f(z) dz$ kann man wie folgt aufteilen:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \underbrace{\int_{\gamma_1} f(z) dz}_{= \int_{-R}^R f(x) dx} + \underbrace{\int_{\gamma_2} f(z) dz}_{\text{soll Null werden!}} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

Also ergibt sich:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\alpha} \text{Res}_{\alpha} f, \quad (4)$$

zumindest falls das Integral $\int_{\gamma_2} f(z) dz = 0$ ist. Das gilt beispielsweise wenn

- $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ eine rationale Funktion vom Grad ≤ -2 ist (d.h. $\deg q \geq \deg p + 2$.)
- $f(z) = g(z) \cdot e^{i \cdot z}$ wobei g rational vom Grad ≤ -2 . (Das ist ein Spezialfall des Lemmas von Jordan.)

Nun zu den Lösungen der einzelnen Teilaufgaben:

- a) Die Funktion $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}$ ist rational vom Grad -4 , deshalb gilt hier die Gleichung (??). Die Singularitäten von f sind die komplexen Nullstellen des Nenners $(z^2 + 1)^2 = (z - i)^2 \cdot (z + i)^2$. Dies sind $\pm i$, beides Pole 2. Ordnung. In der oberen Halbebene liegt nur i .

Die Formel zur Berechnung des Residuums einer Funktion f in einer Polstelle n -ter Ordnung α ist

$$\text{Res}_\alpha f = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} [(z - \alpha)^n f(z)]$$

Damit berechnet sich das Residuum von $f(z)$ an der Polstelle $\alpha = 2i$ der Ordnung 2 als:

$$\begin{aligned} \text{Res}_i f &= \lim_{z \rightarrow i} (f(z) \cdot (z - i)^2)' = \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{1}{(z + i)^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow i} \frac{-2}{(z + i)^3} \\ &= \frac{-2}{(2i)^3} = \frac{1}{4i} \end{aligned}$$

Für das Integral ergibt sich damit nach Gleichung (??):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx = 2\pi i \cdot \text{Res}_i f(z) = 2\pi i \cdot \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}.$$

- b) Die Funktion $f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x^4 + 1}$ ist rational vom Grad -2 , deshalb gilt hier die Gleichung (??). Die Singularitäten von f sind die komplexen Nullstellen des Nenners $z^4 + 1$. Das sind $e^{\pm \frac{\pi}{4}i}, e^{\pm \frac{3}{4}\pi i}$. Da der Nenner ein Polynom vom Grad 4 ist und 4 Nullstellen hat, hat jeder der 4 Pole von f die Ordnung 1. Die Pole auf der oberen Halbebene sind $e^{\frac{\pi}{4}i}$ und $e^{\frac{3}{4}\pi i}$. Die zugehörigen Residuen sind

$$\begin{aligned} \text{Res}_{e^{\frac{\pi}{4}i}} \frac{z^2 - a^2}{z^4 + 1} &= \frac{z^2 - a^2}{4z^3} \Big|_{z=e^{\frac{\pi}{4}i}} = \frac{i - a^2}{4} \cdot e^{-\frac{3}{4}\pi i} \\ \text{Res}_{e^{\frac{3}{4}\pi i}} \frac{z^2 - a^2}{z^4 + 1} &= \frac{z^2 - a^2}{4z^3} \Big|_{z=e^{\frac{3}{4}\pi i}} = \frac{-i - a^2}{4} \cdot e^{-\frac{1}{4}\pi i}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - a^2}{x^4 + 1} &= 2\pi i \cdot \left(\frac{i - a^2}{4} \cdot \underbrace{e^{-\frac{3}{4}\pi i}}_{=-\frac{1+i}{\sqrt{2}}} + \frac{-i - a^2}{4} \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{4}\pi i}}_{=-\frac{1-i}{\sqrt{2}}} \right) \\ &= 2\pi i \cdot \frac{2 \cdot (a^2 - 1) \cdot i}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}(1 - a^2). \end{aligned}$$

- c) Die Funktion $g(x) = \frac{x^2}{(x^2+4)^2}$ ist auch rational und hat Grad $-$ und deshalb gilt auch hier die Gleichung (??). Die Polstellen von $g(z)$ sind die Nullstellen von $(z^2 + 4)^2$ und damit $\pm 2i$. Es gibt also einen Pol von $g(z)$ in der komplexen oberen Halbebene. Die Ordnung dieser Polstelle ist 2, da $g(z) \cdot (z - 2i) = \frac{z^2}{(z+2i)^2(z-2i)}$ immernoch eine Singularität an der Stelle $z = 2i$ hat, $g(z) \cdot (z - 2i)^2 = \frac{z^2}{(z+2i)^2}$ aber nicht mehr.

Die Formel zur Berechnung des Residuums einer Funktion f in einer Polstelle n -ter Ordnung α ist

$$\text{Res}_\alpha f = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} [(z - \alpha)^n f(z)]$$

Damit berechnet sich das Residuum von $g(z)$ an der Polstelle $\alpha = 2i$ der Ordnung 2 als:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{2i} g &= \lim_{z \rightarrow 2i} (g(z) \cdot (z - 2i)^2)' = \lim_{z \rightarrow 2i} \left(\frac{z^2}{(z + 2i)^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{2z(z + 2i)^2 - z^2(2(z + 2i))}{(z + 2i)^4} \\ &= \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{4zi}{(z + 2i)^3} = \frac{-8i}{(4i)^3} = -\frac{i}{8}\end{aligned}$$

Für das Integral ergibt sich damit nach Gleichung (??):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 4)^2} dx = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{2i} g(z) = \frac{\pi}{4}.$$

- d) Die Funktion $f(x) = \frac{x^2}{x^6 + 1}$ ist rational vom Grad -4 , deshalb gilt hier die Gleichung (??). Die Singularitäten von f sind die komplexen Nullstellen des Nenners $z^6 + 1$. Das sind $e^{\frac{\pi}{6}i + 2\pi ki}$, $k \in 0, 1, \dots, 5$. Da der Nenner ein Polynom vom Grad 6 ist und 6 Nullstellen hat, hat jeder der 6 Pole von f die Ordnung 1. Die Pole auf der oberen Halbebene sind $e^{\frac{\pi}{6}i}$, $e^{\frac{\pi}{2}i}$ und $e^{\frac{5\pi}{6}i}$. Die zugehörigen Residuen sind

$$\operatorname{Res}_{e^{\frac{\pi}{6}i}} \frac{z^2}{z^6 + 1} = \frac{z^2}{6z^5} \Big|_{z=e^{\frac{\pi}{6}i}} = \frac{1}{6z^3} \Big|_{z=e^{\frac{\pi}{6}i}} = \frac{1}{6} e^{-\frac{\pi}{2}i} = \frac{1}{6} (\cos(\pi/2) - i \sin(\pi/2)) = -\frac{i}{6}$$

$$\operatorname{Res}_{e^{\frac{\pi}{2}i}} \frac{z^2}{z^6 + 1} = \frac{z^2}{6z^5} \Big|_{z=e^{\frac{\pi}{2}i}} = \frac{1}{6z^3} \Big|_{z=e^{\frac{\pi}{2}i}} = \frac{1}{6} \left(e^{-\frac{\pi}{2}i} \right)^3 = \frac{1}{6} (-i)^3 = \frac{i}{6}$$

$$\operatorname{Res}_{e^{\frac{5\pi}{6}i}} \frac{z^2}{z^6 + 1} = \frac{z^2}{6z^5} \Big|_{z=e^{\frac{5\pi}{6}i}} = \frac{1}{6z^3} \Big|_{z=e^{\frac{5\pi}{6}i}} = \frac{1}{6} \left(e^{-\frac{5\pi}{6}i} \right)^3 = \frac{1}{6} \left(e^{-\frac{5\pi}{2}i} \right)^3 = \frac{1}{6} e^{-\frac{\pi}{2}i} = -\frac{i}{6}$$

Damit ergibt sich:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^6 + 1} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^6 + 1} = \frac{1}{2} 2\pi i \cdot \left(-\frac{i}{6} + \frac{i}{6} - \frac{i}{6} \right) = \frac{\pi}{6}$$

- e) Bei der letzten Teilaufgabe gehen wir einen Umweg, damit wir das Lemma von Jordan anwenden können. Wir schauen uns die Funktion

$$h(z) = \frac{z}{z^4 + 1} \cdot e^{iz}.$$

Sie ist ein Produkt einer rationalen Funktion vom Grad -3 und der komplexen e-Funktion. Deshalb gilt auch hier Gleichung (??) (mit $h(z)$ statt $f(z)$). Die Singularitäten von $h(z)$ sind die selben wie die von $f(z)$ in Teilaufgabe a). In der oberen Halbebene sind das $e^{\frac{\pi}{3}i}$ und $e^{\frac{4\pi}{3}i}$. Diese Polstellen haben beide Ordnung 1 und damit berechnen sich die Residuen von $h(z)$ wie folgt:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{e^{\frac{\pi}{3}i}} h &= \frac{z \cdot e^{iz}}{4z^3} \Big|_{z=e^{\frac{\pi}{3}i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)} = -\frac{i}{4} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{i}{\sqrt{2}}}} \\ \operatorname{Res}_{e^{\frac{4\pi}{3}i}} h &= \frac{z \cdot e^{iz}}{4z^3} \Big|_{z=e^{\frac{4\pi}{3}i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(i-1)} = -\frac{i}{4} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i}{\sqrt{2}}}}.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cdot e^{ix}}{1 + x^4} dx = 2\pi i \left(\frac{i}{4} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(e^{-\frac{i}{\sqrt{2}}} - e^{\frac{i}{\sqrt{2}}} \right) \right) = -\frac{\pi}{2} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} 2i \sin \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{2} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} 2i \sin \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Da $\frac{x \sin(x)}{1 + x^4} = \operatorname{Im} \frac{x e^{ix}}{1 + x^4}$ gilt und eine gerade Funktion ist, berechnen wir:

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin(x)}{1 + x^4} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(x)}{1 + x^4} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cdot e^{ix}}{1 + x^4} dx = \frac{\pi}{2} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \sin \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$



KomplZahlen/Darstellung/Ag_BeweiseMitKomplexenZahlen.tex

Aufgabe 85.398 (Kleine Beweise mit komplexen Zahlen in WiWi Alt-Klausuren)

- a) Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $z^2 \geq 0$. Insbesondere gelte also $z^2 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $z \in \mathbb{R}$ gilt.

Lösung:

Mit $z = x + iy$ wobei $x, y \in \mathbb{R}$ ergibt sich $z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$. Damit $z^2 \in \mathbb{R}$ erfüllt ist muss $x = 0$ oder $y = 0$ sein.

- **1. Fall** $y = 0$: Dann ist $z = x$ und damit $z \in \mathbb{R}$. Da $z^2 = x^2 \geq 0$, ist dies für alle reelle Zahlen erfüllt.
- **2. Fall** $x = 0$: Dann ist $z = iy$ aber $z^2 = -y^2 \leq 0$ und nur gleich Null für $y = 0$, d.h. auch in diesem Fall ist die einzige Lösung $z = 0$ eine reelle Zahl.

- b) Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen mit $\operatorname{Re}(z_2), \operatorname{Im}(z_2) \neq 0$ und es gelte

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\operatorname{Re}(z_1)}{\operatorname{Re}(z_2)}.$$

- (i) Beweisen Sie, dass $\operatorname{Im}(z_1) \operatorname{Re}(z_2) = \operatorname{Re}(z_1) \operatorname{Im}(z_2)$.

Lösung:

Wir setzen $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ mit $x_2, y_2 \neq 0$ dann gilt mit

$$\operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(x_1 + iy_1) = x_1, \quad \operatorname{Re}(z_2) = \operatorname{Re}(x_2 + iy_2) = x_2$$

und

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}\right) &= \operatorname{Re}\left(\frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)}\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(y_1x_2 - y_2x_1)}{x_2^2 + y_2^2}\right) = \frac{x_1x_2 - y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned}$$

dass

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}\right) &= \frac{\operatorname{Re}(x_1 + iy_1)}{\operatorname{Re}(x_2 + iy_2)} \\ \iff \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} &= \frac{x_1}{x_2} \\ \iff (x_1x_2 + y_1y_2)x_2 &= x_1(x_2^2 + y_2^2) \\ \iff x_1x_2^2 + y_1y_2x_2 &= x_1x_2^2 + x_1y_2^2 \\ \iff y_1y_2x_2 &= x_1y_2^2 \\ \iff y_1x_2 &= x_1y_2 \\ \iff \operatorname{Im}(z_1) \operatorname{Re}(z_2) &= \operatorname{Re}(z_1) \operatorname{Im}(z_2) \end{aligned}$$

- (ii) $|z_1| = 1 = |z_2|$ und $\operatorname{Im}(z_1), \operatorname{Im}(z_2) > 0$. Folgern Sie, dass $z_1 = z_2$.

Lösung:

Mit $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ und $|z_1| = 1 = |z_2|$ gilt

$$\begin{aligned} 1^2 = |z_1|^2 &= x_1^2 + y_1^2 \implies x_1^2 = 1 - y_1^2 \\ 1^2 = |z_2|^2 &= x_2^2 + y_2^2 \implies x_2^2 = 1 - y_2^2 \end{aligned}$$

Einsetzen in $\operatorname{Im}(z_1) \operatorname{Re}(z_2) = \operatorname{Re}(z_1) \operatorname{Im}(z_2) \iff y_1 x_2 = x_1 y_2$ ergibt

$$\begin{aligned} y_1 x_2 &= x_1 y_2 \\ \implies y_1^2 x_2^2 &= x_1^2 y_2^2 \\ \iff y_1^2 (1 - y_2^2) &= (1 - y_1^2) y_2^2 \\ \iff y_1^2 - y_1^2 y_2^2 &= y_2^2 - y_1^2 y_2^2 \\ \iff y_1^2 &= y_2^2 \end{aligned}$$

Da $y_1 = \operatorname{Im}(z_1) > 0$ und $y_2 = \operatorname{Im}(z_2) > 0$ folgt damit $y_1 = y_2$. Damit ist auch $y_1, y_2 \neq 0$ da $y_2 \neq 0$. Wieder einsetzen in $y_1 x_2 = x_1 y_2$ liefert

$$\begin{aligned} y_1 x_2 &= x_1 y_2 \\ \xLeftrightarrow{y_1=y_2} y_2 x_2 &= x_1 y_2 \\ \xLeftrightarrow{y_2 \neq 0} x_2 &= x_1 \end{aligned}$$

Daraus folgt $z_1 = z_2$.

c) Beweisen Sie für alle $z \in \mathbb{C}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ die Formel von Moivre:

$$(\cos(z) + i \sin(z))^n = \cos(nz) + i \sin(nz)$$

Lösung:

Es gilt

$$(\cos(z) + i \sin(z))^n = (e^{iz})^n = e^{inz} = \cos(nz) + i \sin(nz)$$



KomplZahlen/Darstellung/Ag_KomplDarst_AddTheoAusEuler.tex

Aufgabe 85.399 (Additionstheoreme mit der Eulerformel beweisen)

[EHH](#)

Setzen Sie in beide Seiten der Gleichung $e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy}$ die Eulerformel ein, multiplizieren Sie aus und vergleichen Sie Real- und Imaginärteil, um zwei Additionstheoreme zu erhalten!

Hinweis: Die Gleichung gilt für alle $x \in \mathbb{C}$ und alle $y \in \mathbb{C}$.

$$\cos(x+y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y) \text{ und } \sin(x+y) = \cos(x) \cdot \sin(y) + \sin(x) \cdot \cos(y)$$

Lösung:

Auf der linken Seite liefert die Eulerformel sofort für den Real- und Imaginärteil

$$e^{i(x+y)} = \cos(x+y) + i \cdot \sin(x+y).$$

Auf der rechten Seite liefern Eulerformel, Ausmultiplizieren und Zusammenfassen

$$\begin{aligned} e^{ix} \cdot e^{iy} &= (\cos(x) + i \cdot \sin(x)) \cdot (\cos(y) + i \cdot \sin(y)) \\ &= \cos(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot i \cdot \sin(y) + i \cdot \sin(x) \cdot \cos(y) + i^2 \cdot \sin(x) \cdot \sin(y) \\ &= (\cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)) + i \cdot (\cos(x) \cdot \sin(y) + \sin(x) \cdot \cos(y)). \end{aligned}$$

Der Vergleich von Real- und Imaginärteil der beiden Seiten liefert die beiden Additionstheoreme

$$\cos(x+y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$$

und

$$\sin(x+y) = \cos(x) \cdot \sin(y) + \sin(x) \cdot \cos(y).$$



KomplZahlen/Darstellung/Ag_KomplZahlen_KartesischZuTrigonometrischUndEuler.tex

Aufgabe 85.400 (Trigonometrische Darstellung komplexer Zahlen)

jgl

Geben Sie die komplexen Zahlen in der trigonometrischen Darstellung $r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$ an, die auch polare Darstellung oder Polarform genannt wird. Sie können zudem die Schreibweise mit der Exponentialfunktion $r \cdot e^{i\varphi}$ angeben, die auch Exponentialform oder Eulerform heißt.

a) $4 + 4 \cdot i$

$$4 \cdot \sqrt{2} \cdot (\cos(\frac{\pi}{4}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{4})) = 4 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}$$

Lösung: Es ist $|4 + 4 \cdot i| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{4^2 \cdot (1+1)} = 4 \cdot \sqrt{2}$ und $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Damit ergibt sich

$$4 + 4 \cdot i = 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = 4 \cdot \sqrt{2} \cdot (\cos(\frac{\pi}{4}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{4})) = 4 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}.$$

b) $-1 + i$

$$\sqrt{2} \cdot (\cos(\frac{3\pi}{4}) + i \cdot \sin(\frac{3\pi}{4})) = \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot \frac{3\pi}{4}}$$

Lösung: Mit $|-1 + i| = |-1 + i \cdot 1| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ erhält man wegen $\cos(\frac{3\pi}{4}) = -\cos(\pi - \frac{3\pi}{4}) = -\cos(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\sin(\frac{3\pi}{4}) = \sin(\pi - \frac{3\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$-1 + i = \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} \cdot (\cos(\frac{3\pi}{4}) + i \cdot \sin(\frac{3\pi}{4})) = \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot \frac{3\pi}{4}}.$$

c) $\sqrt{18} - \sqrt{18} \cdot i$

$$6 \cdot (\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \cdot \sin(-\frac{\pi}{4})) = 6 \cdot e^{i \cdot (-\frac{\pi}{4})}$$

Lösung: Mit $|\sqrt{18} - \sqrt{18} \cdot i| = \sqrt{\sqrt{18}^2 + (-\sqrt{18})^2} = \sqrt{18+18} = \sqrt{36} = 6$ erhält man wegen $\cos(-\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\sin(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\sqrt{18} - \sqrt{18} \cdot i = 6 \cdot \left(\frac{\sqrt{18}}{6} - \frac{\sqrt{18} \cdot i}{6}\right) = 6 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = 6 \cdot (\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \cdot \sin(-\frac{\pi}{4})) = 6 \cdot e^{i \cdot (-\frac{\pi}{4})}.$$

d) i^3

$$1 \cdot (\cos(-\frac{\pi}{2}) + i \cdot \sin(-\frac{\pi}{2})) = 1 \cdot e^{i \cdot (-\frac{\pi}{2})}$$

Lösung: Es ist $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = 0 - 1 \cdot i$.

Mit $|0 - 1 \cdot i| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = \sqrt{1} = 1$, $\cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$ und $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ folgt

$$i^3 = 0 - 1 \cdot i = 1 \cdot (\cos(-\frac{\pi}{2}) + i \cdot \sin(-\frac{\pi}{2})) = 1 \cdot e^{i \cdot (-\frac{\pi}{2})}.$$

e) $\sqrt{12} + 2 \cdot i$

$$4 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) = 4 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{6}}$$

Lösung: Mit $|\sqrt{12} + 2 \cdot i| = \sqrt{\sqrt{12}^2 + 2^2} = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4$ erhält man wegen $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$

$$\sqrt{12} + 2 \cdot i = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{12}}{4} + \frac{2i}{4} \right) = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = 4 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) = 4 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{6}}.$$

f) $-4 - \sqrt{48} \cdot i$

$$8 \cdot \left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \right) = 8 \cdot e^{i \cdot \left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$$

Lösung: Mit $|-4 - \sqrt{48} \cdot i| = \sqrt{(-4)^2 + (-\sqrt{48})^2} = \sqrt{16 + 48} = \sqrt{64} = 8$ erhält man wegen $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{1}}{2} = -\frac{1}{2}$ und $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\sin\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$-4 - \sqrt{48} \cdot i = 8 \cdot \left(\frac{-4}{8} - \frac{\sqrt{48} \cdot i}{8} \right) = 8 \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot i}{2} \right) = 8 \cdot \left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \right) = 8 \cdot e^{i \cdot \left(-\frac{2\pi}{3}\right)}.$$



KomplZahlen/Darstellung/Ag_KomplZahlen_RealUImagBestimmen.tex

Aufgabe 85.401 (Real und Imaginärteil, Betrag und Konjugieren in WiWi Alt-Klausuren)

Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil sowie den Betrag und das komplex Konjugierte der folgenden komplexen Zahlen

a) $z_1 = \frac{1+i}{1-i}$

$$\operatorname{Re}(z_1) = 0, \operatorname{Im}(z_1) = 1, |z_1| = 1, \bar{z}_1 = -i$$

Lösung:

Multipliziere den Zähler und Nenner mit der komplex Konjugierten des Nenners:

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i-1}{1+1} = i = 0 + 1 \cdot i$$

$$\implies \operatorname{Re}(z_1) = 0, \operatorname{Im}(z_1) = 1, |z_1| = 1, \bar{z}_1 = -i.$$

b) $z_2 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{36}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{36}\right) \right)^9$

$$\operatorname{Re}(z_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \operatorname{Im}(z_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}, |z_2| = 1, \bar{z}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Lösung:

Potenzieren erfolgt am Besten mit der Eulerschen Darstellung:

$$\begin{aligned} \left(\cos\left(\frac{\pi}{36}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{36}\right) \right)^9 &= \left(e^{i \cdot \frac{\pi}{36}} \right)^9 = e^{i \cdot \frac{\pi}{4}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \implies \operatorname{Re}(z_2) &= \frac{\sqrt{2}}{2}, \operatorname{Im}(z_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}, |z_2| = 1, \bar{z}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

c) $z_3 = 5 e^{i \cdot \frac{7\pi}{4}}$

$$\operatorname{Re}(z_3) = \frac{5\sqrt{2}}{2}, \operatorname{Im}(z_3) = -\frac{5\sqrt{2}}{2}, |z_3| = 5, \arg(z_3) = \frac{7\pi}{4}, \bar{z}_3 = 5 e^{i \cdot \frac{\pi}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} + i \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Lösung:

Mit dem Wechsel zu Polardarstellung und Ausnutzung der trigonometrischen Formeln

$$\cos(2\pi + \alpha) = \cos(\alpha), \sin(2\pi + \alpha) = \sin(\alpha), \cos(-\alpha) = \cos(\alpha), \text{ und } \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

ergibt:

$$\begin{aligned} 5 e^{i \cdot \frac{7\pi}{4}} &= 5 \left(\cos \left(\frac{7\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{4} \right) \right) = 5 \left(\cos \left(2\pi - \frac{\pi}{4} \right) + i \cos \left(2\pi - \frac{\pi}{4} \right) \right) \\ &= 5 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = 5 \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) - i \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) \\ &= 5 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{5\sqrt{2}}{2} - i \frac{5\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\operatorname{Re}(z_3) = \frac{5\sqrt{2}}{2}, \operatorname{Im}(z_3) = -\frac{5\sqrt{2}}{2}, |z_3| = 5, \arg(z_3) = \frac{7\pi}{4}$$

und

$$\bar{z}_3 = 5 e^{-i \cdot \frac{7\pi}{4}} = 5 e^{i \cdot (-\frac{7\pi}{4} + 2\pi)} = 5 e^{i \cdot \frac{\pi}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} + i \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

d) $z_4 = \frac{4(1-i)}{3+i}$

$$\operatorname{Re}(z_4) = \frac{4}{5}, \operatorname{Im}(z_4) = -\frac{8}{5}, |z_4| = \frac{4}{\sqrt{5}}, \bar{z}_4 = \frac{4+8i}{5}$$

Lösung: Multiplizieren des Zählers und Nenners mit der komplex Konjugierten des Nenners ergibt

$$\begin{aligned} \frac{4(1-i)}{3+i} &= \frac{4(1-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{4(1-i)(3-i)}{9+1} = \frac{4(3-1-3i-i)}{10} \\ &= \frac{8-16i}{10} = \frac{4-8i}{5} = \frac{4}{5} - \frac{8}{5} \cdot i. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\implies \operatorname{Re}(z_4) = \frac{4}{5}, \operatorname{Im}(z_4) = -\frac{8}{5}, |z_4| = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2} = \frac{4}{\sqrt{5}} \text{ und } \bar{z}_4 = \frac{4+8i}{5}.$$



KomplZahlen/Darstellung/Ag_KomplZahlen_Rechenregeln1.tex

Aufgabe 85.402 (Potenzen komplexer Zahlen)

Vereinfachen Sie folgende komplexe Zahlen.

a) $\left(5e^{-\frac{\pi}{16}i} \right)^4,$
 $625 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$

Lösung:

$$\text{Es ist } \left(5e^{-\frac{\pi}{16}i} \right)^4 = 5^4 \cdot e^{-\frac{\pi \cdot 4}{16}i} = 625 \cdot e^{-\frac{\pi}{4}} = 625 \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$$

b) $\left(\frac{1}{3}e^{\frac{3\pi}{4}i} \right)^{-1},$
 $-3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

Lösung:

$$\text{Es ist } \left(\frac{1}{3}e^{\frac{3\pi}{4}i} \right)^{-1} = \frac{1}{3^{-1}}e^{-\frac{3\pi}{4}i} = 3e^{(-\frac{3\pi}{4}+2\pi)i} = 3e^{\frac{5\pi}{4}i} = -3\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

c) $(2-i)^3,$
 $2-11i$

Lösung: $(2-i)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2(-i) + 3 \cdot 2(-i)^2 + (-i)^3 = 8 - 12i - 6 + i = 2 - 11i$

d) $(4 + 3i)^{-2}$.

$$\frac{7}{625} - \frac{24}{625}i$$

Lösung: $(4 + 3i)^{-2} = \frac{(4-3i)^2}{(4^2+3^2)^2} = \frac{4^2-24i-3^2}{25^2} = \frac{7}{625} - \frac{24}{625}i$



KomplZahlen/Darstellung/Ag_KomplZahlen_Rechenregeln3.tex

Aufgabe 85.403 (Kehrwerte und Quotienten komplexer Zahlen bilden)

jgl

Berechnen Sie $\frac{1}{z}$ bzw. $\frac{w}{z}$ für:

a) $z = 4i$

$$-\frac{1}{4}i$$

Lösung: $\frac{1}{z} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{i} = \frac{1}{4} \cdot \frac{-i}{i(-i)} = -\frac{1}{4}i$

b) $z = 3 - i$

$$\frac{3}{10} + \frac{1}{10}i$$

Lösung: $\frac{1}{z} = \frac{1}{3-i} = \frac{3+i}{3^2-i^2} = \frac{3+i}{10} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}i$

c) $z = 6e^{\frac{\pi i}{6}}$

$$\frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{12}i$$

Lösung: $\frac{1}{z} = \frac{1}{6}e^{-\frac{\pi i}{6}} = \frac{1}{6} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right) = \frac{1}{6} \left(\cos\frac{\pi}{6} - i \sin\frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i \right) = \frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{12}i$

d) $z = -8i, w = 3 + 16i$

$$-2 + \frac{3}{8}i$$

Lösung: $\frac{1}{z} = \frac{1}{8}i$ und $\frac{w}{z} = \frac{1}{8}i \cdot w = \frac{3}{8}i - 2$

e) $z = i + 3, w = 6i$

$$\frac{3}{5} + \frac{9}{5}i$$

Lösung: $\frac{1}{z} = \frac{1}{i+3} = \frac{i-3}{i^2-3^2} = \frac{i-3}{-10} = \frac{3}{10} - \frac{1}{10}i$ und $\frac{w}{z} = \left(\frac{3}{10} - \frac{1}{10}i \right) \cdot 6i = \frac{9}{5}i + \frac{3}{5}$

f) $z = 2e^{\pi i}, w = 8 - 5i$

$$-4 + \frac{5}{2}i$$

Lösung: $e^{\pi i} = -1$, also $\frac{1}{z} = -\frac{1}{2}$ und $\frac{w}{z} = -4 + \frac{5}{2}i$.



KomplZahlen/Darstellung/Ag_KomplZahlen_RechenregelnDarstellung.tex

Aufgabe 85.404 (Rechnen mit komplexen Zahlen)

jgl, dh

Schreiben Sie diese komplexen Zahlen in der Form $a + bi$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$:

a) $5i(i+4)^2$

$-40 + 75i$

Lösung: $5i(i+4)^2 = 5i(-1 + 8i + 16) = i(75 + 40i) = -40 + 75i$

b) $\frac{15i}{4+3i}$

$\frac{9}{5} + \frac{12}{5}i$

Lösung: $\frac{15i}{4+3i} = \frac{15i \cdot (4-3i)}{16+9} = \frac{9}{5} + \frac{12}{5}i$

c) $-3 + 7i + |3 - 7i|$

$(-3 + \sqrt{58}) + 7i \approx 4.62 + 7i$

Lösung: $-3 + 7i + |3 - 7i| = -3 + 7i + \sqrt{9 + 49} = (\sqrt{58} - 3) + 7i \approx 4.62 + 7i$

d) $3 + 7i - \overline{3 - 7i}$

$0 + 0i = 0$

Lösung: $3 + 7i - \overline{3 - 7i} = 3 + 7i - (3 + 7i) = 0 = 0 + 0i$

e) $\frac{z+\bar{z}}{2}$

$\operatorname{Re}(z) + 0i = \operatorname{Re}(z)$

Lösung: $\frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{1}{2}((a+ib) + (a-ib)) = a = \operatorname{Re}(z)$

f) $\frac{z-\bar{z}}{2}$

$0 + \operatorname{Im}(z)i = \operatorname{Im}(z)i$

Lösung: $\frac{z-\bar{z}}{2} = \frac{1}{2}((a+ib) - (a-ib)) = ib = i\operatorname{Im}(z)$

g) $\left| \frac{7i-4}{4-7i} \right|$

$1 + 0i = 1$

Lösung: $\left| \frac{7i-4}{4-7i} \right| = \left| \frac{-z}{z} \right| = 1 + 0i$

h) $\left| i - e^{\frac{7\pi}{4}i} \right|$

$\sqrt{2 + \sqrt{2}} + 0i \approx 1.84776$

Lösung:

Hier ist es sinnvoll, die Identität $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$ einzusetzen:

$\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) = \cos\left(-\frac{7}{4}\pi\right) = \cos\left(2\pi - \frac{7}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$

$\sin\left(\frac{7}{4}\pi\right) = -\sin\left(-\frac{7}{4}\pi\right) = -\sin\left(2\pi - \frac{7}{4}\pi\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$ also $i - e^{\frac{7\pi}{4}i} = i - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) \cdot i$

$\Rightarrow \left| i - e^{\frac{7\pi}{4}i} \right| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \sqrt{2} + 1} = \sqrt{2 + \sqrt{2}} + 0i \approx 1.84776 + 0i.$



KomplZahlen/Darstellung/Ag_KomplexeZahlen_Rechenregeln4.tex

Aufgabe 85.405 (Komplexe Zahlen konjugieren und Quotienten berechnen)

Gegeben sind die komplexen Zahlen $z = -1 - 2i$, $w = 3i$, $v = 4ie^{\frac{\pi}{4}i}$ und $u = e^{-\frac{\pi}{3}i}$. Stellen Sie die daraus gebildeten, folgenden Zahlen in kartesischer und polarer Form dar!

- a) $1 + \bar{z}$,
 $0 + 2i, 2e^{\frac{\pi}{2}i}$
- c) $\frac{1}{\bar{w}}$,
 $0 + \frac{1}{3}i, \frac{1}{3}e^{\frac{\pi}{2}i}$
- e) $\frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}}$,
 $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i, \frac{\sqrt{5}}{5}e^{(-\arctan(2)+\pi)i}$
- b) $\bar{v}$,
 $-2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i, 4e^{-\frac{3\pi}{4}i}$
- d) $\frac{48i}{u^2 v^2 \bar{w}}$,
 $\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i, e^{\frac{\pi}{6}i}$
- f) $\left|\frac{v}{u}\right|^3$.
 $64 + 0i, 64e^0$

Lösung:

- a) Für $z := -1 - 2i$ ist $1 + \bar{z} = 1 + \overline{-1 - 2i} = 1 - 1 + 2i = 0 + 2i = 2e^{\frac{\pi}{2}i}$
- b) Zunächst wird die polare Form von $\bar{v}$ bestimmt: Es ist $v = 4ie^{\frac{\pi}{4}i} = 4e^{\pi 2i} \cdot e^{\frac{\pi}{4}i} = 4e^{\frac{3\pi}{4}i}$, womit sich $\bar{v} = \overline{4ie^{\frac{\pi}{4}i}} = 4e^{-\frac{3\pi}{4}i}$ in der polaren Form ergibt. Aus diesem Ergebnis erhält man die kartesische Form mit der Eulerformel. Damit ist

$$\begin{aligned}\bar{v} = \overline{4ie^{\frac{\pi}{4}i}} = 4e^{-\frac{3\pi}{4}i} &= 4 \left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \right) \\ &= 4 \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) \\ &= 4 \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}(-1 - i) \right) \\ &= -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i\end{aligned}$$

- c) Für $w = 3i$ ist

$$\frac{1}{\bar{w}} = \frac{1}{3i} = -\frac{1}{3} \frac{1}{i} = -\frac{1}{3} \frac{-i}{-i \cdot i} = \frac{1}{3} i = \frac{1}{3} e^{\frac{\pi}{2}}$$

- d) Es ist $u^2 = \left(e^{-\frac{\pi}{3}i}\right)^2 e^{-\frac{2\pi}{3}i}$ und $v^2 = \left(4ie^{\frac{\pi}{4}i}\right)^2 = 4^2 i^2 e^{2 \cdot \frac{\pi}{4}i} = -16e^{\frac{\pi}{2}i}$. Zusammen mit $\bar{w} = \overline{3i} = -3i$ ergibt sich

$$u^2 v^2 \bar{w} = \bar{w} u^2 v^2 = -3i \cdot e^{-\frac{2\pi}{3}i} \cdot \left(-16e^{\frac{\pi}{2}i}\right) = 48i \cdot e^{-\frac{2\pi}{3}i + \frac{\pi}{2}i} = 48i \cdot e^{-\frac{\pi}{6}i}.$$

Damit ist dann

$$\frac{48i}{u^2 v^2 \bar{w}} = \frac{48i}{\bar{w} u^2 v^2 \bar{w}} = \frac{48i}{48i \cdot e^{-\frac{\pi}{6}i}} = e^{\frac{\pi}{6}i} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$$

- e) Für $z = -1 - 2i$ ist

$$\frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{-1 + 2i}{(-1)^2 + (-2)^2} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i = \frac{1}{5}\sqrt{5} \cdot e^{(-\arctan(2)+\pi)i},$$

denn es ist $|\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i| = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{4}{25}} = \frac{1}{5}\sqrt{5}$ und $\arctan\left(\frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{5}}\right) = \arctan(2) = -\arctan(-2)$.

- f) Für $v = 4ie^{\frac{\pi}{4}i}$ und $u = e^{-\frac{\pi}{3}i}$ ist

$$\left|\frac{v}{u}\right|^3 = \left|4ie^{\frac{\pi}{4}i} \cdot e^{\frac{\pi}{3}i}\right|^3 = 4^3 \cdot |i|^3 \cdot \left|e^{\frac{\pi}{4}i}\right|^3 \cdot \left|e^{\frac{\pi}{3}i}\right|^3 = 64 \cdot 1^3 \cdot 1^3 \cdot 1^3 = 64 + 0i = 64e^0.$$



KomplZahlen/Funktionen/Ag_KomplexeFunktionen_ReziprokeGeraden.tex

Aufgabe 86.406 (Reziproke Geraden)

spf

Die Funktion $g: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $w \mapsto g(w) := \frac{1}{w}$ bildet eine Gerade

$$\mathcal{G}_{m;b} := \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(w) = m \cdot \operatorname{Re}(w) + b\}$$

mit $m \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ auf den folgenden Kreis ab:

$$g(\mathcal{G}_{m;b}) = \left\{ s \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid |2bs + m + i| = \sqrt{m^2 + 1} \right\}.$$

Sei $f: \mathbb{C} \setminus \{2 - i\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $z \mapsto f(z) := \frac{1}{z-2+i}$.

Skizzieren Sie das Bild $f(\mathcal{G}_{3;-5})$ mit Hilfe der folgenden Vorüberlegungen:

- a) Bestimmen Sie eine Funktion h mit $f = g \circ h$, sprich $f(z) = g(h(z))$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{2 - i\}$!

$$h: \mathbb{C} \setminus \{2 - i\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ mit } z \mapsto h(z) := z - 2 + i$$

Lösung:

Die Definition $h: \mathbb{C} \setminus \{2 - i\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $z \mapsto h(z) := z - 2 + i$ liefert für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{2 - i\}$

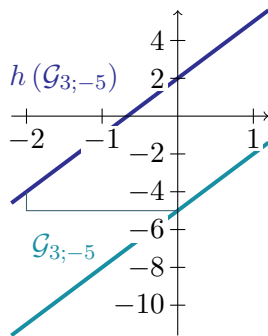
$$(g \circ h)(z) = g(h(z)) = g(z - 2 + i) = \frac{1}{z-2+i} = f(z).$$

- b) Zeichnen Sie $\mathcal{G}_{3;-5}$ und $h(\mathcal{G}_{3;-5})$!

Finden Sie ein $m \in \mathbb{R}$ und ein $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $h(\mathcal{G}_{3;-5}) = \mathcal{G}_{m;b}$!

$$m = 3, b = 2$$

Lösung:



Definiert man $w := h(z) = z - 2 + i$ für ein $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, so folgt für alle $z \in \mathcal{G}_{3;-5}$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(z) = 3 \cdot \operatorname{Re}(z) - 5 &\iff \operatorname{Im}(w + 2 - i) = 3 \cdot \operatorname{Re}(w + 2 - i) - 5 \\ &\iff \operatorname{Im}(w) - 1 = 3 \cdot (\operatorname{Re}(w) + 2) - 5 \\ &\iff \operatorname{Im}(w) - 1 = 3 \cdot \operatorname{Re}(w) + 6 - 5 \\ &\iff \operatorname{Im}(h(z)) = 3 \cdot \operatorname{Re}(h(z)) + 2. \end{aligned}$$

Damit folgt $h(\mathcal{G}_{3;-5}) = \mathcal{G}_{3;2}$. Also wählt man $m = 3$ und $b = 2$.

- c) Bestimmen Sie $g(\mathcal{G}_{m;b})$ für die in Aufgabenteil b) bestimmten Werte von m und b !

$$g(\mathcal{G}_{3;2}) = \left\{ s \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \left| s - \left(-\frac{3}{4} - i \cdot \frac{1}{4}\right) \right| = \frac{\sqrt{10}}{4} \right\}$$

Lösung:

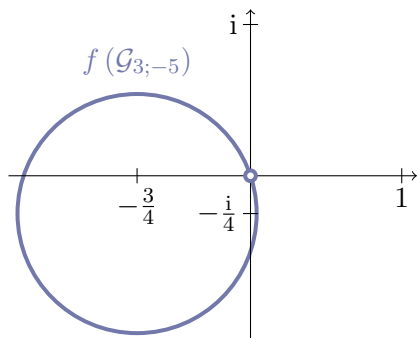
Wie in der Aufgabenstellung angegeben ergibt sich $g(\mathcal{G}_{m;b})$ mit $m = 3$ und $b = 2$ zu

$$\begin{aligned} g(\mathcal{G}_{3;2}) &= \left\{ s \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid |2 \cdot 2 \cdot s + 3 + i| = \sqrt{3^2 + 1} \right\} \\ &= \left\{ s \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \left| s + \frac{3+i}{4} \right| = \frac{\sqrt{9+1}}{4} \right\} \\ &= \left\{ s \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \left| s - \left(-\frac{3}{4} - i \cdot \frac{1}{4}\right) \right| = \frac{\sqrt{10}}{4} \right\}. \end{aligned}$$

d) Zeichnen Sie $f(\mathcal{G}_{3;-5})$!

$f(\mathcal{G}_{3;-5})$ ist der Rand des Kreises um $-\frac{3}{4} - i \cdot \frac{1}{4}$ mit Radius $\frac{\sqrt{10}}{4}$, wobei die null ausgenommen ist.

Lösung:



Wegen $f = g \circ h$ und $2 - i \notin \mathcal{G}_{3;-5}$ ist

$$f(\mathcal{G}_{3;-5}) = (g \circ h)(\mathcal{G}_{3;-5}) = g(h(\mathcal{G}_{3;-5})) = g(\mathcal{G}_{3;2}).$$

In Aufgabenteil c) wurde $g(\mathcal{G}_{3;2})$ als Rand des Kreises mit dem Radius $\frac{\sqrt{10}}{4} \approx 0.79$ um $-\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \cdot i$ erkannt. Die null gehört aber explizit nicht zu $g(\mathcal{G}_{3;2}) = f(\mathcal{G}_{3;-5})$.



KomplZahlen/GlgnAlg/Ag_Gleichungen_QuadratischReellundKomplex.tex

Aufgabe 87.407 (Quadratische Gleichungen mit komplexen Zahlen)

JHT

Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen. Geben Sie diese in der Form $a + i \cdot b$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ an.

a) $z^2 + 1 = 0$

$0 + i \cdot 1$ und $0 + i \cdot (-1)$

Lösung:

Für alle $z \in \mathbb{C}$ liefert die dritte binomische Formel wegen $i^2 = -1$

$$z^2 + 1 = 0 \iff z^2 - (-1) = 0 \iff z^2 - i^2 = 0 \iff (z - i) \cdot (z + i) = 0.$$

Das liefert $\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 + 1 = 0\} = \{i; -i\} = \{0 + i \cdot 1; 0 + i \cdot (-1)\}$.

b) $z^2 + 5z + 6 = 0$

$-2 + i \cdot 0$ und $-3 + i \cdot 0$

Lösung:

Die linke Seite lässt sich mittels einer quadratischen Ergänzung faktorisieren:

$$z^2 + 5z + 6 = z^2 + 2 \cdot z \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 6 = \left(z + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \left(z + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(z + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right) = (z + 3) \cdot (z + 2).$$

Die beiden Lösungen der Gleichung sind somit $-2 = -2 + i \cdot 0$ und $-3 = -3 + i \cdot 0$.

c) $z^2 - z + \frac{5}{4} = 0$

$\frac{1}{2} + i \cdot 1$ und $\frac{1}{2} + i \cdot (-1)$

Lösung:

Da die Gleichung einen linearen Teil hat, machen wir eine quadratische Ergänzung:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} z^2 - z + \frac{5}{4} = z^2 - 2 \cdot z \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{5}{4} = \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 \\ &= \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 - (-1) = \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 - i^2 = \left(z - \frac{1}{2} - i\right) \cdot \left(z - \frac{1}{2} + i\right). \end{aligned}$$

Die beiden Lösungen $\frac{1}{2} + i$ und $\frac{1}{2} - i$ der Gleichung lassen sich so direkt ablesen.

d) $8z^2 - 12z + 5 = 0$

$\frac{3}{4} + i \cdot \frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4} + i \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$

Lösung:

Quadratisches Ergänzen liefert

$$\begin{aligned} 8z^2 - 12z + 5 &= \frac{1}{2} \cdot \left((4z)^2 - 2 \cdot 4z \cdot 3 + 3^2 - 9 + 10\right) = \frac{1}{2} \cdot \left((4z - 3)^2 + 1\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left((4z - 3)^2 - (-1)\right) = \frac{1}{2} \cdot (4z - 3 - i) \cdot (4z - 3 + i). \end{aligned}$$

Klammert man in den hinteren beiden Faktoren je eine 4 aus, so folgt also

$$8z^2 - 12z + 5 = 0 \iff 8 \cdot \left(z - \frac{3+i}{4}\right) \cdot \left(z - \frac{3-i}{4}\right) = 0 \iff z \in \left\{\frac{3}{4} + i \cdot \frac{1}{4}; \frac{3}{4} + i \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)\right\}$$

e) $6z^2 + 1 = iz$

$$0 + i \cdot \frac{1}{2} \text{ und } 0 + i \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$$

Lösung:

Wir stellen zunächst um:

$$6z^2 + 1 = iz \iff 0 \stackrel{!}{=} z^2 - \frac{i}{6} \cdot z + \frac{1}{6} = \left(z - \frac{i}{12}\right) - \frac{i^2}{144} + \frac{1}{6} = \left(z - \frac{i}{12}\right) + \frac{25}{144}.$$

Substituieren wir $w := z - \frac{i}{12}$, so gilt für w :

$$w^2 = -\frac{25}{144} \iff w = \pm \frac{5}{12} \cdot i.$$

Rücksubstitution ergibt die beiden Lösungen $z = \frac{6}{12} \cdot i = \frac{i}{2}$ und $z = -\frac{4}{12} \cdot i = -\frac{i}{3}$.

f) $iz - z^2 + z = i$

$$1 + i \cdot 0 \text{ und } 0 + i \cdot 1$$

Lösung:

Wir stellen zunächst um und machen eine quadratische Ergänzung:

$$iz - z^2 + z = i \iff 0 \stackrel{!}{=} z^2 - (1+i) \cdot z + i = \left(z - \frac{1+i}{2}\right)^2 - \frac{(1+i)^2}{4} + i = \left(z - \frac{1+i}{2}\right)^2 + \frac{i}{2}.$$

Nun substituieren wir $w := z - \frac{1+i}{2}$ und machen für w den Ansatz $w = s + ti$ mit $s \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}$. Dann muss gelten:

$$\begin{aligned} w^2 = -\frac{i}{2} &\iff s^2 - t^2 + 2sti = -\frac{i}{2} \\ &\iff s^2 - t^2 = 0 \text{ und } 2st = -\frac{1}{2} \\ &\iff (s+t) \cdot (s-t) = 0 \text{ und } 2st = -\frac{1}{2} \\ &\iff \left(s = -t \text{ und } -2t^2 = -\frac{1}{2}\right) \text{ oder } \left(s = -t \text{ und } 2t^2 = -\frac{1}{2}\right) \\ &\iff s = -t \text{ und } t^2 = \frac{1}{4} \\ &\iff \left(s = -\frac{1}{2} \text{ und } t = \frac{1}{2}\right) \text{ oder } \left(s = \frac{1}{2} \text{ und } t = -\frac{1}{2}\right) \\ &\iff w = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot i \text{ oder } w = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot i. \end{aligned}$$

Rücksubstitution ergibt schließlich die beiden Lösungen $z = i$ und $z = 1$ der ursprünglichen Gleichung.

g) $\frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} = 2$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} + i \cdot 0 \text{ und } \frac{\sqrt{5}+1}{-2} + i \cdot 0$$

Lösung:

Wir stellen zunächst um:

$$\frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} = 2 \stackrel{(1+z) \cdot (1-z)}{\iff} 0 \stackrel{!}{=} z^2 + z - 1 = \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 = \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}.$$

Substituieren wir $w := z + \frac{1}{2}$, so gilt für w :

$$w^2 = \frac{5}{4} \iff w = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Rücksubstitution führt auf die beiden Lösungen $z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ der ursprünglichen Gleichung.

h) $\frac{z^2 - z - 2}{z + 1} = 1$

$3 + i \cdot 0$

Lösung:

Wir stellen zunächst um:

$$\frac{z^2 - z - 2}{z + 1} = 1 \iff z^2 - z - 2 = z + 1 \iff 0 \stackrel{!}{=} z^2 - 2z - 3 = (z - 3) \cdot (z - 1).$$

Da -1 nicht im Definitionsbereich der ursprünglichen Gleichung liegt, kommt nur $z = 3$ als Lösung in Frage.



KomplZahlen/GlgnAlg/Ag_KomplGlgn_KartWurzelziehenCosSinVonArctan.tex

Aufgabe 87.408 (Komplexe „Wurzeln“ kartesisch ziehen)

SPF

Verwenden Sie das kartesische Verfahren zum Ziehen von komplexen „Quadratwurzeln“!

a) Bestimmen Sie $\{z \in \mathbb{C} \mid z^4 = -\frac{7}{16} + \frac{3}{2} \cdot i\}$!

$\{1 + \frac{1}{2} \cdot i; -1 - \frac{1}{2} \cdot i; -\frac{1}{2} + i; \frac{1}{2} - i\}$

Lösung:

Wir ziehen zunächst die „Quadratwurzeln“ von $-\frac{7}{16} + \frac{3}{2} \cdot i$:

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $(a + b \cdot i)^2 = -\frac{7}{16} + \frac{3}{2} \cdot i$. Wegen $(a + b \cdot i)^2 = a^2 + 2ab \cdot i - b^2$ liefert ein Vergleich von Real- und Imaginärteil das nicht-lineare Gleichungssystem

$$a^2 - b^2 = -\frac{7}{16} \quad \text{und} \quad 2ab = \frac{3}{2}.$$

Die zweite Gleichung liefert $a \neq 0 \neq b$ und $b = \frac{3}{4a}$.

Einsetzen in die erste Gleichung liefert

$$a^2 - \left(\frac{3}{4a}\right)^2 = -\frac{7}{16} \iff a^2 - \frac{9}{16a^2} = -\frac{7}{16} \stackrel{a \neq 0}{\iff} 16a^4 - 9 = -7a^2 \iff 16a^4 + 7a^2 - 9 = 0.$$

Eine quadratische Ergänzung liefert wegen $49 + 9 \cdot 64 = 49 + 540 + 36 = 589 + 36 = 625$

$$\begin{aligned} 16a^4 + 7a^2 - 9 &= (4a^2)^2 + 2 \cdot 4a^2 \cdot \frac{7}{8} + \left(\frac{7}{8}\right)^2 - \frac{49}{64} - 9 \\ &= \left(4a^2 + \frac{7}{8}\right)^2 - \frac{625}{64} = \left(4a^2 + \frac{7}{8} - \frac{25}{8}\right) \cdot \left(4a^2 + \frac{7}{8} + \frac{25}{8}\right) \\ &= \left((2a)^2 - \frac{9}{4}\right) \cdot (4a^2 + 4) = 4 \cdot \left(2a - \frac{3}{2}\right) \cdot \left(2a + \frac{3}{2}\right) \cdot (a^2 + 1). \end{aligned}$$

Für $a = \frac{3}{4}$ folgt $b = \frac{3}{4 \cdot \frac{3}{4}} = 1$ und für $a = -\frac{3}{4}$ folgt $b = \frac{3}{4 \cdot (-\frac{3}{4})} = -1$.

Also gilt $\{w \in \mathbb{C} \mid w^2 = -\frac{7}{16} + \frac{3}{2} \cdot i\} = \{\frac{3}{4} + i; -\frac{3}{4} - i\}$.

Die „Quadratwurzeln“ der „Quadratwurzeln“ von $-\frac{7}{16} + \frac{3}{2} \cdot i$ ergeben deren „vierte Wurzeln“:

Seien $c \in \mathbb{R}$ und $d \in \mathbb{R}$ mit $(c + d \cdot i)^2 = \frac{3}{4} + i$.

Dann gilt $(-d + c \cdot i)^2 = (i \cdot (c + d \cdot i))^2 = i^2 \cdot (c + d \cdot i)^2 = -1 \cdot \left(\frac{3}{4} + i\right) = -\frac{3}{4} - i$.

Wegen $(c + d \cdot i)^2 = c^2 + 2cd \cdot i - d^2$ liefert ein Vergleich von Real- und Imaginärteil das nicht-lineare Gleichungssystem

$$c^2 - d^2 = \frac{3}{4} \quad \text{und} \quad 2cd = 1.$$

Die zweite Gleichung liefert $c \neq 0 \neq d$ und $d = \frac{1}{2c}$.

Einsetzen in die erste Gleichung liefert

$$c^2 - \left(\frac{1}{2c}\right)^2 = \frac{3}{4} \iff c^2 - \frac{1}{4c^2} = \frac{3}{4} \xLeftrightarrow{c \neq 0} 4c^4 - 1 = 3c^2 \iff 4c^4 - 3c^2 - 1 = 0.$$

Eine quadratische Ergänzung liefert

$$\begin{aligned} 4c^4 - 3c^2 - 1 &= (2c^2)^2 - 2 \cdot 2c^2 \cdot \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} - 1 = (2c^2 - \frac{3}{4})^2 - \frac{25}{16} \\ &= (2c^2 - \frac{3}{4} - \frac{5}{4}) \cdot (2c^2 - \frac{3}{4} + \frac{5}{4}) = (2c^2 - 2) \cdot (2c^2 + \frac{1}{2}) \\ &= 2 \cdot (c^2 - 1) \cdot (2c^2 + \frac{1}{2}) = (c - 1) \cdot (c + 1) \cdot (4c^2 + 1). \end{aligned}$$

Für $c = 1$ folgt $d = \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$ und für $c = -1$ folgt $d = \frac{1}{2 \cdot (-1)} = -\frac{1}{2}$.

Insgesamt ergibt sich also $\{z \in \mathbb{C} \mid z^4 = -\frac{7}{16} + \frac{3}{2} \cdot i\} = \{1 + \frac{1}{2} \cdot i; -1 - \frac{1}{2} \cdot i; -\frac{1}{2} + i; \frac{1}{2} - i\}$.

b) Betrachten Sie $2 + 6i$, um $\sin(\frac{1}{2} \cdot \arctan(3))$ und $\cos(\frac{1}{2} \cdot \arctan(3))$ zu bestimmen!

$$\left(\sqrt{\sqrt{10}+1} + \sqrt{\sqrt{10}-1} \cdot i\right)^2 = 2 + 6i \quad \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10-\sqrt{10}}}{10} \text{ und } \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10+\sqrt{10}}}{10}$$

Lösung:

Wir bestimmen die komplexen „Wurzeln“ von $2 + 6i$ einmal kartesisch und einmal polar.

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $(a + b \cdot i)^2 = 2 + 6i$. Wegen $(a + b \cdot i)^2 = a^2 + 2ab \cdot i - b^2$ liefert ein Vergleich von Real- und Imaginärteil das nicht-lineare Gleichungssystem

$$a^2 - b^2 = 2 \quad \text{und} \quad 2ab = 6.$$

Die zweite Gleichung liefert $a \neq 0 \neq b$ und $b = \frac{3}{a}$.

Einsetzen in die erste Gleichung liefert

$$a^2 - \left(\frac{3}{a}\right)^2 = 2 \iff a^2 - \frac{9}{a^2} = 2 \xLeftrightarrow{a \neq 0} a^4 - 9 = 2a^2 \iff a^4 - 2a^2 - 9 = 0.$$

Eine quadratische Ergänzung liefert

$$\begin{aligned} a^4 - 2a^2 - 9 &= (a^2)^2 - 2 \cdot a^2 \cdot 1 + 1^2 - 1 - 9 \\ &= (a^2 - 1)^2 - 10 = (a^2 - 1 - \sqrt{10}) \cdot (a^2 - 1 + \sqrt{10}) \\ &= \left(a - \sqrt{\sqrt{10}+1}\right) \cdot \left(a + \sqrt{\sqrt{10}+1}\right) \cdot \left(a^2 + \sqrt{10} - 1\right). \end{aligned}$$

Für $a = \sqrt{\sqrt{10}+1}$ folgt

$$\begin{aligned} b &= \frac{3}{\sqrt{\sqrt{10}+1}} = \frac{3 \cdot \sqrt{\sqrt{10}+1}}{\sqrt{10}+1} = \frac{3 \cdot \sqrt{\sqrt{10}+1} \cdot (\sqrt{10}-1)}{(\sqrt{10}+1) \cdot (\sqrt{10}-1)} = \frac{3 \cdot \sqrt{\sqrt{10}+1} \cdot \sqrt{\sqrt{10}-1}}{\sqrt{10}^2 - 1^2} \\ &= \frac{3 \cdot \sqrt{(\sqrt{10}+1) \cdot (\sqrt{10}-1)} \cdot \sqrt{\sqrt{10}-1}}{10-1} = \frac{3 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{\sqrt{10}-1}}{9} = \sqrt{\sqrt{10}-1}. \end{aligned}$$

und für $a = -\sqrt{\sqrt{10}+1}$ folgt analog $b = -\sqrt{\sqrt{10}-1}$.

Also gilt $\{s \in \mathbb{C} \mid s^2 = 2 + 6i\} = \left\{\sqrt{\sqrt{10}+1} + \sqrt{\sqrt{10}-1} \cdot i; -\sqrt{\sqrt{10}+1} - \sqrt{\sqrt{10}-1} \cdot i\right\}$.

Polar gilt $|2 + 6i| = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} = \sqrt{4 \cdot 10} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{10} = 2 \cdot \sqrt{10}$ und $\arg(2 + 6i) \stackrel{\operatorname{Re}(2+6i) > 0}{=} \arctan\left(\frac{6}{2}\right) = \arctan(3)$, also

$$\{s \in \mathbb{C} \mid s^2 = 2 + 6i\} = \left\{s \in \mathbb{C} \mid |s| = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{10} \text{ und } \arg(s) \in \left\{\frac{\arctan(3)}{2}, \frac{\arctan(3)}{2} - \pi\right\}\right\}.$$

Insgesamt ergibt sich wegen $0 < \frac{1}{2} \cdot \arctan(3) < \frac{\pi}{2}$

$$\sqrt{\sqrt{10}+1} + \sqrt{\sqrt{10}-1} \cdot i = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{10}} \cdot \left(\cos\left(\frac{1}{2} \cdot \arctan(3)\right) + i \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \arctan(3)\right) \right).$$

Ein Vergleich von Real- und Imaginärteil liefert

$$\sqrt{\sqrt{10}+1} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{10}} \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \cdot \arctan(3)\right) \quad \text{und} \quad \sqrt{\sqrt{10}-1} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{10}} \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \arctan(3)\right),$$

sprich

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{1}{2} \cdot \arctan(3)\right) &= \frac{\sqrt{\sqrt{10}+1}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{10}}} = \frac{\sqrt{\sqrt{10}+1} \cdot \sqrt{\sqrt{10}}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{10}+1) \cdot \sqrt{10}}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} \\ &= \frac{\sqrt{10 + \sqrt{10}} \cdot \sqrt{5}}{2 \cdot 5} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10 + \sqrt{10}}}{10} \\ \text{und} \quad \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \arctan(3)\right) &= \frac{\sqrt{\sqrt{10}-1}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{10}}} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10 - \sqrt{10}}}{10}. \end{aligned}$$

c) Bestimmen Sie $\sin\left(\frac{1}{4} \cdot \arctan\left(\frac{24}{7}\right)\right)$ und $\cos\left(\frac{1}{4} \cdot \arctan\left(\frac{24}{7}\right)\right)$ mit Aufgabenteil a)!

$$\frac{\sqrt{10}}{10} \quad \text{und} \quad \frac{3 \cdot \sqrt{10}}{10}$$

Lösung:

Nach Aufgabenteil a) ist

$$M := \{z \in \mathbb{C} \mid z^4 = -\frac{7}{16} + \frac{3}{2} \cdot i\} = \left\{1 + \frac{1}{2} \cdot i; -1 - \frac{1}{2} \cdot i; -\frac{1}{2} + i; \frac{1}{2} - i\right\}.$$

Möchte man Aufgabenteil a) nicht kartesisch, sondern polar lösen, so benötigt man

$$\begin{aligned} \left| -\frac{7}{16} + \frac{3}{2} \cdot i \right| &= \sqrt{\left(-\frac{7}{16}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{256} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{49+64 \cdot 9}{256}} = \frac{\sqrt{49+540+36}}{\sqrt{256}} = \frac{\sqrt{625}}{16} = \frac{25}{16} \\ \text{und} \quad \arg\left(-\frac{7}{16} + \frac{3}{2} \cdot i\right) &\stackrel{-\frac{7}{16} < 0}{\stackrel{\frac{3}{2} > 0}{\pi}} \pi + \arctan\left(\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{7}{16}}\right) = \pi + \arctan\left(-\frac{3 \cdot 16}{2 \cdot 7}\right) = \pi - \arctan\left(\frac{24}{7}\right). \end{aligned}$$

Wegen $\arg\left(-\frac{7}{16} + \frac{3}{2} \cdot i\right) = \pi - \arctan\left(\frac{24}{7}\right)$ folgt $\frac{\pi}{2} < \pi - \arctan\left(\frac{24}{7}\right) < \pi$.

Setzt man $\alpha := \frac{1}{4} \cdot \arctan\left(\frac{24}{7}\right)$, so ergibt sich also $0 < \frac{\pi}{8} - \alpha < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$. Außerdem gilt

$$M = \left\{ \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha + k \cdot \frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha + k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right) \in \mathbb{C} \mid k \in \{0; 1; 2; 3\} \right\}.$$

Wegen $0 < \frac{\pi}{4} - \alpha < \frac{\pi}{2}$ und der kartesischen Darstellung von M ergibt sich

$$1 + \frac{1}{2} \cdot i = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \cdot i.$$

Die Additionstheoreme für cos und sin liefern

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} \cdot i &= \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos(-\alpha) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin(-\alpha) \right) \\ &\quad + \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos(-\alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin(-\alpha) \right) \cdot i \\ &= \frac{5}{2 \cdot \sqrt{5}} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos(\alpha) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin(\alpha) \right) + \frac{5}{2 \cdot \sqrt{5}} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos(\alpha) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin(\alpha) \right) \cdot i \\ &= \frac{5}{2 \cdot \sqrt{10}} \cdot (\cos(\alpha) + \sin(\alpha)) + \frac{5}{2 \cdot \sqrt{10}} \cdot (\cos(\alpha) - \sin(\alpha)) \cdot i. \end{aligned}$$

Nach Multiplikation von $\frac{\sqrt{10}}{5}$ auf beiden Seiten ergibt sich

$$\frac{\sqrt{10}}{5} + \frac{\sqrt{10}}{10} \cdot i = \frac{1}{2} \cdot (\cos(\alpha) + \sin(\alpha)) + \frac{1}{2} \cdot (\cos(\alpha) - \sin(\alpha)) \cdot i$$

und ein Vergleich von Real- und Imaginärteil liefert das lineare Gleichungssystem

$$\frac{1}{2} \cdot \cos(\alpha) + \frac{1}{2} \cdot \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{10}}{5} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} \cdot \cos(\alpha) - \frac{1}{2} \cdot \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Addiert und subtrahiert man beide Gleichungen, so ergibt sich also

$$\cos\left(\frac{1}{4} \cdot \arctan\left(\frac{24}{7}\right)\right) = \frac{3 \cdot \sqrt{10}}{10} \quad \text{und} \quad \sin\left(\frac{1}{4} \cdot \arctan\left(\frac{24}{7}\right)\right) = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$



KomplZahlen/GlgnAlg/Ag_KomplGlgn_PolynomglgnOhneKomplWurzeln.tex

Aufgabe 87.409 (einfache Polynomgleichungen mit komplexen Lösungen)

spf

Geben Sie die kartesische Darstellung aller komplexen Zahlen an, die die folgenden Gleichungen lösen:

a) $s^3 + 7s^2 + 19s + 13 = 0$

$$\{-1; -3 - 2i; -3 + 2i\}$$

Lösung:

Für alle $s \in \mathbb{R}$ mit $s > 0$ ist $s^3 + 7s^2 + 19s + 13 > 13$.

Es gilt $(-1)^3 + 7 \cdot (-1)^2 + 19 \cdot (-1) + 13 = -1 + 7 - 19 + 13 = -20 + 20 = 0$. Für alle $s \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{array}{rcl} s^3 + 7s^2 + 19s + 13 & = & (s + 1) \cdot (s^2 + 6s + 13) \\ \underline{-(s^3 + s^2)} & & = (s + 1) \cdot (s^2 + 2 \cdot s \cdot 3 + 3^2 - 9 + 13) \\ 6s^2 + 19s + 13 & = & (s + 1) \cdot ((s + 3)^2 + 4) \\ \underline{-(6s^2 + 6s)} & & = (s + 1) \cdot ((s + 3)^2 - (2i)^2) \\ 13s + 13 & = & (s + 1) \cdot (s + 3 + 2i) \cdot (s + 3 - 2i) \\ \underline{-(13s + 13)} & & = (s - (-1)) \cdot (s - (-3 - 2i)) \cdot (s - (-3 + 2i)). \\ 0 & & \end{array}$$

b) $4w^3 + 18w = 12w^2 + 20$

$$\{2; \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot i; \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot i\}$$

Lösung:

Für alle $w \in \mathbb{C}$ gilt $4w^3 + 18w = 12w^2 + 20 \iff 4w^3 - 12w^2 + 18w - 20 = 0$.

Für alle $w \in \mathbb{R}$ mit $w < 0$ ist $4w^3 - 12w^2 + 18w - 20 < -20$.

Es gilt $4 \cdot 1^3 - 12 \cdot 1^2 + 18 \cdot 1 - 20 = 4 - 12 + 18 - 20 = 22 - 32 \neq 0$ und $4 \cdot 2^3 - 12 \cdot 2^2 + 18 \cdot 2 - 20 = 32 - 48 + 36 - 20 = 68 - 68 = 0$. Für alle $w \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{array}{rcl} 4w^3 - 12w^2 + 18w - 20 & = & (w - 2) \cdot (4w^2 - 4w + 10) \\ \underline{-(4w^3 - 8w^2)} & & = (w - 2) \cdot ((2w)^2 - 2 \cdot 2w \cdot 1 + 1^2 - 1 + 10) \\ -4w^2 + 18w - 20 & = & (w - 2) \cdot ((2w - 1)^2 + 9) \\ \underline{-(-4w^2 + 8w)} & & = (w - 2) \cdot ((2w - 1)^2 - (3i)^2) \\ 10w - 20 & = & (w - 2) \cdot (2w - 1 + 3i) \cdot (2w - 1 - 3i) \\ \underline{-(10w - 20)} & & = 4 \cdot (w - 2) \cdot (w - (\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot i)) \cdot (w - (\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot i)). \\ 0 & & \end{array}$$

c) $6z^3 + 6z = z^4 + 26z^2 + 25$

$$\{i; -i; 3 - 4i; 3 + 4i\}$$

Lösung:

Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $6z^3 + 6z = z^4 + 26z^2 + 25 \iff z^4 - 6z^3 + 26z^2 - 6z + 25 = 0$.

Für alle $z \in \mathbb{R}$ mit $z < 0$ ist $z^4 - 6z^3 + 26z^2 - 6z + 25 > 25$.

Es gilt $1^4 - 6 \cdot 1^3 + 26 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 25 = 26 + 26 - 6 - 6 \neq 0$ und $i^4 - 6 \cdot i^3 + 26 \cdot i^2 - 6 \cdot i + 25 = 1 + 6i - 26 - 6i + 25 = 0$. Wegen der reellen Koeffizienten gilt auch $\bar{i}^4 - 6 \cdot \bar{i}^3 + 26 \cdot \bar{i}^2 - 6 \cdot \bar{i} + 25 = 0$. Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $(z - i) \cdot (z - \bar{i}) = (z - i) \cdot (z - (-i)) = z^2 - i^2 = z^2 + 1$ und damit folgt

$$\begin{array}{rcl} z^4 - 6z^3 + 26z^2 - 6z + 25 & = & (z^2 + 1) \cdot (z^2 - 6z + 25) \\ \hline -(z^4 + z^2) & = & (z^2 + 1) \cdot (z^2 - 2 \cdot z \cdot 3 + 3^2 - 9 + 25) \\ -6z^3 + 25z^2 - 6z + 25 & = & (z^2 + 1) \cdot ((z - 3)^2 + 16) \\ \hline -(-6z^3 - 6z) & = & (z^2 + 1) \cdot ((z - 3)^2 - (4i)^2) \\ 25z^2 + 25 & = & (z^2 + 1) \cdot (z - 3 + 4i) \cdot (z - 3 - 4i) \\ \hline -(25z^2 + 25) & = & (z - i) \cdot (z - (-i)) \cdot (z - (3 - 4i)) \cdot (z - (3 + 4i)). \\ 0 & & \end{array}$$

Tipp: Die Polynome $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $z \mapsto 6z^3 + 6z$ und $q: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $z \mapsto z^4 + 26z^2 + 25$ haben (mindestens) eine gemeinsame Nullstelle.



KomplZahlen/GlgnAlg/Ag_KomplGlgn_PolynomglgnOhneKomplWurzelnMehr.tex

Aufgabe 87.410 (einfache Polynomgleichungen mit komplexen Lösungen)

[spf](#)

Geben Sie die kartesische Darstellung aller komplexen Zahlen an, die die folgenden Gleichungen lösen:

a) $s^3 + 21s + 82 = 8s^2$

$$\{-2; 5 - 4i; 5 + 4i\}$$

Lösung:

Für alle $s \in \mathbb{C}$ gilt $s^3 + 21s + 82 = 8s^2 \iff s^3 - 8s^2 + 21s + 82 = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} 1^3 - 8 \cdot 1^2 + 21 \cdot 1 + 82 &= 1 - 8 + 21 + 82 = -7 + 103 = 96 \neq 0, \\ (-1)^3 - 8 \cdot (-1)^2 + 21 \cdot (-1) + 82 &= -1 - 8 - 21 + 82 = -9 + 61 = 52 \neq 0, \\ 2^3 - 8 \cdot 2^2 + 21 \cdot 2 + 82 &= 8 - 32 + 42 + 82 = -16 + 124 = 108 \neq 0 \\ \text{und } (-2)^3 - 8 \cdot (-2)^2 + 21 \cdot (-2) + 82 &= -8 - 32 - 42 + 82 = -40 + 40 = 0. \end{aligned}$$

Für alle $s \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{array}{rcl} s^3 - 8s^2 + 21s + 82 & = & (s + 2) \cdot (s^2 - 10s + 41) \\ \hline -(s^3 + 2s^2) & = & (s + 2) \cdot (s^2 - 2 \cdot s \cdot 5 + 5^2 - 25 + 41) \\ -10s^2 + 21s + 82 & = & (s + 2) \cdot ((s - 5)^2 + 16) \\ \hline -(-10s^2 - 20s) & = & (s + 2) \cdot ((s - 5)^2 - (4i)^2) \\ 41s + 82 & = & (s + 2) \cdot (s - 5 + 4i) \cdot (s - 5 - 4i) \\ \hline -(41s + 82) & = & (s - (-2)) \cdot (s - (5 - 4i)) \cdot (s - (5 + 4i)). \\ 0 & & \end{array}$$

b) $9w^3 + 55w = 33w^2 + 111$

$$\{3; \frac{1}{3} - 2i; \frac{1}{3} + 2i\}$$

Lösung:

Für alle $w \in \mathbb{C}$ gilt $9w^3 + 55w = 33w^2 + 111 \iff 9w^3 - 33w^2 + 55w - 111 = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} 9 \cdot 1^3 - 33 \cdot 1^2 + 55 \cdot 1 - 111 &= 9 - 33 + 55 - 111 = -24 - 56 = -80 \neq 0, \\ 9 \cdot (-1)^3 - 33 \cdot (-1)^2 + 55 \cdot (-1) - 111 &= -9 - 33 - 55 - 111 = -42 - 166 = -208 \neq 0 \\ \text{und } 9 \cdot 3^3 - 33 \cdot 3^2 + 55 \cdot 3 - 111 &= 243 - 297 + 165 - 111 = -54 + 54 = 0. \end{aligned}$$

Für alle $w \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} 9w^3 - 33w^2 + 55w - 111 &= (w - 3) \cdot (9w^2 - 6w + 37) \\ \frac{-(9w^3 - 27w^2)}{-6w^2 + 55w - 111} &= (w - 3) \cdot \left((3w)^2 - 2 \cdot 3w \cdot 1 + 1^2 - 1 + 37 \right) \\ &= (w - 3) \cdot \left((3w - 1)^2 + 36 \right) \\ \frac{-(-6w^2 + 18w)}{37w - 111} &= (w - 3) \cdot \left((3w - 1)^2 - (6i)^2 \right) \\ &= (w - 3) \cdot (3w - 1 + 6i) \cdot (3w - 1 - 6i) \\ \frac{-(37w - 111)}{0} &= 9 \cdot (w - 3) \cdot \left(w - \left(\frac{1}{3} - 2i \right) \right) \cdot \left(w - \left(\frac{1}{3} + 2i \right) \right). \end{aligned}$$

c) $14z^3 + 56z = z^4 + 54z^2 + 200$

$$\{2i; -2i; 7 - i; 7 + i\}$$

Lösung:

Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $14z^3 + 56z = z^4 + 54z^2 + 200 \iff z^4 - 14z^3 + 54z^2 - 56z + 200 = 0$.

Für alle $z \in \mathbb{R}$ mit $z < 0$ ist $z^4 - 14z^3 + 54z^2 - 56z + 200 > 200$. Es gilt

$$\begin{aligned} 1^4 - 14 \cdot 1^3 + 54 \cdot 1^2 - 56 \cdot 1 + 200 &= 1 - 14 + 54 - 56 + 200 = 41 + 144 = 185 \neq 0, \\ 2^4 - 14 \cdot 2^3 + 54 \cdot 2^2 - 56 \cdot 2 + 200 &= 16 - 112 + 216 - 112 + 200 = 120 + 88 = 208 \neq 0 \\ \text{und } (2i)^4 - 14 \cdot (2i)^3 + 54 \cdot (2i)^2 - 56 \cdot (2i) + 200 &= 16 + 112i - 216 - 112i + 200 = 0. \end{aligned}$$

Wegen der reellen Koeffizienten gilt auch $\overline{2i}^4 - 6 \cdot \overline{2i}^3 + 26 \cdot \overline{2i}^2 - 6 \cdot \overline{2i} + 25 = 0$. Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $(z - 2i) \cdot (z - \overline{2i}) = (z - 2i) \cdot (z - (-2i)) = z^2 - (2i)^2 = z^2 + 4$ und damit folgt

$$\begin{aligned} z^4 - 14z^3 + 54z^2 - 56z + 200 &= (z^2 + 4) \cdot (z^2 - 14z + 50) \\ \frac{-(z^4 + 4z^2)}{-14z^3 + 50z^2 - 56z + 200} &= (z^2 + 4) \cdot (z^2 - 2 \cdot z \cdot 7 + 7^2 - 49 + 50) \\ &= (z^2 + 4) \cdot \left((z - 7)^2 + 1 \right) \\ \frac{-(-14z^3 - 56z)}{50z^2 + 200} &= (z^2 + 4) \cdot \left((z - 7)^2 - i^2 \right) \\ &= (z^2 + 4) \cdot (z - 7 + i) \cdot (z - 7 - i) \\ \frac{-(50z^2 + 200)}{0} &= (z - 2i) \cdot (z - (-2i)) \cdot (z - (7 - i)) \cdot (z - (7 + i)). \end{aligned}$$

Tipp: Die Polynome $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $z \mapsto 14z^3 + 56z$ und $q: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $z \mapsto z^4 + 54z^2 + 200$ haben (mindestens) eine gemeinsame Nullstelle.



KomplZahlen/GlgnAlg/Ag_KomplGlgn_QuadEineOhneUndEineMitLeitkoeff.tex

Aufgabe 87.411 (Komplexe quadratische Gleichungen)

[Runstuck](#)

Berechnen Sie alle komplexen Zahlen, welche die nachstehenden quadratischen Gleichungen lösen!

a) $z^2 + (1 - i) \cdot z - (2 + 2i) = 0$

$$z = -2 \text{ oder } z = 1 + i$$

Lösung: Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$z^2 + (1 - i) \cdot z - (2 + 2i) = z^2 + 2 \cdot z \cdot \frac{1-i}{2} + \left(\frac{1-i}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-2i-1}{4} + 2 + 2i\right) = \left(z + \frac{1-i}{2}\right)^2 - \left(2 + \frac{3}{2} \cdot i\right).$$

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $(a + b \cdot i)^2 = 2 + \frac{3}{2} \cdot i$. Wegen $(a + b \cdot i)^2 = a^2 + 2ab \cdot i - b^2$ liefert ein Vergleich von Real- und Imaginärteil das nicht-lineare Gleichungssystem

$$a^2 - b^2 = 2 \quad \text{und} \quad 2ab = \frac{3}{2}.$$

Die zweite Gleichung liefert $a \neq 0 \neq b$ und kann nach $b = \frac{3}{4a}$ umgestellt werden.

Einsetzen in die erste Gleichung liefert

$$a^2 - \left(\frac{3}{4a}\right)^2 = 2 \iff a^2 - \frac{9}{16a^2} = 2 \xrightarrow{a \neq 0} 16a^4 - 9 = 32a^2 \iff 16a^4 - 32a^2 - 9 = 0.$$

Eine quadratische Ergänzung liefert

$$\begin{aligned} 16a^4 - 32a^2 - 9 &= (4a^2)^2 - 2 \cdot 4a^2 \cdot 4 + 4^2 - 16 - 9 \\ &= (4a^2 - 4)^2 - 25 = (4a^2 - 4 - 5) \cdot (4a^2 - 4 + 5) \\ &= ((2a)^2 - 9) \cdot (4a^2 + 1) = (2a - 3) \cdot (2a + 3) \cdot (4a^2 + 1). \end{aligned}$$

Für $a = \frac{3}{2}$ folgt $b = \frac{3}{4 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{1}{2}$ und für $a = -\frac{3}{2}$ folgt $b = \frac{3}{4 \cdot (-\frac{3}{2})} = -\frac{1}{2}$.

Die dritte binomische Formel liefert also für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} z^2 + (1 - i) \cdot z - (2 + 2i) &= \left(z + \frac{1-i}{2}\right)^2 - \left(2 + \frac{3}{2} \cdot i\right) = \left(z + \frac{1-i}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot i\right)^2 \\ &= \left(z + \frac{1-i}{2} + \frac{3+i}{2}\right) \cdot \left(z + \frac{1-i}{2} - \frac{3+i}{2}\right) = (z + 2) \cdot (z - 1 - i). \end{aligned}$$

Deshalb gilt $\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 + (1 - i) \cdot z - (2 + 2i) = 0\} = \{-2; 1 + i\}$.

b) $(1 - i) \cdot w^2 + (-2 + 6i) \cdot w - 15 - 5i = 0$

$$w = 5 \text{ oder } w = -1 - 2i$$

Lösung: Für alle $w \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} (1 - i) \cdot w^2 + (-2 + 6i) \cdot w - 15 - 5i &= 0 && | \cdot (1 + i) \\ \iff (1 - i) \cdot (1 + i) \cdot w^2 + (-2 + 6i) \cdot (1 + i) \cdot w - (15 + 5i) \cdot (1 + i) &= 0 \cdot (1 + i) \\ \iff (1^2 + (-1)^2) \cdot w^2 + (-2 + 6i - 2i - 6) \cdot w - (15 + 5i + 15i - 5) &= 0 \\ \iff 2 \cdot w^2 + (-8 + 4i) \cdot w - (10 + 20i) &= 0 && | \cdot \frac{1}{2} \\ \iff w^2 + 2 \cdot w \cdot (-2 + i) + (-2 + i)^2 - (4 - 4i - 1 + 5 + 10i) &= 0 \\ \iff (w + (-2 + i))^2 - (8 + 6i) &= 0. \end{aligned}$$

Seien $c \in \mathbb{R}$ und $d \in \mathbb{R}$ mit $(c + d \cdot i)^2 = 8 + 6i$. Wegen $(c + d \cdot i)^2 = c^2 + 2cd \cdot i - d^2$ liefert ein Vergleich von Real- und Imaginärteil das nicht-lineare Gleichungssystem

$$c^2 - d^2 = 8 \quad \text{und} \quad 2cd = 6.$$

Die zweite Gleichung liefert $c \neq 0 \neq d$ und kann nach $d = \frac{3}{c}$ umgestellt werden.

Einsetzen in die erste Gleichung liefert

$$c^2 - \left(\frac{3}{c}\right)^2 = 8 \iff c^2 - \frac{9}{c^2} = 8 \xLeftrightarrow{c \neq 0} c^4 - 9 = 8c^2 \iff c^4 - 8c^2 - 9 = 0.$$

Eine quadratische Ergänzung liefert

$$\begin{aligned} c^4 - 8c^2 - 9 &= (c^2)^2 - 2 \cdot c^2 \cdot 4 + 4^2 - 16 - 9 \\ &= (c^2 - 4)^2 - 25 = (c^2 - 4 - 5) \cdot (c^2 - 4 + 5) \\ &= (c^2 - 9) \cdot (c^2 + 1) = (c - 3) \cdot (c + 3) \cdot (c^2 + 1). \end{aligned}$$

Für $c = 3$ folgt $d = \frac{3}{3} = 1$ und für $c = -3$ folgt $d = \frac{-3}{-3} = -1$.

Die dritte binomische Formel liefert also für alle $w \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} (1 - i) \cdot w^2 + (-2 + 6i) \cdot w - 15 - 5i &= 0 \iff (w + (-2 + i))^2 - (8 + 6i) = 0 \\ \iff (w - 2 + i)^2 - (3 + i)^2 &= 0 \iff (w - 2 + i - (3 + i)) \cdot (w - 2 + i + (3 + i)) = 0 \\ \iff (w - 5) \cdot (w + 1 + 2i) &= 0 \iff w = 5 \text{ oder } w = -1 - 2i. \end{aligned}$$



KomplZahlen/GlgnAlg/Ag_KomplGlgn_QuadOhneKomplWurzeln.tex

Aufgabe 87.412 (einfache quadratische Gleichungen mit reellen oder komplexen Lösungen) SPF
Lösen Sie die folgenden Gleichungen allgemein! ($i^2 = -1$)

a) $z^2 + 34 = 10z$

$$\{5 + 3i; 5 - 3i\}$$

Lösung: Die Gleichung ist äquivalent zu $z^2 - 10z + 34 = 0$.

Eine quadratische Ergänzung liefert für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} z^2 - 10z + 34 &= z^2 - 2 \cdot z \cdot 5 + 5^2 - 25 + 34 = (z - 5)^2 + 9 \\ &= (z - 5)^2 - (3i)^2 = (z - 5 - 3i) \cdot (z - 5 + 3i). \end{aligned}$$

Insgesamt folgt $\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 + 34 = 10z\} = \{5 + 3i; z = 5 - 3i\}.$

b) $4w^2 + 53 = 28w$

$$\left\{\frac{7}{2} + i; \frac{7}{2} - i\right\}$$

Lösung: Die Gleichung ist äquivalent zu $4w^2 - 28w + 53 = 0$.

Eine quadratische Ergänzung liefert für alle $w \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} 4w^2 - 28w + 53 &= (2w)^2 - 2 \cdot 2w \cdot 7 + 7^2 - 49 + 53 = (2w - 7)^2 + 4 \\ &= (2w - 7)^2 - (2i)^2 = (2w - 7 - 2i) \cdot (2w - 7 + 2i) \\ &= 4 \cdot \left(w - \frac{7}{2} - i\right) \cdot \left(w - \frac{7}{2} + i\right). \end{aligned}$$

Insgesamt folgt $\{w \in \mathbb{C} \mid 4w^2 + 53 = 28w\} = \left\{\frac{7}{2} + i; \frac{7}{2} - i\right\}.$

c) $2s^2 = s + 36$

$$\left\{-4; \frac{9}{2}\right\}$$

Lösung: Die Gleichung ist äquivalent zu $s^2 - \frac{1}{2} \cdot s - 18 = 0$.

Eine quadratische Ergänzung liefert für alle $s \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} s^2 - \frac{1}{2} \cdot s - 18 &= s^2 - 2 \cdot s \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - 18 = \left(s - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1+(17-1) \cdot (17+1)}{16} \\ &= \left(s - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1+17^2-1^2}{4^2} = \left(s - \frac{1}{4} - \frac{17}{4}\right) \cdot \left(s - \frac{1}{4} + \frac{17}{4}\right) \\ &= 4 \cdot \left(s - \frac{9}{2}\right) \cdot (s + 4). \end{aligned}$$

Insgesamt folgt $\{s \in \mathbb{C} \mid 2s^2 = s + 36\} = \{-4; \frac{9}{2}\}$.

d) $9z^2 + 40 = 12z$

$$\{\frac{2}{3} + 2i; \frac{2}{3} - 2i\}$$

Lösung: Die Gleichung ist äquivalent zu $9z^2 - 12z + 40 = 0$.

Eine quadratische Ergänzung liefert für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} 9z^2 - 12z + 40 &= (3z)^2 - 2 \cdot 3z \cdot 2 + 2^2 - 4 + 40 = (3z - 2)^2 + 36 \\ &= (3z - 2)^2 - (6i)^2 = (3z - 2 - 6i) \cdot (3z - 2 + 6i) \\ &= 9 \cdot \left(z - \frac{2}{3} - 2i\right) \cdot \left(z - \frac{2}{3} + 2i\right). \end{aligned}$$

Insgesamt folgt $\{z \in \mathbb{C} \mid 9z^2 + 40 = 12z\} = \{\frac{2}{3} + 2i; \frac{2}{3} - 2i\}$.

e) $4w^2 + 16i = 32iw + 4w + 79$

$$\{-\frac{3}{2} + 4i; \frac{5}{2} + 4i\}$$

Lösung: Die Gleichung ist äquivalent zu $4w^2 - (4 + 32i) \cdot w - 79 + 16i = 0$.

Eine quadratische Ergänzung liefert für alle $w \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} 4w^2 - (4 + 32i) \cdot w - 79 + 16i &= (2w)^2 - 2 \cdot 2w \cdot (1 + 8i) + (1 + 8i)^2 - 1 - 16i + 64 - 79 + 16i \\ &= (2w - (1 + 8i))^2 - 16 \\ &= (2w - 1 - 8i)^2 - 4^2 \\ &= (2w - 1 - 8i - 4) \cdot (2w - 1 - 8i + 4) \\ &= 4 \cdot \left(w - \frac{5}{2} - 4i\right) \cdot \left(w + \frac{3}{2} - 4i\right). \end{aligned}$$

Insgesamt folgt $\{w \in \mathbb{C} \mid 4w^2 + 16i = 32iw + 4w + 79\} = \{-\frac{3}{2} + 4i; \frac{5}{2} + 4i\}$.

f) $is^2 + 2s - 5i = 6is - 3s^2 + 15$

$$\{-2 + i; 2 + i\}$$

Lösung: Die Gleichung ist äquivalent zu $(3 + i) \cdot s^2 + (2 - 6i) \cdot s - 15 - 5i = 0$.

Multiplikation dieser Gleichung mit $3 - i$ liefert die äquivalente Gleichung

$$\begin{aligned} &(3 - i) \cdot (3 + i) \cdot s^2 + (3 - i) \cdot (2 - 6i) \cdot s + (3 - i) \cdot (-15 - 5i) = (3 - i) \cdot 0 \\ \iff &(9 - 3i + 3i - i^2) \cdot s^2 + (6 - 2i - 18i + 6i^2) \cdot s + (-45 + 15i - 15i + 5i^2) = 0 \\ \iff &10s^2 - 20is - 50 = 0. \end{aligned}$$

Eine quadratische Ergänzung liefert für alle $s \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} 10s^2 - 20is - 50 &= 10 \cdot (s^2 - 2 \cdot s \cdot i + i^2 - (-1) - 5) \\ &= 10 \cdot ((s - i)^2 - 4) \\ &= 10 \cdot (s - i - 2) \cdot (s - i + 2). \end{aligned}$$

Insgesamt folgt $\{s \in \mathbb{C} \mid is^2 + 2s - 5i = 6is - 3s^2 + 15\} = \{-2 + i; 2 + i\}$.

**Aufgabe 87.413** (komplexe quadratische Gleichungen)

Finden Sie alle komplexen Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen!

a) $z^2 = 21 + 20i$

$\{5 + 2i; -5 - 2i\}$

Lösung:Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $(a + bi)^2 = 21 + 20i$. Mit $(a + bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2$ und einem Vergleich von Real- und Imaginärteil folgt

$$a^2 - b^2 = 21 \quad \text{und} \quad 2ab = 20.$$

Die zweite Gleichung liefert $a \neq 0 \neq b$ und $b = \frac{10}{a}$.In die erste Gleichung eingesetzt erhält man $a^2 - \frac{100}{a^2} = 21$ bzw.

$$\begin{aligned} 0 &= a^4 - 21a^2 - 100 = (a^2)^2 - 2 \cdot a^2 \cdot \frac{21}{2} + \left(\frac{21}{2}\right)^2 - \frac{441}{4} - 100 = \left(a^2 - \frac{21}{2}\right)^2 - \frac{841}{4} \\ &= \left(a^2 - \frac{21}{2} - \frac{29}{2}\right) \cdot \left(a^2 - \frac{21}{2} + \frac{29}{2}\right) = (a^2 - 25) \cdot (a^2 + 4) = (a - 5) \cdot (a + 5) \cdot (a^2 + 4). \end{aligned}$$

Wegen $a \in \mathbb{R}$ ergibt sich mit der zweiten Gleichung ($a = 5$ und $b = 2$) oder ($a = -5$ und $b = -2$).

b) $w^2 = -5 - 12i$

$\{2 - 3i; -2 + 3i\}$

Lösung:Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $(a + bi)^2 = -5 - 12i$. Mit $(a + bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2$ und einem Vergleich von Real- und Imaginärteil folgt

$$a^2 - b^2 = -5 \quad \text{und} \quad 2ab = -12.$$

Die zweite Gleichung liefert $a \neq 0 \neq b$ und $b = -\frac{6}{a}$.In die erste Gleichung eingesetzt erhält man $a^2 - \frac{36}{a^2} = -5$ bzw.

$$\begin{aligned} 0 &= a^4 + 5a^2 - 36 = (a^2)^2 + 2 \cdot a^2 \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - 36 = \left(a^2 + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{169}{4} \\ &= \left(a^2 + \frac{5}{2} - \frac{13}{2}\right) \cdot \left(a^2 + \frac{5}{2} + \frac{13}{2}\right) = (a^2 - 4) \cdot (a^2 + 9) = (a - 2) \cdot (a + 2) \cdot (a^2 + 9). \end{aligned}$$

Wegen $a \in \mathbb{R}$ ergibt sich mit der zweiten Gleichung ($a = 2$ und $b = -3$) oder ($a = -2$ und $b = 3$).

c) $s^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{9} \cdot i$

$\left\{\frac{2}{3} + \frac{i}{3}; -\frac{2}{3} - \frac{i}{3}\right\}$

Lösung:Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $(a + bi)^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{9}i$. Mit $(a + bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2$ und einem Vergleich von Real- und Imaginärteil folgt

$$a^2 - b^2 = \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad 2ab = \frac{4}{9}.$$

Die zweite Gleichung liefert $a \neq 0 \neq b$ und $b = \frac{2}{9a}$.In die erste Gleichung eingesetzt erhält man $a^2 - \frac{4}{81a^2} = \frac{1}{3}$ bzw.

$$\begin{aligned} 0 &= 81a^4 - 27a^2 - 4 = (9a^2)^2 - 2 \cdot 9a^2 \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 4 = \left(9a^2 - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} \\ &= \left(9a^2 - \frac{3}{2} - \frac{5}{2}\right) \cdot \left(9a^2 - \frac{3}{2} + \frac{5}{2}\right) = \left((3a)^2 - 4\right) \cdot (9a^2 + 1) = (3a - 2) \cdot (3a + 2) \cdot (9a^2 + 1). \end{aligned}$$

Wegen $a \in \mathbb{R}$ ergibt sich mit der zweiten Gleichung ($a = \frac{2}{3}$ und $b = \frac{1}{3}$) oder ($a = -\frac{2}{3}$ und $b = -\frac{1}{3}$).

d) $z^2 + 2z - 8 = (2z - 4) \cdot i$

$$\{2; -4 + 2i\}$$

Lösung:

Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} z^2 + 2z - 8 = (2z - 4) \cdot i &\iff z^2 + (2 - 2i) \cdot z - 8 + 4i = 0 \\ &\iff z^2 + 2 \cdot z \cdot (1 - i) + (1 - i)^2 - (1 - 2i - 1) - 8 + 4i = 0 \\ &\iff (z + 1 - i)^2 - (8 - 6i) = 0. \end{aligned}$$

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $(a + bi)^2 = 8 - 6i$. Mit $(a + bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2$ und einem Vergleich von Real- und Imaginärteil folgt

$$a^2 - b^2 = 8 \quad \text{und} \quad 2ab = -6.$$

Die zweite Gleichung liefert $a \neq 0 \neq b$ und $b = -\frac{3}{a}$.

In die erste Gleichung eingesetzt erhält man $a^2 - \frac{9}{a^2} = 8$ bzw.

$$\begin{aligned} 0 &= a^4 - 8a^2 - 9 = (a^2)^2 - 2 \cdot a^2 \cdot 4 + 4^2 - 16 - 9 = (a^2 - 4)^2 - 25 \\ &= (a^2 - 4 - 5) \cdot (a^2 - 4 + 5) = (a^2 - 9) \cdot (a^2 + 1) = (a - 3) \cdot (a + 3) \cdot (a^2 + 1). \end{aligned}$$

Wegen $a \in \mathbb{R}$ ergibt sich mit der zweiten Gleichung ($a = 3$ und $b = -1$) oder ($a = -3$ und $b = 1$).

Damit folgt für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} z^2 + 2z - 8 = (2z - 4) \cdot i &\iff (z + 1 - i)^2 - (3 - i)^2 = 0 \\ &\iff (z + 1 - i - 3 + i) \cdot (z + 1 - i + 3 - i) = 0 \\ &\iff (z - 2) \cdot (z - (-4 + 2i)) = 0 \\ &\iff z \in \{2; -4 + 2i\}. \end{aligned}$$

e) $w^2 + w + 3 + 15i = 0$

$$\{2 - 3i; -3 + 3i\}$$

Lösung:

Für alle $w \in \mathbb{C}$ gilt

$$w^2 + w + 14 - 12i = w^2 + 2 \cdot w \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 3 + 15i = \left(w + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{11}{4} - 15i\right).$$

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $(a + bi)^2 = -\frac{11}{4} - 15i$. Mit $(a + bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2$ und einem Vergleich von Real- und Imaginärteil folgt

$$a^2 - b^2 = -\frac{11}{4} \quad \text{und} \quad 2ab = -15.$$

Die zweite Gleichung liefert $a \neq 0 \neq b$ und $b = -\frac{15}{2a}$.

In die erste Gleichung eingesetzt erhält man $a^2 - \frac{225}{4a^2} = -\frac{11}{4}$ bzw.

$$\begin{aligned} 0 &= 4a^4 + 11a^2 - 225 = (2a^2)^2 + 2 \cdot 2a^2 \cdot \frac{11}{4} + \left(\frac{11}{4}\right)^2 - \frac{121}{16} - \frac{900 \cdot 4}{16} = \left(2a^2 + \frac{11}{4}\right)^2 - \frac{3721}{16} \\ &= \left(2a^2 + \frac{11}{4} - \frac{61}{4}\right) \cdot \left(2a^2 + \frac{11}{4} + \frac{61}{4}\right) = \left(2a^2 - \frac{25}{2}\right) \cdot (2a^2 + 18) = 4 \cdot \left(a - \frac{5}{2}\right) \cdot \left(a + \frac{5}{2}\right) \cdot (a^2 + 9). \end{aligned}$$

Wegen $a \in \mathbb{R}$ ergibt sich mit der zweiten Gleichung ($a = \frac{5}{2}$ und $b = -3$) oder ($a = -\frac{5}{2}$ und $b = 3$).

Damit folgt für alle $w \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} w^2 + w + 3 + 15i = 0 &\iff \left(w + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2} - 3 \cdot i\right)^2 \\ &\iff \left(w + \frac{1}{2} - \frac{5}{2} + 3 \cdot i\right) \cdot \left(w + \frac{1}{2} + \frac{5}{2} - 3 \cdot i\right) = 0 \\ &\iff w \in \{2 - 3i; -3 + 3i\}. \end{aligned}$$

f) $s^2 - (1 + i) \cdot 3s = 2 - 3i$

$$\{i; 3 + 2i\}$$

Lösung:

Für alle $s \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} s^2 - (1 + i) \cdot 3s = 2 - 3i &\iff s^2 - 2 \cdot s \cdot \frac{3+3i}{2} + \left(\frac{3+3i}{2}\right)^2 - \frac{9+18i-9}{4} - 2 + 3i = 0 \\ &\iff \left(s - \frac{3+3i}{2}\right)^2 - \left(2 + \frac{3i}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $(a + bi)^2 = 2 + \frac{3i}{2}$. Mit $(a + bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2$ und einem Vergleich von Real- und Imaginärteil folgt

$$a^2 - b^2 = 2 \quad \text{und} \quad 2ab = \frac{3}{2}.$$

Die zweite Gleichung liefert $a \neq 0 \neq b$ und $b = \frac{3}{4a}$.

In die erste Gleichung eingesetzt erhält man $a^2 - \frac{9}{16a^2} = 2$ bzw.

$$\begin{aligned} 0 &= 16a^4 - 32a^2 - 9 = (4a^2)^2 - 2 \cdot 4a^2 \cdot 4 + 4^2 - 16 - 9 = (4a^2 - 4)^2 - 25 \\ &= (4a^2 - 4 - 5) \cdot (4a^2 - 4 + 5) = ((2a)^2 - 9) \cdot (4a^2 + 1) = (2a - 3) \cdot (2a + 3) \cdot (4a^2 + 1). \end{aligned}$$

Wegen $a \in \mathbb{R}$ ergibt sich mit der zweiten Gleichung $(a = \frac{3}{2} \text{ und } b = \frac{1}{2})$ oder $(a = -\frac{3}{2} \text{ und } b = -\frac{1}{2})$.

Damit folgt für alle $s \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} s^2 - (1 + i) \cdot 3s = 2 - 3i &\iff \left(s - \frac{3+3i}{2}\right)^2 - \left(\frac{3+i}{2}\right)^2 = 0 \\ &\iff \left(s - \frac{3+3i}{2} - \frac{3+i}{2}\right) \cdot \left(s - \frac{3+3i}{2} + \frac{3+i}{2}\right) = 0 \\ &\iff (s - 3 - 2i) \cdot (s - i) = 0 \\ &\iff s \in \{i; 3 + 2i\}. \end{aligned}$$

g) $z^2 + z = 2z \cdot i - 3 - 4i$

$$\left\{ \frac{\sqrt{5}-1}{2} + (1 - \sqrt{5}) \cdot i; \frac{-\sqrt{5}-1}{2} + (1 + \sqrt{5}) \cdot i \right\}$$

Lösung:

Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} z^2 + z = 2z \cdot i - 3 - 4i &\iff z^2 + 2 \cdot z \cdot \left(\frac{1}{2} - i\right) + \left(\frac{1}{2} - i\right)^2 - \left(\frac{1}{4} - i - 1 - 3 - 4i\right) = 0 \\ &\iff \left(z + \frac{1}{2} - i\right)^2 - \left(-\frac{15}{4} - 5i\right) = 0. \end{aligned}$$

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $(a + bi)^2 = -\frac{15}{4} - 5i$. Mit $(a + bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2$ und einem Vergleich von Real- und Imaginärteil folgt

$$a^2 - b^2 = -\frac{15}{4} \quad \text{und} \quad 2ab = -5.$$

Die zweite Gleichung liefert $a \neq 0 \neq b$ und $b = -\frac{5}{2a}$.

In die erste Gleichung eingesetzt erhält man $a^2 - \frac{25}{4a^2} = -\frac{15}{4}$ bzw.

$$\begin{aligned} 0 &= 4a^4 + 15a^2 - 25 = (2a^2)^2 + 2 \cdot 2a^2 \cdot \frac{15}{4} + \left(\frac{51}{4}\right)^2 - \frac{225}{16} - 25 = \left(2a^2 + \frac{15}{4}\right)^2 - \frac{625}{16} \\ &= \left(2a^2 + \frac{15}{4} - \frac{25}{4}\right) \cdot \left(2a^2 + \frac{15}{4} + \frac{25}{4}\right) = \left(2a^2 - \frac{5}{2}\right) \cdot (2a^2 + 10) = \left(a - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(a + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cdot (4a^2 + 20). \end{aligned}$$

Wegen $a \in \mathbb{R}$ ergibt sich mit der zweiten Gleichung $\left(a = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ und } b = -\sqrt{5}\right)$ oder $\left(a = -\frac{\sqrt{5}}{2} \text{ und } b = \sqrt{5}\right)$.

Damit folgt für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} z^2 + z &= 2z \cdot i - 3 - 4i &\iff (z + \tfrac{1}{2} - i)^2 - \left(\tfrac{\sqrt{5}}{2} - \sqrt{5} \cdot i\right) &= 0 \\ &&\iff \left(z + \tfrac{1}{2} - i - \tfrac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{5} \cdot i\right) \cdot \left(z + \tfrac{1}{2} - i + \tfrac{\sqrt{5}}{2} - \sqrt{5} \cdot i\right) &= 0 \\ &&\iff z \in \left\{ \tfrac{\sqrt{5}-1}{2} + (1 - \sqrt{5}) \cdot i; \tfrac{-\sqrt{5}-1}{2} + (1 + \sqrt{5}) \cdot i \right\}. \end{aligned}$$

h) $w^4 + 25 = 6w^2$

$$\{2 + i; 2 - i; -2 + i; -2 - i\}$$

Lösung:

Für alle $w \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} w^4 + 25 &= 6w^2 &\iff (w^2)^2 - 2 \cdot w^2 \cdot 3 + 3^2 - 9 + 25 &= 0 \\ &&\iff (w^2 - 3)^2 - (-16) &= 0 \\ &&\iff (w^2 - 3 - 4i) \cdot (w^2 - 3 + 4i) &= 0 \\ &&\iff w^2 = 3 + 4i \text{ oder } w^2 = 3 - 4i. \end{aligned}$$

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $(a + bi)^2 = 3 \pm 4i$. Mit $(a + bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2$ und einem Vergleich von Real- und Imaginärteil folgt

$$a^2 - b^2 = 3 \quad \text{und} \quad 2ab = \pm 4.$$

Die zweite Gleichung liefert $a \neq 0 \neq b$ und $b = \pm \frac{2}{a}$.

In die erste Gleichung eingesetzt erhält man $a^2 - \frac{4}{a^2} = 3$ bzw.

$$\begin{aligned} 0 &= a^4 - 3a^2 - 4 = (a^2)^2 - 2 \cdot a^2 \cdot \tfrac{3}{2} + \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 - \tfrac{9}{4} - 4 = \left(a^2 - \tfrac{3}{2}\right)^2 - \tfrac{25}{4} \\ &= \left(a^2 - \tfrac{3}{2} - \tfrac{5}{2}\right) \cdot \left(a^2 - \tfrac{3}{2} + \tfrac{5}{2}\right) = (a^2 - 4) \cdot (a^2 + 1) = (a - 2) \cdot (a + 2) \cdot (a^2 + 1). \end{aligned}$$

Wegen $a \in \mathbb{R}$ ergibt sich mit der zweiten Gleichung $(a = 2 \text{ und } b = \pm 1)$ oder $(a = -2 \text{ und } b = \mp 1)$.

Damit folgt für alle $w \in \mathbb{C}$

$$w^4 + 25 = 6w^2 \iff w \in \{2 + i; 2 - i; -2 + i; -2 - i\}.$$

i) $s^4 + 3s^2 - 32 = 12is^2 + 24i$

$$\{-2 - 2i; -1 - 2i; 1 + 2i; 2 + 2i\}$$

Lösung:

Für alle $s \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} s^4 + 3s^2 - 32 &= 12is^2 + 24i \\ \iff (s^2)^2 + 2 \cdot s^2 \cdot \left(\tfrac{3}{2} - 6i\right) + \left(\tfrac{3}{2} - 6i\right)^2 - \left(\tfrac{9}{4} - 18i - 36\right) - 32 - 24i \\ \iff \left(s^2 + \tfrac{3}{2} - 6i\right)^2 - \left(-\tfrac{7}{4} + 6i\right) &= 0. \end{aligned}$$

Seien $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$ mit $(x + yi)^2 = -\frac{7}{4} + 6i$. Mit $(x + yi)^2 = x^2 + 2xyi - y^2$ und einem Vergleich von Real- und Imaginärteil folgt

$$x^2 - y^2 = -\frac{7}{4} \quad \text{und} \quad 2xy = 6.$$

Die zweite Gleichung liefert $x \neq 0 \neq y$ und $y = \frac{3}{x}$.

In die erste Gleichung eingesetzt erhält man $x^2 - \frac{9}{x^2} = -\frac{7}{4}$ bzw.

$$\begin{aligned} 0 &= x^4 + \frac{7}{4} \cdot x^2 - 9 = (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot \frac{7}{8} + \left(\frac{7}{8}\right)^2 - \frac{49}{64} - 9 = \left(x^2 + \frac{7}{8}\right)^2 - \frac{625}{64} \\ &= \left(x^2 + \frac{7}{8} - \frac{25}{8}\right) \cdot \left(x^2 + \frac{7}{8} + \frac{25}{8}\right) = \left(x^2 - \frac{9}{4}\right) \cdot \left(x^2 + 4\right) = \left(x - \frac{3}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{3}{2}\right) \cdot (x^2 + 4). \end{aligned}$$

Wegen $x \in \mathbb{R}$ ergibt sich mit der zweiten Gleichung ($x = \frac{3}{2}$ und $y = 2$) oder ($x = -\frac{3}{2}$ und $y = -2$).

Damit folgt für alle $s \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} s^4 + 3s^2 - 32 = 12is^2 + 24i &\iff \left(s^2 + \frac{3}{2} - 6i\right)^2 - \left(\frac{3}{2} + 2i\right)^2 = 0 \\ &\iff \left(s^2 + \frac{3}{2} - 6i - \frac{3}{2} - 2i\right) \cdot \left(s^2 + \frac{3}{2} - 6i + \frac{3}{2} + 2i\right) = 0 \\ &\iff s^2 = 8i \text{ oder } s^2 = -3 + 4i. \end{aligned}$$

Seien $c \in \mathbb{R}$ und $d \in \mathbb{R}$ mit $(c + di)^2 = -8i$. Mit $(c + di)^2 = c^2 + 2cdi - d^2$ und einem Vergleich von Real- und Imaginärteil folgt

$$c^2 - d^2 = 0 \quad \text{und} \quad 2cd = 8.$$

Die zweite Gleichung liefert $c \neq 0 \neq d$ und $d = \frac{4}{c}$.

In die erste Gleichung eingesetzt erhält man $c^2 - \frac{16}{c^2} = 0$, also $c^4 = 16$, was mit $c \in \mathbb{R}$ zu $c = 2$ oder $c = -2$ führt.

Mit der zweiten Gleichung folgt ($c = 2$ und $d = 2$) oder ($c = -2$ und $d = -2$).

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $(a + bi)^2 = -3 + 4i$. Mit $(a + bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2$ und einem Vergleich von Real- und Imaginärteil folgt

$$a^2 - b^2 = -3 \quad \text{und} \quad 2ab = 4.$$

Die zweite Gleichung liefert $a \neq 0 \neq b$ und $b = \frac{2}{a}$.

In die erste Gleichung eingesetzt erhält man $a^2 - \frac{4}{a^2} = -3$ bzw.

$$\begin{aligned} 0 &= a^4 + 3 \cdot a^2 - 4 = (a^2)^2 + 2 \cdot a^2 \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 4 = \left(a^2 + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} \\ &= \left(a^2 + \frac{3}{2} - \frac{5}{2}\right) \cdot \left(a^2 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2}\right) = (a^2 - 1) \cdot (a^2 + 4) = (a - 1) \cdot (a + 1) \cdot (a^2 + 4). \end{aligned}$$

Wegen $a \in \mathbb{R}$ ergibt sich mit der zweiten Gleichung ($a = 1$ und $b = 2$) oder ($a = -1$ und $b = -2$).

Insgesamt folgt

$$s^4 + 3s^2 - 32 = 12is^2 + 24i \iff s \in \{-2 - 2i; -1 - 2i; 1 + 2i; 2 + 2i\}.$$

Hinweis: Es gelten $27^2 = 729$, $29^2 = 841$, $32^2 = 1024$, $45^2 = 2025$ und $61^2 = 3721$.



KomplZahlen/GlgnAlg/Ag_KomplGlgn_WurzelnDreiQuadrGlgnVierBiquadrGlgnZwei.tex

Aufgabe 87.414 (komplexe quadratische Gleichungen)

spf

Finden Sie alle komplexen Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen! ($13^2 = 169$, $17^2 = 289$)

a) $z^2 = -16 + 30i$

$$\{3 + 5i; -3 - 5i\}$$

Lösung:

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $(a + bi)^2 = -16 + 30i$. Mit $(a + bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2$ und einem Vergleich von Real- und Imaginärteil folgt

$$a^2 - b^2 = -16 \quad \text{und} \quad 2ab = 30.$$

Die zweite Gleichung liefert $a \neq 0 \neq b$ und $b = \frac{15}{a}$.

In die erste Gleichung eingesetzt erhält man $a^2 - \frac{225}{a^2} = -16$ bzw.

$$\begin{aligned} 0 &= a^4 + 16a^2 - 225 = (a^2)^2 + 2 \cdot a^2 \cdot 8 + 8^2 - 64 - 225 = (a^2 + 8)^2 - 289 \\ &= (a^2 + 8 - 17) \cdot (a^2 + 8 + 17) = (a^2 - 9) \cdot (a^2 + 25) = (a - 3) \cdot (a + 3) \cdot (a^2 + 25). \end{aligned}$$

Wegen $a \in \mathbb{R}$ ergibt sich mit der zweiten Gleichung ($a = 3$ und $b = 5$) oder ($a = -3$ und $b = -5$).

b) $w^2 = 15 - 8i$

$$\{4 - i; -4 + i\}$$

Lösung:

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $(a + bi)^2 = 15 - 8i$. Mit $(a + bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2$ und einem Vergleich von Real- und Imaginärteil folgt

$$a^2 - b^2 = 15 \quad \text{und} \quad 2ab = -8.$$

Die zweite Gleichung liefert $a \neq 0 \neq b$ und $b = -\frac{4}{a}$.

In die erste Gleichung eingesetzt erhält man $a^2 - \frac{16}{a^2} = 15$ bzw.

$$\begin{aligned} 0 &= a^4 - 15a^2 - 16 = (a^2)^2 - 2 \cdot a^2 \cdot \frac{15}{2} + \left(\frac{15}{2}\right)^2 - \frac{225}{4} - 16 = \left(a^2 - \frac{15}{2}\right)^2 - \frac{289}{4} \\ &= \left(a^2 - \frac{15+17}{2}\right) \cdot \left(a^2 - \frac{-15+17}{2}\right) = (a^2 - 16) \cdot (a^2 + 1) = (a - 4) \cdot (a + 4) \cdot (a^2 + 1). \end{aligned}$$

Wegen $a \in \mathbb{R}$ ergibt sich mit der zweiten Gleichung ($a = 4$ und $b = -1$) oder ($a = -4$ und $b = 1$).

c) $s^2 = -\frac{2}{9} + \frac{i}{6}$

$$\left\{\frac{1}{6} + \frac{i}{2}; -\frac{1}{6} - \frac{i}{2}\right\}$$

Lösung:

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $(a + bi)^2 = -\frac{2}{9} + \frac{i}{6}$. Mit $(a + bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2$ und einem Vergleich von Real- und Imaginärteil folgt

$$a^2 - b^2 = -\frac{2}{9} \quad \text{und} \quad 2ab = \frac{1}{6}.$$

Die zweite Gleichung liefert $a \neq 0 \neq b$ und $b = \frac{1}{12a}$.

In die erste Gleichung eingesetzt erhält man $a^2 - \frac{1}{144a^2} = -\frac{2}{9}$ bzw.

$$\begin{aligned} 0 &= 144a^4 + 32a^2 - 1 = (12a^2)^2 + 2 \cdot 12a^2 \cdot \frac{4}{3} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{16}{9} - 1 = \left(12a^2 + \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{25}{9} \\ &= \left(12a^2 + \frac{4}{3} - \frac{5}{3}\right) \cdot \left(12a^2 + \frac{4}{3} + \frac{5}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left((6a)^2 - 1\right) \cdot (12a^2 + 3) \\ &= (6a - 1) \cdot (6a + 1) \cdot (4a^2 + 1). \end{aligned}$$

Wegen $a \in \mathbb{R}$ ergibt sich mit der zweiten Gleichung ($a = \frac{1}{6}$ und $b = \frac{1}{2}$) oder ($a = -\frac{1}{6}$ und $b = -\frac{1}{2}$).

d) $z^2 + 12 = 4z + 6i$

$$\{1 - 3i; 3 + 3i\}$$

Lösung:

Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $z^2 + 12 = 4z + 6i \iff z^2 - 4z + 12 - 6i = 0$ und

$$z^2 - 4z + 12 - 6i = z^2 - 2 \cdot z \cdot 2 + 2^2 - 4 + 12 - 6i = (z - 2)^2 - (-8 + 6i).$$

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $(a + bi)^2 = -8 + 6i$. Mit $(a + bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2$ und einem Vergleich von Real- und Imaginärteil folgt

$$a^2 - b^2 = -8 \quad \text{und} \quad 2ab = 6.$$

Die zweite Gleichung liefert $a \neq 0 \neq b$ und $b = \frac{3}{a}$.

In die erste Gleichung eingesetzt erhält man $a^2 - \frac{9}{a^2} = -8$ bzw.

$$\begin{aligned} 0 &= a^4 + 8a^2 - 9 = (a^2)^2 + 2 \cdot a^2 \cdot 4 + 4^2 - 16 - 9 = (a^2 + 4)^2 - 25 \\ &= (a^2 + 4 - 5) \cdot (a^2 + 4 + 5) = (a^2 - 1) \cdot (a^2 + 9) = (a - 1) \cdot (a + 1) \cdot (a^2 + 9). \end{aligned}$$

Wegen $a \in \mathbb{R}$ ergibt sich mit der zweiten Gleichung ($a = 1$ und $b = 3$) oder ($a = -1$ und $b = -3$).

Damit folgt für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} z^2 + 12 = 4z + 6i &\iff (z - 2)^2 - (1 + 3i)^2 = 0 \\ \iff (z - 2 - 1 - 3i) \cdot (z - 2 + 1 + 3i) = 0 &\iff z \in \{3 + 3i; 1 - 3i\}. \end{aligned}$$

e) $w^2 + 2w + 4i = 18 + 4i \cdot w$

$$\{3 + i; -5 + 3i\}$$

Lösung:

Für alle $w \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} w^2 + 2w + 4i = 18 + 4i \cdot w &\iff w^2 + (2 - 4i) \cdot w - 18 + 4i = 0 \\ &\iff w^2 + 2 \cdot w \cdot (1 - 2i) + (1 - 2i)^2 - (1 - 4i - 4) - 18 + 4i = 0 \\ &\iff (w + 1 - 2i)^2 - (15 - 8i) = 0. \end{aligned}$$

Nach Aufgabenteil b) gilt $15 - 8i = (4 - i)^2$.

Damit folgt für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} w^2 + 2w + 4i = 18 + 4i \cdot w &\iff (w + 1 - 2i)^2 - (4 - i)^2 = 0 \\ &\iff (w + 1 - 2i - 4 + i) \cdot (w + 1 - 2i + 4 - i) = 0 \\ &\iff (w - 3 - i) \cdot (w + 5 - 3i) = 0 \\ &\iff w \in \{3 + i; -5 + 3i\}. \end{aligned}$$

f) $s^2 + 2i \cdot (5s - 6) = 6s + 16$

$$\{-2i; 6 - 8i\}$$

Lösung:

Für alle $s \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} s^2 + 2i \cdot (5s - 6) = 6s + 16 &\iff s^2 - 2 \cdot s \cdot (3 - 5i) + (3 - 5i)^2 - (9 - 30i - 25) - 16 - 12i = 0 \\ &\iff (s - (3 - 5i))^2 - (-18i) = 0. \end{aligned}$$

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $(a + bi)^2 = 0 - 18i$. Mit $(a + bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2$ und einem Vergleich von Real- und Imaginärteil folgt

$$a^2 - b^2 = 0 \quad \text{und} \quad 2ab = -18.$$

Die zweite Gleichung liefert $a \neq 0 \neq b$, $b = -\frac{9}{a}$ und damit auch $a \cdot b < 0$.

Die erste Gleichung liefert $a^2 = b^2$, sprich $|a| = |b|$, was wegen $a \cdot b < 0$ zu $-a = b$ führt.

Durch Gleichsetzen erhält man $-a = -\frac{9}{a}$ bzw. $a^2 = 9$, sprich $a = 3$ oder $a = -3$.

Mit $b = -a$ ergibt sich $(a = 3 \text{ und } b = -3)$ oder $(a = -3 \text{ und } b = 3)$.

Damit folgt für alle $s \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} s^2 + 2i \cdot (5s - 6) = 6s + 16 &\iff (s - (3 - 5i))^2 - (3 - 3i)^2 = 0 \\ &\iff (s - (3 - 5i) + (3 - 3i)) \cdot (s - (3 - 5i) - (3 - 3i)) = 0 \\ &\iff (s - (-2i)) \cdot (s - (6 - 8i)) = 0 \\ &\iff s \in \{-2i; 6 - 8i\}. \end{aligned}$$

g) $z^2 + iz + 3i + 1 = 0$

$$\{1 - 2i; -1 + i\}$$

Lösung:

Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} z^2 + iz + 3i + 1 = 0 &\iff z^2 + 2 \cdot z \cdot \frac{i}{2} + \left(\frac{i}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{4} - 3i - 1\right) = 0 \\ &\iff \left(z + \frac{i}{2}\right)^2 - \left(-\frac{5}{4} - 3i\right) = 0. \end{aligned}$$

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $(a + bi)^2 = -\frac{5}{4} - 3i$. Mit $(a + bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2$ und einem Vergleich von Real- und Imaginärteil folgt

$$a^2 - b^2 = -\frac{5}{4} \quad \text{und} \quad 2ab = -3.$$

Die zweite Gleichung liefert $a \neq 0 \neq b$ und $b = -\frac{3}{2a}$.

In die erste Gleichung eingesetzt erhält man $a^2 - \frac{9}{4a^2} = -\frac{5}{4}$ bzw.

$$\begin{aligned} 0 &= a^4 + \frac{5}{4} \cdot a^2 - \frac{9}{4} = (a^2)^2 + 2 \cdot a^2 \cdot \frac{5}{8} + \left(\frac{5}{8}\right)^2 - \frac{25}{64} - \frac{9}{4} = \left(a^2 + \frac{5}{8}\right)^2 - \frac{169}{64} \\ &= \left(a^2 + \frac{5-13}{8}\right) \cdot \left(a^2 + \frac{5+13}{8}\right) = (a^2 - 1) \cdot \left(a^2 + \frac{9}{4}\right) = (a - 1) \cdot (a + 1) \cdot \left(a^2 + \frac{9}{4}\right). \end{aligned}$$

Wegen $a \in \mathbb{R}$ ergibt sich mit der zweiten Gleichung $(a = 1 \text{ und } b = -\frac{3}{2})$ oder $(a = -1 \text{ und } b = \frac{3}{2})$.

Damit folgt für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} z^2 + iz + 3i + 1 = 0 &\iff \left(z + \frac{i}{2}\right)^2 - \left(1 - \frac{3}{2} \cdot i\right)^2 = 0 \\ \iff \left(z + \frac{i}{2} - 1 + \frac{3}{2} \cdot i\right) \cdot \left(z + \frac{i}{2} + 1 - \frac{3}{2} \cdot i\right) = 0 &\iff z \in \{1 - 2i; -1 + i\}. \end{aligned}$$

h) $w^4 = 4i \cdot (w^2 + 1) + 2w^2 + 3$

$$\{i; -i; 2 + i; -2 - i\}$$

elegante Lösung:

Für alle $w \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} w^4 &= 4i \cdot (w^2 + 1) + 2w^2 + 3 & \iff & w^4 + 2w^2 + 1 = 4i \cdot (w^2 + 1) + 4w^2 + 4 \\ \iff & (w^2 + 1)^2 = 4 \cdot (i + 1) \cdot (w^2 + 1) & \iff & w^2 + 1 = 0 \text{ oder } w^2 + 1 = 4 + 4i \\ \iff & w^2 = -1 \text{ oder } w^2 = 3 + 4i & \iff & w \in \{i; -i; 2 + i; -2 - i\}, \end{aligned}$$

denn sucht man $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $(a + bi)^2 = 3 + 4i$, so ergeben sich mit $(a + bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2$ und einem Vergleich von Real- und Imaginärteil die beiden Gleichungen

$$a^2 - b^2 = 3 \quad \text{und} \quad 2ab = 4.$$

Die zweite Gleichung liefert $a \neq 0 \neq b$ und $b = \frac{2}{a}$.

In die erste Gleichung eingesetzt erhält man $a^2 - \frac{4}{a^2} = 3$ bzw.

$$\begin{aligned} 0 &= a^4 - 3a^2 - 4 = (a^2)^2 - 2 \cdot a^2 \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 4 = \left(a^2 - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} \\ &= \left(a^2 - \frac{3+5}{2}\right) \cdot \left(a^2 - \frac{3-5}{2}\right) = (a^2 - 4) \cdot (a^2 + 1) = (a - 2) \cdot (a + 2) \cdot (a^2 + 1). \end{aligned}$$

Wegen $a \in \mathbb{R}$ ergibt sich mit der zweiten Gleichung ($a = 2$ und $b = 1$) oder ($a = -2$ und $b = -1$).

Lösung:

Für alle $w \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} w^4 &= 4i \cdot (w^2 + 1) + 2w^2 + 3 & \iff & \\ (w^2)^2 - 2 \cdot w^2 \cdot (1 + 2i) + (1 + 2i)^2 - (1 + 4i - 4) - 3 - 4i &= 0 & \iff & (w^2 - 1 - 2i)^2 - 8i = 0. \end{aligned}$$

Seien $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$ mit $(x + yi)^2 = 0 + 8i$. Mit $(x + yi)^2 = x^2 + 2xyi - y^2$ und einem Vergleich von Real- und Imaginärteil folgt

$$x^2 - y^2 = 0 \quad \text{und} \quad 2xy = 8.$$

Die zweite Gleichung liefert $x \neq 0 \neq y$, $y = \frac{4}{x}$ und damit auch $x \cdot y > 0$.

Die erste Gleichung liefert $x^2 = y^2$, sprich $|x| = |y|$, was wegen $x \cdot y > 0$ zu $x = y$ führt.

Durch Gleichsetzen erhält man $x = \frac{4}{x}$ bzw. $x^2 = 4$, sprich $x = 2$ oder $x = -2$.

Mit $y = x$ ergibt sich ($x = 2$ und $y = 2$) oder ($x = -2$ und $y = -2$).

Damit folgt für alle $w \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} w^4 &= 4i \cdot (w^2 + 1) + 2w^2 + 3 & \iff & (w^2 - 1 - 2i)^2 - 8i = 0 \\ \iff & (w^2 - 1 - 2i)^2 - (2 + 2i)^2 = 0 & \iff & (w^2 - 1 - 2i + 2 + 2i) \cdot (w^2 - 1 - 2i - 2 - 2i) = 0 \\ \iff & (w^2 + 1) \cdot (w^2 - 3 - 4i) = 0 & \iff & (w + i) \cdot (w - i) \cdot (w^2 - (3 + 4i)) = 0 \\ \iff & w = \pm i \text{ oder } w^2 = 3 + 4i & \iff & w \in \{i; -i; 2 + i; -2 - i\}, \end{aligned}$$

denn sucht man $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $(a + bi)^2 = 3 + 4i$, so ergeben sich mit $(a + bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2$ und einem Vergleich von Real- und Imaginärteil die beiden Gleichungen

$$a^2 - b^2 = 3 \quad \text{und} \quad 2ab = 4.$$

Die zweite Gleichung liefert $a \neq 0 \neq b$ und $b = \frac{2}{a}$.

In die erste Gleichung eingesetzt erhält man $a^2 - \frac{4}{a^2} = 3$ bzw.

$$\begin{aligned} 0 &= a^4 - 3a^2 - 4 = (a^2)^2 - 2 \cdot a^2 \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 4 = \left(a^2 - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} \\ &= \left(a^2 - \frac{3+5}{2}\right) \cdot \left(a^2 - \frac{3-5}{2}\right) = (a^2 - 4) \cdot (a^2 + 1) = (a - 2) \cdot (a + 2) \cdot (a^2 + 1). \end{aligned}$$

Wegen $a \in \mathbb{R}$ ergibt sich mit der zweiten Gleichung ($a = 2$ und $b = 1$) oder ($a = -2$ und $b = -1$).

i) $\frac{s^4}{4} + 2s^2 + 36i = 9i \cdot s^2 + 77$

$$\{-3 - 5i; -3 - i; 3 + i; 3 + 5i\}$$

Lösung:

Für alle $s \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{s^4}{4} + 2s^2 + 36i &= 9i \cdot s^2 + 77 \\ \iff \left(\frac{s^2}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{s^2}{2} \cdot (2 - 9i) + (2 - 9i)^2 - (4 - 36i - 81) - 77 + 36i &= 0 \\ \iff \left(\frac{s^2}{2} + 2 - 9i\right)^2 - (-72i) &= 0. \end{aligned}$$

Seien $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$ mit $(x + yi)^2 = 0 - 72i$. Mit $(x + yi)^2 = x^2 + 2xyi - y^2$ und einem Vergleich von Real- und Imaginärteil folgt

$$x^2 - y^2 = 0 \quad \text{und} \quad 2xy = -72.$$

Die zweite Gleichung liefert $x \neq 0 \neq y$, $y = -\frac{36}{x}$ und damit auch $x \cdot y < 0$.

Die erste Gleichung liefert $x^2 = y^2$, sprich $|x| = |y|$, was wegen $x \cdot y < 0$ zu $-x = y$ führt.

Durch Gleichsetzen erhält man $-x = -\frac{36}{x}$ bzw. $x^2 = 36$, sprich $x = 6$ oder $x = -6$.

Mit $x = -y$ ergibt sich ($x = 6$ und $y = -6$) oder ($x = -6$ und $y = 6$).

Damit folgt für alle $s \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \frac{s^4}{4} + 2s^2 + 36i = 9i \cdot s^2 + 77 &\iff \left(\frac{s^2}{2} + 2 - 9i\right)^2 - (6 - 6i)^2 = 0 \\ &\iff \left(\frac{s^2}{2} + 2 - 9i - 6 + 6i\right) \cdot \left(\frac{s^2}{2} + 2 - 9i + 6 - 6i\right) = 0 \\ &\iff \left(\frac{s^2}{2} - 4 - 3i\right) \cdot \left(\frac{s^2}{2} + 8 - 15i\right) = 0 \\ &\iff \frac{1}{4} \cdot (s^2 - 8 - 6i) \cdot (s^2 + 16 - 30i) = 0 \\ &\iff s^2 = 8 + 6i \text{ oder } s^2 = -16 + 30i. \end{aligned}$$

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $(a + bi)^2 = 8 + 6i$. Mit $(a + bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2$ und einem Vergleich von Real- und Imaginärteil folgt

$$a^2 - b^2 = 8 \quad \text{und} \quad 2ab = 6.$$

Die zweite Gleichung liefert $a \neq 0 \neq b$ und $b = \frac{3}{a}$.

In die erste Gleichung eingesetzt erhält man $a^2 - \frac{9}{a^2} = 8$ bzw.

$$\begin{aligned} 0 &= a^4 - 8a^2 - 9 = (a^2)^2 - 2 \cdot a^2 \cdot 4 + 4^2 - 16 - 9 = (a^2 - 4)^2 - 25 \\ &= (a^2 - 4 - 5) \cdot (a^2 - 4 + 5) = (a^2 - 9) \cdot (a^2 + 1) = (a - 3) \cdot (a + 3) \cdot (a^2 + 1). \end{aligned}$$

Wegen $a \in \mathbb{R}$ ergibt sich mit der zweiten Gleichung ($a = 3$ und $b = 1$) oder ($a = -3$ und $b = -1$).

Nach Aufgabenteil a) gilt $s^2 = -16 + 30i \iff s = 3 + 5i$ oder $s = -3 - 5i$.

Insgesamt folgt $\frac{s^4}{4} + 2s^2 + 36i = 9i \cdot s^2 + 77 \iff s \in \{-3 - 5i; -3 - i; 3 + i; 3 + 5i\}$.

**Aufgabe 87.415** (komplexe „Wurzeln“)Berechnen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit

a) $z^2 = -1$

$\{i; -i\}$

Lösung (polar):Es ist $\operatorname{Re}(-1) = -1 < 0$ und $\operatorname{Im}(-1) = 0$.Damit folgt $|-1| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = \sqrt{1+0} = \sqrt{1} = 1$ und $\arg(-1) = \pi$.Also ist $-1 = 1 \cdot e^{i \cdot \pi} = e^{i \cdot (2k+1) \cdot \pi}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.Damit folgt $\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = -1\} = \left\{ e^{i \cdot (\frac{\pi}{2} + k\pi)} \in \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.Für alle $\ell \in \mathbb{Z}$ gilt nun

$$e^{i \cdot (\frac{\pi}{2} + (2\ell) \cdot \pi)} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \ell \cdot 2\pi\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \ell \cdot 2\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + i \cdot 1 = i$$

und

$$e^{i \cdot (\frac{\pi}{2} + (2\ell-1) \cdot \pi)} = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \ell \cdot 2\pi\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \ell \cdot 2\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 - i \cdot 1 = -i.$$

Insgesamt folgt $\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = -1\} = \{i; -i\}$.

b) $z^2 = 2 + \sqrt{12} \cdot i$

$\{\sqrt{3} + i; -\sqrt{3} - i\}$

Lösung (kartesisch):Seien $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$ mit $(x + i \cdot y)^2 = 2 + \sqrt{12} \cdot i$.Wegen $(x + i \cdot y)^2 = x^2 - y^2 + 2xy \cdot i$ folgt dann

$$x^2 - y^2 = 2 \quad \text{und} \quad 2xy = \sqrt{12} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{3}.$$

Mit der zweiten Gleichung folgt $x \neq 0 \neq y$ und so kann man diese Gleichung durch $2y$ dividieren, um sie anschließend in die erste Gleichung einzusetzen. Man erhält

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{y}\right)^2 - y^2 = 2 \quad \text{bzw.} \quad 3 - y^4 = 2y^2.$$

Dies lässt sich umformen zu

$$0 = (y^2)^2 + 2 \cdot y^2 \cdot 1 + 1^2 - 4 = (y^2 + 1)^2 - 2^2 = (y^2 - 1) \cdot (y^2 + 3) = (y - 1) \cdot (y + 1) \cdot (y^2 + 3).$$

Wegen $y \in \mathbb{R}$ ist $y^2 + 3 \geq 0 + 3 = 3 > 0$ und deshalb sind die beiden Lösungen der obigen Gleichung gerade $y_1 = 1$ und $y_2 = -1$.Setzt man diese in die Gleichung $2xy = 2 \cdot \sqrt{3}$ ein, so ergibt sich $x_1 = \sqrt{3}$ und $x_2 = -\sqrt{3}$.Insgesamt folgt $\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = 2 + \sqrt{12} \cdot i\} = \{\sqrt{3} + i; -\sqrt{3} - i\}$.**Lösung (polar):**Es ist $\operatorname{Re}(2 + \sqrt{12} \cdot i) = 2 > 0$ und $\operatorname{Im}(2 + \sqrt{12} \cdot i) = \sqrt{12} > 0$.Damit folgt $|2 + \sqrt{12} \cdot i| = \sqrt{2^2 + \sqrt{12}^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$ und $\arg(2 + \sqrt{12} \cdot i) = \arccos\left(\frac{2}{4}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Also ist $2 + \sqrt{12} \cdot i = 4 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}} = 4 \cdot e^{i \cdot (2k + \frac{1}{3}) \cdot \pi}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Damit folgt $\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = 2 + \sqrt{12} \cdot i\} = \left\{ \sqrt{4} \cdot e^{i \cdot (\frac{1}{6} + k) \cdot \pi} \in \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Für alle $\ell \in \mathbb{Z}$ gilt nun

$$\begin{aligned} \sqrt{4} \cdot e^{i \cdot (\frac{\pi}{6} + (2\ell) \cdot \pi)} &= 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \ell \cdot 2\pi\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} + \ell \cdot 2\pi\right) \right) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3} + i \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \sqrt{4} \cdot e^{i \cdot (\frac{\pi}{6} + (2\ell-1) \cdot \pi)} &= 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \pi \cdot (2\ell-1)\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} + \pi \cdot (2\ell-1)\right) \right) \\ &= 2 \cdot \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i \cdot 2 \cdot \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = 2 \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - i \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \\ &= -2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - i \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = -\sqrt{3} - i \end{aligned}$$

Insgesamt folgt $\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = 2 + \sqrt{12} \cdot i\} = \{\sqrt{3} + i; -\sqrt{3} - i\}$.

c) $z^4 = -8 - 8 \cdot \sqrt{3} \cdot i$

$$\{\sqrt{3} - i; 1 + i \cdot \sqrt{3}; -\sqrt{3} + i; -1 - i \cdot \sqrt{3}\}$$

Lösung:

Es sind $\operatorname{Re}(-8 - 8 \cdot \sqrt{3}i) = -8 < 0$ und $\operatorname{Im}(-8 - 8 \cdot \sqrt{3}i) = -8 \cdot \sqrt{3} < 0$.

Damit folgt

$$\left| -8 - 8 \cdot \sqrt{3}i \right| = \sqrt{(-8)^2 + (-8 \cdot \sqrt{3})^2} = \sqrt{64 + 64 \cdot 3} = \sqrt{64 \cdot 4} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{4} = 8 \cdot 2 = 16$$

und

$$\arg(-8 - 8 \cdot \sqrt{3}i) = -\arccos\left(\frac{-8}{16}\right) = -\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(\pi - \arccos\left(\frac{1}{2}\right)\right) = -\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}.$$

Also ist $-8 - 8 \cdot \sqrt{3}i = 16 \cdot e^{i \cdot (-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi)}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und das liefert

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \mid z^4 = -8 - 8 \cdot \sqrt{3} \cdot i \right\} = \left\{ \sqrt[4]{16} \cdot e^{i \cdot (-\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2})} \in \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Es ist $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$.

Mit $e^{i \cdot \frac{-\pi}{6}} = \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ ergibt sich für alle $\ell \in \mathbb{Z}$

$$\sqrt[4]{16} \cdot e^{i \cdot (-\frac{\pi}{6} + \frac{(4\ell-1)\pi}{2})} = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{-\pi}{2}} \cdot e^{i \cdot \frac{-\pi}{6}} = 2 \cdot (-i) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = -1 - i \cdot \sqrt{3},$$

$$\sqrt[4]{16} \cdot e^{i \cdot (-\frac{\pi}{6} + \frac{(4\ell)\pi}{2})} = 2 \cdot e^{i \cdot (-\frac{\pi}{6} + 2\ell\pi)} = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{-\pi}{6}} = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \sqrt{3} - i,$$

$$\sqrt[4]{16} \cdot e^{i \cdot (-\frac{\pi}{6} + \frac{(4\ell+1)\pi}{2})} = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} \cdot e^{i \cdot \frac{-\pi}{6}} = 2 \cdot i \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = 1 + i \cdot \sqrt{3}$$

und

$$\sqrt[4]{16} \cdot e^{i \cdot (-\frac{\pi}{6} + \frac{(4\ell+2)\pi}{2})} = 2 \cdot e^{i \cdot \pi} \cdot e^{i \cdot \frac{-\pi}{6}} = 2 \cdot (-1) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = -\sqrt{3} + i.$$

Insgesamt folgt

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \mid z^4 = -8 - 8 \cdot \sqrt{3} \cdot i \right\} = \left\{ \sqrt{3} - i; 1 + i \cdot \sqrt{3}; -\sqrt{3} + i; -1 - i \cdot \sqrt{3} \right\}.$$

d) $z^3 = -2 + 2i$

$$\left\{ 1 + i; -\frac{\sqrt{3}+1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2}; \frac{\sqrt{3}-1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right\}$$

Lösung:

Es sind $\operatorname{Re}(-2 + 2i) = -2 < 0$ und $\operatorname{Im}(-2 + 2i) = 2 > 0$.

Damit folgt

$$|-2 + 2i| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2}$$

und

$$\arg(-2 + 2i) = \arccos\left(\frac{-2}{2 \cdot \sqrt{2}}\right) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Also ist $-2 + 2i = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{i(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi)}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und das liefert

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = -2 + 2i\} = \left\{ \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3})} \in \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Es ist $\sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2}^2 \cdot \sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2}^3} = \sqrt{2}.$

Aus den Additionstheoremen folgt

$$\begin{aligned} e^{i \cdot \frac{\pi}{12}} &= \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) + i \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) + i \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für alle $\ell \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2 \cdot (3\ell-1)\pi}{3}\right)} &= e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} + 2\ell\pi\right)} = e^{i \cdot \frac{-5\pi}{12}} = e^{i \cdot \frac{-\pi}{2}} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{12}} = \left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right) \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{12}} \\ &= (0 + i \cdot (-1)) \cdot \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} - i \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \\ e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2 \cdot (3\ell)\pi}{3}\right)} &= e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{4} + 2\ell\pi\right)} = e^{i \cdot \frac{\pi}{4}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2 \cdot (3\ell+1)\pi}{3}\right)} &= e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} + 2\ell\pi\right)} = e^{i \cdot \frac{11\pi}{12}} = e^{i \cdot \pi} \cdot e^{i \cdot \left(-\frac{\pi}{12}\right)} = (\cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi)) \cdot \overline{e^{i \cdot \frac{\pi}{12}}} \\ &= (-1 + i \cdot 0) \cdot \overline{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} = -\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - i \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = -2 + 2i\} = \left\{ 1 + i; -\frac{\sqrt{3}+1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2}; \frac{\sqrt{3}-1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right\}.$$

e) $z^3 = 1 - 2i$

$$\left\{ \sqrt[6]{5} \cdot e^{\frac{i}{3} \cdot (2\pi k - \arccos(\frac{\sqrt{5}}{5}))} \in \mathbb{C} \mid k \in \{0; 1; 2\} \right\}$$

Lösung:

Es sind $\operatorname{Re}(1 - 2i) = 1 > 0$ und $\operatorname{Im}(1 - 2i) = -2 < 0$.

Damit folgt

$$|1 - 2i| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

und

$$\arg(1 - 2i) = -\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right).$$

Also ist $1 - 2i = \sqrt{5} \cdot e^{i \cdot \left(-\arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + 2k\pi\right)}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und das liefert

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = 1 - 2i\} = \left\{ \sqrt[6]{5} \cdot e^{\frac{i}{3} \cdot \left(2\pi k - \arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\right)} \in \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

f) $z^4 = 24 + 7i$

$$\left\{ \sqrt{5} \cdot e^{\frac{i}{4} \cdot \left(2\pi k + \arccos\left(\frac{24}{25}\right)\right)} \in \mathbb{C} \mid k \in \{0; 1; 2; 3\} \right\}$$

Lösung:

Es sind $\operatorname{Re}(24 + 7i) = 24 > 0$ und $\operatorname{Im}(24 + 7i) = 7 > 0$.

Damit folgt $|24 + 7i| = \sqrt{24^2 + 7^2} = \sqrt{576 + 49} = \sqrt{625} = 25$ und $\arg(24 + 7i) = \arccos\left(\frac{24}{25}\right)$.

Also ist $24 + 7i = 25 \cdot e^{i \cdot \left(\arccos\left(\frac{24}{25}\right) + 2k\pi\right)}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und das liefert

$$\begin{aligned} \{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = 24 + 7i\} &= \left\{ \sqrt[4]{25} \cdot e^{\frac{i}{4} \cdot \left(2\pi k + \arccos\left(\frac{24}{25}\right)\right)} \in \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \\ &= \left\{ \sqrt{5} \cdot e^{\frac{i}{4} \cdot \left(2\pi k + \arccos\left(\frac{24}{25}\right)\right)} \in \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}. \end{aligned}$$

g) $z^3 = \sqrt{3} - i$

$$\left\{ \sqrt[3]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{18}\right)} \in \mathbb{C} \mid k \in \{0; 1; 2\} \right\}$$

Lösung:

Es sind $\operatorname{Re}(\sqrt{3} - i) = \sqrt{3} > 0$ und $\operatorname{Im}(\sqrt{3} - i) = -1 < 0$.

Damit folgt

$$|\sqrt{3} - i| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$$

und

$$\arg(\sqrt{3} - i) = -\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$

Also ist $\sqrt{3} - i = 2 \cdot e^{i \cdot \left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und das liefert

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = \sqrt{3} - i\} = \left\{ \sqrt[3]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{18}\right)} \in \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

h) $z^2 = -3 + 4i$

$$\{1 + 2i; -1 - 2i\}$$

Lösung (kartesisch):

Seien $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$ mit $(x + i \cdot y)^2 = -3 + 4 \cdot i$.

Wegen $(x + i \cdot y)^2 = x^2 - y^2 + 2xy \cdot i$ folgt dann

$$x^2 - y^2 = -3 \quad \text{und} \quad 2xy = 4.$$

Mit der zweiten Gleichung folgt $x \neq 0 \neq y$ und so kann man diese Gleichung durch $2y$ dividieren, um sie anschließend in die erste Gleichung einzusetzen. Man erhält

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - y^2 = -3 \quad \text{bzw.} \quad 4 - y^4 = -3y^2.$$

Dies lässt sich umformen zu

$$\begin{aligned} 0 &= (y^2)^2 - 2 \cdot y^2 \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 4 = (y^2 - \frac{3}{2})^2 - \frac{25}{4} \\ &= (y^2 - \frac{3}{2} - \frac{5}{2}) \cdot (y^2 - \frac{3}{2} + \frac{5}{2}) = (y^2 - 4) \cdot (y^2 + 1) = (y - 2) \cdot (y + 2) \cdot (y^2 + 1). \end{aligned}$$

Wegen $y \in \mathbb{R}$ ist $y^2 + 1 \geq 0 + 1 = 1 > 0$ und deshalb sind die beiden Lösungen der obigen Gleichung gerade $y_1 = 2$ und $y_2 = -2$.

Setzt man diese in die Gleichung $2xy = 4$ ein, so ergibt sich $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$.

Also ist $\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = -3 + 4 \cdot i\} = \{1 + 2i; -1 - 2i\}$.

i) $z^3 + z^2 = 2$

$$\{1; -1 - i; -1 + i\}$$

Lösung:

Wegen $1^3 + 1^2 = 1 + 1 = 2$ ist $z = 1$ eine Lösung der Gleichung. Es gilt für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{array}{l} \frac{z^3 + z^2 - (z^3 - z^2)}{2z^2} \\ \frac{-(2z^3 - 2z)}{2z} \\ \frac{-(2z - 2)}{2} \end{array} \quad \begin{array}{l} = (z - 1) \cdot (z^2 + 2z + 2) + 2 \\ = (z - 1) \cdot (z^2 + 2 \cdot z \cdot 1 + 1^2 - 1 + 2) + 2 \\ = (z - 1) \cdot ((z + 1)^2 + 1) + 2 \\ = (z - 1) \cdot (z + 1 + i) \cdot (z + 1 - i) + 2 \\ = (z - 1) \cdot (z - (-1 - i)) \cdot (z - (-1 + i)) + 2. \end{array}$$

Also ist $\{z \in \mathbb{C} \mid z^3 + z^2 = 2\} = \{1; -1 - i; -1 + i\}$.

j) $z^2 + (1 - 2i) \cdot z = 2i$

$\{2i; -1\}$

Lösung:

Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $z^2 + (1 - 2i) \cdot z = 2i \iff z^2 + (1 - 2i) \cdot z - 2i = 0$ und

$$\begin{aligned} z^2 + (1 - 2i) \cdot z - 2i &= z^2 + 2 \cdot z \cdot \left(\frac{1}{2} - i\right) + \left(\frac{1}{2} - i\right)^2 - \left(\frac{1}{4} - i - 1\right) - 2i \\ &= \left(z + \frac{1}{2} - i\right)^2 - \left(\frac{1}{4} + i - 1\right) = \left(z + \frac{1}{2} - i\right)^2 - \left(\frac{1}{2} + i\right)^2 \\ &= \left(z + \frac{1}{2} - i - \left(\frac{1}{2} + i\right)\right) \cdot \left(z + \frac{1}{2} - i + \left(\frac{1}{2} + i\right)\right) = (z - 2i) \cdot (z + 1). \end{aligned}$$

Also ist $\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 + (1 - 2i) \cdot z = 2i\} = \{2i; -1\}$.

k) $z^3 - (3 + 6i) \cdot z^2 + (-8 + 12i) \cdot z + 10 = 0$ & $z \neq 1 + i$

$$\{1 + i; 1 + 2i; 1 + 3i\}$$

Lösung:

Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} & \frac{z^3 - (3 + 6i) \cdot z^2 + (-8 + 12i) \cdot z + 10}{-(z^3 - (1 + i) \cdot z^2)} = (z - 1 - i) \\ & \frac{- (2 + 5i) \cdot z^2 + (-8 + 12i) \cdot z + 10}{-(- (2 + 5i) \cdot z^2 + (2 + 5i + 2i - 5) \cdot z)} \cdot (z^2 - (2 + 5i) \cdot z - 5 + 5i) \\ & \frac{-(- (2 + 5i) \cdot z^2 + (2 + 5i + 2i - 5) \cdot z)}{(-5 + 5i) \cdot z + 10} \\ & \frac{-((-5 + 5i) \cdot z + 5 - 5i + 5i + 5)}{0} \end{aligned}$$

Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} z^2 - (2 + 5i) \cdot z - 5 + 5i &= z^2 - 2 \cdot z \cdot \left(1 + \frac{5}{2} \cdot i\right) + \left(1 + \frac{5}{2} \cdot i\right)^2 - \left(1 + 5i - \frac{25}{4}\right) - 5 + 5i \\ &= \left(z - 1 - \frac{5}{2} \cdot i\right)^2 + \frac{1}{4} \\ &= \left(z - 1 - \frac{5}{2} \cdot i - \frac{i}{2}\right) \cdot \left(z - 1 - \frac{5}{2} \cdot i + \frac{i}{2}\right) \\ &= (z - 1 - 3i) \cdot (z - 1 - 2i). \end{aligned}$$

Also ist $\{z \in \mathbb{C} \mid z^3 - (3 + 6i) \cdot z^2 + (-8 + 12i) \cdot z + 10 = 0\} = \{1 + i; 1 + 2i; 1 + 3i\}$.



KomplZahlen/GlgnAlg/Ag_KomplZahlen_PolynomeFaktorisieren.tex

Aufgabe 87.416 (Zerlegung in Linearfaktoren)

Schreiben Sie die Polynome als Produkte von Linearfaktoren! Hierzu ist bis auf im letzten Aufgabenteil jeweils eine Nullstelle angegeben.

a) $f(x) := 2x^3 + x^2 + 6x + 3$ mit $f(\sqrt{3} \cdot i) = 0$

$$2 \cdot (x - \sqrt{3} \cdot i) \cdot (x + \sqrt{3} \cdot i) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Lösung: Da $\sqrt{3} \cdot i$ eine Nullstelle des Polynoms ist und das Polynom nur reelle Koeffizienten hat, ist auch $-\sqrt{3} \cdot i$ eine Nullstelle. Damit kann eine Polynomdivision durch $(x - \sqrt{3} \cdot i) \cdot (x + \sqrt{3} \cdot i) = x^2 + 3$ durchgeführt werden, um die dritte Nullstelle zu berechnen:

$$\begin{array}{r} f(x) = 2x^3 + x^2 + 6x + 3 = (x^2 + 3) \cdot (2x + 1) \\ \underline{-(2x^3 \quad + 6x)} \\ \quad x^2 \quad + 3 \\ \underline{-(x^2 \quad + 3)} \\ \quad \quad 0 \end{array}$$

Die dritte Nullstelle kann dann berechnet werden aus

$$2x + 1 = 0 \iff 2x = -1 \iff x = -\frac{1}{2}.$$

Für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt also $f(x) = 2 \cdot (x - \sqrt{3} \cdot i) \cdot (x + \sqrt{3} \cdot i) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)$.

b) $g(x) := 3x^3 + 2x^2 + 12x + 8$ mit $g(-2i) = 0$

$$3 \cdot (x + 2i) \cdot (x - 2i) \cdot \left(x + \frac{2}{3}\right)$$

Lösung: Da $-2i$ eine Nullstelle des Polynoms ist und das Polynom nur reelle Koeffizienten hat, ist auch $2i$ eine Nullstelle. Damit kann eine Polynomdivision durch $(x + 2i) \cdot (x - 2i) = x^2 + 4$ durchgeführt werden, um die dritte Nullstelle zu berechnen:

$$\begin{array}{r} g(x) = 3x^3 + 2x^2 + 12x + 8 = (x^2 + 4) \cdot (3x + 2) \\ \underline{-(3x^3 \quad + 12x)} \\ \quad 2x^2 \quad + 8 \\ \underline{-(2x^2 \quad + 8)} \\ \quad \quad 0 \end{array}$$

Die dritte Nullstelle kann dann berechnet werden aus

$$3x + 2 = 0 \iff 3x = -2 \iff x = -\frac{2}{3}.$$

Für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt also $g(x) = 3 \cdot (x + 2i) \cdot (x - 2i) \cdot \left(x + \frac{2}{3}\right)$.

c) $h(x) := x^4 - 3x^2 - 4$ mit $h(-2) = 0$

$$(x+2) \cdot (x-2) \cdot (x+i) \cdot (x-i)$$

Lösung mit quadratischer Ergänzung: Für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} h(x) &= x^4 - 3x^2 - 4 = (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 4 \\ &= \left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = \left(x^2 - \frac{3}{2} - \frac{5}{2}\right) \cdot \left(x^2 - \frac{3}{2} + \frac{5}{2}\right) \\ &= (x^2 - 4) \cdot (x^2 + 1) = (x+2) \cdot (x-2) \cdot (x+i) \cdot (x-i). \end{aligned}$$

Lösung mit Polynomdivision: Eine Polynomdivision liefert

$$\begin{array}{r} h(x) = x^4 \quad \quad - 3x^2 \quad \quad - 4 \\ \underline{-(x^4 + 2x^3)} \\ \quad -2x^3 - 3x^2 \quad - 4 \\ \underline{-(-2x^3 - 4x^2)} \\ \quad \quad x^2 \quad - 4 \\ \underline{-(x^2 + 2x)} \\ \quad \quad \quad -2x - 4 \\ \underline{-(-2x - 4)} \\ \quad \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} h(1) &= (1+2) \cdot (1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 - 2) = 3 \cdot (1 - 2 + 1 - 2) = 3 \cdot (-2) = -6 \neq 0, \\ h(-1) &= (-1+2) \cdot ((-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + (-1) - 2) = 1 \cdot (-1 - 2 - 1 - 2) = -6 \neq 0 \\ \text{und} \quad h(2) &= (2+2) \cdot (2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2 - 2) = 4 \cdot (8 - 8 + 2 - 2) = 4 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Damit kann man die nächste Polynomdivision durchführen

$$\begin{array}{r} h(x) = (x+2) \cdot (x^3 - 2x^2 + x - 2) = (x+2) \cdot (x-2) \cdot (x^2 + 1) \\ \underline{-(x^3 - 2x^2)} \\ \quad \quad x - 2 \\ \underline{-(x-2)} \\ \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

Die weiteren Nullstellen des Polynoms können durch Äquivalenzumformungen berechnet werden

$$x^2 + 1 = 0 \iff x^2 = -1 \iff x = -i \text{ oder } x = i.$$

Für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt also $h(x) = (x+2) \cdot (x-2) \cdot (x+i) \cdot (x-i)$

d) $p(x) := x^4 - 16$

$$(x+2) \cdot (x-2) \cdot (x+2i) \cdot (x-2i)$$

Lösung mit der dritten binomischen Formel: Für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} p(x) &= x^4 - 16 = (x^2)^2 - 4^2 = (x^2 - 4) \cdot (x^2 + 4) = (x^2 - 4) \cdot (x^2 - (-4)) \\ &= (x^2 - 2^2) \cdot (x^2 - (2i)^2) = (x+2) \cdot (x-2) \cdot (x+2i) \cdot (x-2i). \end{aligned}$$

Lösung mit Äquivalenzumformungen: Die Nullstellen ergeben sich aus ein paar einfachen Äquivalenzumformungen. Für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned}x^4 - 16 = 0 &\iff x^4 = 16 \iff x^2 = 4 \text{ oder } x^2 = -4 \\&\iff x = -2 \text{ oder } x = 2 \text{ oder } x = -2i \text{ oder } x = 2i.\end{aligned}$$

Für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt also $p(x) = (x + 2) \cdot (x - 2) \cdot (x + 2i) \cdot (x - 2i)$.



KomplZahlen/GlgnTransz/Ag_KomplTranszGlgn_ErsteExpUndLogarithmusGlgn.tex

Aufgabe 88.417 (komplexer Logarithmus)

SPF

Sei $\text{Ln}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $z \mapsto \text{Ln}(z) := \ln(|z|) + i \cdot \arg(z)$ der Hauptzweig des komplexen Logarithmus. Lösen Sie die folgenden Gleichungen in den komplexen Zahlen!

a) $\exp(z) = 2 - \sqrt{12} \cdot i$

$$2 \cdot \ln(2) + i \cdot \left(2k\pi - \frac{\pi}{3}\right) \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

Lösung:

Es handelt sich um eine einfache Exponentialgleichung

$$\exp(z) = 2 - \sqrt{12} \cdot i \iff z = \text{Ln}\left(2 - \sqrt{12} \cdot i\right) + i \cdot 2k\pi \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}.$$

Dabei gilt $\text{Ln}(2 - \sqrt{12} \cdot i) = \ln(|2 - \sqrt{12} \cdot i|) + i \cdot \arg(2 - \sqrt{12} \cdot i)$. Wir berechnen also

$$\begin{aligned} |2 - \sqrt{12} \cdot i| &= \sqrt{2^2 + \sqrt{12}^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4 \\ \text{und} \quad \arg(2 - \sqrt{12} \cdot i) &\stackrel{\text{Im}(2 - \sqrt{12} \cdot i) < 0}{=} -\arccos\left(\frac{2}{4}\right) = -\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt wegen $\ln(4) = \ln(2^2) = 2 \cdot \ln(2)$

$$\left\{z \in \mathbb{C} \mid \exp(z) = 2 - \sqrt{12} \cdot i\right\} = \left\{2 \cdot \ln(2) + i \cdot \left(2k\pi - \frac{\pi}{3}\right) \in \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

b) $\exp(-i \cdot z) = 5 + 12 \cdot i$

$$2k\pi - \arccos\left(\frac{5}{13}\right) + i \cdot \ln(13) \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

Lösung:

Es handelt sich im Wesentlichen um eine Exponentialgleichung

$$\begin{aligned} \exp(-i \cdot z) = 5 + 12 \cdot i &\iff -i \cdot z = \text{Ln}(5 + 12 \cdot i) + i \cdot 2k\pi \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z} \\ &\stackrel{\cdot i}{\iff} z = -2k\pi + i \cdot \text{Ln}(5 + 12 \cdot i) \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Dabei gilt $\text{Ln}(5 + 12 \cdot i) = \ln(|5 + 12 \cdot i|) + i \cdot \arg(5 + 12 \cdot i)$. Wir berechnen also

$$\begin{aligned} |5 + 12 \cdot i| &= \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13 \\ \text{und} \quad \arg(5 + 12 \cdot i) &\stackrel{\text{Im}(5 + 12 \cdot i) > 0}{=} \arccos\left(\frac{5}{13}\right). \end{aligned}$$

Insgesamt folgt wegen $i \cdot (\ln(13) + i \cdot \arccos(\frac{5}{13})) = i \cdot \ln(13) - \arccos(\frac{5}{13})$

$$\left\{z \in \mathbb{C} \mid \exp(-i \cdot z) = 5 + 12 \cdot i\right\} = \left\{2\ell\pi - \arccos\left(\frac{5}{13}\right) + i \cdot \ln(13) \in \mathbb{C} \mid \ell \in \mathbb{Z}\right\}.$$

c) $\text{Ln}(z^2 + 2 - \sqrt{3} \cdot i) = \ln(6) + i \cdot \frac{\pi}{3}$

$$2 + \sqrt{3} \cdot i \text{ oder } -2 - \sqrt{3} \cdot i$$

Lösung:

Anwenden der Exponentialfunktion auf beide Seiten der Gleichung liefert

$$\begin{aligned}\operatorname{Ln}\left(z^2+2-\sqrt{3}\cdot i\right) &= \ln(6)+i\cdot\frac{\pi}{3} \iff z^2+2-\sqrt{3}\cdot i = e^{\ln(6)+i\cdot\frac{\pi}{3}} \\ \iff z^2+2-\sqrt{3}\cdot i &= e^{\ln(6)}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{3}} \iff z^2+2-\sqrt{3}\cdot i = 6\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ \iff z^2+2-\sqrt{3}\cdot i &= 6\cdot\left(\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \iff z^2+2-\sqrt{3}\cdot i = 3+i\cdot 3\cdot\sqrt{3} \\ \iff z^2 &= 1+i\cdot 4\cdot\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $(a+b\cdot i)^2 = 1+i\cdot 4\cdot\sqrt{3}$. Wegen $(a+b\cdot i)^2 = a^2+2ab\cdot i-b^2$ liefert ein Vergleich von Real- und Imaginärteil das nicht-lineare Gleichungssystem

$$a^2-b^2=1 \quad \text{und} \quad 2ab=4\cdot\sqrt{3}.$$

Die zweite Gleichung liefert $a \neq 0 \neq b$ und $b = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{a}$.

Einsetzen in die erste Gleichung liefert

$$a^2 - \left(\frac{2\cdot\sqrt{3}}{a}\right)^2 = 1 \iff a^2 - \frac{4\cdot 3}{a^2} = 1 \xrightarrow{a \neq 0} a^4 - 12 = a^2 \iff a^4 - a^2 - 12 = 0.$$

Eine quadratische Ergänzung liefert

$$\begin{aligned}a^4 - a^2 - 12 &= (a^2)^2 - 2\cdot a^2\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 12 \\ &= \left(a^2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} = \left(a^2 - \frac{1}{2} - \frac{7}{2}\right)\cdot\left(a^2 - \frac{1}{2} + \frac{7}{2}\right) \\ &= (a^2 - 4)\cdot(a^2 + 3) = (a-2)\cdot(a+2)\cdot(a^2 + 3).\end{aligned}$$

Für $a = 2$ folgt $b = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ und für $a = -2$ folgt $b = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$.

Insgesamt folgt $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Ln}(z^2+2-\sqrt{3}\cdot i) = \ln(6)+i\cdot\frac{\pi}{3}\} = \{2+\sqrt{3}\cdot i; -2-\sqrt{3}\cdot i\}$.

d) $\exp(4z-3+i) = -e^5\cdot i$

$$2 + \frac{i}{8} \cdot ((4k-1) \cdot \pi - 2) \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

Lösung:

Mit $-i = e^{-\frac{\pi}{2}\cdot i}$ und der $2\pi i$ -Periodizität der Exponentialfunktion ergibt sich

$$\begin{aligned}\exp(4z-3+i) &= -e^5\cdot i \iff \exp(4z-3+i) = e^5\cdot(-i) \iff \exp(4z-3+i) = e^5\cdot e^{-\frac{\pi}{2}\cdot i} \\ \iff \exp(4z-3+i) &= e^{5-\frac{\pi}{2}\cdot i} \iff 4z-3+i = 5-\frac{\pi}{2}\cdot i + 2k\pi\cdot i \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \\ \iff 4z &= 8+i\cdot\left(2k\pi-\frac{\pi}{2}-1\right) \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \iff z = 2 + \frac{i}{8}\cdot((4k-1)\cdot\pi-2) \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$



KomplZahlen/GlgnTransz/Ag_KomplTranszGlgn_ExpGlgnEinstieg.tex

Aufgabe 88.418 (Einfache Gleichungen mit der komplexen Exponentialfunktion)

Lösung:

Wir verwenden für gegebenes $w \in \mathbb{C}$ stets die Lösungsformel

$$\{z \in \mathbb{C} \mid e^z = w\} = \{\ln(w) + 2\pi ki \in \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\ln(|w|) + i\cdot(\arg(w) + 2\pi k) \in \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

- a) Bestimmen Sie jeweils alle Lösungen der angegebenen Gleichungen und skizzieren Sie diese in der komplexen Ebene!

(i) $e^z = 1 + i$

$$\frac{1}{2} \cdot \ln(2) + i\pi \cdot \left(2k + \frac{1}{4}\right) \text{ mit } k \in \mathbb{Z}.$$

Lösung:

Es gilt $|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$ und $\arg(1 + i) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Damit folgt

$$\begin{aligned} \{z \in \mathbb{C} \mid e^z = 1 + i\} &= \{\ln(|1 + i|) + i \cdot (\arg(1 + i) + 2\pi k) \in \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \left\{ \ln(\sqrt{2}) + i \cdot \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) \in \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{2} \cdot \ln(2) + i\pi \cdot \left(2k + \frac{1}{4}\right) \in \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}. \end{aligned}$$

(ii) $2i \cdot e^w = (1 - i)^2$

$$i\pi \cdot (2k + 1) \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

Lösung:

Es gilt $(1 - i)^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$. Wegen $|-1| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = \sqrt{1 + 0} = \sqrt{1} = 1$ und $\arg(-1) = \arccos\left(\frac{-1}{1}\right) = \arccos(-1) = \pi$ folgt also

$$\begin{aligned} \{w \in \mathbb{C} \mid 2i \cdot e^w = (1 - i)^2\} &= \{w \in \mathbb{C} \mid 2i \cdot e^w = -2i\} = \{w \in \mathbb{C} \mid e^w = -1\} \\ &= \{\ln(|-1|) + i \cdot (\arg(-1) + 2\pi k) \in \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\ln(1) + i \cdot (\pi + 2\pi k) \in \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{i\pi \cdot (2k + 1) \in \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

(iii) $i + e^s = \sqrt{3}$

$$\ln(2) + i\pi \cdot \left(2k - \frac{1}{6}\right) \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

Lösung:

Mit $|\sqrt{3} - i| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$

und $\arg(\sqrt{3} - i) = -\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$ folgt

$$\begin{aligned} \{s \in \mathbb{C} \mid i + e^s = \sqrt{3}\} &= \{s \in \mathbb{C} \mid e^s = \sqrt{3} - i\} \\ &= \left\{ \ln(|\sqrt{3} - i|) + i \cdot \left(\arg(\sqrt{3} - i) + 2\pi k\right) \in \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \\ &= \left\{ \ln(2) + i \cdot \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right) \in \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \\ &= \left\{ \ln(2) + i\pi \cdot \left(2k - \frac{1}{6}\right) \in \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}. \end{aligned}$$

(iv) $-e^{iz} = 1$

$$\pi \cdot (2k + 1) \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

Lösung:

Mit $|-1| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = \sqrt{1 + 0} = \sqrt{1} = 1$ und $\arg(-1) = \arccos\left(\frac{-1}{1}\right) = \arccos(-1) = \pi$ folgt

$$\begin{aligned} \{z \in \mathbb{C} \mid -e^{iz} = 1\} &= \{z \in \mathbb{C} \mid e^{iz} = -1\} \\ &= \left\{ \frac{1}{i} \cdot (\ln(|-1|) + i \cdot (\arg(-1) + 2\pi k)) \in \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \\ &= \{-i \cdot (\ln(1) + i \cdot (\pi + 2\pi k)) \in \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\pi \cdot (2k + 1) \in \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

(v) $e^{iw} = -i$

$$\frac{\pi}{2} \cdot (4k - 1) \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

Lösung:

Mit $|-i| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = \sqrt{0+1} = \sqrt{1} = 1$

und $\arg(-i) = -\arccos\left(\frac{0}{1}\right) = -\arccos(0) = -\frac{\pi}{2}$ folgt

$$\begin{aligned}\{w \in \mathbb{C} \mid e^{iw} = -i\} &= \left\{ \frac{1}{i} \cdot (\ln(|-i|) + i \cdot (\arg(-i) + 2\pi k)) \in \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \\ &= \left\{ -i \cdot (\ln(1) + i \cdot (-\frac{\pi}{2} + 2\pi k)) \in \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \\ &= \left\{ \frac{\pi}{2} \cdot (4k - 1) \in \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.\end{aligned}$$

(vi) $\operatorname{Re}(e^{is}) = \operatorname{Im}(e^{is}) = -1$

$$\pi \cdot (2k - \frac{3}{4}) - i \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln(2) \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

Lösung:

Mit $|-1-i| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

und $\arg(-1-i) = -\arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = -\left(\pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = -\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3\pi}{4}$ folgt

$$\begin{aligned}\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(e^{is}) = \operatorname{Im}(e^{is}) = -1\} &= \{s \in \mathbb{C} \mid e^{is} = -1-i\} \\ &= \left\{ \frac{1}{i} \cdot (\ln(|-1-i|) + i \cdot (\arg(-1-i) + 2\pi k)) \in \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \\ &= \left\{ -i \cdot (\ln(\sqrt{2}) + i \cdot (-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k)) \in \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \\ &= \left\{ 2\pi k - \frac{3\pi}{4} - i \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln(2) \in \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.\end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen!

(i) $e^{2z+3i} = -1-i$

$$z = \frac{1}{4} \cdot \ln(2) + i \cdot \left(\pi k - \frac{3\pi}{8} - \frac{3}{2}\right) \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \text{ beliebig.}$$

Lösung:

Für alle $z \in \mathbb{C}$ folgt mit $|-1-i| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

und $\arg(-1-i) = -\arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = -\left(\pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = -\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3\pi}{4}$

$$\begin{aligned}e^{2z+3i} = -1-i &\iff 2z + 3i = \ln(|-1-i|) + i \cdot (\arg(-1-i) + 2\pi k) \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \\ &\iff 2z = \ln(\sqrt{2}) + i \cdot \left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right) - 3i \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \\ &\iff z = \frac{1}{4} \cdot \ln(2) + i \cdot \left(k\pi - \frac{3\pi}{8} - \frac{3}{2}\right).\end{aligned}$$

(ii) $e^{w^2} = -1$

$$w = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2\pi \cdot (2k+1)} \cdot \left((-1)^\ell + (-1)^m \cdot i\right) \text{ mit } k \in \mathbb{N}_0, \ell \in \{0;1\} \text{ und } m \in \{0;1\} \text{ beliebig.}$$

Lösung:

Für alle $w \in \mathbb{C}$ folgt mit $|-1| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = \sqrt{1+0} = \sqrt{1} = 1$

und $\arg(-1) = \arccos\left(\frac{-1}{1}\right) = \arccos(-1) = \pi$

$$\begin{aligned}e^{w^2} = -1 &\iff w^2 = \ln(|-1|) + i \cdot (\arg(-1) + 2\pi k) \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \\ &\iff w^2 = \ln(1) + i \cdot (\pi + 2\pi k) - 3i \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \\ &\iff w^2 = i\pi \cdot (2k+1) \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Setzt man $a := \operatorname{Re}(w)$ und $b := \operatorname{Im}(w)$, so folgt $a^2 - b^2 + i \cdot 2ab = i\pi \cdot (2k + 1)$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.
Ein Vergleich von Real- und Imaginärteil liefert $a^2 - b^2 = 0$ und $2ab = \pi \cdot (2k + 1)$.

Fall 1 ($k \geq 0$): Ist $k \in \mathbb{N}_0$, so haben a und b wegen der zweiten Gleichung gleiche Vorzeichen. Mit der ersten Gleichung folgt $b = a$.

Setzt man das in die zweite Gleichung ein, so ergibt sich $2a^2 = \pi \cdot (2k + 1)$, sprich

$$a = b = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2\pi \cdot (2k + 1)} \quad \text{oder} \quad a = b = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2\pi \cdot (2k + 1)}.$$

Fall 2 ($k < 0$): Für $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$ gibt es ein $\ell \in \mathbb{N}_0$ mit $k = -\ell - 1$. Außerdem liefert die zweite Gleichung, dass a und b unterschiedliche Vorzeichen haben. Mit der ersten Gleichung ergibt sich $b = -a$.

Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt $-2a^2 = \pi \cdot (2 \cdot (-\ell - 1) + 1)$, sprich

$$a = -b = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2\pi \cdot (2\ell + 1)} \quad \text{oder} \quad a = -b = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2\pi \cdot (2\ell + 1)}.$$

Insgesamt ergeben sich Lösungen in vier verschiedenen Strukturen

$$\begin{aligned} e^{w^2} = -1 &\iff w = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2\pi \cdot (2k + 1)} \cdot (1 + i) \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N}_0 \\ &\text{oder} \quad w = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2\pi \cdot (2k + 1)} \cdot (-1 - i) \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N}_0 \\ &\text{oder} \quad w = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2\pi \cdot (2k + 1)} \cdot (1 - i) \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N}_0 \\ &\text{oder} \quad w = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2\pi \cdot (2k + 1)} \cdot (-1 + i) \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

$$(iii) \quad e^{e^s} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i$$

$$s = \ln\left(\pi \cdot \left|2k + \frac{3}{4}\right|\right) + i\pi \cdot \left(2\ell + \frac{2k+1}{|2k+1|} \cdot \frac{1}{2}\right) \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z} \text{ und } \ell \in \mathbb{Z} \text{ beliebig.}$$

Lösung:

Für alle $s \in \mathbb{C}$ folgt mit $\left|-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i\right| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{1} = 1$

und $\arg\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i\right) = \arccos\left(\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}\right) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$$\begin{aligned} e^{e^s} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i \\ \iff e^s &= \ln\left(\left|-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i\right|\right) + i \cdot \left(\arg\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i\right) + 2\pi k\right) \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z} \\ \iff e^s &= \ln(1) + i \cdot \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right) \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z} \\ \iff e^s &= i\pi \cdot \left(2k + \frac{3}{4}\right) \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist

$$\left|i\pi \cdot \left(2k + \frac{3}{4}\right)\right| = |i| \cdot |\pi| \cdot \left|2k + \frac{3}{4}\right| = \pi \cdot \left|2k + \frac{3}{4}\right|.$$

Fall 1 ($k \geq 0$): Ist $k \in \mathbb{N}_0$, so gilt $\operatorname{Re}\left(i\pi \cdot \left(2k + \frac{3}{4}\right)\right) = 0$ und $\operatorname{Im}\left(i\pi \cdot \left(2k + \frac{3}{4}\right)\right) > 0$, also $\arg\left(i\pi \cdot \left(2k + \frac{3}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$ und für alle $s \in \mathbb{C}$ folgt

$$\begin{aligned} e^{e^s} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i &\iff e^s = i\pi \cdot \left(2k + \frac{3}{4}\right) \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N}_0 \\ &\iff s = \ln\left(\left|i\pi \cdot \left(2k + \frac{3}{4}\right)\right|\right) + i \cdot \left(\arg\left(i\pi \cdot \left(2k + \frac{3}{4}\right)\right) + 2\pi\ell\right) \\ &\quad \text{für ein } k \in \mathbb{N}_0 \text{ und ein } \ell \in \mathbb{Z} \\ &\iff s = \ln\left(\pi \cdot \left|2k + \frac{3}{4}\right|\right) + i \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\ell\right) \\ &\quad \text{für ein } k \in \mathbb{N}_0 \text{ und ein } \ell \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Fall 2 ($k < 0$): Ist $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$, so gilt $\operatorname{Re}(i\pi \cdot (2k + \frac{3}{4})) = 0$ und $\operatorname{Im}(i\pi \cdot (2k + \frac{3}{4})) < 0$, also $\arg(i\pi \cdot (2k + \frac{3}{4})) = -\frac{\pi}{2}$ und für alle $s \in \mathbb{C}$ folgt

$$\begin{aligned} e^{e^s} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i &\iff e^s = i\pi \cdot (2k + \frac{3}{4}) \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0 \\ &\iff s = \ln(|i\pi \cdot (2k + \frac{3}{4})|) + i \cdot (\arg(i\pi \cdot (2k + \frac{3}{4})) + 2\pi\ell) \\ &\quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0 \text{ und ein } \ell \in \mathbb{Z} \\ &\iff s = \ln(\pi \cdot |2k + \frac{3}{4}|) + i \cdot (-\frac{\pi}{2} + 2\pi\ell) \\ &\quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0 \text{ und ein } \ell \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Da $\frac{2k+1}{|2k+1|}$ für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ das Vorzeichen von k und für $k = 0$ gerade 1 liefert, können beide Fälle kompakt zusammengefasst werden als

$$e^{e^s} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i \iff \ln(\pi \cdot |2k + \frac{3}{4}|) + i\pi \cdot \left(2\ell + \frac{2k+1}{|2k+1|} \cdot \frac{1}{2}\right) \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \text{ und ein } \ell \in \mathbb{Z}.$$



KomplZahlen/GlgnTransz/Ag_KomplTranszGlgn_TrigHypGlgnFastOhneExpKorrekturfaktor.tex

Aufgabe 88.419 (komplexe Gleichungen lösen)

spf

Finden Sie alle komplexen Zahlen, die die folgenden Gleichungen erfüllen! *Hinweis:* $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

a) $17 \cdot \sin(z) + 15i \cdot \cos(z) = 4$

$$\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi - i \cdot 2 \cdot \ln(2)$$

Lösung:

Für alle $z \in \mathbb{C}$ ergibt sich wegen $\sin(z) = \frac{1}{2i} \cdot (e^{iz} - e^{-iz})$ und $\cos(z) = \frac{1}{2} \cdot (e^{iz} + e^{-iz})$

$$\begin{aligned} 17 \cdot \sin(z) + 15i \cdot \cos(z) = 4 &\iff 17 \cdot \frac{1}{2i} \cdot (e^{iz} - e^{-iz}) + 15i \cdot \frac{1}{2} \cdot (e^{iz} + e^{-iz}) = 4 \\ &\stackrel{\cdot i}{\iff} e^{iz} \cdot \left(\frac{17}{2} - \frac{15}{2}\right) + e^{-iz} \cdot \left(-\frac{17}{2} - \frac{15}{2}\right) = 4i \iff e^{iz} - 16e^{-iz} = 4i \\ &\stackrel{\cdot e^{iz}}{\iff} (e^{iz})^2 - 2 \cdot e^{iz} \cdot 2i + (2i)^2 - (-4) - 16 = 0 \iff (e^{iz} - 2i)^2 - 12 = 0 \\ &\stackrel{12=4 \cdot 3}{\iff} \left(e^{iz} - \left(2 \cdot \sqrt{3} + 2i\right)\right) \cdot \left(e^{iz} - \left(-2 \cdot \sqrt{3} + 2i\right)\right) = 0. \end{aligned}$$

Mit $|2 \cdot \sqrt{3} + 2i| = |-2 \cdot \sqrt{3} + 2i| = \sqrt{(\pm 2 \cdot \sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4$ und

$\arg(2 \cdot \sqrt{3} + 2i) = \arccos\left(\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{4}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$, also

$\arg(-2 \cdot \sqrt{3} + 2i) = -\arg(-2 \cdot \sqrt{3} - 2i) = \pi - \arg(2 \cdot \sqrt{3} + 2i) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$,
sowie $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$ und $\ln(4) = \ln(2^2) = 2 \cdot \ln(2)$ folgt

$$\begin{aligned} 17 \cdot \sin(z) + 15i \cdot \cos(z) = 4 &\iff e^{iz} = 2 \cdot \sqrt{3} + 2i \text{ oder } e^{iz} = -2 \cdot \sqrt{3} + 2i \\ &\iff iz = \ln\left(|2 \cdot \sqrt{3} + 2i|\right) + i \cdot \left(\arg(2 \cdot \sqrt{3} + 2i) + 2k\pi\right) \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \\ &\quad \text{oder } iz = \ln\left(|-2 \cdot \sqrt{3} + 2i|\right) + i \cdot \left(\arg(-2 \cdot \sqrt{3} + 2i) + 2k\pi\right) \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \\ &\stackrel{\cdot (-i)}{\iff} z = -i \cdot \ln(4) + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \text{ oder } z = -i \cdot \ln(4) + \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \\ &\iff z = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi - i \cdot 2 \cdot \ln(2) \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

b) $5 \cdot \cosh(w) - (7 + 4i) \cdot \sinh(w) = 5 - 5i$

$$\frac{2}{3 \pm i} \cdot (\ln(2) + i \cdot \frac{\pi}{2}) + 2k\pi i$$

Lösung:

Für alle $w \in \mathbb{C}$ ergibt sich wegen $\sinh(w) = \frac{1}{2} \cdot (e^w - e^{-w})$ und $\cosh(w) = \frac{1}{2} \cdot (e^w + e^{-w})$

$$\begin{aligned} 5 \cdot \cosh(w) - (7 + 4i) \cdot \sinh(w) &= 5 - 5i \\ \iff 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot (e^w + e^{-w}) - (7 + 4i) \cdot \frac{1}{2} \cdot (e^w - e^{-w}) &= 5 - 5i \\ \iff e^w \cdot \left(\frac{5}{2} - \frac{7+4i}{2}\right) + e^{-w} \cdot \left(\frac{5}{2} + \frac{7+4i}{2}\right) &= 5 - 5i \iff (-1 - 2i) \cdot e^w + (6 + 2i) \cdot e^{-w} = 5 - 5i \\ \cdot (-1+2i) \iff 5 \cdot e^w + (-6 - 2i + 12i - 4) \cdot e^{-w} &= -5 + 5i + 10i + 10 \xleftrightarrow{\cdot \frac{1}{5}} e^w + (-2 + 2i) \cdot e^{-w} = 1 + 3i \\ \xleftrightarrow{\cdot e^w} (e^w)^2 - 2 \cdot e^w \cdot \frac{1+3i}{2} + \left(\frac{1+3i}{2}\right)^2 - \frac{1+6i-9}{4} - 2 + 2i &= 0 \iff \left(e^w - \frac{1+3i}{2}\right)^2 - \left(-\frac{i}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $(a + bi)^2 = 0 - \frac{1}{2} \cdot i$. Mit $(a + bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2$ und einem Vergleich von Real- und Imaginärteil folgt

$$a^2 - b^2 = 0 \quad \text{und} \quad 2ab = -\frac{1}{2}.$$

Die zweite Gleichung liefert $a \neq 0 \neq b$, $b = -\frac{1}{4a}$ und damit auch $a \cdot b < 0$.

Die erste Gleichung liefert $a^2 = b^2$, sprich $|a| = |b|$, was wegen $a \cdot b < 0$ zu $-a = b$ führt.

Durch Gleichsetzen erhält man $-a = -\frac{1}{4a}$ bzw. $a^2 = \frac{1}{4}$, sprich $a = \frac{1}{2}$ oder $a = -\frac{1}{2}$.

Mit $b = -a$ ergibt sich $(a = \frac{1}{2} \text{ und } b = -\frac{1}{2})$ oder $(a = -\frac{1}{2} \text{ und } b = \frac{1}{2})$.

Damit folgt für alle $w \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} 5 \cdot \cosh(w) - (7 + 4i) \cdot \sinh(w) &= 5 - 5i \iff \left(e^w - \frac{1+3i}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-i}{2}\right)^2 = 0 \\ \iff \left(e^w - \frac{1+3i-1+i}{2}\right) \cdot \left(e^w - \frac{1+3i+1-i}{2}\right) &= 0 \iff (e^w - 2i) \cdot (e^w - (1 + i)) = 0. \end{aligned}$$

Mit $|2i| = 2$, $\arg(2i) = \frac{\pi}{2}$, $|1 + i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ und $\arg(1 + i) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$ folgt

$$\begin{aligned} 5 \cdot \cosh(w) - (7 + 4i) \cdot \sinh(w) &= 5 - 5i \iff e^w = 2i \text{ oder } e^w = 1 + i \\ \iff w = \ln(2) + i \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \text{ oder } w &= \ln(\sqrt{2}) + i \cdot \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

c) $(1 - 2i) \cdot \cos(s) - (2 - i) \cdot \sin(s) + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot e^{-is} = 1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3}) \cdot i$

$$2k\pi - \frac{\pi}{12} \pm \frac{\pi}{4} - i \cdot \ln(2)$$

Lösung:

Für alle $s \in \mathbb{C}$ gilt wegen $\sin(s) = \frac{1}{2i} \cdot (e^{is} - e^{-is})$ und $\cos(s) = \frac{1}{2} \cdot (e^{is} + e^{-is})$

$$\begin{aligned} (1 - 2i) \cdot \cos(s) - (2 - i) \cdot \sin(s) + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot e^{-is} \\ &= (1 - 2i) \cdot \frac{1}{2} \cdot (e^{is} + e^{-is}) - (2 - i) \cdot \frac{1}{2i} \cdot (e^{is} - e^{-is}) + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot e^{-is} \\ &= e^{is} \cdot \left(\frac{1}{2} - i + i + \frac{1}{2}\right) + e^{-is} \cdot \left(\frac{1}{2} - i - i - \frac{1}{2} + 2 \cdot \sqrt{3}\right) = e^{is} + e^{-is} \cdot (2 \cdot \sqrt{3} - 2i). \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} \left(1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3}) \cdot i\right)^2 &= \left(1 + \sqrt{3}\right)^2 + 2 \cdot \left(1 + \sqrt{3}\right) \cdot \left(1 - \sqrt{3}\right) \cdot i - \left(1 - \sqrt{3}\right)^2 \\ &= 1 + 2 \cdot \sqrt{3} + 3 + 2 \cdot (1 - 3) \cdot i - 1 + 2 \cdot \sqrt{3} - 3 = 4 \cdot \sqrt{3} - 4 \cdot i \end{aligned}$$

folgt für alle $s \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
& (1 - 2i) \cdot \cos(s) - (2 - i) \cdot \sin(s) + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot e^{-is} = 1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3}) \cdot i \\
& \iff e^{is} + e^{-is} \cdot (2 \cdot \sqrt{3} - 2i) - (1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3}) \cdot i) = 0 \\
& \xLeftrightarrow{e^{is}} (e^{is})^2 - 2 \cdot e^{is} \cdot \frac{1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3}) \cdot i}{2} + \left(\frac{1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3}) \cdot i}{2} \right)^2 - \frac{(1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3}) \cdot i)^2}{4} + 2 \cdot \sqrt{3} - 2i \\
& \iff \left(e^{is} - \frac{1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3}) \cdot i}{2} \right)^2 - (\sqrt{3} - i - 2 \cdot \sqrt{3} + 2i) = 0 \\
& \iff \left(e^{is} - \frac{1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3}) \cdot i}{2} \right)^2 - (-\sqrt{3} + i) = 0.
\end{aligned}$$

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $(a + bi)^2 = -\sqrt{3} + i$. Mit $(a + bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2$ und einem Vergleich von Real- und Imaginärteil folgt

$$a^2 - b^2 = -\sqrt{3} \quad \text{und} \quad 2ab = 1.$$

Die zweite Gleichung liefert $a \neq 0 \neq b$ und $b = \frac{1}{2a}$.

In die erste Gleichung eingesetzt erhält man $a^2 - \frac{1}{4a^2} = -\sqrt{3}$ bzw.

$$\begin{aligned}
0 &= a^4 + \sqrt{3} \cdot a^2 - \frac{1}{4} = (a^2)^2 + 2 \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \left(a^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - 1 \\
&= \left(a^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right) \cdot \left(a^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right) = \left(a^2 - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) \cdot \left(a^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right).
\end{aligned}$$

Mit $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{3}{4} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ folgt also

$$0 = \left(a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 \right) \cdot \left(a^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right) = \left(a - \frac{\sqrt{3}-1}{2} \right) \cdot \left(a - \frac{-\sqrt{3}+1}{2} \right) \cdot \left(a^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right).$$

Wegen $a \in \mathbb{R}$ ergibt sich $a = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ oder $a = -\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Die zweite Gleichung liefert $b = \frac{1}{2a} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \pm \frac{\sqrt{3}+1}{3-1} = \pm \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ für $a = \pm \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Insgesamt folgt für alle $s \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
& (1 - 2i) \cdot \cos(s) - (2 - i) \cdot \sin(s) + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot e^{-is} = 1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3}) \cdot i \\
& \iff \left(e^{is} - \frac{1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3}) \cdot i}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2} \cdot i \right)^2 = 0 \\
& \iff \left(e^{is} - \frac{1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3}) \cdot i - \sqrt{3} + 1 - (\sqrt{3}+1) \cdot i}{2} \right) \cdot \left(e^{is} - \frac{1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3}) \cdot i + \sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3}+1) \cdot i}{2} \right) = 0 \\
& \iff \left(e^{is} - (1 - \sqrt{3} \cdot i) \right) \cdot \left(e^{is} - (\sqrt{3} + i) \right) = 0 \iff e^{is} = 1 - \sqrt{3} \cdot i \text{ oder } e^{is} = \sqrt{3} + i.
\end{aligned}$$

Mit $|1 - \sqrt{3} \cdot i| = |\sqrt{3} + i| = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$, $\arg(1 - \sqrt{3} \cdot i) = -\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$ und $\arg(\sqrt{3} + i) = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ ergibt sich wegen $-\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}
& (1 - 2i) \cdot \cos(s) - (2 - i) \cdot \sin(s) + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot e^{-is} = 1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3}) \cdot i \\
& \iff is = \ln(2) + i \cdot \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right) \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \text{ oder } is = \ln(2) + i \cdot \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi \right) \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \\
& \xLeftrightarrow{(-i)} s = -i \cdot \ln(2) - \frac{\pi}{12} \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

**Aufgabe 88.420** (komplexe Gleichungen lösen)

spf

Finden Sie alle komplexen Zahlen, die die folgenden Gleichungen erfüllen!

$$\text{a) } 2 \cdot \cos(z) + 3e^{iz} = 2 \cdot \sqrt{2} \quad \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k + i \cdot \ln(2)$$

Lösung:Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $2 \cdot \cos(z) + 3e^{iz} = 2 \cdot \sqrt{2}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (e^{iz} + e^{-iz}) + 3 \cdot e^{iz} &= 2 \cdot \sqrt{2} &\iff 4 \cdot e^{iz} + e^{-iz} &= 2 \cdot \sqrt{2} \\ \iff 4 \cdot (e^{iz})^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{iz} + 1 &= 0 &\iff (2 \cdot e^{iz})^2 - 2 \cdot 2 \cdot e^{iz} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{2}{4} + 1 &= 0 \\ \iff \left(2 \cdot e^{iz} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} &= 0 &\iff \left(2 \cdot e^{iz} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot i\right) \cdot \left(2 \cdot e^{iz} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot i\right) &= 0 \\ \iff 2 \cdot e^{iz} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i &= 0 \quad \text{oder} \quad 2 \cdot e^{iz} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i &= 0 \\ \iff e^{iz} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot i &\quad \text{oder} \quad e^{iz} = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot i \end{aligned}$$

Nun sind $\left|\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot i\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{16} + \frac{2}{16}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ und

$$\arg\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot i\right) = \arctan\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{4}}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \arccos\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{2}}\right).$$

Wegen $\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot i = \overline{\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot i}$ ergibt sich daraus $\left|\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot i\right| = \frac{1}{2}$ und $\arg\left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot i\right) = -\frac{\pi}{4}$.Mit $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$ folgt

$$\begin{aligned} 2 \cdot \cos(z) + 3e^{iz} &= 2 \cdot \sqrt{2} \\ \iff iz &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) + i \cdot \frac{\pi}{4} + 2\pi ik \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z} \\ \text{oder } iz &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) + i \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2\pi ik \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z} \\ \iff z &= \frac{\pi}{4} + 2\pi k + i \cdot \ln(2) \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z} \\ \text{oder } z &= -\frac{\pi}{4} + 2\pi k + i \cdot \ln(2) \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$\text{b) } \sin(w) + \frac{1}{4} \cdot e^{iw} = 1 \quad \frac{\pi}{4} + 2\pi k - i \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln(2) \quad \text{oder} \quad \pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right) + 2k\pi + i \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{5}{2}\right)$$

Lösung:Sei $w \in \mathbb{C}$ mit $\sin(w) + \frac{1}{4} \cdot e^{iw} = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i} \cdot (e^{iw} - e^{-iw}) + \frac{1}{4} \cdot e^{iw} &= 1 &\iff 2 \cdot e^{iw} - 2 \cdot e^{-iw} + i \cdot e^{iw} &= 4i \\ \iff (2 + i) \cdot (e^{iw})^2 - 4i \cdot e^{iw} - 2 &= 0 &\iff (e^{iw})^2 - 2 \cdot e^{iw} \cdot \frac{2i}{2+i} + \left(\frac{2i}{2+i}\right)^2 - \frac{(2i)^2}{(2+i)^2} - \frac{2}{2+i} &= 0 \\ \iff \left(e^{iw} - \frac{2i \cdot (2-i)}{4+1}\right)^2 - \frac{-4+2 \cdot (2+i)}{4+4i-1} &= 0 &\iff \left(e^{iw} - \frac{2+4i}{5}\right)^2 - \frac{2i}{3+4i} &= 0. \end{aligned}$$

$$\text{Es ist } \frac{2i}{3+4i} = \frac{2i \cdot (3-4i)}{(3+4i) \cdot (3-4i)} = \frac{6i+8}{9+16} = \frac{8+6i}{25}.$$

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $(a + ib)^2 = \frac{8}{25} + \frac{6i}{25}$. Wegen $(a + ib)^2 = a^2 + 2iab - b^2$ folgt dann

$$\begin{aligned}
 & a^2 - b^2 = \frac{8}{25} \quad \text{und} \quad 2ab = \frac{6}{25} \\
 \iff & a^2 - b^2 = \frac{8}{25}, \quad a \neq 0 \quad \text{und} \quad b = \frac{3}{25a} \\
 \iff & a^2 - \left(\frac{3}{25a}\right)^2 = \frac{8}{25}, \quad a \neq 0 \quad \text{und} \quad b = \frac{3}{25a} \\
 \iff & a^2 - \frac{8}{25} - \frac{9}{625a^2} = 0, \quad a \neq 0 \quad \text{und} \quad b = \frac{3}{25a} \\
 \iff & (a^2)^2 - 2 \cdot a^2 \cdot \frac{4}{25} + \left(\frac{4}{25}\right)^2 - \frac{16}{625} - \frac{9}{625} = 0, \quad a \neq 0 \quad \text{und} \quad b = \frac{3}{25a} \\
 \iff & \left(a^2 - \frac{4}{25}\right)^2 - \frac{25}{625} = 0, \quad a \neq 0 \quad \text{und} \quad b = \frac{3}{25a} \\
 \iff & \left(a^2 - \frac{4}{25} - \frac{5}{25}\right) \cdot \left(a^2 - \frac{4}{25} + \frac{5}{25}\right) = 0, \quad a \neq 0 \quad \text{und} \quad b = \frac{3}{25a} \\
 \iff & \left(a^2 - \frac{9}{25}\right) \cdot \left(a^2 + \frac{1}{25}\right) = 0, \quad a \neq 0 \quad \text{und} \quad b = \frac{3}{25a} \\
 \stackrel{a^2 \geq 0, \text{ da } a \in \mathbb{R}}{\iff} & \left(a - \frac{3}{5}\right) \cdot \left(a + \frac{3}{5}\right) = 0, \quad a \neq 0 \quad \text{und} \quad b = \frac{3}{25a} \\
 \iff & \left(a = \frac{3}{5} \text{ oder } a = -\frac{3}{5}\right) \quad \text{und} \quad b = \frac{3}{25a} \\
 \iff & \left(a = \frac{3}{5} \text{ und } b = \frac{1}{5}\right) \quad \text{oder} \quad \left(a = -\frac{3}{5} \text{ und } b = -\frac{1}{5}\right).
 \end{aligned}$$

Damit folgt also wegen $\left(\frac{-3-i}{5}\right)^2 = \left(-\frac{3+i}{5}\right)^2$

$$\begin{aligned}
 & \sin(w) + \frac{1}{4} \cdot e^{iw} = 1 \\
 \iff & \left(e^{iw} - \frac{2+4i}{5}\right)^2 - \left(\frac{3+i}{5}\right)^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \left(e^{iw} - \frac{2+4i}{5}\right)^2 - \left(\frac{-3-i}{5}\right)^2 = 0 \\
 \iff & \left(e^{iw} - \frac{2+4i}{5} - \frac{3+i}{5}\right) \cdot \left(e^{iw} - \frac{2+4i}{5} + \frac{3+i}{5}\right) = 0 \\
 \iff & \left(e^{iw} - (1+i)\right) \cdot \left(e^{iw} - \frac{-1+3i}{5}\right) = 0 \\
 \iff & e^{iw} = 1+i \quad \text{oder} \quad e^{iw} = -\frac{1}{5} + i \cdot \frac{3}{5}.
 \end{aligned}$$

Nun sind $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, $\arg(1+i) = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

$$\left|-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{10}{25}} = \sqrt{\frac{2}{5}} \quad \text{und}$$

$$\arg\left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i\right) = \pi + \arctan\left(\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{1}{5}}\right) = \pi - \arctan(3) = \pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right) = \arccos\left(\frac{-\frac{1}{5}}{\sqrt{\frac{2}{5}}}\right).$$

Mit $\ln\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{5}{2}\right)$ folgt

$$\begin{aligned}
 & \sin(w) + \frac{1}{4} \cdot e^{iw} = 1 \\
 \iff & iw = \ln\left(\sqrt{2}\right) + i \cdot \frac{\pi}{4} + 2\pi ik \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z} \\
 & \text{oder} \quad iw = \ln\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right) + i \cdot (\pi - \arctan(3)) + 2\pi ik \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z} \\
 & \text{bzw.} \quad iw = \ln\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right) + i \cdot \left(\pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)\right) + 2\pi ik \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z} \\
 \iff & w = \frac{\pi}{4} + 2\pi k - i \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln(2) \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z} \\
 & \text{oder} \quad w = \pi - \arctan(3) + 2k\pi + i \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{5}{2}\right) \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z} \\
 & \text{bzw.} \quad w = \pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right) + 2k\pi + i \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{5}{2}\right) \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

c) $\sinh(s) + \frac{5}{8} \cdot e^s - \frac{i}{4} = \sqrt{3} + i$

$$\ln(2) + i \cdot \frac{\pi}{6} + 2\pi ik \quad \text{oder} \quad -\ln\left(\frac{9}{2}\right) + i \cdot \frac{5\pi}{6} + 2\pi ik$$

Tipp: $(5 \cdot \sqrt{3} + 4 \cdot i)^2 = 59 + 40 \cdot \sqrt{3} \cdot i$

Lösung:

Sei $s \in \mathbb{C}$ mit $\sinh(s) + \frac{5}{8} \cdot e^s - \frac{i}{4} = \sqrt{3} + i$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot (e^s - e^{-s}) + \frac{5}{8} \cdot e^s = \sqrt{3} + i \cdot \frac{5}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{9}{8} \cdot e^s - \frac{1}{2} \cdot e^{-s} = \sqrt{3} + i \cdot \frac{5}{4} \\ \Longleftrightarrow & (e^s)^2 - \left(\frac{8\sqrt{3}+10i}{9} \right) \cdot e^s - \frac{4}{9} = 0 \\ \Longleftrightarrow & (e^s)^2 - 2 \cdot e^s \cdot \frac{4\sqrt{3}+5i}{9} + \left(\frac{4\sqrt{3}+5i}{9} \right)^2 - \left(\frac{4\sqrt{3}+5i}{9} \right)^2 - \frac{4}{9} = 0 \\ \Longleftrightarrow & \left(e^s - \frac{4\sqrt{3}+5i}{9} \right)^2 - \frac{16 \cdot 3 + 40 \cdot \sqrt{3} \cdot i - 25 + 36}{81} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(e^s - \frac{4\sqrt{3}+5i}{9} \right)^2 - \frac{59+40\sqrt{3}i}{81} = 0. \end{aligned}$$

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $(a+ib)^2 = \frac{59}{81} + \frac{40\sqrt{3}i}{81}$. Wegen $(a+ib)^2 = a^2 + 2iab - b^2$ folgt dann

$$\begin{aligned} & a^2 - b^2 = \frac{59}{81} \quad \text{und} \quad 2ab = \frac{40\sqrt{3}}{81} \\ \Longleftrightarrow & a^2 - b^2 = \frac{59}{81}, \quad a \neq 0 \quad \text{und} \quad b = \frac{20\sqrt{3}}{81a} \\ \Longleftrightarrow & a^2 - \left(\frac{20\sqrt{3}}{81a} \right)^2 = \frac{59}{81}, \quad a \neq 0 \quad \text{und} \quad b = \frac{20\sqrt{3}}{81a} \\ \Longleftrightarrow & a^2 - \frac{59}{81} - \frac{1200}{81^2 \cdot a^2} = 0, \quad a \neq 0 \quad \text{und} \quad b = \frac{20\sqrt{3}}{81a} \\ \Longleftrightarrow & (a^2)^2 - 2a^2 \cdot \frac{59}{2 \cdot 81} + \left(\frac{59}{2 \cdot 81} \right)^2 - \frac{3481}{4 \cdot 81^2} - \frac{4800}{4 \cdot 81^2} = 0, \quad a \neq 0 \quad \text{und} \quad b = \frac{20\sqrt{3}}{81a} \\ \Longleftrightarrow & (a^2 - \frac{59}{162})^2 - \frac{8281}{162^2} = 0, \quad a \neq 0 \quad \text{und} \quad b = \frac{20\sqrt{3}}{81a} \\ \stackrel{8281=91^2}{\Longleftrightarrow} & (a^2 - \frac{59}{162} - \frac{91}{162}) \cdot (a^2 - \frac{59}{162} + \frac{91}{162}) = 0, \quad a \neq 0 \quad \text{und} \quad b = \frac{20\sqrt{3}}{81a} \\ \Longleftrightarrow & (a^2 - \frac{150}{162}) \cdot (a^2 + \frac{32}{162}) = 0, \quad a \neq 0 \quad \text{und} \quad b = \frac{20\sqrt{3}}{81a} \\ \stackrel{a^2 \geq 0, \text{ da } a \in \mathbb{R}}{\Longleftrightarrow} & \left(a - \frac{5\sqrt{3}}{9} \right) \cdot \left(a + \frac{5\sqrt{3}}{9} \right) = 0, \quad a \neq 0 \quad \text{und} \quad b = \frac{20\sqrt{3}}{81a} \\ & \stackrel{\frac{150}{162} = \frac{25 \cdot 3}{81}}{\Longleftrightarrow} \\ \Longleftrightarrow & \left(a = \frac{5\sqrt{3}}{9} \text{ oder } a = -\frac{5\sqrt{3}}{9} \right) \quad \text{und} \quad b = \frac{20\sqrt{3}}{81a} \\ \Longleftrightarrow & \left(a = \frac{5\sqrt{3}}{9} \text{ und } b = \frac{4}{9} \right) \quad \text{oder} \quad \left(a = -\frac{5\sqrt{3}}{9} \text{ und } b = -\frac{4}{9} \right). \end{aligned}$$

Damit folgt also wegen $\left(\frac{-5\sqrt{3}-4i}{9} \right)^2 = \left(-\frac{5\sqrt{3}+4i}{9} \right)^2$

$$\begin{aligned} & \sinh(s) + \frac{5}{8} \cdot e^s - \frac{i}{4} = \sqrt{3} + i \\ \Longleftrightarrow & \left(e^s - \frac{4\sqrt{3}+5i}{9} \right)^2 - \left(\frac{5\sqrt{3}+4i}{9} \right)^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \left(e^s - \frac{4\sqrt{3}+5i}{9} \right)^2 - \left(\frac{-5\sqrt{3}-4i}{9} \right)^2 = 0 \\ \Longleftrightarrow & \left(e^s - \frac{4\sqrt{3}+5i}{9} - \frac{5\sqrt{3}+4i}{9} \right) \cdot \left(e^s - \frac{4\sqrt{3}+5i}{9} + \frac{5\sqrt{3}+4i}{9} \right) = 0 \\ \Longleftrightarrow & \left(e^s - (\sqrt{3} + i) \right) \cdot \left(e^s - \frac{-\sqrt{3}+i}{9} \right) = 0 \\ \Longleftrightarrow & e^s = \sqrt{3} + i \quad \text{oder} \quad e^s = -\frac{\sqrt{3}}{9} + i \cdot \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Nun sind $|\sqrt{3} + i| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$, $\arg(\sqrt{3} + i) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6} = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,
 $\left| -\frac{\sqrt{3}}{9} + i \cdot \frac{1}{9} \right| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{9}\right)^2 + \left(\frac{1}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{81} + \frac{1}{81}} = \sqrt{\frac{4}{81}} = \frac{2}{9}$ und $\arg\left(-\frac{\sqrt{3}}{9} + i \cdot \frac{1}{9}\right) = \pi + \arctan\left(\frac{\frac{1}{9}}{-\frac{\sqrt{3}}{9}}\right) = \pi - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} = \pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \arccos\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$.
 Damit folgt

$$\begin{aligned} & \sinh(s) + \frac{5}{8} \cdot e^s - \frac{i}{4} = \sqrt{3} + i \\ \Longleftrightarrow & s = \ln(2) + i \cdot \frac{\pi}{6} + 2\pi i k \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z} \quad \text{oder} \quad s = -\ln\left(\frac{9}{2}\right) + i \cdot \frac{5\pi}{6} + 2\pi i k \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$



KomplZahlen/Kartesisch/Ag_KomplZahlen_RechnenInKartDarst.tex

Aufgabe 89.421 (Rechnen mit komplexen Zahlen in kartesischer Darstellung)

spf

Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen!

a) $(-4 + i) - (7 - 3i)$

$$-11 + 4 \cdot i$$

Lösung: Es ist $(-4 + i) - (7 - 3i) = -4 - 7 + (1 + 3) \cdot i = -11 + 4i$.

b) $(5i - 2) \cdot (4 - 2i)$

$$2 + 24 \cdot i$$

Lösung: Es ist $(5i - 2) \cdot (4 - 2i) = 20i - 8 - 10i^2 + 4i = 24i - 8 + 10 = 2 + 24i$.

c) $\frac{4 - \frac{i}{2}}{-4 + 3i}$

$$-\frac{7}{10} - \frac{2}{5} \cdot i$$

Lösung: Es ist $\frac{4 - \frac{i}{2}}{-4 + 3i} = \frac{(8 - i) \cdot (-4 - 3i)}{2 \cdot (-4 + 3i) \cdot (-4 - 3i)} = \frac{-32 + 4i - 24i - 3}{2 \cdot (16 + 9)} = \frac{-35 - 20i}{2 \cdot 25} = -\frac{7}{10} - \frac{2}{5} \cdot i$.

d) $(-\frac{1}{3} + \frac{3i}{2}) - (4 - 2i)^{-1}$

$$-\frac{8}{15} + \frac{7}{5} \cdot i$$

Lösung: Es ist $(-\frac{1}{3} + \frac{3i}{2}) - (4 - 2i)^{-1} = -\frac{1}{3} + \frac{3i}{2} - \frac{4 + 2i}{16 + 4} = -\frac{5}{15} - \frac{3}{15} + \frac{15i}{10} - \frac{i}{10} = -\frac{8}{15} + \frac{7}{5} \cdot i$.

e) $\frac{1 - 2i}{(7 + i) \cdot (-2 + 3i)}$

$$-\frac{11}{130} + \frac{3}{130} \cdot i$$

Lösung: Es ist

$$\frac{1 - 2i}{(7 + i) \cdot (-2 + 3i)} = \frac{1 - 2i}{-14 - 2i + 21i - 3} = \frac{(1 - 2i) \cdot (-17 - 19i)}{(-17 + 19i) \cdot (-17 - 19i)} = \frac{-17 - 19i + 34i - 38}{289 + 361} = \frac{15i - 55}{650} = -\frac{11}{130} + \frac{3}{130} \cdot i$$

f) $(3 + 2i)^2 \cdot (6 - 4i)^2$

$$676 + 0 \cdot i$$

Lösung: Es ist

$$(3 + 2i)^2 \cdot (6 - 4i)^2 = ((3 + 2i) \cdot (3 - 2i) \cdot 2)^2 = (9 + 4)^2 \cdot 2^2 = 13^2 \cdot 4 = 169 \cdot 4 = 676$$

g) $\frac{4 \cdot \overline{3 - i}}{(-1 + i) \cdot (1 + i)}$

$$-6 - 2 \cdot i$$

Lösung: Es ist $\frac{4 \cdot \overline{3 - i}}{(-1 + i) \cdot (1 + i)} = \frac{4 \cdot (3 + i)}{i^2 - 1^2} = \frac{12 + 4i}{-2} = -6 - 2i$.

h) $\frac{(-2+i) \cdot \overline{3-6i}}{-2+4i \cdot (3-i)}$

$$\frac{21}{20} - \frac{3}{20} \cdot i$$

Lösung: Es ist

$$\begin{aligned} \frac{(-2+i) \cdot \overline{3-6i}}{-2+4i \cdot (3-i)} &= \frac{(-2+i) \cdot (3+6i)}{(-2-4i) \cdot (3-i)} = \frac{(-2+i) \cdot (3+i) \cdot 3 \cdot (1+2i)}{-2 \cdot (1+2i) \cdot (3-i) \cdot (3+i)} \\ &= \frac{(-6+3i-2i-1) \cdot 3}{-2 \cdot (3^2-i^2)} = \frac{(-7+i) \cdot 3}{-2 \cdot (9+1)} = \frac{21}{20} - \frac{3}{20} \cdot i. \end{aligned}$$

i) $\frac{(3+2i) \cdot \overline{4-3i}}{i \cdot 2-5i}$

$$-\frac{64}{29} + \frac{73}{29} \cdot i$$

Lösung: Es ist

$$\begin{aligned} \frac{(3+2i) \cdot \overline{4-3i}}{i \cdot 2-5i} &= \frac{(3+2i) \cdot (4+3i)}{i \cdot (2+5i)} = \frac{12+9i+8i-6}{-5+2i} \\ &= \frac{(6-17i) \cdot (-5-2i)}{(-5+2i) \cdot (-5-2i)} = \frac{-30+85i-12i-34}{(-5)^2+(-2)^2} = \frac{-64+73i}{25+4} = -\frac{64}{29} + \frac{73}{29} \cdot i. \end{aligned}$$



KomplZahlen/Kartesisch/Ag_KomplZahlen_RechnenInKartDarstMehr.tex

Aufgabe 89.422 (Rechnen mit komplexen Zahlen in kartesischer Darstellung)

spf

Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen!

a) $(3+4i) + (7i-4)$

$$-1 + 11 \cdot i$$

Lösung: Es ist $(3+4i) + (7i-4) = (3-4) + (4+7) \cdot i = -1 + 11 \cdot i$.

b) $\frac{14-3i}{4} - \frac{17-8i}{5}$

$$\frac{1}{10} + \frac{17}{20} \cdot i$$

Lösung: Es ist $\frac{14-3i}{4} - \frac{17-8i}{5} = \frac{70-15i}{20} - \frac{68-32i}{20} = \frac{2+17i}{20} = \frac{1}{10} + \frac{17}{20} \cdot i$.

c) $\frac{21-3i}{9} \cdot \frac{2-4i}{8}$

$$\frac{5}{12} - \frac{5}{4} \cdot i$$

Lösung: Es ist $\frac{21-3i}{9} \cdot \frac{2-4i}{8} = \frac{42-6i-84i-12}{72} = \frac{30-90i}{72} = \frac{5}{12} - \frac{5}{4} \cdot i$.

d) $\frac{4-2i}{3-i}$

$$\frac{7}{5} - \frac{1}{5} \cdot i$$

Lösung: Es ist $\frac{4-2i}{3-i} = \frac{(4-2i) \cdot (3+i)}{(3-i) \cdot (3+i)} = \frac{12-6i+4i+2}{9-i^2} = \frac{14-2i}{10} = \frac{7}{5} - \frac{1}{5} \cdot i$.

$$\text{e) } \frac{12-5i}{3} - \left(\frac{1+5i}{6}\right)^{-1}$$

$$\frac{49}{13} - \frac{20}{39} \cdot i$$

Lösung: Es ist

$$\begin{aligned} \frac{12-5i}{3} - \left(\frac{1+5i}{6}\right)^{-1} &= \frac{12-5i}{3} - \frac{6}{1+5i} = \frac{12-5i}{3} - \frac{6 \cdot (1-5i)}{(1+5i) \cdot (1-5i)} = \frac{12-5i}{3} - \frac{6-30i}{1^2+5^2} = \frac{12-5i}{3} - \frac{6-30i}{26} \\ &= \frac{12-5i}{3} - \frac{3-15i}{13} = \frac{(13 \cdot 12 - 65i) - (9 - 45i)}{39} = \frac{130 + 26 - 65i - 9 + 45i}{39} = \frac{147 - 20i}{39} = \frac{49}{13} - \frac{20}{39} \cdot i. \end{aligned}$$

$$\text{f) } \frac{\overline{5+2i} \cdot (2-i)}{7i-1}$$

$$\frac{11}{10} + \frac{13}{10} \cdot i$$

Lösung: Es ist

$$\frac{\overline{5+2i} \cdot (2-i)}{7i-1} = \frac{(5-2i) \cdot (2-i)}{-1-7i} = \frac{10-4i-5i-2}{-1-7i} = \frac{(8-9i) \cdot (-1+7i)}{(-1-7i) \cdot (-1+7i)} = \frac{-8+9i+56i+63}{1+49} = \frac{55+65i}{50} = \frac{11}{10} + \frac{13}{10} \cdot i.$$

$$\text{g) } \overline{(-3+4i) \cdot (6-8i)}$$

$$14 - 48 \cdot i$$

Lösung: Es ist $\overline{(-3+4i) \cdot (6-8i)} = \overline{-18+24 \cdot i+24 \cdot i+32} = \overline{14+48 \cdot i} = 14 - 48 \cdot i.$

$$\text{h) } \overline{\left(\frac{(3-7i) \cdot -5+i}{3i \cdot 5}\right)}$$

$$-\frac{32}{15} + \frac{22}{15} \cdot i$$

Lösung: Es ist

$$\overline{\left(\frac{(3-7i) \cdot -5+i}{3i \cdot 5}\right)} = \frac{\overline{3-7i} \cdot \overline{-5+i}}{\overline{3i \cdot 5}} = \frac{3-7i \cdot (-5+i)}{3i \cdot 5} = -i \cdot \frac{(3+7i) \cdot (-5+i)}{15} = -i \cdot \frac{-15-35i+3i-7}{15} = -i \cdot \frac{-22-32i}{15} = -\frac{32}{15} + \frac{22}{15} \cdot i.$$

$$\text{i) } \frac{5+i}{7+3i} - \overline{\left(\frac{16-11i}{29}\right)}$$

$$0 + 0 \cdot i$$

Lösung: Es ist

$$\frac{5+i}{7+3i} - \overline{\left(\frac{16-11i}{29}\right)} = \frac{(5+i) \cdot (7+3i)}{(7+3i) \cdot (7+3i)} - \frac{\overline{16-11i}}{29} = \frac{35+15i+7i-3}{49+9} - \frac{16+11i}{29} = \frac{32+22i}{58} - \frac{16+11i}{29} = 0.$$



KomplZahlen/Kartesisch/Ag_KomplZahlen_RechnenInKartDarstTermeAusDreiZahlen.tex

Aufgabe 89.423 (Terme berechnen)

Papula, MfluN, Bd. 1, S. 715, Aufg. 1, R. K. modifiziert

Berechnen Sie für die komplexen Zahlen $z := -4i$, $w := 3-2i$ und $s := -1+i$ kartesische Darstellungen der folgenden Zahlen!

$$\text{a) } z - 2w + 3s$$

$$-9 + 3 \cdot i$$

Lösung: Es gilt $z - 2w + 3s = (-4i) - 2 \cdot (3 - 2i) + 3 \cdot (-1 + i) = -4i - 6 + 4i - 3 + 3i = -9 + 3i.$

b) $2z \cdot \bar{w}$

$$16 - 24 \cdot i$$

Lösung: Es gilt $2z \cdot \bar{w} = 2 \cdot (-4i) \cdot \overline{(3 - 2i)} = -8i \cdot (3 + 2i) = -24i - 16i^2 = 16 - 24i$.

c) $\frac{\bar{z} \cdot w}{s}$

$$2 - 10 \cdot i$$

Lösung: Es gilt

$$\frac{\bar{z} \cdot w}{s} = \frac{\overline{(-4i)} \cdot (3 - 2i)}{(-1 + i)} = \frac{4i \cdot (3 - 2i) \cdot (-1 - i)}{(-1 + i) \cdot (-1 - i)} = \frac{4i \cdot (-3 + 2i - 3i - 2)}{(-1)^2 + 1^2} = \frac{4i \cdot (-5 - i)}{2} = 2 \cdot (-5i + 1) = 2 - 10i.$$

d) $z \cdot (2\bar{w} - z) + \bar{s}$

$$31 - 25 \cdot i$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} z \cdot (2\bar{w} - z) + \bar{s} &= (-4i) \cdot \left(2 \cdot \overline{(3 - 2i)} - (-4i) \right) + \overline{(-1 + i)} \\ &= -4i \cdot (2 \cdot (3 + 2i) + 4i) + (-1 - i) = -4i \cdot (6 + 4i + 4i) - 1 - i \\ &= -4i \cdot (6 + 8i) - 1 - i = -24i + 32 - 1 - i = 31 - 25i. \end{aligned}$$

e) $\frac{z - \bar{w}}{3\bar{s}}$

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot i$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{z - \bar{w}}{3\bar{s}} &= \frac{(-4i) - \overline{(3 - 2i)}}{3 \cdot \overline{(-1 + i)}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{-4i - (3 + 2i)}{-1 - i} = \frac{1}{3} \cdot \frac{-4i - 3 - 2i}{-1 - i} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{-3 - 6i}{-1 - i} = \frac{(-1 - 2i) \cdot (-1 + i)}{(-1 - i) \cdot (-1 + i)} = \frac{1 - i + 2i + 2}{(-1)^2 + 1^2} = \frac{3 + i}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot i. \end{aligned}$$

f) $\frac{z + \bar{s}}{w \cdot s}$

$$0 + 1 \cdot i$$

Lösung: Es gilt $\frac{z + \bar{s}}{w \cdot s} = \frac{(-4i) + \overline{(-1 + i)}}{(3 - 2i) \cdot (-1 + i)} = \frac{-4i + (-1 - i)}{(3 + 2i) \cdot (-1 + i)} = \frac{-4i - 1 - i}{-3 + 3i - 2i - 2} = \frac{-1 - 5i}{-5 + i} = \frac{i^2 - 5i}{-5 + i} = \frac{i \cdot (i - 5)}{i - 5} = i$.

Aufgabenblatt 90

KomplZahlen/Polar



KomplZahlen/Polar/Ag_KomplZahlen_Dreifachwinkelformeln.tex

Aufgabe 90.424 (Dreifachwinkel)

vr

Die Formel von de Moivre: für alle $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(\cos(z) + i \sin(z))^n = \cos(nz) + i \sin(nz).$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Formel von de Moivre, dass für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $\cos(3\alpha) = (\cos(\alpha))^3 - 3 \cos(\alpha) \cdot (\sin(\alpha))^2,$

Lösung:

Mit $z = \alpha$ bzw. $z = -\alpha$ in der Formel von de Moivre gilt

$$\begin{aligned} \cos(3\alpha) + i \sin(3\alpha) &= (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))^3 \\ \cos(-3\alpha) + i \sin(-3\alpha) &= (\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha))^3, \end{aligned}$$

wobei die zweite Gleichung wegen der Symmetrieeigenschaften von $\sin$ und $\cos$ äquivalent ist zu

$$\cos(3\alpha) - i \sin(3\alpha) = (\cos(\alpha) - i \sin(\alpha))^3.$$

Addieren der beiden Gleichungen liefert:

$$\begin{aligned} 2 \cos(3\alpha) &= (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))^3 + (\cos(\alpha) - i \sin(\alpha))^3 \\ &= (\cos(\alpha))^3 + 3 (\cos(\alpha))^2 \cdot i \sin(\alpha) + 3 \cos(\alpha) \cdot (i \sin(\alpha))^2 + (i \sin(\alpha))^3 \\ &\quad + (\cos(\alpha))^3 + 3 (\cos(\alpha))^2 \cdot (-i \sin(\alpha)) + 3 \cos(\alpha) \cdot (-i \sin(\alpha))^2 + (-i \sin(\alpha))^3 \\ &= (\cos(\alpha))^3 + 3 (\cos(\alpha))^2 \cdot i \cdot \sin(\alpha) - 3 \cos(\alpha) \cdot (\sin(\alpha))^2 - i (\sin(\alpha))^3 \\ &\quad + (\cos(\alpha))^3 - 3 (\cos(\alpha))^2 \cdot i \cdot \sin(\alpha) - 3 \cos(\alpha) \cdot (\sin(\alpha))^2 + i (\sin(\alpha))^3 \\ &= 2 (\cos(\alpha))^3 - 3 \cos(\alpha) \cdot (\sin(\alpha))^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt nach der Division mit 2 dass

$$\cos(3\alpha) = (\cos(\alpha))^3 - 3 \cos(\alpha) \cdot (\sin(\alpha))^2.$$

b) $\sin(3\alpha) = 3(\cos(\alpha))^2 \cdot \sin(\alpha) - (\sin(\alpha))^3.$

Lösung:

Genauso wie in der vorherigen Teilaufgabe gilt mit $z = \alpha$ bzw. $z = -\alpha$ in der Formel von de Moivre:

$$\begin{aligned} \cos(3\alpha) + i \sin(3\alpha) &= (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))^3 \\ \cos(3\alpha) - i \sin(3\alpha) &= (\cos(\alpha) - i \sin(\alpha))^3. \end{aligned}$$

Subtrahieren der zweiten Gleichung von der ersten liefert

$$\begin{aligned} 2i \sin(3\alpha) &= (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))^3 - (\cos(\alpha) - i \sin(\alpha))^3 \\ &= (\cos(\alpha))^3 + 3 (\cos(\alpha))^2 \cdot i \sin(\alpha) + 3 \cos(\alpha) \cdot (i \sin(\alpha))^2 + (i \sin(\alpha))^3 \\ &\quad - (\cos(\alpha))^3 - 3 (\cos(\alpha))^2 \cdot (-i \sin(\alpha)) - 3 \cos(\alpha) \cdot (-i \sin(\alpha))^2 - (-i \sin(\alpha))^3 \\ &= (\cos(\alpha))^3 + 3 (\cos(\alpha))^2 \cdot i \cdot \sin(\alpha) - 3 \cos(\alpha) \cdot (\sin(\alpha))^2 - i (\sin(\alpha))^3 \\ &\quad - (\cos(\alpha))^3 + 3 (\cos(\alpha))^2 \cdot i \cdot \sin(\alpha) + 3 \cos(\alpha) \cdot (\sin(\alpha))^2 - i (\sin(\alpha))^3 \\ &= 6i \cdot (\cos(\alpha))^2 \cdot \sin(\alpha) - 2i (\sin(\alpha))^2. \end{aligned}$$

Nach der Division mit $2i$ folgt

$$\sin(3\alpha) = 3(\cos(\alpha))^2 \cdot \sin(\alpha) - (\sin(\alpha))^3.$$



KomplZahlen/Polar/Ag_KomplZahlen_PolarRechenregeln.tex

Aufgabe 90.425 (Kartesische Darstellung und Polardarstellung komplexer Zahlen)

spf

Seien $z \in \mathbb{C}$, $s \in \mathbb{C}$ und $w \in \mathbb{C}$ mit

Hinweis: $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$

$$|z| = 8, \quad \arg(z) = \frac{\pi}{6}, \quad |s| = 2 \quad \arg(s) = \frac{2\pi}{3}, \quad |w| = 32 \quad \text{und} \quad \arg(w) = \frac{\pi}{3}.$$

Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in Polardarstellung an und berechnen Sie jeweils Real- und Imaginärteil!

Die Ergebnisse werden in der Form „Realteil, Imaginärteil, Betrag, Argument“ angegeben.

a) $1 + i$

$$1, 1, \sqrt{2}, \frac{\pi}{4}$$

Lösung:

Real- und Imaginärteil von $1 + i$ sind direkt ablesbar und haben den Wert 1.

$$\text{Ferner ist } |1 + i| = \sqrt{(\operatorname{Re}(1 + i))^2 + (\operatorname{Im}(1 + i))^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}.$$

$$\text{Aus } \operatorname{Im}(1 + i) = 1 > 0 \text{ folgt } \arg(1 + i) = \arccos\left(\frac{\operatorname{Re}(1+i)}{|1+i|}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

b) z

$$4 \cdot \sqrt{3}, 4, 8, \frac{\pi}{6}$$

Lösung:

$|z|$ und $\arg(z)$ sind bereits in der Aufgabenstellung gegeben.

$$\text{Es gilt } z = 8 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 8 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \sqrt{3} + 4i.$$

c) $-\sqrt{3} + 3i$

$$-\sqrt{3}, 3, 2 \cdot \sqrt{3}, \frac{2\pi}{3}$$

Lösung:

Real- und Imaginärteil von $-\sqrt{3} + 3i$ sind direkt ablesbar.

$$\text{Ferner ist } |-\sqrt{3} + 3i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{3 + 9} = \sqrt{12} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{3}.$$

Aus $\operatorname{Im}(-\sqrt{3} + 3i) = 3 > 0$ folgt

$$\arg(-\sqrt{3} + 3i) = \arccos\left(\frac{-\sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{3}}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

d) $(1 + 2i) \cdot (3 - i)$

$$5, 5, 5 \cdot \sqrt{2}, \frac{\pi}{4}$$

Lösung:

$$\text{Es gilt } (1 + 2i) \cdot (3 - i) = 3 + 6i - i + 2 = 5 + 5i = 5 \cdot (1 + i).$$

Mit Aufgabenteil a) folgt

$$|(1 + 2i) \cdot (3 - i)| = 5 \cdot |1 + i| = 5 \cdot \sqrt{2} \quad \text{und} \quad \arg((1 + 2i) \cdot (3 - i)) = \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}.$$

e) $i \cdot \overline{3 - 4i}$

$$-4, 3, 5, \pi - \arccos\left(\frac{4}{5}\right)$$

Lösung:

Es gilt $i \cdot \overline{3 - 4i} = i \cdot (3 + 4i) = -4 + 3i$.

Damit folgt $|i \cdot \overline{3 - 4i}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$ und mit $\operatorname{Im}(-4 + 3i) = 3 > 0$ ergibt sich $\arg(i \cdot \overline{3 - 4i}) = \arccos\left(\frac{-4}{5}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{4}{5}\right)$.

f) $(1 + i)^{20}$

$$-1024, 0, 1024, \pi$$

Lösung:

Mit Aufgabenteil a) und der Formel von Moivre folgt

$$\begin{aligned} (1 + i)^{20} &= \left(\sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^{20} = \sqrt{2}^{20} \cdot \left(\cos\left(20 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(20 \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= 2^{\frac{1}{2} \cdot 20} \cdot (\cos(5\pi) + i \cdot \sin(5\pi)) = 2^{10} \cdot (\cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi)) = 1024 \cdot (-1 + i \cdot 0). \end{aligned}$$

Also gilt $\operatorname{Re}\left((1 + i)^{20}\right) = -1024$, $\operatorname{Im}\left((1 + i)^{20}\right) = 0$, $|(1 + i)^{20}| = 1024$ und $\arg\left((1 + i)^{20}\right) = \pi$.

g) $\frac{-1 + 2i}{(-2 - i) \cdot (3 + 4i)}$

$$\frac{-4}{25}, \frac{-3}{25}, \frac{1}{5}, \arccos\left(\frac{4}{5}\right) - \pi$$

Lösung:

Mit $(-1 + 2i) \cdot i = -i + 2i^2 = -2 - i$ folgt

$$\frac{-1 + 2i}{(-2 - i) \cdot (3 + 4i)} = \frac{-1 + 2i}{(-1 + 2i) \cdot i \cdot (3 + 4i)} = \frac{1}{-4 + 3i} = \frac{-4 - 3i}{16 + 9} = \frac{-4 - 3i}{25} = \frac{-4}{25} + \frac{-3}{25} \cdot i.$$

Mit $\operatorname{Im}\left(\frac{-1 + 2i}{(-2 - i) \cdot (3 + 4i)}\right) = \frac{-3}{25} < 0$ ergibt sich

$$\left|\frac{-1 + 2i}{(-2 - i) \cdot (3 + 4i)}\right| = \sqrt{\left(\frac{-4}{25}\right)^2 + \left(\frac{-3}{25}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{625} + \frac{9}{625}} = \sqrt{\frac{25}{625}} = \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}$$

und

$$\arg\left(\frac{-1 + 2i}{(-2 - i) \cdot (3 + 4i)}\right) = -\arccos\left(\frac{\frac{-4}{25}}{\frac{1}{5}}\right) = \arccos\left(\frac{4}{5}\right) - \pi.$$

h) $\frac{(3 + 2i)^2 \cdot (-1 + i)}{5 - 12i}$

$$-1, 1, \sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}$$

Lösung:

Es ist $(3 + 2i)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2i + (2i)^2 = 9 + 12i - 4 = 5 + 12i$.

Damit ergibt sich $\frac{(3 + 2i)^2 \cdot (-1 + i)}{5 - 12i} = \frac{(5 + 12i) \cdot (-1 + i)}{5 + 12i} = -1 + i$.

Also ist $\left|\frac{(3 + 2i)^2 \cdot (-1 + i)}{5 - 12i}\right| = |-1 + i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$.

Wegen $\operatorname{Im}(-1 + i) = 1 > 0$ gilt

$$\arg\left(\frac{(3 + 2i)^2 \cdot (-1 + i)}{5 - 12i}\right) = \arg(-1 + i) = \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

i) $(-2 + 3i) \cdot 3s$

$$(6 - 9 \cdot \sqrt{3}), (-9 - 6 \cdot \sqrt{3}), 6 \cdot \sqrt{13}, -\frac{\pi}{3} - \arccos\left(\frac{2 \cdot \sqrt{13}}{13}\right)$$

Lösung:

Mit den Additionstheoremen für doppelte Winkel ergibt sich

$$\begin{aligned} 3s &= 3 \cdot 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) \\ &= 6 \cdot \left(\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) + i \cdot \left(2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right) \\ &= 6 \cdot \left(\left(\frac{\sqrt{1}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 2i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{1}}{2}\right) \\ &= 6 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + 2i \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 6 \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i\right) = -3 + 3 \cdot \sqrt{3} \cdot i. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} (-2 + 3i) \cdot 3s &= (-2 + 3i) \cdot (-3 + 3 \cdot \sqrt{3} \cdot i) = 6 - 6 \cdot \sqrt{3} \cdot i - 9i - 9 \cdot \sqrt{3} \\ &= (6 - 9 \cdot \sqrt{3}) + (-9 - 6 \cdot \sqrt{3}) \cdot i. \end{aligned}$$

Wegen $\operatorname{Im}(-2 + 3i) = 3 > 0$ ergibt sich

$$|-2 + 3i| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

und

$$\arg(-2 + 3i) = \arccos\left(\frac{-2}{\sqrt{13}}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{2 \cdot \sqrt{13}}{13}\right).$$

Das liefert

$$|(-2 + 3i) \cdot 3s| = |-2 + 3i| \cdot 3 \cdot |s| = \sqrt{13} \cdot 3 \cdot 2 = 6 \cdot \sqrt{13}$$

und (wegen $0 < \arccos\left(\frac{2 \cdot \sqrt{13}}{13}\right) < \frac{\pi}{2} < \frac{2\pi}{3}$)

$$\begin{aligned} \arg((-2 + 3i) \cdot 3s) &= \arg(-2 + 3i) + \arg(s) - 2\pi \\ &= \pi - \arccos\left(\frac{2 \cdot \sqrt{13}}{13}\right) + \frac{2}{3} \cdot \pi - 2\pi = -\frac{\pi}{3} - \arccos\left(\frac{2 \cdot \sqrt{13}}{13}\right) \end{aligned}$$

j) $(\sqrt{3} + i)^5 + 4z$

$$0, 32, 32, \frac{\pi}{2}$$

Lösung:

$$\text{Es gilt } 4z = 4 \cdot 8 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 32 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{1}}{2}\right) = 16 \cdot \sqrt{3} + 16i.$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} + i)^5 &= 1 \cdot \sqrt{3}^5 \cdot i^0 + 5 \cdot \sqrt{3}^4 \cdot i^1 + 10 \cdot \sqrt{3}^3 \cdot i^2 + 10 \cdot \sqrt{3}^2 \cdot i^3 + 5 \cdot \sqrt{3}^1 \cdot i^4 + 1 \cdot \sqrt{3}^0 \cdot i^5 \\ &= 9 \cdot \sqrt{3} + 45i - 30 \cdot \sqrt{3} - 30i + 5 \cdot \sqrt{3} + i = -16 \cdot \sqrt{3} + 16i. \end{aligned}$$

$$\text{Damit folgt } (\sqrt{3} + i)^5 + 4z = (-16 \cdot \sqrt{3} + 16i) + (16 \cdot \sqrt{3} + 16i) = 0 + 32i.$$

Wegen $\operatorname{Im}(0 + 32i) = 32 > 0$ ist

$$|0 + 32i| = \sqrt{0^2 + 32^2} = \sqrt{32^2} = 32. \quad \text{und} \quad \arg(0 + 32i) = \arccos\left(\frac{0}{32}\right) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}.$$

k) $w \cdot s$

$-64, 0, 64, \pi$

Lösung:

Die Additionstheoreme von $\sin$ und $\cos$ liefern

$$\begin{aligned} w \cdot s &= 32 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) \cdot 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right) \\ &= 64 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right) + 64i \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right) \\ &= 64 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) \right) = 64 \cdot \left(\cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi) \right) = 64 \cdot (-1 + i \cdot 0) = -64. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich $\operatorname{Re}(w \cdot s) = -64$, $\operatorname{Im}(w \cdot s) = 0$, $|w \cdot s| = 64$ und $\arg(w \cdot s) = \pi$.



KomplZahlen/Wurzeln/Ag_KomplZahlen_WurzelnDirekt.tex

Aufgabe 91.426 (komplexe „Wurzeln“)

spf

Berechnen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit

a) $z^2 = -1$

$\{i; -i\}$

Lösung:

Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $z^2 = -1 \iff z^2 - (-1) = 0 \xrightarrow{-1=i^2} (z-i) \cdot (z+i) = 0 \iff z \in \{i; -i\}$.

Lösung (polar):

Es ist $\operatorname{Re}(-1) = -1 < 0$ und $\operatorname{Im}(-1) = 0$.

Damit folgt $|-1| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = \sqrt{1+0} = \sqrt{1} = 1$ und $\arg(-1) = \pi$.

Also ist $-1 = 1 \cdot e^{i\pi} = e^{i(\pi+2k\pi)}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Damit folgt $\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = -1\} = \left\{ e^{i(\frac{\pi}{2}+k\pi)} \in \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Für alle $\ell \in \mathbb{Z}$ gilt nun

$$e^{i(\frac{\pi}{2}+(2\ell)\pi)} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \ell \cdot 2\pi\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \ell \cdot 2\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + i \cdot 1 = i \quad \text{und}$$

$$e^{i(\frac{\pi}{2}+(2\ell-1)\pi)} = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \ell \cdot 2\pi\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \ell \cdot 2\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 - i \cdot 1 = -i.$$

Lösung (kartesisch):

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $(a + i \cdot b)^2 = -1$. Ausmultipliziert folgt $a^2 - b^2 + i \cdot 2ab = -1 + i \cdot 0$.

Ein Vergleich von Real- und Imaginärteil liefert $a^2 - b^2 = -1$ und $2ab = 0$.

Die zweite Gleichung liefert $a = 0$ oder $b = 0$. Wir machen eine Fallunterscheidung.

Fall 1 ($a = 0$): Für $a = 0$ liefert die erste Gleichung $-b^2 = -1$, also $b^2 = 1$, sprich $b \in \{1; -1\}$.

Fall 2 ($b = 0$): Für $b = 0$ liefert die erste Gleichung $a^2 = -1$, was wegen $a \in \mathbb{R}$ unmöglich ist.

Insgesamt folgt also $\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = -1\} = \{0 + 1 \cdot i; 0 + (-1) \cdot i\} = \{i; -i\}$.

b) $z^2 = 2 + \sqrt{12} \cdot i$

$\{\sqrt{3} + i; -\sqrt{3} - i\}$

Lösung (polar):

Es gilt $|2 + \sqrt{12} \cdot i| = \sqrt{2^2 + \sqrt{12}^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$ und

wegen $\operatorname{Im}(2 + \sqrt{12} \cdot i) = \sqrt{12} > 0$ ergibt sich $\arg(2 + \sqrt{12} \cdot i) = \arccos\left(\frac{2}{4}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Also ist $2 + \sqrt{12} \cdot i = 4 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i(\frac{\pi}{3}+2k\pi)}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Damit folgt $\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = 2 + \sqrt{12} \cdot i\} = \left\{ 2 \cdot e^{i(\frac{\pi}{6}+k\pi)} \in \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Für alle $\ell \in \mathbb{Z}$ gilt nun

$$\begin{aligned} 2 \cdot e^{i \cdot (\frac{\pi}{6} + (2\ell) \cdot \pi)} &= 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \ell \cdot 2\pi\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} + \ell \cdot 2\pi\right) \right) \\ &= 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3} + i \quad \text{und} \\ 2 \cdot e^{i \cdot (\frac{\pi}{6} + (2\ell+1) \cdot \pi)} &= 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \ell \cdot 2\pi + \pi\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} + \ell \cdot 2\pi + \pi\right) \right) \\ &= 2 \cdot \left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) + i \cdot 2 \cdot \left(-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - i \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = -\sqrt{3} - i. \end{aligned}$$

Lösung (kartesisch):

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $(a + i \cdot b)^2 = 2 + \sqrt{12} \cdot i$.

Wegen $(a + i \cdot b)^2 = a^2 - b^2 + i \cdot 2ab$ liefert ein Vergleich von Real- und Imaginärteil

$$a^2 - b^2 = 2 \quad \text{und} \quad 2ab = \sqrt{12} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{3}.$$

Mit der zweiten Gleichung folgt $a \neq 0 \neq b$ und so kann man diese Gleichung durch $2a$ dividieren, um sie anschließend in die erste Gleichung einzusetzen. Man erhält

$$a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{a}\right)^2 = 2 \quad \text{bzw.} \quad a^4 - 3 = 2a^2.$$

Dies lässt sich umformen zu

$$\begin{aligned} 0 &= (a^2)^2 - 2 \cdot a^2 \cdot 1 + 1^2 - 1 - 3 = (a^2 - 1)^2 - 4 = (a^2 - 1 - 2) \cdot (a^2 - 1 + 2) \\ &= (a^2 - 3) \cdot (a^2 + 1) = (a - \sqrt{3}) \cdot (a + \sqrt{3}) \cdot (a^2 + 1). \end{aligned}$$

Wegen $a \in \mathbb{R}$ ist $a^2 + 1 \geq 0 + 1 = 1 > 0$ und deshalb sind die beiden Lösungen der obigen Gleichung gerade $a = \sqrt{3}$ oder $a = -\sqrt{3}$.

Aus $2ab = 2 \cdot \sqrt{3}$ ergibt sich $b = 1$ für $a = \sqrt{3}$ und $b = -1$ für $a = -\sqrt{3}$.

Also ist $\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = 2 + \sqrt{12} \cdot i\} = \{\sqrt{3} + i; -\sqrt{3} - i\}$.

c) $z^4 = -8 - 8 \cdot \sqrt{3} \cdot i$

$$\{\sqrt{3} - i; 1 + i \cdot \sqrt{3}; -\sqrt{3} + i; -1 - i \cdot \sqrt{3}\}$$

Lösung (polar):

Es gilt

$$\left| -8 - 8 \cdot \sqrt{3} \cdot i \right| = \sqrt{(-8)^2 + (-8 \cdot \sqrt{3})^2} = \sqrt{64 + 64 \cdot 3} = \sqrt{64 \cdot 4} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{4} = 8 \cdot 2 = 16$$

und wegen $\operatorname{Im}(-8 - 8 \cdot \sqrt{3} \cdot i) = -8 \cdot \sqrt{3} < 0$ ergibt sich

$$\arg(-8 - 8 \cdot \sqrt{3} \cdot i) = -\arccos\left(\frac{-8}{16}\right) = -\left(\pi - \arccos\left(\frac{1}{2}\right)\right) = -\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}.$$

Also ist $-8 - 8 \cdot \sqrt{3} \cdot i = 16 \cdot e^{i \cdot (-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi)}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und das liefert

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \mid z^4 = -8 - 8 \cdot \sqrt{3} \cdot i \right\} = \left\{ \sqrt[4]{16} \cdot e^{i \cdot (-\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2})} \in \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Es ist $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$. und mit $e^{i \cdot \frac{-\pi}{6}} = \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ ergibt sich für alle $\ell \in \mathbb{Z}$

$$\sqrt[4]{16} \cdot e^{i \cdot \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{(4\ell-1)\pi}{2}\right)} = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{-\pi}{2}} \cdot e^{i \cdot \frac{-\pi}{6}} = 2 \cdot (-i) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = -1 - i \cdot \sqrt{3},$$

$$\sqrt[4]{16} \cdot e^{i \cdot \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{(4\ell)\pi}{2}\right)} = 2 \cdot e^{i \cdot \left(-\frac{\pi}{6} + 2\ell\pi\right)} = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{-\pi}{6}} = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \sqrt{3} - i,$$

$$\sqrt[4]{16} \cdot e^{i \cdot \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{(4\ell+1)\pi}{2}\right)} = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} \cdot e^{i \cdot \frac{-\pi}{6}} = 2 \cdot i \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = 1 + i \cdot \sqrt{3}$$

$$\text{und} \quad \sqrt[4]{16} \cdot e^{i \cdot \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{(4\ell+2)\pi}{2}\right)} = 2 \cdot e^{i \cdot \pi} \cdot e^{i \cdot \frac{-\pi}{6}} = 2 \cdot (-1) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = -\sqrt{3} + i.$$

Insgesamt folgt

$$\left\{z \in \mathbb{C} \mid z^4 = -8 - 8 \cdot \sqrt{3} \cdot i\right\} = \left\{\sqrt{3} - i; 1 + i \cdot \sqrt{3}; -\sqrt{3} + i; -1 - i \cdot \sqrt{3}\right\}.$$

Lösung (kartesisch):

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $(a + i \cdot b)^2 = -8 - 8 \cdot \sqrt{3} \cdot i$.

Wegen $(a + i \cdot b)^2 = a^2 - b^2 + i \cdot 2ab$ liefert ein Vergleich von Real- und Imaginärteil

$$a^2 - b^2 = -8 \quad \text{und} \quad 2ab = -8 \cdot \sqrt{3}.$$

Mit der zweiten Gleichung folgt $a \neq 0 \neq b$ und so kann man diese Gleichung durch $2a$ dividieren, um sie anschließend in die erste Gleichung einzusetzen. Man erhält

$$a^2 - \left(\frac{-4 \cdot \sqrt{3}}{a}\right)^2 = -8 \quad \text{bzw.} \quad a^4 - 16 \cdot 3 = -8a^2.$$

Dies lässt sich umformen zu

$$\begin{aligned} 0 &= (a^2)^2 + 4 \cdot a^2 \cdot 1 + 4^2 - 16 - 48 = (a^2 + 4)^2 - 64 = (a^2 + 4 - 8) \cdot (a^2 + 4 + 8) \\ &= (a^2 - 4) \cdot (a^2 + 12) = (a - 2) \cdot (a + 2) \cdot (a^2 + 12). \end{aligned}$$

Wegen $a \in \mathbb{R}$ ist $a^2 + 12 \geq 0 + 12 = 12 > 0$ und deshalb sind die beiden Lösungen der obigen Gleichung gerade $a = 2$ oder $a = -2$.

Aus $2ab = -8 \cdot \sqrt{3}$ ergibt sich $b = -2 \cdot \sqrt{3}$ für $a = 2$ und $b = 2 \cdot \sqrt{3}$ für $a = -2$.

Also ist $\{z \in \mathbb{C} \mid z^4 = -8 - 8 \cdot \sqrt{3} \cdot i\} = \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = 2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot i \text{ oder } z^2 = -2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot i\}$.

Wegen $-2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot i = -(2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot i) = i^2 \cdot (2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot i)$ folgt nach einer Multiplikation der zweiten Gleichung mit i^2 aus $i^4 = 1$

$$\left\{z \in \mathbb{C} \mid z^4 = -8 - 8 \cdot \sqrt{3} \cdot i\right\} = \left\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = 2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot i \text{ oder } (iz)^2 = 2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot i\right\}.$$

Seien $c \in \mathbb{R}$ und $d \in \mathbb{R}$ mit $(c + i \cdot d)^2 = 2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot i$.

Wegen $(c + i \cdot d)^2 = c^2 - d^2 + i \cdot 2cd$ liefert ein Vergleich von Real- und Imaginärteil

$$c^2 - d^2 = 2 \quad \text{und} \quad 2cd = -2 \cdot \sqrt{3}.$$

Mit der zweiten Gleichung folgt $c \neq 0 \neq d$ und so kann man diese Gleichung durch $2c$ dividieren, um sie anschließend in die erste Gleichung einzusetzen. Man erhält

$$c^2 - \left(\frac{-\sqrt{3}}{c}\right)^2 = 2 \quad \text{bzw.} \quad c^4 - 3 = 2c^2.$$

Dies lässt sich umformen zu

$$\begin{aligned} 0 &= (c^2)^2 - 2 \cdot c^2 \cdot 1 + 1^2 - 1 - 3 = (c^2 - 1)^2 - 4 = (c^2 - 1 - 2) \cdot (c^2 - 1 + 2) \\ &= (c^2 - 3) \cdot (c^2 + 1) = (c - \sqrt{3}) \cdot (c + \sqrt{3}) \cdot (c^2 + 1). \end{aligned}$$

Wegen $c \in \mathbb{R}$ ist $c^2 + 1 \geq 0 + 1 = 1 > 0$ und deshalb sind die beiden Lösungen der obigen Gleichung gerade $c = \sqrt{3}$ oder $c = -\sqrt{3}$.

Aus $2cd = -2 \cdot \sqrt{3}$ ergibt sich $d = -1$ für $c = \sqrt{3}$ und $d = 1$ für $c = -\sqrt{3}$.

Insgesamt folgt

$$\begin{aligned} z^4 = -8 - 8 \cdot \sqrt{3} \cdot i &\iff z = \sqrt{3} - i \text{ oder } z = -\sqrt{3} + i \text{ oder } iz = \sqrt{3} - i \text{ oder } iz = -\sqrt{3} + i \\ &\iff z = \sqrt{3} - i \text{ oder } z = -\sqrt{3} + i \text{ oder } z = -1 - \sqrt{3} \cdot i \text{ oder } z = 1 + \sqrt{3} \cdot i. \end{aligned}$$

d) $z^3 = -2 + 2i$

$$\left\{ 1 + i; -\frac{\sqrt{3}+1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2}; \frac{\sqrt{3}-1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right\}$$

Lösung (polar):

Es gilt

$$|-2 + 2i| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2}$$

und mit $\operatorname{Im}(-2 + 2i) = 2 > 0$ folgt

$$\arg(-2 + 2i) = \arccos\left(\frac{-2}{2\sqrt{2}}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Also ist $-2 + 2i = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{i(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi)}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und das liefert

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = -2 + 2i\} = \left\{ \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3})} \in \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Es ist $\sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2}^2 \cdot \sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2}^3} = \sqrt{2}$ und aus den Additionstheoremen folgt

$$\begin{aligned} e^{i \cdot \frac{\pi}{12}} &= \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) + i \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) + i \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für alle $\ell \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2 \cdot (3\ell-1)\pi}{3}\right)} &= e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} + 2\ell\pi\right)} = e^{i \cdot \frac{-5\pi}{12}} = e^{i \cdot \frac{-\pi}{2}} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{12}} = \left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right) \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{12}} \\ &= (0 + i \cdot (-1)) \cdot \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} - i \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \\ e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2 \cdot (3\ell)\pi}{3}\right)} &= e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{4} + 2\ell\pi\right)} = e^{i \cdot \frac{\pi}{4}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{und} \\ e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2 \cdot (3\ell+1)\pi}{3}\right)} &= e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} + 2\ell\pi\right)} = e^{i \cdot \frac{11\pi}{12}} = e^{i \cdot \pi} \cdot e^{i \cdot \left(-\frac{\pi}{12}\right)} = (\cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi)) \cdot \overline{e^{i \cdot \frac{\pi}{12}}} \\ &= (-1 + i \cdot 0) \cdot \overline{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} = -\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - i \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

Multipliziert mit $\sqrt{2}$ folgt

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = -2 + 2i\} = \left\{ 1 + i; -\frac{\sqrt{3}+1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2}; \frac{\sqrt{3}-1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right\}.$$

e) $z^3 = 5 - 12i$

$$\left\{ \sqrt[3]{13} \cdot e^{\frac{i}{3} \cdot (2\pi k - \arccos(\frac{5}{13}))} \in \mathbb{C} \mid k \in \{-1; 0; 1\} \right\}$$

Lösung (polar):

Es gilt $|5 - 12i| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$

und wegen $\operatorname{Im}(5 - 12i) = -12 < 0$ folgt $\arg(5 - 12i) = -\arccos\left(\frac{5}{13}\right)$.

Also ist $5 - 12i = 13 \cdot e^{i \cdot (-\arccos(\frac{5}{13}) + 2k\pi)}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und das liefert

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = 5 - 12i\} = \left\{ \sqrt[3]{13} \cdot e^{\frac{i}{3} \cdot (2\pi k - \arccos(\frac{5}{13}))} \in \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

f) $z^4 = 3 + i$

$$\left\{ \sqrt[4]{10} \cdot e^{\frac{i}{4} \cdot (2\pi k + \arccos(\frac{3 \cdot \sqrt{10}}{10}))} \in \mathbb{C} \mid k \in \{0; 1; 2; 3\} \right\}$$

Lösung (polar):

Es gilt $|3 + i| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$

und wegen $\operatorname{Im}(3 + i) = 1 > 0$ folgt $\arg(3 + i) = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \arccos\left(\frac{3 \cdot \sqrt{10}}{10}\right)$.

Also ist $3 + i = \sqrt{10} \cdot e^{i \cdot (\arccos(\frac{3 \cdot \sqrt{10}}{10}) + 2k\pi)}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und das liefert

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z^4 = 3 + i\} = \left\{ \sqrt[4]{10} \cdot e^{\frac{i}{4} \cdot (2\pi k + \arccos(\frac{3 \cdot \sqrt{10}}{10}))} \in \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Lösung (kartesisch):

Auch ein zweifacher kartesischer Ansatz führt hier zum Ziel. Die sich ergebenden Zahlenwerte sind aber so kompliziert, dass nicht empfohlen werden kann, auf diesem Weg zu rechnen.

g) $z^3 = \sqrt{3} - i$

$$\left\{ \sqrt[3]{2} \cdot e^{i \cdot (\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{18})} \in \mathbb{C} \mid k \in \{-1; 0; 1\} \right\}$$

Lösung (polar):

Es gilt $|\sqrt{3} - i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$

und wegen $\operatorname{Im}(\sqrt{3} - i) = -1 < 0$ ergibt sich $\arg(\sqrt{3} - i) = -\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

Also ist $\sqrt{3} - i = 2 \cdot e^{i \cdot (-\frac{\pi}{6} + 2k\pi)}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und das liefert

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = \sqrt{3} - i\} = \left\{ \sqrt[3]{2} \cdot e^{i \cdot (\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{18})} \in \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

h) $z^2 = -3 + 4i$

$$\{1 + 2i; -1 - 2i\}$$

Lösung (polar):

Es gilt $|-3 + 4i| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

und wegen $\operatorname{Im}(-3 + 4i) = 4 > 0$ ergibt sich $\arg(-3 + 4i) = \arccos\left(-\frac{3}{5}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{3}{5}\right)$.

Also ist $-3 + 4i = 5 \cdot e^{i \cdot (-\arccos(\frac{3}{5}) + (2k+1) \cdot \pi)}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und das liefert

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = -3 + 4i\} = \left\{ \sqrt{5} \cdot e^{i \cdot (\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \arccos(\frac{3}{5}) + k\pi)} \in \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Lösung (kartesisch):

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $(a + i \cdot b)^2 = -3 + 4i$.

Wegen $(a + i \cdot b)^2 = a^2 - b^2 + i \cdot 2ab$ liefert ein Vergleich von Real- und Imaginärteil

$$a^2 - b^2 = -3 \quad \text{und} \quad 2ab = 4.$$

Mit der zweiten Gleichung folgt $a \neq 0 \neq b$ und so kann man diese Gleichung durch $2a$ dividieren, um sie anschließend in die erste Gleichung einzusetzen. Man erhält

$$a^2 - \left(\frac{2}{a}\right)^2 = -3 \quad \text{bzw.} \quad a^4 - 4 = -3a^2.$$

Dies lässt sich umformen zu

$$\begin{aligned} 0 &= (a^2)^2 + 2 \cdot a^2 \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 4 = (a^2 + \frac{3}{2})^2 - \frac{25}{4} = (a^2 + \frac{3}{2} - \frac{5}{2}) \cdot (a^2 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2}) \\ &= (a^2 - 1) \cdot (a^2 + 2) = (a - 1) \cdot (a + 1) \cdot (a^2 + 4). \end{aligned}$$

Wegen $a \in \mathbb{R}$ ist $a^2 + 4 \geq 0 + 4 = 4 > 0$ und deshalb sind die beiden Lösungen der obigen Gleichung gerade $a = 1$ oder $a = -1$.

Aus $2ab = 4$ ergibt sich $b = 2$ für $a = 1$ und $b = -2$ für $a = -1$.

Also ist $\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = -3 + 4i\} = \{1 + 2i; -1 - 2i\}$.



KomplZahlen/Zahlenebene/Ag_KomplMengen_AllesZusammen.tex

Aufgabe 92.427 (Komplexe Zahlen und Mengen Skizzieren in WiWi Alt-Klausuren)

a) Skizzieren Sie die Menge aller $z \in \mathbb{C}$ mit $(z - (1 + i))^2 \in \mathbb{R}$.

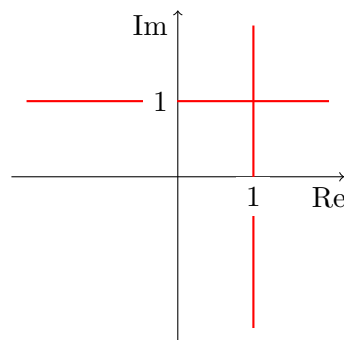
Geraden $x = 1$ und $y = 1$

Lösung:

$$(z - (1 + i))^2 = (x + iy - (1 + i))^2 = ((x - 1) + i(y - 1))^2 = (x - 1)^2 - (y - 1)^2 + i2(x - 1)(y - 1)$$

Dies soll eine reelle Zahl sein. Damit gilt

$$2(x - 1)(y - 1) = 0 \\ \Rightarrow x = 1 \text{ oder } y = 1$$



b) Skizzieren Sie die Menge aller $z \in \mathbb{C}$ auf der die (komplexe) Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{i\pi k} (z - 1)^k$$

absolut konvergiert.

Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt in $z = 1 + 0i$, ohne Rand

Lösung:

Lösung mit Konvergenzbereich:

Bestimmen des Konvergenzradius

$$r = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|e^{i\pi k}|}} = 1$$

Damit konvergiert die Reihe für $|z - 1| < 1$ (Einheitskreis um den Punkt $z = 1$) absolut. Untersuchen des Rands, d.h. $|z - 1| = 1$. Für absolute Konvergenz muss gelten das $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert. Damit ergibt sich

$$\sum_{k=0}^{\infty} |e^{i\pi k} (z - 1)^k| = \sum_{k=0}^{\infty} |e^{i\pi k}| |(z - 1)^k| = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot |z - 1|^k = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot 1^k \Rightarrow \text{divergent}$$

Lösung mit geometrischer Reihe:

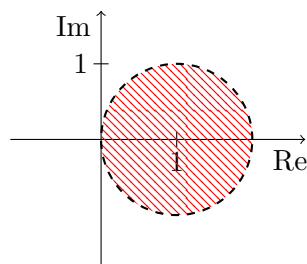
Die gegebene Potenzreihe kann als eine geometrische Reihe (in Abhängigkeit von $z \in \mathbb{C}$) betrachtet werden:

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{i\pi k} (z-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{i\pi} (z-1))^k = \sum_{k=0}^{\infty} q(z)^k$$

mit $q(z) = e^{i\pi}(z-1)$. Diese Potenzreihe ist genau dann konvergent, wenn $|q(z)| < 1$ gilt:

$$|q(z)| < 1 \iff |e^{i\pi}(z-1)| < 1 \iff \underbrace{|e^{i\pi}|}_{=1} \cdot |(z-1)| < 1 \iff |z-1| < 1.$$

Die Bedingung $|z-1| < 1$ beschreibt das Innere eines Kreises mit Radius 1 um den Mittelpunkt in $z_0 = 1 + 0i$.



c) Skizzieren Sie die komplexwertige Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definiert durch

$$a_n := \exp\left(\frac{\pi i n}{4}\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

in einem geeigneten Koordinatensystem.

Schnittpunkte des Einheitskreises mit Achsen und allen Winkelhalbierenden

Lösung:

Es ist

$$a_1 = \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right)$$

$$a_2 = \exp\left(\frac{\pi i}{2}\right)$$

$$a_3 = \exp\left(\frac{\pi i \cdot 3}{4}\right)$$

$$a_4 = \exp(\pi i)$$

$$a_5 = \exp\left(\frac{\pi i \cdot 5}{4}\right)$$

$$a_6 = \exp\left(\frac{\pi i \cdot 3}{2}\right)$$

$$a_7 = \exp\left(\frac{\pi i \cdot 7}{4}\right)$$

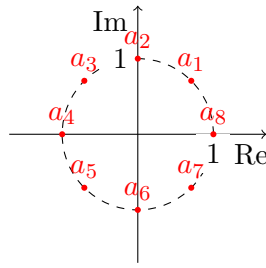
$$a_8 = \exp(\pi i \cdot 2)$$

$$a_9 = \exp\left(\frac{\pi i \cdot 9}{4}\right) = a_1$$

$$a_{10} = a_2$$

...

Die Folgenglieder liegen auf dem Einheitskreis, da $|a_n| = 1$, das Argument kann leicht abgelesen werden. Damit ergibt sich



KomplZahlen/Zahlenebene/Ag_KomplMengen_Geom2Kreise2Ebenen.tex

Aufgabe 92.428 (Teilmengen der Gaußschen Zahlenebene)

Beschreiben Sie die Teilmengen geometrisch:

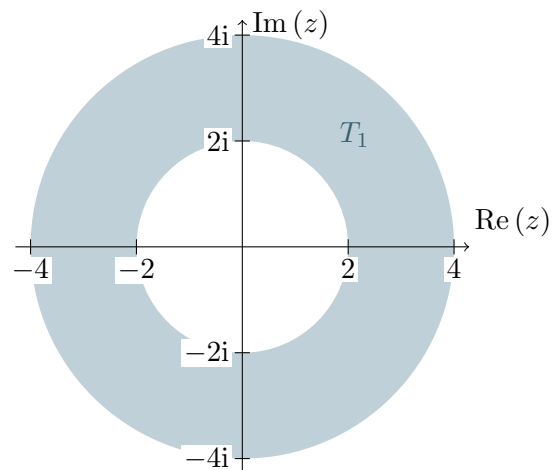
a) $T_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z| < 4\}$

Kreisring um 0 mit Innenradius 2 und Außenradius 4 ohne Ränder.

Lösung:

Der Betrag $|z|$ einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ beschreibt Ihren Abstand zum Ursprung in der Gauß'schen Zahlenebene.

Das heißt, dass $z \in T_1$ liegt, genau dann wenn z mehr als 2 aber weniger als 4 Längeneinheiten vom Ursprung entfernt liegt.



b) $T_2 := \{z^3 \in \mathbb{C} \mid z \in \mathbb{C} \text{ und } 0 < |z| < 4\}$

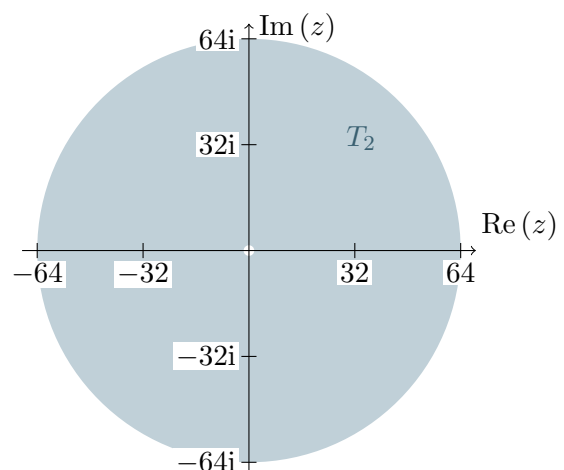
Kreisscheibe um 0 ohne Mittelpunkt mit Radius 64 („punktierte“ Kreisscheibe).

Lösung:

Ist $w \in T_2$, so gibt es ein $z \in \mathbb{C}$ mit $0 < |z| < 4$ und $w = z^3$. Also liegt z in der Kreisscheibe mit dem Ursprung als Zentrum und Radius 4 ohne den Ursprung. Welche $w \in \mathbb{C}$ kann man so erreichen?

Behauptung: $T_2 = \{w \in \mathbb{C} \mid 0 < |w| < 64\}$

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $0 < |z| < 4$ gilt $|w| = |z^3| = |z|^3$, also $0^3 < |w| < 4^3$. Der Betrag wächst also zur dritten Potenz.



c) $T_3 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(i \cdot z) < 2\}$

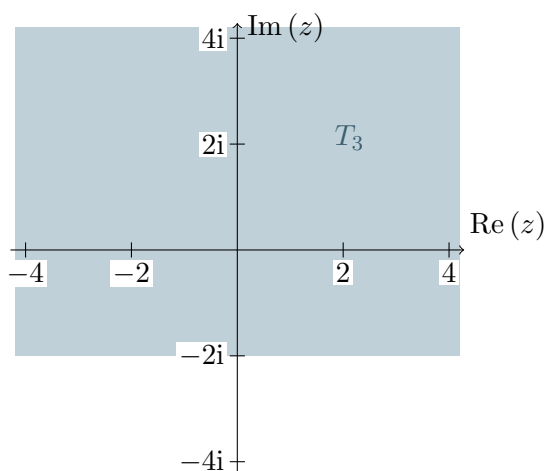
Halbebene oberhalb der Geraden $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(s) = -2\}$ ohne Rand. $T_3 = \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(s) > -2\}$

Lösung:

Sei $z = a + bi$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ eine komplexe Zahl. Wenn $\operatorname{Re}(z) = a > 0$ ist, dann liegt z rechts der imaginären Achse in der Gauß'schen Zahlenebene. Nun gilt:

$$\operatorname{Re}(i \cdot z) = \operatorname{Re}(-b + ai) = -b.$$

Dieser Realteil ist also genau dann kleiner 2, wenn $\operatorname{Im}(z) = b > -2$ ist.



d) $T_4 := \{z^2 \in \mathbb{C} \mid z \in \mathbb{C} \text{ und } \operatorname{Re}(z) < 0\}$

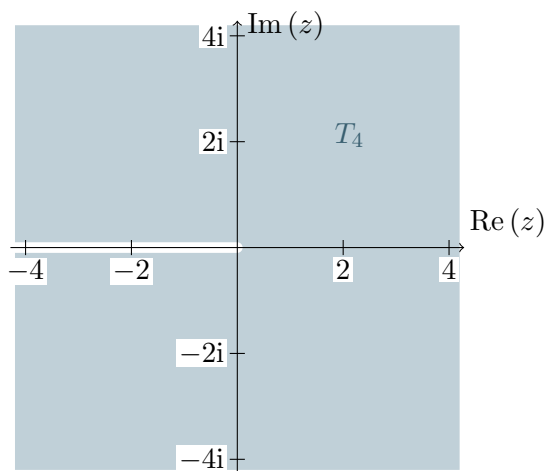
Gauß'sche Zahlenebene ohne 0 und ohne negative reelle Zahlen: $T_4 = \mathbb{C} \setminus \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) \leq 0 \text{ und } \operatorname{Im}(s) = 0\}$.

Lösung:

Wenn $z^2 \in T_4$ ist, dann gilt $\operatorname{Re}(z) < 0$.

In Polardarstellung heißt das, dass $z = r \cdot e^{i\alpha}$ mit $\alpha \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2})$ und $z \neq 0$ sein muss. Für z^2 bedeutet das: Der Winkel in der Polardarstellung von z^2 liegt in $(\pi; 3\pi)$, also ist das Argument $\arg(z^2) \in (-\pi; \pi)$.

Das heißt, z^2 kann überall liegen, außer der negativen reellen Achse inklusive des Ursprungs.



KomplZahlen/Zahlenebene/Ag_KomplMengen_Geom2Punkte2Geraden3Kreise1Ellipse.tex

Aufgabe 92.429 (Teilmengen komplexer Zahlen geometrisch beschreiben)

jgl

Beschreiben Sie die Teilmengen $T_k := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Es gilt } A_k(z)\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq 8$ geometrisch:

a) $A_1(z)$: $z = 3$

Punkt $\{3 + 0 \cdot i\}$

Lösung: Es gibt nur ein $z \in \mathbb{C}$ mit $z = 3$, nämlich $z = 3 + 0 \cdot i$.

Also ist $T_1 = \{3 + 0 \cdot i\}$ ein Punkt.

b) $A_2(z): 3z + 12i = 0$

Punkt $\{0 + (-4) \cdot i\}$

Lösung: Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $3z + 12i = 0$ gilt

$$3z + 12i = 0 \xLeftrightarrow{-12i} 3z = -12i \xLeftrightarrow{\cdot \frac{1}{3}} z = -4i \iff z = 0 + (-4) \cdot i.$$

Also ist $T_2 = \{0 + (-4) \cdot i\}$ ein Punkt.

c) $A_3(z): z = 6 - \bar{z}$

Gerade $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = 3\}$

Lösung: Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt mit $x := \operatorname{Re}(z)$ und $y := \operatorname{Im}(z)$

$$\begin{aligned} z = 6 - \bar{z} &\iff x + iy = 6 - \overline{x + iy} \iff x + iy = 6 - (x - iy) \\ &\iff x + iy = 6 - x + iy \iff 2x = 6 \iff x = 3. \end{aligned}$$

Also ist $T_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = 3\}$ eine senkrechte Gerade.

d) $A_4(z): iz - i\bar{z} = 8$

Gerade $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = -4\}$

Lösung: Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt mit $x := \operatorname{Re}(z)$ und $y := \operatorname{Im}(z)$

$$\begin{aligned} iz - i\bar{z} = 8 &\xLeftrightarrow{\cdot i} -z + \bar{z} = 8i \iff -(x + iy) + \overline{x + iy} = 8i \\ &\iff -x - iy + x - iy = 8i \iff -2iy = 8i \xLeftrightarrow{\cdot \frac{i}{2}} y = -4. \end{aligned}$$

Also ist $T_4 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = -4\}$ eine waagrechte Gerade.

e) $A_5(z): |i - 5 + z| = 3$

Kreis um $5 - i$ mit Radius 3

Lösung: Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$|i - 5 + z| = 3 \iff |z - 5 + i| = 3 \iff |z - (5 - i)| = 3.$$

Also besteht $T_5 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - (5 - i)| = 3\}$ aus allen Zahlen, die von $5 - i$ den Abstand 3 haben, bildet also den Rand des Kreises um $5 - i$ mit Radius 3.

f) $A_6(z): |z - 3 - i| \leq 2$

Kreisscheibe um $3 + i$ mit Radius 2

Lösung: Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$|z - 3 - i| \leq 2 \iff |z - (3 + i)| \leq 2.$$

Also besteht $T_6 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - (3 + i)| \leq 2\}$ aus allen Zahlen, die von $3 + i$ einen Abstand von höchstens 2 haben, bildet also die Kreisscheibe um $3 + i$ mit Radius 2 inklusive des Rands.

g) $A_7(z): |2iz + 6 + 2i| = 3$

Kreis um $-1 + 3i$ mit Radius $\frac{3}{2}$

Lösung: Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$|2iz + 6 + 2i| = 3 \iff |2i \cdot (z - 3i + 1)| = 3 \iff 2 \cdot |z - 3i + 1| = 3 \iff |z - (-1 + 3i)| = \frac{3}{2}.$$

Also besteht $T_7 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - (-1 + 3i)| = \frac{3}{2}\}$ aus allen Zahlen, die von $-1 + 3i$ den Abstand $\frac{3}{2}$ haben, bildet also den Rand des Kreises um $-1 + 3i$ mit Radius $\frac{3}{2}$.

h) $A_8(z): |z + i| = 7 - |4i - z|$

Ellipse um $\frac{3}{2} \cdot i$ mit Halbachsen $\sqrt{6}$ und $\frac{7}{2} \cdot i$

Lösung:

Es gibt keine $z \in \mathbb{C}$ mit $|4i - z| > 7$ und $|z + i| = 7 - |4i - z|$.

Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - 4i| \leq 7$ gilt mit $x := \operatorname{Re}(z)$ und $y := \operatorname{Im}(z)$

$$\begin{aligned} |z + i| = 7 - |4i - z| &\iff |x + i \cdot (y + 1)| = 7 - |-x + i \cdot (4 - y)| \\ &\stackrel{(\cdot)^2}{\iff} x^2 + (y + 1)^2 = 49 - 14 \cdot \sqrt{(-x)^2 + (4 - y)^2} + x^2 + (4 - y)^2 \\ &\iff x^2 + y^2 + 2y + 1 = 49 - 14 \cdot \sqrt{x^2 + 16 - 8y + y^2} + x^2 + 16 - 8y + y^2 \\ &\iff 14 \cdot \sqrt{x^2 + y^2 - 8y + 16} = 64 - 10y. \end{aligned}$$

Da die rechte Seite dieser Ungleichung als positives Vielfaches einer Wurzel nicht negativ werden kann, gibt es kein $z \in \mathbb{C}$ mit $|4i - z| \leq 7$, $\operatorname{Im}(z) > \frac{32}{5}$ und $|z + i| = 7 - |4i - z|$.

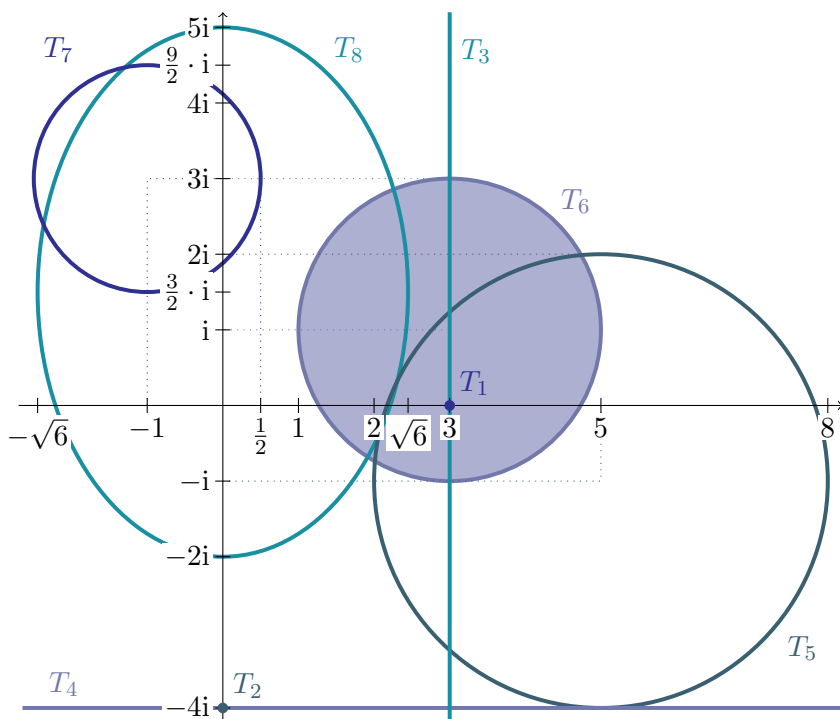
Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - 4i| \leq 7$ und $\operatorname{Im}(z) \leq \frac{32}{5}$ gilt mit $x := \operatorname{Re}(z)$ und $y := \operatorname{Im}(z)$ wegen $294 = 7 \cdot 42 = 7 \cdot 7 \cdot 6 = 49 \cdot 6$ nach Division durch 2

$$\begin{aligned} |z + i| = 7 - |4i - z| &\iff 7 \cdot \sqrt{x^2 + y^2 - 8y + 16} = 32 - 5y \\ &\stackrel{(\cdot)^2}{\iff} 49 \cdot (x^2 + y^2 - 8y + 16) = (32 - 5y)^2 \\ &\iff 49x^2 + 49y^2 - 392y + 784 = 1024 - 320y + 25y^2 \\ &\iff 49x^2 + 24y^2 - 72y = 240 \iff 49x^2 + 24 \cdot \left(y^2 - 2 \cdot y \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) = 240 + 24 \cdot \frac{9}{4} \\ &\iff 49x^2 + 24 \cdot \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 294 \stackrel{\cdot \frac{1}{294}}{\iff} \frac{1}{6} \cdot x^2 + \frac{4}{49} \cdot \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 1. \end{aligned}$$

Also bildet $T_8 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \left(\frac{\operatorname{Re}(z)-0}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{Im}(z)-\frac{3}{2}}{\frac{7}{2}}\right)^2 = 1\right\}$ in der Gauß'schen Zahlenebene eine Ellipse um $0 + \frac{3}{2} \cdot i$ mit den Halbachsenlängen $\sqrt{6}$ in Real- und $\frac{7}{2}$ in Imaginärrichtung. Die Brennpunkte der Ellipse liegen in $-i$ und $4i$. Ihr Summenabstand beträgt 7.

Alle Punkte der Ellipse erfüllen die beiden geforderten Voraussetzungen $|4i - z| = |z - 4i| \leq 7$ und $\operatorname{Im}(z) \leq \frac{32}{5} = 6 + \frac{2}{5}$.

Lösung:



KomplZahlen/Zahlenebene/Ag_KomplMengen_Geom3Kreise1Halbebene.tex

Aufgabe 92.430 (komplexe Teilmengen)

jgl

Beschreiben Sie die Teilmengen aller $z \in \mathbb{C}$, die jeweils die folgende Bedingung erfüllen, geometrisch:

a) $\left| \frac{z}{z-3} \right| < \frac{1}{2}$

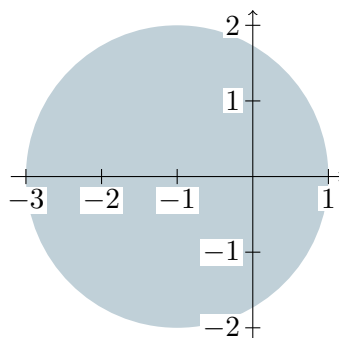
Kreisscheibe mit Mittelpunkt -1 und Radius 2 ohne Rand.

Lösung:

Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{3\}$ mit $x := \operatorname{Re}(z)$ und $y := \operatorname{Im}(z)$ gilt

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{z}{z-3} \right| < \frac{1}{2} &\iff 2 \cdot |z| < |z-3| &\iff 4 \cdot |z|^2 < |z-3|^2 \\
 &\iff 4 \cdot |x+iy|^2 < |(x-3)+iy|^2 &\iff 4 \cdot (x^2+y^2) < (x-3)^2+y^2 \\
 &\iff 4x^2+4y^2 < x^2-6x+9+y^2 &\iff 3x^2+6x+3y^2-9 < 0 \\
 &\iff x^2+2x+y^2-3 < 0 &\iff x^2+2 \cdot x \cdot 1+1^2-1+y^2-3 < 0 \\
 &\iff (x+1)^2+y^2-4 < 0 &\iff (x-(-1))^2+(y-0)^2 < 2^2.
 \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung beschreibt das Innere eines Kreises mit Mittelpunkt in $-1 + i \cdot 0$ und Radius 2 ohne den Rand des Kreises:



b) $\left| \frac{2z + 5 - i}{z + 2i} \right| \geq 3$

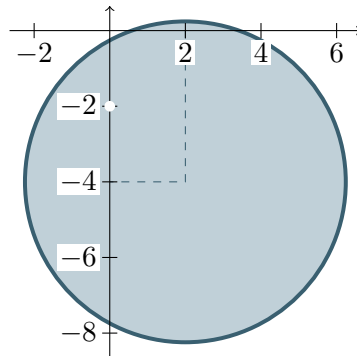
Kreisscheibe mit Mittelpunkt $2 - 4i$ und Radius $3 \cdot \sqrt{2}$ mit Rand und ohne $-2i$.

Lösung:

Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{-2i\}$ mit $x := \operatorname{Re}(z)$ und $y := \operatorname{Im}(z)$ gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{2z+5-i}{z+2i} \right| \geq 3 &\iff |2z+5-i| \geq 3 \cdot |z+2i| \\ &\iff |2x+2iy+5-i|^2 \geq 9 \cdot |x+iy+2i|^2 \\ &\iff |(2x+5) + (2y-1) \cdot i|^2 \geq 9 \cdot |x+(y+2) \cdot i|^2 \\ &\iff (2x+5)^2 + (2y-1)^2 \geq 9 \cdot x^2 + 9 \cdot (y+2)^2 \\ &\iff 4x^2 + 20x + 25 + 4y^2 - 4y + 1 \geq 9x^2 + 9y^2 + 36y + 36 \\ &\iff 0 \geq 5x^2 - 20x + 5y^2 + 40y + 10 \\ &\iff 0 \geq x^2 - 4x + y^2 + 8y + 2 \\ &\iff 0 \geq x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 - 4 + y^2 + 2 \cdot y \cdot 4 + 4^2 - 16 + 2 \\ &\iff 0 \geq (x-2)^2 + (y+4)^2 - 18 \\ &\iff (x-2)^2 + (y-(-4))^2 \leq \sqrt{18}^2. \end{aligned}$$

Das ist ein Kreis inklusive Rand mit Mittelpunkt $2 + i \cdot (-4)$ und Radius $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3 \cdot \sqrt{2}$. Die Definitionslücke bei $z = -2i$ muss aus dem Gebiet herausgenommen werden.



c) $\operatorname{Re} \left(\frac{6+2i}{z} \right) > 1$

Kreisscheibe mit Mittelpunkt $3 + i$ und Radius $\sqrt{10}$ ohne Rand.

Lösung:

Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $x := \operatorname{Re}(z)$ und $y := \operatorname{Im}(z)$ gilt

$$\operatorname{Re} \left(\frac{6+2i}{z} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{6+2i}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{6x-6iy+2ix+2y}{x^2+ixy-iyx+y^2} \right) = \frac{6x+2y}{x^2+y^2}.$$

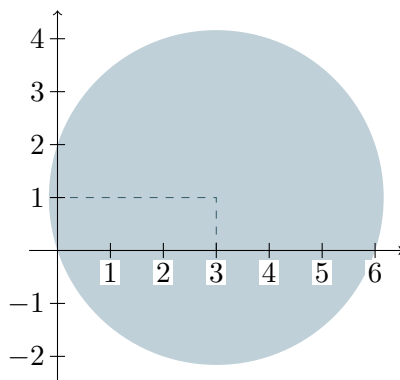
Also gilt

$$\operatorname{Re} \left(\frac{6+2i}{z} \right) > 1 \iff \frac{6x+2y}{x^2+y^2} > 1 \iff 6x+2y > x^2+y^2,$$

wobei auch in der letzten Ungleichung $x = y = 0$ keine Lösung ist, also wurden keine zusätzliche Lösungen dazu erstellt. Forme die letzte Ungleichung in eine Kreis(un)gleichung um:

$$\begin{aligned} 6x+2y > x^2+y^2 &\iff 0 > x^2-6x+y^2-2y \\ &\iff 0 > x^2-2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 9 + y^2 - 2 \cdot y \cdot 1 + 1^2 - 1 \\ &\iff 0 > (x-3)^2 + (y-1)^2 - 10 \\ &\iff (x-3)^2 + (y-1)^2 < \sqrt{10}^2. \end{aligned}$$

Das beschreibt das Innere eines Kreises mit Mittelpunkt in $3 + 1 \cdot i$ und Radius $\sqrt{10}$.



d) $\operatorname{Im} \left(\frac{5z - 8i}{3i - 2} \right) \leq \frac{1}{13}$

Halbebene oberhalb der Geraden $\{x + i \cdot (-\frac{3}{2} \cdot x + \frac{3}{2}) \mid x \in \mathbb{R}\}$ mit Rand (einschließlich der Geraden).

Lösung:

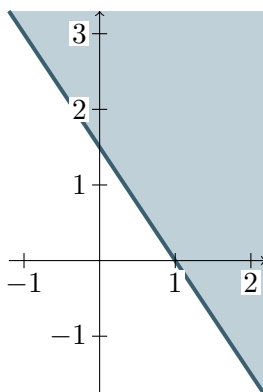
Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $x := \operatorname{Re}(z)$ und $y := \operatorname{Im}(z)$ gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left(\frac{5z - 8i}{3i - 2} \right) &= \operatorname{Im} \left(\frac{5 \cdot (x + iy) - 8i}{-2 + 3i} \cdot \frac{-2 - 3i}{-2 - 3i} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{(5x + 5iy - 8i) \cdot (-2 - 3i)}{2^2 + 3^2} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{-10x - 15ix - 10iy + 15y + 16i - 24}{13} \right) = \frac{-15x - 10y + 16}{13}. \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left(\frac{5z - 8i}{3i - 2} \right) \leq \frac{1}{13} &\iff \frac{-15x - 10y + 16}{13} \leq \frac{1}{13} &\iff -15x - 10y + 16 \leq 1 \\ &\iff -15x + 15 \leq 10y &\iff y \geq -\frac{3}{2} \cdot x + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Dies beschreibt die Halbebene oberhalb und inklusive der Geraden $y = -\frac{3}{2} \cdot x + \frac{3}{2}$.



KomplZahlen/Zahlenebene/Ag_KomplMengen_GeomEinfuehrung1Kreis.tex

Aufgabe 92.431 (Teilmengen der Gauß'schen Zahlenebene)

In dieser Aufgabe soll die Ungleichung aus der Mengendefinition von M geeignet umformt werden, damit M in die Gauß'sche Zahlenebene gezeichnet werden kann:

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |8 - z| > \sqrt{|8 - 2 \cdot \operatorname{Im}(z)|} \right\}.$$

$$M = \{ z \in \mathbb{C} \mid (\operatorname{Re}(z) - 8)^2 + (\operatorname{Im}(z) - (-1))^2 > 3^2 \}; \text{ alles außer der Kreisscheibe mit Radius 3 um } 8 - i.$$

- a) Quadrieren Sie die Ungleichung aus der Mengendefinition! (Überlegen Sie sich, ob es sich beim Quadrieren um eine Äquivalenzrelation handelt!)

Lösung:

Da beide Seiten der Ungleichung nicht-negativ sind, handelt es sich beim Quadrieren um eine Äquivalenzrelation. Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt also

$$|8 - z| > \sqrt{|8 - 2 \cdot \operatorname{Im}(z)|} \iff |8 - z|^2 > |8 - 2 \cdot \operatorname{Im}(z)|.$$

- b) Drücken Sie $z \in \mathbb{C}$ mit Hilfe ihres Real- und Imaginärteils aus und schreiben Sie die Differenz im Betrag auf der linken Seite der Ungleichung als eine komplexe Zahl in kartesischer Darstellung!

Lösung:

Für alle $z \in \mathbb{C}$ ergibt sich mit $x := \operatorname{Re}(z)$ und $y := \operatorname{Im}(z)$

$$|8 - z|^2 = |8 - (x + iy)|^2 = |(8 - x) + i \cdot (-y)|^2.$$

- c) Auf der linken Seite steht nun der Betrag einer komplexen Zahl. Dieser kann mit Hilfe der Definition des Betrages aufgelöst werden. Auf der rechten Seite steht der Betrag einer reellen Zahl. Dieser kann mit Hilfe einer Fallunterscheidung aufgelöst werden.

Verwenden Sie jeweils eine quadratische Ergänzung, um zu zeigen,

- (i) dass alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im}(z) > 4$ Elemente von M sind!

Lösung:

Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im}(z) > 4$ ergibt sich mit $x := \operatorname{Re}(z)$ und $y := \operatorname{Im}(z)$

$$\begin{aligned} z \in M &\iff |(8 - x) + i \cdot (-y)|^2 > |8 - 2 \cdot \operatorname{Im}(z)| \\ &\iff (8 - x)^2 + (-y)^2 > -(8 - 2y) \\ &\iff -(x - 8)^2 + y^2 > -8 + 2y \\ &\stackrel{-2y}{\iff} (x - 8)^2 + y^2 - 2 \cdot y \cdot 1 + 1^2 - 1 > -8 \\ &\stackrel{+1}{\iff} (x - 8)^2 + (y - 1)^2 > -7. \end{aligned}$$

Da $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$ sind, ist diese Ungleichung für alle zugelassenen x und y erfüllt. Sprich alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im}(z) > 4$ liegen in M .

- (ii) dass die Ungleichung aus der Definition von M für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im}(z) \leq 4$ einer Kreisungleichung entspricht!

Lösung:

Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im}(z) \leq 4$ ergibt sich mit $x := \operatorname{Re}(z)$ und $y := \operatorname{Im}(z)$

$$\begin{aligned} z \in M &\iff |(8 - x) + i \cdot (-y)|^2 > |8 - 2 \cdot \operatorname{Im}(z)| \\ &\iff (8 - x)^2 + (-y)^2 > 8 - 2y \\ &\stackrel{+2y}{\iff} -(x - 8)^2 + y^2 + 2 \cdot y \cdot 1 + 1^2 - 1 > 8 \\ &\stackrel{+1}{\iff} (x - 8)^2 + (y + 1)^2 > 9. \end{aligned}$$

- d) Überlegen Sie sich vor dem Zeichnen

- (i) wohin der Kreis vom Ursprung aus verschoben wird,
(ii) welchen Radius der Kreis hat,

- (iii) ob der Rand des Kreises in der Menge enthalten ist und
 (iv) ob der Bereich innerhalb oder außerhalb des Kreises in der Menge enthalten ist!

Lösung:

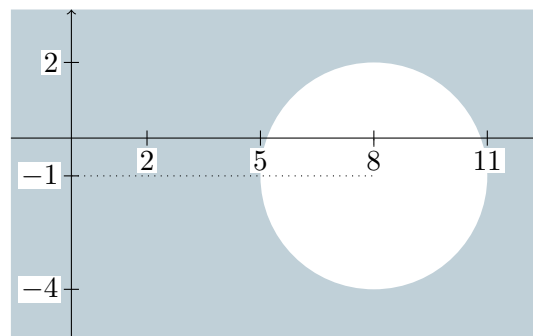
Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im}(z) > 4$ gilt $\operatorname{Im}(z) + 1 > 5$, also $(\operatorname{Im}(z) + 1)^2 > 25$, sprich insbesondere $(\operatorname{Re}(z) - 8)^2 + (\operatorname{Im}(z) + 1)^2 > 9$.

Das liefert mit den vorangegangenen Aufgabenteilen für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} z \in M &\iff \operatorname{Im}(z) > 4 \text{ oder } (\operatorname{Re}(z) - 8)^2 + (\operatorname{Im}(z) + 1)^2 > 9 \\ &\iff (\operatorname{Re}(z) - 8)^2 + (\operatorname{Im}(z) + 1)^2 > 9 \\ &\iff (\operatorname{Re}(z) - 8)^2 + (\operatorname{Im}(z) - (-1))^2 > 3^2. \end{aligned}$$

Es handelt sich also um einen Kreis mit Radius 3, der um 8 Einheiten nach rechts und um 1 Einheit nach unten verschoben ist.

Weder der Bereich innerhalb des Kreises, noch der Kreisrand gehören zur Menge M . Die Menge M besteht aus allen Zahlen außerhalb des Kreises.



KomplZahlen/Zahlenebene/Ag_KomplMengen_GgfVereinfachenUndZeichnen.tex

Aufgabe 92.432 (Teilmengen der Gauß'schen Zahlenebene)

spf

Vereinfachen Sie falls nötig die folgenden Mengen und zeichnen Sie sie in die Gauß'sche Zahlenebene!

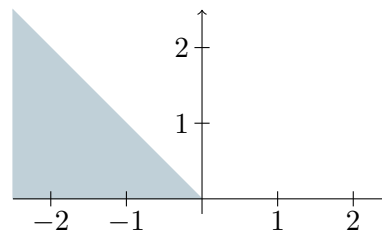
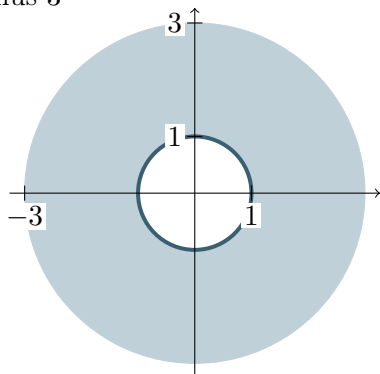
Jeweils $\{x + iy \in \mathbb{C} \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \text{ und } x \text{ und } y \text{ erfüllen die angegebenen Bedingungen}\}$:

a) $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| < 3\}$

$$1^2 \leq x^2 + y^2 < 3^2$$

Lösung:

Kreisring mit innerem Radius 1 und äußerem Radius 3



c) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| > 1 \text{ und } |z - 2| < 2\}$

$$(x - 1)^2 + y^2 > 1^2 \text{ und } (x - 2)^2 + y^2 < 2^2$$

b) $\{w \in \mathbb{C} \mid \frac{3\pi}{4} < \arg(w) < \pi\}$

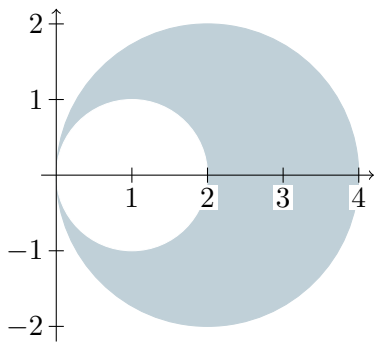
$$0 < y < -x$$

Lösung:

das untere Dreieck im zweiten Quadranten

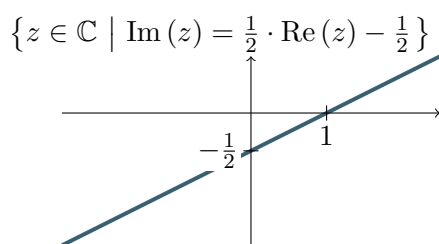
Lösung:

alles innerhalb des Kreises um 2 mit Radius 2, was außerhalb des Kreises um 1 mit Radius 1 liegt.



d) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = 2 \cdot \operatorname{Im}(z) + 1\}$
 $y = \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{2}$

Lösung:



e) $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s^2) < 0\}$
 $|y| > |x|$

Lösung:

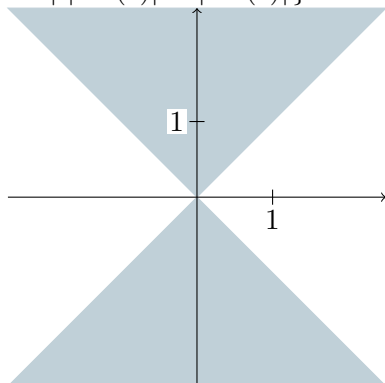
Für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $x := \operatorname{Re}(s)$ und $y := \operatorname{Im}(s)$ gilt

$$\begin{aligned} s^2 &= (x + iy)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot iy + (iy)^2 \\ &= x^2 - y^2 + 2xyi. \end{aligned}$$

Wegen $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$ gilt $\operatorname{Re}(s^2) = x^2 - y^2$, also

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(s^2) < 0 &\iff x^2 - y^2 < 0 \\ \iff x^2 < y^2 &\iff |x| < |y|. \end{aligned}$$

Die zu zeichnende Menge ist also $\{s \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im}(s)| > |\operatorname{Re}(s)|\}$



f) $\{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(w^2) \geq \operatorname{Im}(w)\}$
 $(x \geq \frac{1}{2} \text{ und } y \geq 0) \text{ oder } (x \leq \frac{1}{2} \text{ und } y \leq 0)$

Lösung:

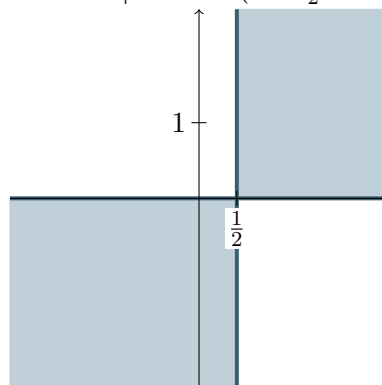
Für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $x := \operatorname{Re}(w)$ und $y := \operatorname{Im}(w)$ gilt

$$\begin{aligned} w^2 &= (x + iy)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot iy + (iy)^2 \\ &= x^2 - y^2 + 2xyi. \end{aligned}$$

Wegen $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$ gilt $\operatorname{Im}(w^2) = 2xy$, also

$$\operatorname{Im}(w^2) \geq \operatorname{Im}(w) \iff 2xy \geq y.$$

Zum Vereinfachen dieser Ungleichung möchte man durch $2y$ teilen, was eine Fallunterscheidung notwendig macht. Da die Ungleichung für $y = 0$ erfüllt ist, ergibt sich zu zeichnende Menge zu

$$\left\{ x + iy \in \mathbb{C} \mid \text{oder } \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \text{ und } y \geq 0 \\ x \leq \frac{1}{2} \text{ und } y \leq 0 \end{cases} \right\}$$


g) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| \leq |z - i + 1|\}$
 $x \geq -\frac{1}{2}$

Lösung:

Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $x := \operatorname{Re}(z)$ und $y := \operatorname{Im}(z)$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} |z - i| &= |x + iy - i| \\ &= |x + (y - 1) \cdot i| \\ &= \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 - 2y + 1} \end{aligned}$$

und

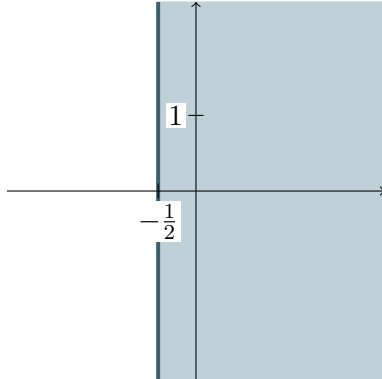
$$\begin{aligned} |z - i + 1| &= |x + iy - i + 1| \\ &= |(x + 1) + (y - 1) \cdot i| \\ &= \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2}. \end{aligned}$$

Im Fall $0 \leq |z - i| \leq |z - i + 1|$ gilt auch $|z - i|^2 \leq |z - i + 1|^2$ und es folgt

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 \leq x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2$$

beziehungsweise $x \geq -\frac{1}{2}$.

Also ist $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| \leq |z - i + 1|\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \geq -\frac{1}{2}\}$.



h) $\{s \in \mathbb{C} \mid |s - 2| < |s|\}$

$$x > 1$$

Lösung:

Für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $x := \operatorname{Re}(s)$ und $y := \operatorname{Im}(s)$ gilt $|s| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$ und

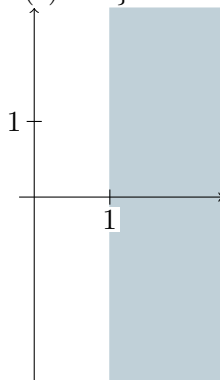
$$\begin{aligned} |s - 2| &= |x + iy - 2| \\ &= |(x - 2) + iy| \\ &= \sqrt{(x - 2)^2 + y^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 - 4x + 4}. \end{aligned}$$

Im Fall $0 \leq |s - 2| < |s|$ gilt auch $|s - 2|^2 \leq |s|^2$ und es folgt

$$x^2 + y^2 - 4x + 4 < x^2 + y^2$$

beziehungsweise $x > 1$.

Die zu zeichnende Menge ist also $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > 1\}$



i) $\{z \in \mathbb{C} \mid z \cdot \bar{z} + 3z + 3\bar{z} = 0\}$

$$(x - (-3))^2 + y^2 = 3^2$$

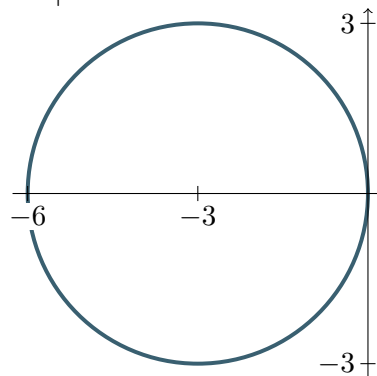
Lösung:

Seien $z \in \mathbb{C}$ mit $z \cdot \bar{z} + 3z + 3\bar{z} = 0$, $x := \operatorname{Re}(z)$ und $y := \operatorname{Im}(z)$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} + 3z + 3\bar{z} &= (x + iy) \cdot (x - iy) \\ &\quad + 3 \cdot (x + iy) + 3 \cdot (x - iy) \\ &= x^2 + ixy - iyx - i^2 y^2 \\ &\quad + 3x + 3iy + 3x - 3iy \\ &= x^2 + y^2 + 6x \\ &= x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 9 + y^2 \\ &= (x + 3)^2 + y^2 - 9. \end{aligned}$$

Also ist $\{z \in \mathbb{C} \mid z \cdot \bar{z} + 3z + 3\bar{z} = 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid (\operatorname{Re}(z) - (-3))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2 = 3^2\}$.



j) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z + i| + |z - i| < 2\}$

$$1 < 0$$

Lösung:

Dies ist die leere Menge. Denn für alle $z \in \mathbb{C}$ liefert die Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} |z + i| + |z - i| &= |z + i| + |i - z| \\ &\geq |z + i + i - z| \\ &= |2i| \\ &= 2, \end{aligned}$$

so dass $|z + i| + |z - i| < 2$ für *kein* $z \in \mathbb{C}$ gilt.



KurvenOberfl/IntSaetze/Ag_Divergenzsatz.tex

Aufgabe 93.433 (Integralsatz von Gauß (Divergenzsatz))

kr

Berechnen Sie jeweils den Fluss des gegebenen Feldes durch die angegebene geschlossene Oberfläche A mit Hilfe des Satzes von Gauß.

- a) $\vec{f}(x, y, z) = (x^2 \quad yx \quad yz)^T$, A : Oberfläche des Würfels $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$

2

Lösung: Satz von Gauss (für geschlossene Oberflächen): $\int_A \vec{f} \cdot d\vec{A} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{f} dV$, Fläche $A = \partial V$ (A ist Rand von V).

Für unser Vektorfeld ergibt sich die Divergenz $\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(yx) + \frac{\partial}{\partial z}(yz) = 2x + x + y = 3x + y$

Damit erhalten wir hier:

$$\int_A \vec{f} \cdot d\vec{A} = \int_V (3x + y) dV = \int_{z=0}^1 \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^1 (3x + y) dx dy dz = 1 \cdot \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^1 (3x + y) dx dy = \int_{y=0}^1 \left[\frac{3}{2}x^2 + yx \right]_{x=0}^1 dy = \int_{y=0}^1 \left(\frac{3}{2} + y \right) dy = \left[\frac{3}{2}y + \frac{1}{2}y^2 \right]_0^1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

- b) $\vec{f}(x, y, z) = (xy^2 \quad yx^2 \quad \frac{1}{3}z^3)^T$, A : Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $R > 0$

$\frac{4\pi R^5}{5}$

Lösung: Satz von Gauss (für geschlossene Oberflächen): $\int_A \vec{f} \cdot d\vec{A} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{f} dV$, Fläche $A = \partial V$ (A ist Rand von V).

Für unser Vektorfeld ergibt sich die Divergenz $\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \frac{\partial}{\partial x}(xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(yx^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{1}{3}z^3) = y^2 + x^2 + z^2$.

Wir führen Kugelkoordinaten der Form $x = r \sin(\theta) \cos(\varphi)$, $y = r \sin(\theta) \sin(\varphi)$, $z = r \cos(\theta)$ ein. Dann ergibt sich $\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = r^2$. Das von A umschlossene Volumen V ist eine Vollkugel mit Radius $R > 0$. Bei der Umrechnung des Volumenelements von kartesischen Koordinaten zu Kugelkoordinaten ergibt der Betrag der Jacobideterminante einen Umrechnungsfaktor von $r^2 \sin(\theta)$.

Damit erhalten wir hier:

$$\begin{aligned} \int_A \vec{f} \cdot d\vec{A} &= \int_V r^2 dV = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^R r^2 \cdot r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi = 2\pi \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^R r^4 \sin(\theta) dr d\theta \\ &= 2\pi \int_{\theta=0}^{\pi} \left[\frac{1}{5} r^5 \sin(\theta) \right]_{r=0}^R d\theta = 2\pi \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{1}{5} R^5 \sin(\theta) d\theta = 2\pi \frac{1}{5} R^5 [-\cos(\theta)]_0^{\pi} = 2\pi \frac{1}{5} R^5 (-(-1) - (-1)) = \frac{4\pi}{5} R^5 \end{aligned}$$

- c) Berechnen Sie die Flussintegrale aus a) und b) noch einmal direkt, ohne den Satz von Gauß.

Lösung:

a) Zur Berechnung des Integrals I sind sechs Teilintegrale über die Seitenflächen des Würfels zu

berechnen, die Normalenvektoren sollen nach aussen zeigen und lauten $\pm \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\pm \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\pm \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

bei $x = 1$: $I_1 = \int_0^1 \int_0^1 \begin{pmatrix} 1^2 \\ y \cdot 1 \\ yz \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dy dz = \dots = 1$

bei $x = 0$: $I_2 = \int_0^1 \int_0^1 \begin{pmatrix} 0^2 \\ y \cdot 0 \\ yz \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dy dz = 0$

bei $y = 1$: $I_3 = \int_0^1 \int_0^1 \begin{pmatrix} x^2 \\ 1 \cdot x \\ 1 \cdot z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dx dz = \dots = \frac{1}{2}$

bei $y = 0$: $I_4 = \int_0^1 \int_0^1 \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \cdot x \\ 0 \cdot z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} dx dz = 0$

$$\text{bei } z = 1: I_5 = \int_0^1 \int_0^1 \begin{pmatrix} x^2 \\ y \cdot x \\ y \cdot 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dx dy = \dots = \frac{1}{2}$$

$$\text{bei } z = 0: I_6 = \int_0^1 \int_0^1 \begin{pmatrix} x^2 \\ y \cdot x \\ y \cdot 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dx dy = 0$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 = 2$$

b) Wir parametrisieren die Oberfläche mit Kugelkoordinaten der Form $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ mit $x = R \sin(\theta) \cos(\varphi)$, $y = R \sin(\theta) \sin(\varphi)$, $z = R \cos(\theta)$. Für die Tangentialvektoren ergibt sich dann $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} R \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ R \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ -R \sin(\theta) \end{pmatrix}$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -R \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ R \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$.

Der Normalenvektor ist $\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \dots = R \sin(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Dann folgt

$$\vec{f} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} xy^2 \\ yx^2 \\ \frac{1}{3}z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} R \sin(\theta) = (2x^2y^2 + \frac{1}{3}z^4) R \sin(\theta) = (2R^4 \sin^4(\theta) \sin^2(\varphi) \cos^2(\varphi) + \frac{1}{3}R^4 \cos^4(\theta)) R \sin(\theta).$$

Für das Oberflächenintegral über die komplette Kugeloberfläche ergibt sich dann

$$I = R^5 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} (2 \sin^5(\theta) \sin^2(\varphi) \cos^2(\varphi) + \frac{1}{3} \cos^4(\theta) \sin(\theta)) d\theta d\varphi.$$

Mit der Identität $\sin^5(\theta) = (\sin^2(\theta))^2 \sin(\theta) = (1 - \cos^2(\theta))^2 \sin(\theta)$ und der Substitution $u = \cos(\theta)$, $du = -\sin(\theta) d\theta$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} I &= -R^5 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{u=1}^{-1} 2(1-u^2)^2 \sin^2(\varphi) \cos^2(\varphi) + \frac{1}{3}u^4 du d\varphi \\ &= -R^5 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[(2u - \frac{4}{3}u^3 + \frac{2}{5}u^5) \sin^2(\varphi) \cos^2(\varphi) + \frac{2}{5}u^5 \right]_{u=1}^{-1} d\varphi = 2R^5 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\frac{16}{15} \sin^2(\varphi) \cos^2(\varphi) + \frac{1}{15} \right) d\varphi = \\ &\dots = \frac{4\pi R^5}{5}. \end{aligned}$$

Dabei wurde verwendet, dass $\int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin^2(\varphi) \cos^2(\varphi) d\varphi = \frac{\pi}{4}$ ist:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin^2(\varphi) \cos^2(\varphi) d\varphi &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right)^2 \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right)^2 d\varphi = -\frac{1}{16} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi})^2 d\varphi \\ &= -\frac{1}{16} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (e^{4i\varphi} - 2 + e^{-4i\varphi}) d\varphi = -\frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \cos(4\varphi) d\varphi + \frac{1}{16} \int_0^{2\pi} 2 d\varphi = 0 + \frac{1}{16} \cdot 4\pi = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$



KurvenOberfl/IntSaetze/Ag_GaussGreen.tex

Aufgabe 93.434 (Satz von Gauß-Green)

kr

Verwenden Sie jeweils den Satz von Gauß-Green, um die Kurvenintegrale zu berechnen.

- a) $\int_{\partial E} \begin{pmatrix} e^x \\ xy \end{pmatrix} \cdot d\vec{s}$, wobei ∂E der im mathematisch positiven Umlaufsinn durchlaufene Rand der Fläche $E = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$ ist. $\frac{1}{10}$

Lösung:

$$\begin{aligned} \int_{\partial E} \begin{pmatrix} e^x \\ xy \end{pmatrix} \cdot d\vec{s} &= \int_E \frac{\partial}{\partial x}(xy) - \frac{\partial}{\partial y}(e^x) d(x, y) = \int_E y d(x, y) = \int_0^1 \int_0^{x^2} y dy dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{x^2} dx = \\ &= \int_0^1 \frac{x^4}{2} dx = \left[\frac{x^5}{2 \cdot 5} \right]_0^1 = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

- b) $\int_{\partial D} \begin{pmatrix} y - \sin(x) \\ -x \end{pmatrix} \cdot d\vec{s}$, wobei ∂D der im mathematisch positiven Umlaufsinn durchlaufene Rand des Dreiecks D mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$ und $(\frac{\pi}{2}, 1)$ ist. $-\pi/2$

Lösung:

$\int_{\partial D} \begin{pmatrix} y - \sin(x) \\ -x \end{pmatrix} \cdot d\vec{s} = \int_D \frac{\partial}{\partial x}(-x) - \frac{\partial}{\partial y}(y - \sin(x)) d(x, y) = \int_D (-1 - 1) d(x, y) = -2 \int_D d(x, y) = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 1 = -\frac{\pi}{2}$, wobei wir die Flächeninhaltsformel für ein Dreieck mit einer Grundseite der Länge $\frac{\pi}{2}$ und einer Höhe von 1 verwendet haben.

- c) $\int_{\partial C} \begin{pmatrix} 2x + 2y \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix} \cdot d\vec{s}$, wobei ∂C der im mathematisch positiven Umlaufsinn durchlaufene Rand der Fläche $C = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, -\sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{x}\}$ ist. $-\frac{16}{15}$

Lösung:

$$\int_{\partial C} \begin{pmatrix} 2x + 2y \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix} \cdot d\vec{s} = \int_C \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(2x + 2y) d(x, y) = \int_C (2x - 2) d(x, y) = \int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} (2x - 2) dy dx = \int_0^1 [2xy - 2y]_{y=-\sqrt{x}}^{y=\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^1 (2x\sqrt{x} - 2\sqrt{x}) dx = 4 \int_0^1 \left(x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right) dx = 4 \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = 4 \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3}\right) = 4 \frac{6-10}{15} = -\frac{16}{15}$$

- d) $\int_{\partial K} \begin{pmatrix} y^2 \\ 3xy \end{pmatrix} \cdot d\vec{s}$, wobei ∂K der im mathematisch positiven Umlaufsinn durchlaufene Rand der Fläche $K = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ ist. $\frac{2}{3}$

Lösung:

$$\int_{\partial K} \begin{pmatrix} y^2 \\ 3xy \end{pmatrix} \cdot d\vec{s} = \int_K \frac{\partial}{\partial x}(3xy) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2) d(x, y) = \int_K y d(x, y) = \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy dx = \int_{-1}^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{1-x^2}{2} dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{x^3}{6}\right]_{-1}^1 = \frac{2}{3}$$

- e) Berechnen Sie die Kurvenintegrale aus b) und d) noch einmal direkt, ohne den Satz von Gauß-Green.

Lösung:

Integral aus b):

Wir zerlegen den Weg ∂D in drei Abschnitte: $\gamma_1: \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq \pi/2, \gamma_2: \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \pi/2 \\ t \end{pmatrix},$

$$0 \leq t \leq 1, \gamma_3: \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \pi/2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\pi/2 \\ -1 \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 1$$

$$\int_{\gamma_1} \begin{pmatrix} y - \sin(x) \\ -x \end{pmatrix} \cdot d\vec{s} = \int_0^{\pi/2} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = -\int_0^{\pi/2} \sin(t) dt = [\cos(t)]_0^{\pi/2} = -1$$

$$\int_{\gamma_2} \begin{pmatrix} y - \sin(x) \\ -x \end{pmatrix} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \begin{pmatrix} \pi/2 - 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = -\int_0^1 \frac{\pi}{2} dt = -\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_3} \begin{pmatrix} y - \sin(x) \\ -x \end{pmatrix} \cdot d\vec{s} &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 - t - \sin(\frac{\pi}{2}(1 - t)) \\ \frac{\pi}{2}(t - 1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\pi/2 \\ -1 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\pi}{2} (t - 1 + \sin(\frac{\pi}{2}(1 - t)) + 1 - t) dt = \int_0^1 \frac{\pi}{2} \sin(\frac{\pi}{2}(1 - t)) dt = [\cos(\frac{\pi}{2}(1 - t))]_0^1 \\ &= \cos(0) - \cos(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Insgesamt ergibt sich damit } \int_{\partial D} \begin{pmatrix} y - \sin(x) \\ -x \end{pmatrix} \cdot d\vec{s} = -1 - \frac{\pi}{2} + 1 = -\frac{\pi}{2}$$

Integral aus d):

Wir zerlegen den Weg ∂K in zwei Abschnitte:

$$\gamma_1: \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq \pi$$

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} \begin{pmatrix} y^2 \\ 3xy \end{pmatrix} \cdot d\vec{s} &= \int_0^\pi \begin{pmatrix} \sin^2(t) \\ 3 \cos(t) \sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt = \int_0^\pi (-\sin^3(t) + 3 \cos^2(t) \sin(t)) dt \\
&= \int_0^\pi (-\sin(t) + 4 \cos^2(t) \sin(t)) dt = \left[\cos(t) - \frac{4}{3} \cos^3(t) \right]_0^\pi = \cos(\pi) - \frac{4}{3} \cos^3(\pi) - \cos(0) + \frac{4}{3} \cos^3(0) \\
&= -1 + \frac{4}{3} - 1 + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} - 2 = \frac{8}{3} - \frac{6}{3} = \frac{2}{3} \\
\text{Dabei haben wir die Identität } \sin^2(t) &= 1 - \cos^2(t) \text{ verwendet.}
\end{aligned}$$

$$\gamma_2: \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad -1 \leq t \leq 1.$$

$$\int_{\gamma_2} \begin{pmatrix} y^2 \\ 3xy \end{pmatrix} \cdot d\vec{s} = \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} 0^2 \\ 3 \cdot t \cdot 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_{-1}^1 0 dt = 0$$

$$\text{Insgesamt ergibt sich damit } \int_{\partial K} \begin{pmatrix} y^2 \\ 3xy \end{pmatrix} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \begin{pmatrix} y^2 \\ 3xy \end{pmatrix} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \begin{pmatrix} y^2 \\ 3xy \end{pmatrix} \cdot d\vec{s} = \frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3}.$$



KurvenOberfl/IntSaetze/Ag_Integralsaetze_GaussDivergenzsatz2D.tex

Aufgabe 93.435 (Gaußscher Divergenzsatz in $\mathbb{R}^2$)

PZ

Berechnen Sie für die angegebenen zweidimensionalen Vektorfelder $\vec{F}$ und Gebiete $G \subseteq \mathbb{R}^2$ mit dem Gaußschen Divergenzsatz das Integral

$$\oint_{\partial G} \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle ds,$$

wobei $\vec{N}$ das äußere Einheitsnormalenvektorfeld des Randes von G ist.

$$\text{a) } \vec{F}(x, y) := \begin{pmatrix} xy \\ -x^2 \end{pmatrix} \text{ und } G := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0, x^2 + y^2 < 1 \right\}. \quad \frac{2}{3}$$

Lösung:

Die Divergenz von $\vec{F}$ in einem Punkt $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\operatorname{div} \vec{F}(x, y) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y) = y + 0 = y.$$

Damit wir diese Funktion über G integrieren können, schreiben wir $\overline{G} := G \cup \partial G$ als Normalbereich:

$$\overline{G} = \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1], 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2} \right\}.$$

Mit dem Gaußschen Divergenzsatz erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial G} \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle ds &= \iint_G \operatorname{div} \vec{F}(x, y) d(x, y) = \iint_{\overline{G}} \underbrace{\operatorname{div} \vec{F}(x, y)}_{=y} d(x, y) = \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy dx \\
&= \int_{-1}^1 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \int_{-1}^1 \frac{1-x^2}{2} dx \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{x=-1}^{x=1} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) \right) \\
&= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

- b) $\vec{F}(x, y) := \begin{pmatrix} \sin(x) \\ 2xy \end{pmatrix}$ und $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ist das offene Dreieck mit den Eckpunkten $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ 1 \end{pmatrix}$.
 $\frac{2\pi^3-6}{3\pi}$

Lösung:

Die Divergenz von $\vec{F}$ ist einem Punkt $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\operatorname{div} \vec{F}(x, y) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y) = \cos(x) + 2x.$$

Damit wir diese Funktion über G integrieren können, schreiben wir $\overline{G} := G \cup \partial G$ als Normalbereich:

$$\overline{G} = \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, \pi], 0 \leq y \leq \frac{x}{\pi} \right\}.$$

Mit dem Gaußschen Divergenzsatz und partieller Integration erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_{\partial G} \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle \, ds &= \iint_G \operatorname{div} \vec{F}(x, y) \, d(x, y) = \iint_{\overline{G}} \underbrace{\operatorname{div} \vec{F}(x, y)}_{=\cos(x)+2x} \, d(x, y) \\ &= \int_0^\pi \int_0^{\frac{x}{\pi}} (\cos(x) + 2x) \, dy \, dx \\ &= \int_0^\pi \underbrace{\frac{x}{\pi}}_{u(x)} \cdot \underbrace{(\cos(x) + 2x)}_{v'(x)} \, dx \\ &= \left[\frac{x}{\pi} \cdot (\sin(x) + x^2) \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{\pi} \cdot (\sin(x) + x^2) \, dx \\ &= \frac{\pi}{\pi} \cdot (\sin(\pi) + \pi^2) - 0 - \frac{1}{\pi} \cdot \left[-\cos(x) + \frac{x^3}{3} \right]_0^\pi \\ &= \pi^2 - \frac{1}{\pi} \cdot \left(-(-1) + \frac{\pi^3}{3} - (-1 + 0) \right) \\ &= \frac{3\pi^3}{3\pi} - \frac{3 \cdot \left(2 + \frac{\pi^3}{3} \right)}{3\pi} = \frac{2\pi^3 - 6}{3\pi}. \end{aligned}$$

- c) Berechnen sie die Integrale aus a) und b) noch einmal direkt, ohne den Divergenzsatz.

Lösung:

Ist $\vec{\gamma}(t)$, $a \leq t \leq b$ eine Parametrisierung des Weges ∂G mit positivem Umlaufsinn, so gilt allgemein für die Flussintegrale im $\mathbb{R}^2$:

$$\oint_{\partial G} \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle \, ds = \int_a^b \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{N} \|\dot{\vec{\gamma}}(t)\| \, dt = \int_a^b \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dot{\vec{\gamma}}(t) \, dt.$$

Bei der letzten Gleichheit wurde verwendet, dass der Normalenvektor $\vec{N}$ für alle $t \in [a, b]$ mit $\|\dot{\vec{\gamma}}(t)\| \neq 0$ gegeben ist durch $\vec{N} = \frac{1}{\|\dot{\vec{\gamma}}(t)\|} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dot{\vec{\gamma}}(t)$. (Man kann durch direktes Nachrechnen prüfen, dass dieser Vektor senkrecht auf ∂G bzw. senkrecht auf dem Tangentialvektor $\dot{\vec{\gamma}}(t)$ steht, normiert ist und nach außen orientiert ist, also genau die Eigenschaften hat, die der Einheitsnormalenvektor $\vec{N}$ haben muss.)

Integral aus a):

Wir teilen ∂G in zwei Abschnitte auf: $\vec{\gamma}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq \pi$ und $\vec{\gamma}_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$, $-1 \leq t \leq 1$.

Dann gilt:

$$\int_0^\pi \vec{F}(\vec{\gamma}_1(t)) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \dot{\vec{\gamma}}_1(t) \, dt = \int_0^\pi \begin{pmatrix} \cos(t) \sin(t) \\ -\cos^2(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \, dt = \int_0^\pi \begin{pmatrix} \cos(t) \sin(t) \\ -\cos^2(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \, dt.$$

$$\begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} dt = \int_0^\pi (\cos^2(t) \sin(t) - \cos^2(t) \sin(t)) dt = \int_0^\pi 0 dt = 0$$

$$\int_{-1}^1 \vec{F}(\vec{\gamma}_2(t)) \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \dot{\vec{\gamma}}_2(t) \right) dt = \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} t \cdot 0 \\ -t^2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) dt = \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} 0 \\ -t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt = \int_{-1}^1 t^2 dt = \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_{-1}^1 = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 = \frac{2}{3}$$

$$\text{Insgesamt ergibt sich } \oint_{\partial G} \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle ds = 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

Integral aus b):

Wir teilen ∂G in drei Abschnitte auf: $\vec{\gamma}_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq \pi$, $\vec{\gamma}_2(t) = \begin{pmatrix} \pi \\ t \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq 1$ und

$\vec{\gamma}_3(t) = \begin{pmatrix} \pi \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\pi \\ -1 \end{pmatrix} \cdot t$, $0 \leq t \leq 1$. Dann gilt:

$$\int_0^\pi \vec{F}(\vec{\gamma}_1(t)) \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \dot{\vec{\gamma}}_1(t) \right) dt = \int_0^\pi \begin{pmatrix} \sin(t) \\ 2 \cdot t \cdot 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) dt = \int_0^\pi \begin{pmatrix} \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt = \int_0^\pi 0 dt = 0$$

$$\int_0^1 \vec{F}(\vec{\gamma}_2(t)) \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \dot{\vec{\gamma}}_2(t) \right) dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} \sin(\pi) \\ 2 \cdot \pi \cdot t \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2\pi t \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2\pi t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 0 dt = 0$$

$$\int_0^1 \vec{F}(\vec{\gamma}_3(t)) \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \dot{\vec{\gamma}}_3(t) \right) dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} \sin(\pi(1-t)) \\ 2\pi(1-t)^2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\pi \\ -1 \end{pmatrix} \right) dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} \sin(\pi(1-t)) \\ 2\pi(1-t)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \pi \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (-\sin(\pi(1-t)) + 2\pi^2(1-t)^2) dt = \left[-\frac{1}{\pi} \cos(\pi(1-t)) - 2\pi^2 \frac{1}{3} (1-t)^3 \right]_0^1 = \frac{1}{\pi} \cos(0) - 2\pi^2 \frac{1}{3} \cdot 0 - \left(-\frac{1}{\pi} \cos(\pi) - 2\pi^2 \frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} + \frac{2\pi^2}{3} = \frac{2\pi^3 - 6}{3\pi}$$

$$\text{Insgesamt ergibt sich } \oint_{\partial G} \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle ds = 0 + 0 + \frac{2\pi^3 - 6}{3\pi} = \frac{2\pi^3 - 6}{3\pi}$$



KurvenOberfl/IntSaetze/Ag_StokesAnwendung.tex

Aufgabe 93.436 (Anwendung des Satzes von Stokes)

kr

Eine elektrische Stromdichte sei durch $\vec{j}(x, y, z) = j_0 \cdot e^{-a(x^2+y^2)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit Konstanten a und j_0 gegeben.

- a) Berechnen Sie den Stromfluss I durch eine Kreisfläche um die z -Achse mit Radius $R > 0$ (Normalenvektor in positive z -Richtung).

$$I(R) = j_0 \frac{\pi}{a} (1 - e^{-aR^2})$$

Lösung: Gesucht ist das vektorielle Oberflächenintegral $I(R) = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{\sigma}$. Wir parametrisieren die

Punkte in der Kreisfläche A als $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Daraus

ergibt sich $\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} r$. Dieser Vektor zeigt bereits in positive z -Richtung wie gefordert.

Das Integral für I lautet dann

$$I(R) = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \vec{j}(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), 0) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right) dr d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R j_0 \cdot e^{-ar^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} r dr d\varphi =$$

$$2\pi j_0 \int_{r=0}^R e^{-ar^2} r dr = 2\pi j_0 \left[-\frac{1}{2a} e^{-ar^2} \right]_0^R = j_0 \frac{\pi}{a} (1 - e^{-aR^2}).$$

- b) In der Magnetostatik gilt zwischen der Stromdichte und der Magnetischen Flussdichte $\vec{B}$ der Zusammenhang $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ mit der Naturkonstante μ_0 . Machen Sie für $\vec{B}$ den aus der Symmetrie des Problems folgenden Ansatz $\vec{B}(x, y, z) = f(r) \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und berechnen Sie $f(R)$ und $\|\vec{B}\|$ für konstantes $R > 0$. Verwenden Sie dazu den Satz von Stokes und das Ergebnis aus a).
- $$f(R) = j_0 \frac{\mu_0}{2aR} (1 - e^{-aR^2}) = \|\vec{B}\|$$

Lösung: Wegen der physikalischen Beziehung $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ zwischen $\vec{B}$ und $\vec{j}$ gilt $I(R) = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{\sigma} = \frac{1}{\mu_0} \int_A \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{\sigma} = \int_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{s}$ wobei wir den Satz von Stokes verwendet haben.

Mit dem Ansatz für $\vec{B}$ aus der Aufgabenstellung und der Parametrisierung des Kreisrandes

$$\gamma = \partial A: \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos(t) \\ R \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t < 2\pi$$

ergibt sich für das Wegintegral $\int_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{s} =$

$$\int_0^{2\pi} f(R) \frac{1}{R} \begin{pmatrix} -R \sin(t) \\ R \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} R \cos(t) \\ R \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right) dt = \int_0^{2\pi} f(R) \frac{1}{R} \begin{pmatrix} -R \sin(t) \\ R \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -R \sin(t) \\ R \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} dt =$$

$$f(R) \int_0^{2\pi} \frac{1}{R} R^2 (\sin^2(t) + \cos^2(t)) dt = f(R) R \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi R f(R). \text{ Insgesamt ergibt sich also}$$

$$I(R) = 2\pi R f(R) \Rightarrow f(R) = \frac{1}{2\pi R} I(R) = j_0 \frac{\mu_0}{2aR} (1 - e^{-aR^2}) \text{ wobei wir das Ergebnis aus a)}$$

eingesetzt haben. Daraus folgt $\|\vec{B}\| = f(R) \cdot \frac{1}{R} \left\| \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = f(R).$

Aufgabenblatt 94

Mengen/Grundbegriffe



Mengen/Grundbegriffe/Ag_Mengen_ElementBzwTeilmengeJaOderNein.tex

Aufgabe 94.437 (Elemente und Teilmengen von Mengen)

Welche der Zeichen $\in$, $\notin$, $\subseteq$ bzw. $\not\subseteq$ anstelle von $\diamond$ führen auf eine wahre Aussage?

a) $1 \diamond \{1; 2; 3\}$

$\in, \not\subseteq$

Lösung: Es gilt

$$1 \in \{1; 2; 3\} \text{ und } 1 \not\subseteq \{1; 2; 3\}.$$

b) $11 \diamond \{1; 1; 2; 3\}$

$\notin, \not\subseteq$

Lösung: Wegen

$$\{1; 1; 2; 3\} = \{1; 2; 3\}$$

gilt

$$11 \notin \{1; 1; 2; 3\} \text{ und } 11 \not\subseteq \{1; 1; 2; 3\}.$$

c) $-3 \diamond \mathbb{N}$

$\notin, \not\subseteq$

Lösung: Wegen $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \dots\}$ gilt

$$-3 \notin \mathbb{N} \text{ und } -3 \not\subseteq \mathbb{N}.$$

d) $-2 \diamond \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 4 = 0\}$

$\notin, \not\subseteq$

Lösung: Wegen

$$x^2 - 4 = 0$$

$$\iff (x+2) \cdot (x-2) = 0$$

$$\iff x = -2 \text{ oder } x = 2$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt

$$\begin{aligned} &\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 4 = 0\} \\ &= \{-2; 2\} \cap \mathbb{N} = \{2\} \end{aligned}$$

und somit gilt

$$\begin{aligned} &-2 \notin \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 4 = 0\} \text{ und} \\ &-2 \not\subseteq \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 4 = 0\}. \end{aligned}$$

e) $0 \diamond \emptyset$

$\notin, \not\subseteq$

Lösung: Wegen

$$\emptyset = \{ \}$$

gilt

$$0 \notin \emptyset \text{ und } 0 \not\subseteq \emptyset.$$

f) $\{1; 2\} \diamond \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{2; 1\}\}$

$\in, \not\subseteq$

Lösung: Wegen

$$\{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{2; 1\}\} = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{1; 2\}\}$$

gilt

$$\begin{aligned} &\{1; 2\} \in \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{2; 1\}\} \text{ und} \\ &\{1; 2\} \not\subseteq \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{2; 1\}\}. \end{aligned}$$

g) $\{1\} \diamond \{0; 1; 2\}$

$\notin, \subseteq$

Lösung: Es gilt

$$\{1\} \notin \{0; 1; 2\} \text{ und } \{1\} \subseteq \{0; 1; 2\}.$$

h) $\{0\} \diamond \mathbb{N}_0$

$\notin, \subseteq$

Lösung: Wegen $\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$ gilt

$$\{0\} \notin \mathbb{N}_0 \text{ und } \{0\} \subseteq \mathbb{N}_0.$$

i) $\emptyset \diamond \{B \mid B \subseteq \{\text{Auto}; \text{Fahrrad}\}\}$

$\in, \subseteq$

Lösung: Wegen

$$\{B \mid B \subseteq \{\text{Auto}; \text{Fahrrad}\}\}$$

$$= \{\emptyset, \{\text{Auto}\}, \{\text{Fahrrad}\}, \{\text{Auto}, \text{Fahrrad}\}\}$$

gilt

$$\begin{aligned} &\emptyset \in \{B \mid B \subseteq \{\text{Auto}; \text{Fahrrad}\}\} \text{ und} \\ &\emptyset \subseteq \{B \mid B \subseteq \{\text{Auto}; \text{Fahrrad}\}\}. \end{aligned}$$

j) $169 \diamond \{n^2 \in \mathbb{N} \mid n \in \mathbb{N}\}$

$\in, \not\subseteq$

Lösung: Wegen

$$\{n^2 \in \mathbb{N} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$= \{1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81;$$

$$100; 121; 144; 169; 196; 225; \dots\}$$

gilt

$$169 \in \{n^2 \in \mathbb{N} \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ und}$$

$$169 \not\subseteq \{n^2 \in \mathbb{N} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

**Aufgabe 94.438** (Mengengleichheiten zeigen)

dh

Zeigen Sie, dass die Mengen $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \right\}$ und $\mathbb{Q}' = 2\mathbb{Q} + 5 = \{2q + 5 \mid q \in \mathbb{Q}\}$ gleich sind.

Lösung:

„ $\subseteq$ “: Angenommen $x = 2q + 5 \in \mathbb{Q}'$ mit $q = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Es ist $x \in \mathbb{Q}$ nachzuweisen. Dafür müssen wir zeigen, dass die Zahl x die Form aus der Definition von $\mathbb{Q}$ annimmt. Eine Umformung ergibt

$$x = 2q + 5 = 2 \cdot \frac{a}{b} + 5 = \frac{2a}{b} + 5 = \frac{2a}{b} + \frac{5b}{b} = \frac{2a + 5b}{b} = \frac{a'}{b}$$

mit der ganzen Zahl $a' = 2a + 5b \in \mathbb{Z}$. Damit besitzt x die gewünschte Form (reiner Bruch aus ganzer und natürlicher Zahl) und ist ein Element aus $\mathbb{Q}$.

„ $\supseteq$ “: Nun nehmen wir $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ und weisen nach, dass es in $\mathbb{Q}'$ enthalten ist. Dafür müssen wir es in der Form $x = 2q + 5$ schreiben, nach Auflösen also $q = \frac{1}{2}(x - 5)$. Das ergibt aber analog zur obigen Rechnung

$$q = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{b} - 5 \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a - 5b}{b} = \frac{\overbrace{a - 5b}^{\in \mathbb{Z}}}{2b} \in \mathbb{Q}.$$

Also gibt es ein $q \in \mathbb{Q}$, so dass $x = 2q + 5$ ist. Damit ist $x \in \mathbb{Q}'$.

Insgesamt folgt $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}'$.

**Aufgabe 94.439** (Potenzmengen)

vt

a) Seien $A := \{1, 2\}$ und $B := \{2, 3\}$. Bestimmen Sie

(i) $\text{Pot}(A)$

$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

Lösung:

$$\text{Pot}(A) = \text{Pot}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

(ii) $\text{Pot}(B)$

$\{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$

Lösung:

$$\text{Pot}(B) = \text{Pot}(\{2, 3\}) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$$

(iii) $\text{Pot}(A \cap B)$

$\{\emptyset, \{2\}\}$

Lösung:

$$\text{Pot}(A \cap B) = \text{Pot}(\{1, 2\} \cap \{2, 3\}) = \text{Pot}(\{2\}) = \{\emptyset, \{2\}\}$$

(iv) $\text{Pot}(A \cup B)$

$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

Lösung:

$$\text{Pot}(A \cup B) = \text{Pot}(\{1, 2\} \cup \{2, 3\}) = \text{Pot}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

(v) $\text{Pot}(A) \cap \text{Pot}(B)$

$\{\emptyset, \{2\}\}$

Lösung:

$$\text{Pot}(A) \cap \text{Pot}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} \cap \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\} = \{\emptyset, \{2\}\}$$

$$(vi) \text{ Pot}(A) \cup \text{Pot}(B)$$

$$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$$

Lösung:

$$\text{Pot}(A) \cup \text{Pot}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} \cup \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$$

$$(vii) \text{ Pot}(\text{Pot}(A \cap B))$$

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{2\}\}, \{\emptyset, \{2\}\}\}$$

Lösung:

$$\text{Pot}(\text{Pot}(A \cap B)) = \text{Pot}(\{\emptyset, \{2\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{2\}\}, \{\emptyset, \{2\}\}\}$$

b) Seien C und D beliebige Mengen. Ersetzen Sie $\boxed{?}$ durch ein passendes Symbol aus der Menge $\{=, \neq\}$. Begründen Sie Ihre Antwort!

$$(i) \text{ Pot}(C \cup D) \boxed{?} \text{ Pot}(C) \cup \text{Pot}(D)$$

$\neq$

Lösung:

Diese Aussage ist falsch, ein Gegenbeispiel in der vorherigen Teilaufgabe: $C = A = \{1, 2\}$, $D = B = \{2, 3\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \text{Pot}(A \cup B) &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}, \\ \text{Pot}(A) \cup \text{Pot}(B) &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\} \\ &\neq \text{Pot}(A \cup B) \end{aligned}$$

$$(ii) \text{ Pot}(C \cap D) \boxed{?} \text{ Pot}(C) \cap \text{Pot}(D)$$

$=$

Lösung:

Für eine beliebige Menge X gilt:

$$\begin{aligned} X \in \text{Pot}(C \cap D) &\iff X \subset A \cap B \iff (X \subset C) \wedge (X \subset D) \\ &\iff (X \in \text{Pot}(C)) \wedge (X \in \text{Pot}(D)) \iff X \in \text{Pot}(C) \cap \text{Pot}(D) \end{aligned}$$



Mengen/Grundbegriffe/Ag_Mengen_Produktmenge.tex

Aufgabe 94.440 (Produktmenge)

jgl

Sei $A := \{2, 4, 6\}$ und $B := \{4, 8\}$.

a) Berechnen Sie die Mächtigkeit von $A \times B$.

$$|A \times B| = |A| \cdot |B| = 3 \cdot 2 = 6$$

Lösung: $|A \times B| = |A| \cdot |B| = 3 \cdot 2 = 6$.

b) Geben Sie alle Teilmengen $T \subseteq A \times B$ an, die zwei Elemente haben.

Es gibt $\binom{6}{2}$ Teilmengen, und zwar:

$$\begin{aligned} &\{(2, 4), (2, 8)\}, \{(2, 4), (4, 4)\}, \{(2, 4), (4, 8)\}, \{(2, 4), (6, 4)\}, \{(2, 4), (6, 8)\}, \\ &\{(2, 8), (4, 4)\}, \{(2, 8), (4, 8)\}, \{(2, 8), (6, 4)\}, \{(2, 8), (6, 8)\}, \{(4, 4), (4, 8)\}, \{(4, 4), (6, 4)\}, \{(4, 4), (6, 8)\}, \\ &\{(4, 8), (6, 4)\}, \{(4, 8), (6, 8)\}, \{(6, 4), (6, 8)\} \end{aligned}$$

Lösung:

Wir beschreiben zuerst das Produkt $A \times B$:

$$A \times B = \{(2, 4), (2, 8), (4, 4), (4, 8), (6, 4), (6, 8)\}.$$

Damit können wir alle Teilmengen mit zwei Elementen auflisten. Da es für jedes Element 5 zweielementige Teilmengen gibt, die dieses Element enthalten, wir aber keine Teilmenge doppelt zählen wollen, gibt es $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 = \binom{6}{2}$ solcher Teilmengen. Es folgt die Liste dieser Teilmengen:

$\{(2, 4), (2, 8)\}, \{(2, 4), (4, 4)\}, \{(2, 4), (4, 8)\}, \{(2, 4), (6, 4)\}, \{(2, 4), (6, 8)\},$
 $\{(2, 8), (4, 4)\}, \{(2, 8), (4, 8)\}, \{(2, 8), (6, 4)\}, \{(2, 8), (6, 8)\},$
 $\{(4, 4), (4, 8)\}, \{(4, 4), (6, 4)\}, \{(4, 4), (6, 8)\},$
 $\{(4, 8), (6, 4)\}, \{(4, 8), (6, 8)\},$
 $\{(6, 4), (6, 8)\}$

- c) Wie viele Teilmengen $T \subseteq A \times B$ gibt es, die vier oder mehr Elemente haben? $\binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 15 + 6 + 1 = 22$

Lösung: Es gibt für jedes $k \leq 6$ genau $\binom{6}{k}$ k -elementige Teilmengen. Also gibt es $\binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 15 + 6 + 1 = 22$ Teilmengen mit 4 oder mehr Elementen.



Mengen/Grundbegriffe/Ag_Mengen_TeilmengenDisjunktMitPrimzahlen.tex

Aufgabe 94.441 (Teilmengen und Disjunktheit)

spf

Vergleichen Sie die folgenden Mengen! Für welche gilt die Teilmengeeigenschaft, welche sind disjunkt?

$A := \{p \in \mathbb{N} \mid p > 5^2 \text{ und } p \text{ ist eine Primzahl}\}$ $E := \{5, 3, 23, 2, 17, 11\}$
 $B := \{2\ell + 2 \in \mathbb{N} \mid \ell \in \mathbb{N}\}$ $F := \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ hat genau 2 natürliche Teiler}\}$
 $C := \{z \in \mathbb{Z} \mid z \text{ ist eine gerade Zahl}\}$ $G := \{2, 3, 5, 11, 17, 23\}$
 $D := \{7, 13, 19\}$

$A \subseteq A, A \subseteq F, B \subseteq B, B \subseteq C, C \subseteq C, D \subseteq D, D \subseteq F, E \subseteq E, E \subseteq F, E \subseteq G, F \subseteq F, G \subseteq E, G \subseteq F, G \subseteq G$
 $A \cap B = A \cap C = A \cap D = A \cap E = A \cap G = B \cap D = B \cap E = B \cap F = B \cap G = C \cap D = D \cap E = D \cap G = \emptyset$

Lösung:

<Zeile> $\subseteq$ <Spalte>								<Zeile> und <Spalte> sind disjunkt							
	A	E	B	F	C	G	D		A	E	B	F	C	G	D
A	✓	×	×	✓	×	×	×	A	×						
E	×	✓	×	✓	×	✓	×	E	✓	×					
B	×	×	✓	×	✓	×	×	B	✓	✓	×				
F	×	×	×	✓	×	×	×	F	×	×	✓	×			
C	×	×	×	×	✓	×	×	C	✓	×	×	×	×		
G	×	✓	×	✓	×	✓	×	G	✓	×	✓	×	×	×	
D	×	×	×	✓	×	×	✓	D	✓	✓	✓	×	✓	✓	×



Mengen/Mächtigkeit/Ag_Abzaehlbar_UeberabzaehlbarkeitVonPotIN.tex

Aufgabe 95.442 (Wie viele Teilmengen hat $\mathbb{N}$?)

SPF

Zeigen Sie, dass es überabzählbar viele Teilmengen von $\mathbb{N}$ gibt!*Tipp:* Gibt es eine surjektive Abbildung von $\mathbb{N}$ in die Potenzmenge $\text{Pot}(\mathbb{N})$ von $\mathbb{N}$?**Lösung:**

Sei $M: \mathbb{N} \rightarrow \text{Pot}(\mathbb{N})$ mit $n \mapsto M_n$ eine beliebige Abbildung, die einer natürlichen Zahl eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ zuordnet.

Definiere dann die Menge $D_M := \{k \in \mathbb{N} \mid k \notin M_k\}$.

Da $k \in D_M \iff k \notin M_k$ gilt, ist $D_M \neq M_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, sodass D_M eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist, die nicht im Bild von M enthalten ist. Also ist M nicht surjektiv.

Da es keine surjektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\text{Pot}(\mathbb{N})$ gibt, ist $\text{Pot}(\mathbb{N})$ überabzählbar.

Aufgabenblatt 96

Mengen/Schreibweisen



Mengen/Schreibweisen/Ag_Mengen_BeschreibendeFormZuZahlenmengenAngaben.tex

Aufgabe 96.443 (Mengen beschreiben)

2.1.4

Geben Sie folgende Mengen jeweils in beschreibender Form an!

Hinweis: Geben Sie die Mengen jeweils durch eine Eigenschaft X in der Form $\{x \in ?? \mid x \text{ hat die Eigenschaft } X\}$ an. X kann dabei verbal oder mittels eines Terms formuliert werden. $??$ steht für eine zu wählende Zahlenmenge.

a) $A := \{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$

$$A = \{n \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq n \leq 4\}$$

e) $E := \{1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; \dots\}$

$$E = \{n^2 \in \mathbb{N} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Lösung: Es ist

$$\begin{aligned} A &= \{-1; 0; 1; 2; 3; 4\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq n \leq 4\}. \end{aligned}$$

Lösung: Es ist

$$\begin{aligned} E &= \{1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; \dots\} \\ &= \{n^2 \in \mathbb{N} \mid n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

b) $B := \{-3; -2; -1; 1; 2; 3\}$

$$B = \{n \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq n \leq 3 \text{ und } n \neq 0\}$$

f) $F := \{119; 17; 51; 136; 85; 102; 34; 68; \dots\}$

$$F = \{17n \in \mathbb{N} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Lösung: Wegen $0 \notin B$ ist

$$\begin{aligned} B &= \{-3; -2; -1; 1; 2; 3\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq n \leq 3 \text{ und } n \neq 0\}. \end{aligned}$$

Lösung: Es ist

$$\begin{aligned} F &= \{119; 17; 51; 136; 85; 102; 34; 68; \dots\} \\ &= \{17; 34; 51; 68; 85; 102; 119; 136; \dots\} \\ &= \{17n \in \mathbb{N} \mid n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

c) $C := \{-2; -1; 0; 1; 3; 4; 5; 6\}$

$$C = \{n \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq n \leq 6 \text{ und } n \neq 2\}$$

g) $G := \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$

$$G = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq 0\}$$

Lösung: Wegen $2 \notin C$ ist

$$\begin{aligned} C &= \{-2; -1; 0; 1; 3; 4; 5; 6\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq n \leq 6 \text{ und } n \neq 2\}. \end{aligned}$$

Lösung: Es ist

$$G = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq 0\}.$$

d) $D := \{64; 4; 8; 1; 32; 128; 2; 16\}$

$$D = \{2^n \in \mathbb{N} \mid n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } n \leq 7\}$$

h) $H := \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$

$$H = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \\ \text{und } \text{ggT}(p, q) = 1 \end{array} \right\}$$

Lösung: Es ist

$$\begin{aligned} D &= \{64; 4; 8; 1; 32; 128; 2; 16\} \\ &= \{1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128\} \\ &= \{2^n \in \mathbb{N} \mid n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } n \leq 7\}. \end{aligned}$$

Lösung: Es ist

$$\begin{aligned} H &= \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \\ &= \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \\ \text{und } \text{ggT}(p, q) = 1 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$



Mengen/Schreibweisen/Ag_Mengen_IntervalleAlsIntervalleSchreiben.tex

Aufgabe 96.444 (Intervallschreibweise von Teilmengen der reellen Zahlen)

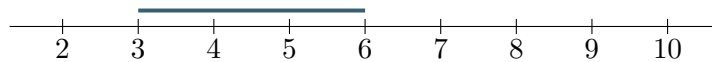
2.1.1

Skizzieren Sie die folgenden Mengen auf einem Zahlenstrahl und schreiben Sie sie als Intervalle!

a) $A := \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x < 6\}$

[3; 6)

Lösung:

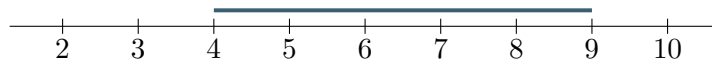


$$A = [3; 6)$$

b) $B := \{x \in \mathbb{R} \mid 4 \leq x \leq 9\}$

$$[4; 9]$$

Lösung:

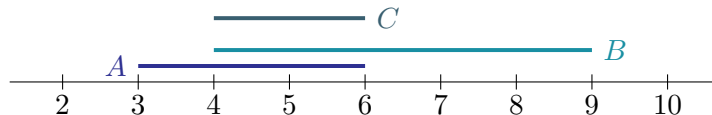


$$B = [4; 9]$$

c) $C := A \cap B$

$$[4; 6)$$

Lösung:

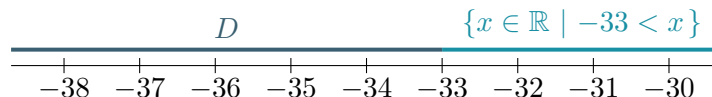


$$C = [4; 6)$$

d) $D := \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid -33 < x\}$

$$(-\infty; -33]$$

Lösung:



$$D = (-\infty; -33]$$



Mengen/Schreibweisen/Ag_Mengen_SchreibweisenGemischt.tex

Aufgabe 96.445 (Mengenschreibweisen)

dh

Im Folgenden sind einige Mengen in aufzählender Schreibweise angegeben und andere in beschreibender Schreibweise mit einer Bedingung. Geben Sie die Mengen in der jeweils anderen Schreibweise an:

a) $A := \{4, 5, 6, 7, 8\}$

d) $D := \{n^2 + 1 \mid n \in \{1, 2, 3\}\}$

Lösung: Zum Beispiel $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 4 \leq n \leq 8\}$. Lösung: Es ist $D = \{2, 5, 10\}$.

b) $B := \{n \in \mathbb{N} \mid 2 < n^2 < 10\}$

e) $E := \{1, 5, 9, 13, \dots\}$

Lösung: Es ist $B = \{2, 3\}$.

Lösung: Zum Beispiel $E = \{1 + 4n \mid n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}\}$

c) $C := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x = 1\}$

f) $F := \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\}$

Lösung: Es ist $C = \left\{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Lösung: Zum Beispiel $F = \left\{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}_0\right\}$



Mengen/Schreibweisen/Ag_Mengen_verschiedeneBeschreibungen.tex

Aufgabe 96.446 (Verschiedene Mengenbeschreibungen)

vr

Geben Sie die Mengen A , B , C und D an:

a) Sei $R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b)\}$: eine Relation auf der Menge $M = \{a, b, c\}$.

(i) $A = \{x \in M \mid xRb\}$

$$A = \{a, b, c\}$$

(ii) $B = \{x \in M \mid bRx\}$

$$B = \{b, c\}$$

(iii) $C = \{x \in M \mid bRx \wedge cRx\}$

$$C = \{b\}$$

(iv) $D = \{x \in M \mid bRx \vee cRx\}$

$$D = \{a, b, c\}$$

Lösung:

- Menge A: Es gilt

$$\begin{aligned}(a, b) \in R &\implies aRb \implies a \in A, \\(b, b) \in R &\implies bRb \implies b \in A, \\(c, b) \in R &\implies cRb \implies c \in A.\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $A = \{a, b, c\}$.

- Menge B: Es gilt

$$\begin{aligned}(b, a) \notin R &\implies b \not R a \implies a \notin B \\(b, b) \in R &\implies bRb \implies b \in B \\(b, c) \in R &\implies bRc \implies c \in B\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $B = \{b, c\}$.

- Menge C: Es gilt

$$\begin{aligned}(b, a) \notin R &\implies a \notin C \\(b, b) \in R \wedge (c, b) \in R &\implies b \in C \\(c, c) \notin R &\implies c \notin C\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $C = \{b\}$.

- Menge D: Es gilt

$$\begin{aligned}(c, a) \in R &\implies a \in D \\(b, b) \in R \wedge (c, b) \in R &\implies b \in D \\(b, c) \in R &\implies c \in D\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $D = \{a, b, c\}$.

b) Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

(i) $A = \{t \in \mathbb{R} \mid f(t) = 8\}$

$$A = \{-2, 4\}$$

(ii) $B = \{f(t) \mid t = 8\}$

$$B = \{48\}$$

(iii) $C = \{t \in \mathbb{R} \mid f(t) < 8\}$

$$C = (-2, 4)$$

(iv) $D = \{f(t) \mid t < 8\}$

$$D = [-1, \infty)$$

Lösung:

- Menge A: Löse die Gleichung

$$f(t) = 8 \iff t^2 - 2t = 8 \iff t = -2 \vee t = 4.$$

Damit ist $A = \{-2, 4\}$

- Menge B:

$$B = \{f(t) \mid t = 8\} = \{f(8)\} = \{8^2 - 2 \cdot 8\} = \{48\}.$$

- Menge C: Die Parabel $x^2 - 2x$ ist nach unten geöffnet. Damit liegt der Graph zwischen den beiden Lösungen $t_1 = -2$ und $t_2 = 4$ der Gleichung $t^2 - 2t = 8$ unter der Geraden $y = 8$. Damit ist $C = (-2, 4)$.
- Menge D: Die Parabel $x^2 - 2x$ ist nach unten geöffnet. Damit liegt das Minimum genau in der Mitte der beiden Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$, welche beide kleiner als 8 sind. Wegen $f(1) = -1$ ist $D = [-1, +\infty)$.

c) Sei $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(i) $A = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid M\vec{x} = \vec{0} \right\}$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(ii) $B = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid M\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(iii) $C = \left\{ M\vec{x} \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 26 \\ 15 \end{pmatrix} \right\}$$

(iv) $D = \{ M\vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \}$

$$D = \mathbb{R}^2$$

Lösung:

Wegen $|M| = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3$ ist die Matrix M invertierbar und jedes LGS von der Form $M\vec{x} = \vec{b}$ eindeutig lösbar.

- Menge A : Homogenes LGS hat in diesem Fall nur die triviale Lösung:

$$A = \text{Kern}(M) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

- Menge B : Das LGS $M\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ hat genau eine Lösung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (LGS mit der Lieblingsmethode lösen oder hier sogar raten). Damit ist

$$B = \mathbb{L} \left(M, \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- Menge C :

$$C = \left\{ M\vec{x} \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ M \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 26 \\ 15 \end{pmatrix} \right\}$$

- Menge D : Es gilt

$$D = \{ M\vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \} = \text{Bild}(M)$$

Nach dem Dimensionssatz ist

$$\dim(\text{Bild}(M)) = 2 - \dim(\text{Kern}(M)) = 2 - 0 = 2$$

Damit ist $D = \mathbb{R}^2$.

d) Sei $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

(i) $A = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid M\vec{x} = \vec{0} \right\}$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} t \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

(ii) $B = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid M\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} t \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

(iii) $C = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid M\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$C = \emptyset$$

(iv) $D = \{ M\vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \}$

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

Lösung:

Wegen $|M| = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0$ ist die Matrix nicht invertierbar. Damit haben die linearen Gleichungssysteme entweder unendlich viele, oder keine Lösungen.

- Menge A: Löse das LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} t, t \in \mathbb{R}.$$

Damit ist

$$A = \text{Kern}(M) = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} t \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Menge B: Lösung eines nichthomogenes LGS besteht aus einer (berechneten oder geratenen) partiellen Lösung $\vec{x}_p$ und der Lösung des homogenen LGS. Damit ist Man kann relativ einfach erraten, dass $\vec{x}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Lösung ist. Damit ist

$$B = \vec{x}_p + \mathbb{L}(M, \vec{0}) = \vec{x}_p + \text{Kern}(M) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} t \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} t \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Menge C: Da das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

keine Lösung hat (die zweite Zeile ist im Widerspruch mit der Ersten), ist $C = \emptyset$.

- Menge D:

$$D = \{ M\vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \} = \text{Bild}(D) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$



Mengen/Schreibweisen/Ag_Zahlbereiche_IntervalleSupInf.tex

Aufgabe 96.447 (Intervalle)

Beschreiben Sie die nachstehenden Mengen mit Hilfe von Intervallen (ohne Mengenverknüpfungen):

- a) $\{x \in \mathbb{R} : x > -3 \text{ und } x \leq 17\}$ ($-3; 17]$, 17, -3, 17, nein)

Lösung:

Es gilt $\{x \in \mathbb{R} : x > -3 \text{ und } x \leq 17\} = (-3; 17]$.

- b) $\{x \in \mathbb{R} : x < 6\} \setminus (\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \geq -4\})$ ($[-4; 6)$, 6, -4, nein, -4)

Lösung:

Es gilt

$$\{x \in \mathbb{R} : x < 6\} \setminus (\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \geq -4\}) = (-\infty; 6) \setminus (\mathbb{R} \setminus [-4; \infty)) = (-\infty; 6) \setminus (-\infty; -4) = [-4; 6).$$

- c) $\{x \in \mathbb{R} : x > 2x^2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0.25\}$ ($(-\infty; 0.5)$, 0.5, $-\infty$, nein, nein)

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x > 2x^2 \iff 0 > 2x^2 - x \iff 0 > x \cdot (2x - 1)$ genau dann, wenn $(x > 0 \text{ und } 2x - 1 > 0)$ oder $(x < 0 \text{ und } 2x - 1 > 0)$, also, wenn $0 < x < 0.5$ gilt.

Damit folgt $\{x \in \mathbb{R} : x > 2x^2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0.25\} = (0; 0.5) \cap (-\infty; 0.25) = (-\infty; 0.5)$.

- d) $\{x \in \mathbb{R} : x^3 > x^2\} \cap (\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\})$ $\emptyset$, $-\infty$, ∞ , nein, nein

Lösung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^3 > x^2 \iff x^3 - x^2 > 0 \iff x^2 \cdot (x - 1) > 0$ genau dann, wenn $x \neq 0$ und $x - 1 > 0$, also, wenn $x > 1$ gilt. Damit folgt

$$\{x \in \mathbb{R} : x^3 > x^2\} \cap (\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}) = (1; \infty) \cap (\mathbb{R} \setminus [1; \infty)) = (1; \infty) \cap (-\infty; 1) = \emptyset.$$

Besitzen die Mengen ein Supremum, Infimum, Maximum, Minimum?

Aufgabenblatt 97

Mengen/Skizzieren



Mengen/Skizzieren/Ag_Mengen_GeometrischBeschreiben.tex

Aufgabe 97.448 (Teilmengen in der Ebene)

jgl

Beschreiben Sie die folgenden Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $B \subseteq \mathbb{R}^2$, $C \subseteq \mathbb{R}^2$ und $D \subseteq \mathbb{R}^2$ der Ebene geometrisch und skizzieren Sie sie. Hierbei sei $\bar{M} := \mathbb{R}^2 \setminus M$ das Komplement einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ und es gelten die folgenden Mengengleichheiten:

a) $A = \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 8x - 4y \leq -4 \right\}$ Halbebene links der Geraden $y = 2x + 1$. **Lösung:** Halbebene links der Geraden $y = 2x + 1$.

b) $B = \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid -7y - 21 > 0 \right\}$ Halbebene echt unterhalb der Geraden $y = -3$. **Lösung:** Halbebene echt unterhalb der Geraden $y = -3$.

c) $\bar{C} = B \cup \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid |5x + 20| + 2y > 4 \right\}$ Fläche im Dreieck von $(-6, -3)^T$, $(-2, -3)^T$ und $(-4, 2)^T$.

Lösung: Fläche im Dreieck von $(-6, -3)^T$, $(-2, -3)^T$ und $(-4, 2)^T$.

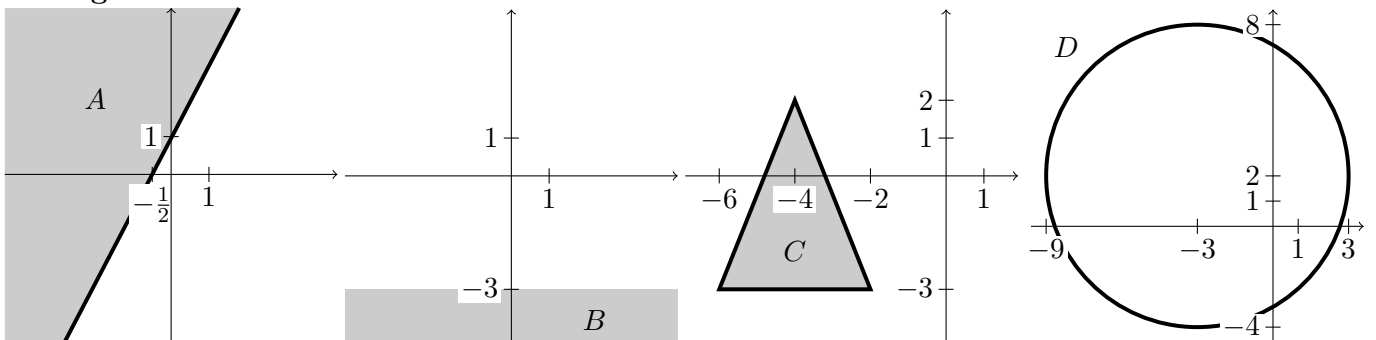
d) $D = \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 6x - 6 = 17 - y^2 + 4y \right\}$

Kreisbogen um $(-3, 2)^T$ mit Radius 6.

Lösung: Kreis um $(-3, 2)^T$ mit Radius 6.

Hinweis: $\left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x-x_0}{\alpha} \right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{\beta} \right)^2 = 1 \right\}$ beschreibt den Rand einer Ellipse mit Mittelpunkt $(x_0, y_0)^T$ und Halbachsenlängen von $|\alpha|$ in horizontaler und $|\beta|$ in vertikaler Richtung.

Lösung:



Mengen/Skizzieren/Ag_Mengen_ReelleTeilmengenUndVerknuepfungenSkizzieren.tex

Aufgabe 97.449 (Teilmengen der reellen Zahlen)

2.1.3

Skizzieren Sie die nachfolgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ auf einem Zahlenstrahl (sofern dies möglich ist), und finden Sie für die verbal beschriebenen Mengen M_7 , M_8 und M_9 eine formale Beschreibung mittels der Teilmengen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ von $\mathbb{R}$!

a) $M_1 := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$

f) $M_6 := (-4; 6)$

k) $M_{11} := M_2 \cup M_6$

b) $M_2 := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$

g) M_7 : alle geraden Zahlen

l) $M_{12} := (M_2 \cap M_1) \cup M_6$

c) $M_3 := (0; 10]$

h) M_8 : alle Brüche

m) $M_{13} := (M_4 \cup M_5) \cap M_7$

d) $M_4 := [0; 10)$

i) M_9 : alle ungeraden Zahlen

n) $M_{14} := M_5 \cup (M_7 \cap M_{11})$

e) $M_5 := [-5; 5]$

j) $M_{10} := M_1 \cap M_3$

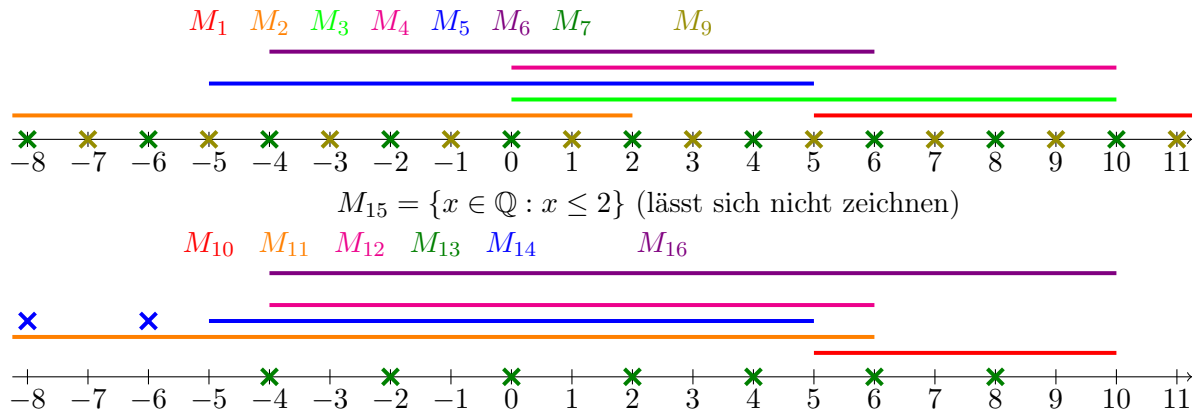
o) $M_{15} := M_8 \cap M_2$

p) $M_{16} := (M_5 \cap M_6) \cup (M_4 \cap M_3) \cup (M_{10} \cap M_2) \cup (M_{13} \cap M_{14})$

$$M_7 = \{2n \in \mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{Z}\}, M_8 = \mathbb{Q}, M_9 = \{2n+1 \in \mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

Lösung:

$$M_7 = \{2n \in \mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{Z}\} \quad M_8 = \mathbb{Q} \text{ (lässt sich nicht zeichnen)} \quad M_9 = \{2n+1 \in \mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{Z}\}$$





Mengen/Topologie/Ag_AbstrakteSpiegelung.tex

Aufgabe 98.450 (Abstandsgleichungen)

dh

Es sei V ein euklidischer Vektorraum und $U \neq \{0\}$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie: Erfüllen Punkte $x \neq y$ aus V die Abstandsgleichung $\forall p \in U : d(x, p) = d(y, p)$, so ist die Verbindungsstrecke $y - x$ orthogonal zu U und beide Punkte liegen auf dem gleichen Kreis um den Nullpunkt.

Lösung:

Angenommen $x, y \in V$ erfüllen die Abstandsgleichung und sind verschieden, dann ergibt Quadrieren $d(x, p)^2 = d(y, p)^2$ und daraus folgt

$$\begin{aligned} \langle x - p, x - p \rangle &= \langle y - p, y - p \rangle \\ \Rightarrow \langle x, x \rangle - 2 \langle x, p \rangle + \langle p, p \rangle &= \langle y, y \rangle - 2 \langle y, p \rangle + \langle p, p \rangle \\ \Rightarrow \frac{1}{2} (\|x\|^2 - \|y\|^2) &= \langle x - y, p \rangle. \end{aligned}$$

Da x und y nicht von p abhängen, muss das letzte Skalarprodukt für alle $p \in U$ den gleichen Wert annehmen. Für $p = 0$ erhalten wir, dass der Wert gleich Null ist. Daraus folgt, dass die Verbindungsstrecke $y - x$ orthogonal zu ganz U ist. Daraus folgt auch, dass $\|x\| = \|y\|$ ist, beide Punkte liegen auf dem Kreis um den Nullpunkt mit Radius $\|x\|$.



Mengen/Topologie/Ag_AequivalenteNormen.tex

Aufgabe 98.451 (Äquivalente Normen in $\mathbb{R}^2$)

vr

Zeigen Sie, dass die folgenden Normen in $\mathbb{R}^2$ äquivalent sind:

- a) $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_a$ mit $\|\vec{x}\|_a := |x_1 + x_2| + |x_1 - x_2|$

Lösung:

Für jedes $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$\begin{aligned} \|\vec{x}\|_1 &= |x_1| + |x_2| \leq \left| \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_1 + \underbrace{\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_2}_{=0} \right| + \left| \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_2 - \underbrace{\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_1}_{=0} \right| \\ &= \left| \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}(x_1 - x_2) \right| + \left| \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}(-x_1 + x_2) \right| \\ &\leq \frac{1}{2}|x_1 + x_2| + \frac{1}{2}|x_1 - x_2| + \frac{1}{2}|x_1 + x_2| + \frac{1}{2} \underbrace{|-x_1 + x_2|}_{=|x_1 - x_2|} \\ &= |x_1 + x_2| + |x_1 - x_2| = \|\vec{x}\|_a \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \|\vec{x}\|_a &= |x_1 + x_2| + |x_1 - x_2| \leq |x_1| + |x_2| + |x_1| + |-x_2| \\ &= 2|x_1| + 2|x_2| = 2(|x_1| + |x_2|) = 2\|\vec{x}\|_1. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\|\vec{x}\|_1 \leq \|\vec{x}\|_a \leq 2\|\vec{x}\|_1$$

und die beiden Normen sind äquivalent.

b) $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_b$ mit $\|\vec{x}\|_b := |x_1 - 2x_2| + |x_1 + 2x_2|$

Lösung:

Für jedes $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$\begin{aligned}\|\vec{x}\|_1 &= |x_1| + |x_2| \leq |x_1| + 2|x_2| = |x_1| + |2x_2| \\ &= \left| \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_1 + \underbrace{x_2 - x_2}_{=0} \right| + \left| \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_2 \right| \\ &= \left| \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_1 - x_2 \right| + \left| \frac{1}{2}x_1 + x_2 - \frac{1}{2}x_1 + x_2 \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{2}x_1 + x_2 \right| + \left| \frac{1}{2}x_1 - x_2 \right| + \left| \frac{1}{2}x_1 + x_2 \right| + \left| -\frac{1}{2}x_1 + x_2 \right| \\ &= \frac{1}{2}|x_1 + 2x_2| + \frac{1}{2}|x_1 - 2x_2| + \frac{1}{2}|x_1 + 2x_2| + \frac{1}{2}|x_1 - 2x_2| \\ &= |x_1 + 2x_2| + |x_1 - 2x_2| = \|\vec{x}\|_b\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\|\vec{x}\|_b &= |x_1 - 2x_2| + |x_1 + 2x_2| \leq |x_1| + |2x_2| + |x_1| + |2x_2| \\ &= 2|x_1| + 4|x_2| \leq 4|x_1| + 4|x_2| = 4(|x_1| + |x_2|) = 4\|\vec{x}\|_1.\end{aligned}$$

Damit folgt die Äquivalenz der Normen:

$$\|\vec{x}\|_1 \leq \|\vec{x}\|_b \leq 4\|\vec{x}\|_1.$$

c) $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_c$ mit $\|\vec{x}\|_c := \max\{|x_1|, |x_1 + x_2|\}$

Lösung:

Für jedes $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$\begin{aligned}\|\vec{x}\|_1 &= |x_1| + |x_2| = |x_1| + |x_2 + \underbrace{x_1 - x_1}_{=0}| \leq |x_1| + |x_1 + x_2| + |x_1| \\ &= 2|x_1| + |x_1 + x_2| \leq 2\max\{|x_1|, |x_1 + x_2|\} + \max\{|x_1|, |x_1 + x_2|\} \\ &= 3\max\{|x_1|, |x_1 + x_2|\} = 3\|\vec{x}\|_c \\ &\implies \|\vec{x}\|_c \geq \frac{1}{3}\|\vec{x}\|_1\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\|\vec{x}\|_c &= \max\{|x_1|, |x_1 + x_2|\} \leq |x_1| + |x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_1| + |x_2| \\ &\leq 2|x_1| + 2|x_2| = 2(|x_1| + |x_2|) = 2\|\vec{x}\|_1.\end{aligned}$$

Die Äquivalenz der Normen:

$$\frac{1}{3}\|\vec{x}\|_1 \leq \|\vec{x}\|_c \leq 2\|\vec{x}\|_1.$$

Dabei ist $\|\vec{x}\|_1 := |x_1| + |x_2|$ die standard $\|\cdot\|_1$ -Norm.

Hinweis: es kann hilfreich sein, x_i als $\frac{1}{2}x_i + \frac{1}{2}x_i$ zu schreiben.



Mengen/Topologie/Ag_Normen_OhneSP.tex

- a) Zeigen Sie durch Nachrechnen der geforderten Eigenschaften, dass $\|\vec{x}\|_A = |x_1| + \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2}$ eine Norm auf $\mathbb{R}^2$ ist.

Lösung:

Für alle weitere Berechnungen schreiben wir die Norm um:

$$\|\vec{x}\|_A = |x_1| + \sqrt{(x_1 - x_2)^2}$$

Damit ist es auch offensichtlich, dass die Norm für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ definiert ist, da der Term unter der Wurzel immer nichtnegativ ist.

- Positive Definitheit:

$$\|\vec{x}\|_A = \underbrace{|x_1|}_{\geq 0} + \underbrace{\sqrt{(x_1 - x_2)^2}}_{\geq 0} \geq 0$$

Angenommen, $\|\vec{x}\|_A = 0$, dann müssen die beiden Summanden auch einzeln Null sein:

$$(\|\vec{x}\|_A = 0) \implies (|x_1| = 0 \quad \text{und} \quad (x_1 - x_2)^2 = 0) \implies (x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = 0) \implies (\vec{x} = \vec{0})$$

- Homogenität:

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|\alpha x\|_A &= |\alpha x_1| + \sqrt{((\alpha x_1) - (\alpha x_2))^2} = |\alpha| \cdot |x_1| + \sqrt{\alpha^2 (x_1 - x_2)^2} \\ &= |\alpha| \cdot |x_1| + |\alpha| \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = |\alpha| \left(|x_1| + \sqrt{(x_1 - x_2)^2} \right) = |\alpha| \|\vec{x}\|_A \end{aligned}$$

- Dreiecksungleichung:

Zeige dass

$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \vec{y}\|_A &\leq \|\vec{x}\|_A + \|\vec{y}\|_A \\ \iff |x_1 + y_1| + \sqrt{((x_1 + y_1) - (x_2 + y_2))^2} &\leq |x_1| + \sqrt{(x_1 - x_2)^2} + |y_1| + \sqrt{(y_1 - y_2)^2} \\ \stackrel{\sqrt{a^2}=|a|}{\iff} |x_1 + y_1| + |(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2)| &\leq |x_1| + |x_1 - x_2| + |y_1| + |y_1 - y_2| \\ \iff |x_1 + y_1| + |(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)| &\leq |x_1| + |y_1| + |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \end{aligned}$$

Die letzte Zeile ist wahr, da für den Betrag gilt $|a + b| \leq |a| + |b|$ und damit

$$|x_1 + y_1| \leq |x_1| + |y_1| \quad \text{und} \quad |(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)| \leq |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

- b) Zeigen Sie, dass die Norm $\|x\|_A$ von keinem Skalarprodukt erzeugt wird, d.h., es gibt kein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ so dass $\|x\|_A^2 = \langle x, x \rangle$.

Hinweis: Versuchen Sie die Fundamentalmatrix des Skalarproduktes aufzustellen, indem Sie $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ und $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ berechnen!

Lösung: Angenommen, es gibt ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sodass

$$\|\vec{x}\|_A = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} \iff \|\vec{x}\|_A^2 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$$

und sei F die Fundamentalmatrix dieses Skalarproduktes bezüglich der Standardbasis

$$E = (e_1, e_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

mit den Einträgen

$$f_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle, \quad i, j \in \{1, 2\}$$

Die Einträge f_{11} und f_{22} lassen sich direkt aus der Norm berechnen:

$$f_{11} = \langle e_1, e_1 \rangle = \|e_1\|_A^2 = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_A^2 = \left(|1| + \sqrt{1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 0 + 0^2} \right)^2 = (1 + 1)^2 = 4$$

$$f_{22} = \langle e_2, e_2 \rangle = \|e_2\|_A^2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_A^2 = \left(|0| + \sqrt{0^2 - 2 \cdot 0 \cdot 0 + 1^2} \right)^2 = (0 + 1)^2 = 1$$

Um die Einträge $f_{12} = f_{21}$ zu berechnen, verwenden wir die Bilinearität des Skalarproduktes:

$$\begin{aligned} \langle e_1 + e_2, e_1 + e_2 \rangle &= \langle e_1, e_1 + e_2 \rangle + \langle e_2, e_1 + e_2 \rangle = \langle e_1, e_1 \rangle + \langle e_1, e_2 \rangle + \langle e_2, e_1 \rangle + \langle e_2, e_2 \rangle \\ &= 4 + \langle e_1, e_2 \rangle + \langle e_2, e_1 \rangle + 1 \stackrel{\langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_2, e_1 \rangle}{=} 5 + 2 \langle e_1, e_2 \rangle \end{aligned}$$

Der Skalarprodukt $\langle e_1 + e_2, e_1 + e_2 \rangle$ lässt sich direkt mit Norm berechnen:

$$\langle e_1 + e_2, e_1 + e_2 \rangle = \|e_1 + e_2\|_A^2 = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_A^2 = \left(|1| + \sqrt{1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1^2} \right)^2 = (1 + 0)^2 = 1$$

Daraus folgt dass

$$1 = \langle e_1 + e_2, e_1 + e_2 \rangle = 5 + 2 \langle e_1, e_2 \rangle \implies 2 \langle e_1, e_2 \rangle = -4 \implies f_{12} = f_{21} = \langle e_1, e_2 \rangle = -2$$

Also, falls ein Skalarprodukt existiert, wäre dessen Fundamentalmatrix

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da

$$|F| = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - (-2) \cdot (-2) = 0$$

ist die Matrix F nicht positiv definit. Damit ist es keine Fundamentalmatrix eines Skalarproduktes. Damit haben wir den Widerspruch mit der Annahme, dass ein geeignetes Skalarprodukt existiert.

- c) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass $\|\vec{x}\|_B = \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2}$ keine Norm auf $\mathbb{R}^2$ ist.

Lösung:

- d) Die zweite Zuordnung ist dagegen keine Norm, Umformen ergibt

$$\|\vec{x}\|_B = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = |x_1 - x_2|.$$

Hier ist beispielsweise $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_B = 0$, obwohl nicht der Nullvektor eingesetzt wurde. Also handelt es sich nicht um eine Norm.



Mengen/Topologie/Ag_Normen_OhneSP_dahmen.tex

- a) Zeigen Sie durch Nachrechnen der geforderten Eigenschaften, dass $\|\vec{x}\|_A = |x_1| + \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2}$ eine Norm auf $\mathbb{R}^2$ ist.

Lösung:

Für alle weitere Berechnungen schreiben wir die Norm um:

$$\|\vec{x}\|_A = |x_1| + \sqrt{(x_1 - x_2)^2}$$

Damit ist es auch offensichtlich, dass die Norm für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ definiert ist, da der Term unter der Wurzel immer nichtnegativ ist.

- Positive Definitheit:

$$\|\vec{x}\|_A = \underbrace{|x_1|}_{\geq 0} + \underbrace{\sqrt{(x_1 - x_2)^2}}_{\geq 0} \geq 0$$

Angenommen, $\|\vec{x}\|_A = 0$, dann müssen die beiden Summanden auch einzeln Null sein:

$$(\|\vec{x}\|_A = 0) \implies (|x_1| = 0 \quad \text{und} \quad (x_1 - x_2)^2 = 0) \implies (x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = 0) \implies (\vec{x} = \vec{0})$$

- Homogenität:

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|\alpha x\|_A &= |\alpha x_1| + \sqrt{((\alpha x_1) - (\alpha x_2))^2} = |\alpha| \cdot |x_1| + \sqrt{\alpha^2 (x_1 - x_2)^2} \\ &= |\alpha| \cdot |x_1| + |\alpha| \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = |\alpha| \left(|x_1| + \sqrt{(x_1 - x_2)^2} \right) = |\alpha| \|\vec{x}\|_A \end{aligned}$$

- Dreiecksungleichung:

Zeige dass

$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \vec{y}\|_A &\leq \|\vec{x}\|_A + \|\vec{y}\|_A \\ \iff |x_1 + y_1| + \sqrt{((x_1 + y_1) - (x_2 + y_2))^2} &\leq |x_1| + \sqrt{(x_1 - x_2)^2} + |y_1| + \sqrt{(y_1 - y_2)^2} \\ \stackrel{\sqrt{a^2}=|a|}{\iff} |x_1 + y_1| + |(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2)| &\leq |x_1| + |x_1 - x_2| + |y_1| + |y_1 - y_2| \\ \iff |x_1 + y_1| + |(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)| &\leq |x_1| + |y_1| + |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \end{aligned}$$

Die letzte Zeile ist wahr, da für den Betrag gilt $|a + b| \leq |a| + |b|$ und damit

$$|x_1 + y_1| \leq |x_1| + |y_1| \quad \text{und} \quad |(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)| \leq |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

- b) Zeigen Sie, dass die Norm $\|x\|_A$ von keinem Skalarprodukt erzeugt wird, d.h., es gibt kein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ so dass $\|x\|_A^2 = \langle x, x \rangle_A$.

Hinweis: Bestimmen Sie mit Hilfe der Polarisationsformel die Werte

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_A, \quad \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_A, \quad \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_A$$

und finden Sie einen Widerspruch, indem Sie $\|e_1 + 2e_2\|_A^2$ über deren Linearkombinationen berechnen.

Lösung:

Wenn $\|x\|_A$ tatsächlich von einem Skalarprodukt induziert wird, dann können dessen Werte über die Polarisationsformel aus der Norm berechnet werden:

$$\begin{aligned}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_A &= \frac{1}{2} (\|e_1 + e_1\|^2 - \|e_1\|^2 - \|e_1\|^2) = \frac{1}{2} (16 - 4 - 4) = 4, \\ \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_A &= \frac{1}{2} (\|e_2 + e_2\|^2 - \|e_2\|^2 - \|e_2\|^2) = \frac{1}{2} (4 - 1 - 1) = 1, \\ \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_A &= \frac{1}{2} (\|e_1 + e_2\|^2 - \|e_1\|^2 - \|e_2\|^2) = \frac{1}{2} (1 - 4 - 1) = -2.\end{aligned}$$

Mit den Rechenregeln für Skalarprodukte erhalten wir dann aber

$$\begin{aligned}\|e_1 + 2e_2\|_A^2 &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle_A \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_A + 2 \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_A + 2 \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_A + 4 \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_A = 0\end{aligned}$$

womit die Norm $\|x\|_A$ nicht positiv definit ist, ein Widerspruch.

- c) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass $\|\vec{x}\|_B = \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2}$ keine Norm auf $\mathbb{R}^2$ ist.

Lösung:

- d) Die zweite Zuordnung ist dagegen keine Norm, Umformen ergibt

$$\|\vec{x}\|_B = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = |x_1 - x_2|.$$

Hier ist beispielsweise $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_B = 0$, obwohl nicht der Nullvektor eingesetzt wurde. Also handelt es sich nicht um eine Norm.



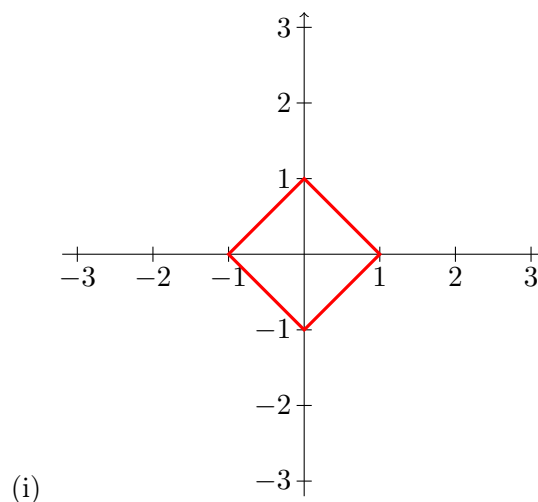
Mengen/Topologie/Ag_Normen_WiWiKlausuraufgaben.tex

Aufgabe 98.454 (Normen in WiWi Alt-Klausuren)

- a) Bei welchen der folgenden Skizzen handelt es sich um Einheitskreise einer Norm in $\mathbb{R}^2$, das heißt, für welche der folgenden Mengen existiert eine Norm $\|\cdot\|$ in $\mathbb{R}^2$, sodass die Abbildung die Menge $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\vec{x}\| = 1\}$ zeigt?

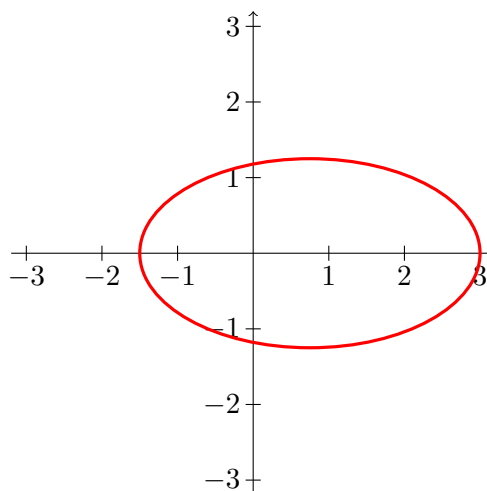
Lösung:

Einheitssphären müssen Punktsymmetrisch zum Ursprung sein und dürfen den Ursprung nicht enthalten. Damit scheiden die Abbildungen ii) und iii) als potenzielle Normen direkt aus.



ja

Lösung: Dies ist die Einheitssphäre der $\|\cdot\|_1$ -Norm: $\|\vec{x}\|_1 = |x_1| + |x_2|$.



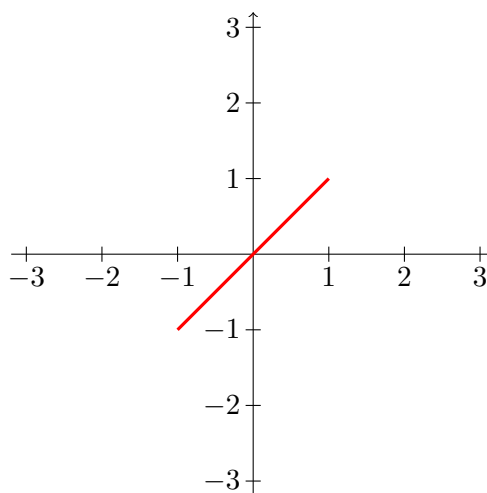
(ii)

nein

Lösung: Hier existiert keine passende Norm. Laut der Skizze gilt zum Beispiel, dass $\left\|\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}\right\| =$

1. Andererseits jedoch auch $\left\|\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = 1$. Zusammen führt dies zu dem Widerspruch:

$$1 = \left\|\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = \left\|-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$



(iii)

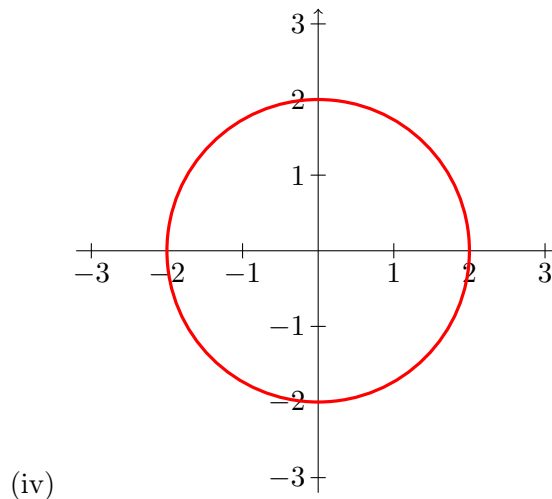
nein

Lösung: Hier existiert keine passende Norm. Es gilt, zum Beispiel, laut Skizze, dass $\left\|\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right\| =$

1. Andererseits müsste nach der Homogenität einer Norm jedoch auch gelten dass

$$1 = \left\|\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right\| = \left\|\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{2},$$

da auch der Punkt $(1,1)$ zu der Figur gehört. Das ist aber offensichtlich ein Widerspruch, da $\frac{1}{2} \neq 1$.



ja

Lösung: Die Einheitssphäre der $\|\cdot\|_2$ Norm mit $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Die angegebene Grafik ist skaliert. Für die Norm $\|\vec{x}\| := \frac{1}{2} \|\vec{x}\|_2$ ist das die entsprechende Einheitssphäre.

- b) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Auf dem $\mathbb{R}$ -Vektorraum $\mathbb{R}^n$ bezeichne $\|\cdot\|_1$ die 1-Norm, $\|\cdot\|_2$ die Euklidische Norm und $\|\cdot\|_\infty$ die Maximumsnorm. Zeigen Sie, dass $\alpha = 1$ und $\beta = \sqrt{n}$ die jeweils kleinsten reellen Zahlen sind, für welche die Ungleichungen

$$\|\vec{x}\|_2 \leq \alpha \cdot \|\vec{x}\|_1 \quad \text{und} \quad \|\vec{x}\|_2 \leq \beta \cdot \|\vec{x}\|_\infty$$

für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ gelten.

Hinweis: Für $k \in \mathbb{N}$ und $y_1, \dots, y_k \geq 0$ gilt

$$\sqrt{y_1 + \dots + y_k} \leq \sqrt{y_1} + \dots + \sqrt{y_k}.$$

Diese Ungleichung kann ohne Beweis verwendet werden.

Lösung:

- Zeige $\alpha = 1$: Mit dem Hinweis gilt

$$\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \leq \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i^2} = \sum_{i=1}^n |x_i| = 1 \cdot \|\vec{x}\|_1$$

Also es gilt $\|\vec{x}\|_2 \leq 1 \cdot \|\vec{x}\|_1 \implies \alpha \leq 1$.

Für die Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt $\|\vec{x}\|_2 = 1 = \|\vec{x}\|_1$ damit ist $\alpha = 1$ das kleinste mögliche α .

- Zeige $\beta = \sqrt{n}$: Mit dem Hinweis und $x_{\max}^2 := \max\{x_i^2, i = 1, \dots, n\}$ gilt

$$\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_{\max}^2} = \sqrt{n x_{\max}^2} = \sqrt{n} |x_{\max}| = \sqrt{n} \|\vec{x}\|_\infty \stackrel{\beta \geq \sqrt{n}}{\leq} \beta \|\vec{x}\|_\infty$$

Für die Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt $\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{n} = \sqrt{n} \|\vec{x}\|_\infty$ damit ist $\beta = \sqrt{n}$ das kleinste mögliche β .

**Aufgabe 98.455** (Normen und definite Matrizen)

vr

Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass

- a) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) = \sqrt{\vec{x}^T A \vec{x}}$ eine Norm auf $\mathbb{R}^3$ definiert.

Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden, dass $\langle \vec{x}, A\vec{y} \rangle \leq f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y})$ für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

Lösung:

Hinweis für die Lösung: Der Satz, dass positiv definite Matrizen einen Skalarprodukt definieren, steht nicht zur Verfügung!

Überprüfe die Normaxiomen:

- Definitheit:

Sei

$$Q_A(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$$

die zu der Matrix A zugehörige quadratische Form (dann ist $f(\vec{x}) = \sqrt{Q_A(\vec{x})}$).

Die Matrix A ist positiv definit nach dem Determinantenkriterium:

$$\begin{aligned} |A_1| &= |4| = 4 > 0, \\ |A_{1,2}| &= \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 1 = 7 > 0, \\ |A_{1,2,3}| &= \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 14 > 0. \end{aligned}$$

Damit ist auch die entsprechende quadratische Form $Q_A(\vec{x})$ positiv definit und für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3, \vec{x} \neq \vec{0}$ gilt:

$$f(\vec{x}) = \sqrt{\vec{x}^T A \vec{x}} = \sqrt{Q_A(\vec{x})} > 0.$$

- Homogenität:

Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(\lambda \vec{x}) = \sqrt{(\lambda \vec{x})^T A (\lambda \vec{x})} = \sqrt{\lambda^2 \vec{x}^T A \vec{x}} = |\lambda| \sqrt{\vec{x}^T A \vec{x}} = |\lambda| f(\vec{x}).$$

- Dreiecksungleichung:

Zeige, dass für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\begin{aligned}
& \underbrace{f(\vec{x} + \vec{y})}_{\geq 0} \leq \underbrace{f(\vec{x})}_{\geq 0} + \underbrace{f(\vec{y})}_{> 0} \\
\iff & (f(\vec{x} + \vec{y}))^2 \leq (f(\vec{x}))^2 + 2f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y}) + (f(\vec{y}))^2 \\
\iff & (\vec{x} + \vec{y})^T \leq \vec{x}^T A \vec{x} + 2f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y}) + \vec{y}^T A \vec{y} \\
\iff & \vec{x}^T A \vec{x} + \vec{x}^T A \vec{y} + \vec{y}^T A \vec{x} + \vec{y}^T A \vec{y} \leq \vec{x}^T A \vec{x} + 2f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y}) + \vec{y}^T A \vec{y} \\
\iff & \vec{x}^T A \vec{y} + \vec{y}^T A \vec{x} \leq 2f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y}) \\
\stackrel{A=A^T}{\iff} & \underbrace{\vec{x}^T A \vec{y}}_{=\langle \vec{x}, A \vec{y} \rangle} + \underbrace{\vec{y}^T A \vec{x}}_{=(A \vec{y})^T \vec{x} = \langle A \vec{y}, \vec{x} \rangle} \leq 2f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y}) \\
\iff & \underbrace{\langle \vec{x}, A \vec{y} \rangle + \langle A \vec{y}, \vec{x} \rangle}_{=2\langle \vec{x}, A \vec{y} \rangle} \leq 2f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y}) \\
\iff & 2\langle \vec{x}, A \vec{y} \rangle \leq 2f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y}) \\
\stackrel{\text{Hinweis}}{\iff} & \text{wahr}
\end{aligned}$$

Damit definiert die Abbildung f eine Norm auf $\mathbb{R}^3$.

b) $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \vec{x} \mapsto g(\vec{x}) = \sqrt{\vec{x}^T B \vec{x}}$ keine Norm auf $\mathbb{R}^3$ definiert.

Lösung:

Nach dem Determinantenkriterium ist die Matrix B nicht positiv definit:

$$\begin{aligned}
|B_1| &= |2| = 2 > 0 \\
|B_{1,2}| &= \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} = 0.
\end{aligned}$$

Wegen $|B| = 0$ ist zudem die Matrix B singulär, d.h., es hat einen nichttrivialen Kern. Jedes beliebige Element aus dem Kern kann als Gegenbeispiel für die Definitheit verwendet werden.

Nehme, z.B.,

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$g\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \sqrt{(2 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{(2 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = 0$$

und damit ist die Abbildung g nicht positiv definit und auch keine Norm.



Mengen/Topologie/Ag_Normen_mitSkizzen.tex

Aufgabe 98.456 (Normen)

a) Zeigen Sie durch Nachrechnen der geforderten Eigenschaften, dass die nachfolgenden Abbildungen $\|\vec{x}\|_a$ und $\|\vec{x}\|_b$ Normen sind:

$$(i) \|\vec{x}\|_a := \max\{|x_1 + x_2|, |x_1 - x_2|\}$$

Lösung:

Normeigenschaften:

- Definitheit:

$$\|\vec{x}\|_a = \max\{\underbrace{|x_1 + x_2|}_{\geq 0}, \underbrace{|x_1 - x_2|}_{\geq 0}\} \geq 0.$$

Falls $\|\vec{x}\|_a = 0$, gilt:

$$\begin{aligned} 0 = \|\vec{x}\|_a = \max\{|x_1 + x_2|, |x_1 - x_2|\} &\implies |x_1 + x_2| = 0 \text{ und } |x_1 - x_2| = 0 \\ &\implies x_1 + x_2 = 0 \text{ und } x_1 - x_2 = 0 \implies x_1 = x_2 = 0 \implies \vec{x} = \vec{0}. \end{aligned}$$

- Homogenität: für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \|\lambda\vec{x}\|_a &= \left\| \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix} \right\|_a = \max\{|\lambda x_1 + \lambda x_2|, |\lambda x_1 - \lambda x_2|\} \\ &= \max\{|\lambda| \cdot |x_1 + x_2|, |\lambda| \cdot |x_1 - x_2|\} = |\lambda| \max\{|x_1 + x_2|, |x_1 - x_2|\} \\ &= |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|_a. \end{aligned}$$

- Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \vec{y}\|_a &= \left\| \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \right\|_a = \max\{|(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)|, |(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2)|\} \\ &= \max\{|(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)|, |(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)|\} \\ &\leq \max\{|x_1 + x_2| + |y_1 + y_2|, |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|\} \\ &\leq \max\{|x_1 + x_2|, |x_1 - x_2|\} + \max\{|y_1 + y_2|, |y_1 - y_2|\} \\ &= \|\vec{x}\|_a + \|\vec{y}\|_a \end{aligned}$$

(ii) $\|\vec{x}\|_b := |x_1 - 2x_2| + |6x_1 + 2x_2|$

Lösung:

Normeigenschaften:

- Definitheit:

$$\|\vec{x}\|_b = \underbrace{|x_1 - 2x_2|}_{\geq 0} + \underbrace{|6x_1 + 2x_2|}_{\geq 0} \geq 0$$

$$\begin{aligned} \|\vec{x}\|_b = 0 &\implies |x_1 - 2x_2| + |6x_1 + 2x_2| = 0 \implies |x_1 - 2x_2| = 0 \text{ und } |6x_1 + 2x_2| = 0 \\ &\implies x_1 - 2x_2 = 0 \text{ und } 6x_1 + 2x_2 = 0 \implies x_1 = x_2 = 0 \implies \vec{x} = \vec{0} \end{aligned}$$

- Homogenität:

$$\begin{aligned} \|\lambda\vec{x}\|_b &= \left\| \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix} \right\|_b = |\lambda x_1 + 2 \cdot \lambda x_2| + |6 \cdot \lambda x_1 + 2 \cdot \lambda x_2| \\ &= |\lambda(x_1 + 2x_2)| + |\lambda(6x_1 + 2x_2)| = |\lambda| \cdot |x_1 + 2x_2| + |\lambda| \cdot |6x_1 + 2x_2| \\ &= |\lambda| \cdot (|x_1 + 2x_2| + |6x_1 + 2x_2|) = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|_b \end{aligned}$$

- Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \vec{y}\|_b &= |(x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2)| + |6(x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2)| \\ &= |(x_1 + 2x_2) + (y_1 + 2y_2)| + |(6x_1 + 2x_2) + (6y_1 + 2y_2)| \\ &\leq |x_1 + 2x_2| + |y_1 + 2y_2| + |6x_1 + 2x_2| + |6y_1 + 2y_2| \\ &= |x_1 + 2x_2| + |6x_1 + 2x_2| + |y_1 + 2y_2| + |6y_1 + 2y_2| \\ &= \|\vec{x}\|_b + \|\vec{y}\|_b \end{aligned}$$

- b) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass $\|\vec{x}\|_c := |x_1|^3 + |x_2|^3$ und $\|\vec{x}\|_d := \sqrt{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2}$ keine Normen auf $\mathbb{R}^2$ definieren.

Lösung:

Die Zuordnung $\|\cdot\|_c$ ist keine Norm, da die Dreiecksungleichung nicht erfüllt ist:

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_c + \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_c = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|_c = 2^3 + 2^3 = 16 > 4 = 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_c + \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_c.$$

Die Zuordnung $\|\cdot\|_d$ ist keine Norm, Umformen ergibt

$$\|\vec{x}\|_d = \sqrt{(x_1 + x_2)^2} = |x_1 + x_2|.$$

Hier ist beispielsweise $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_d = 0$, obwohl nicht der Nullvektor eingesetzt wurde. Also handelt es sich nicht um eine Norm. Übersetzen der Terme in eine quadratische Form

$$\|\vec{x}\|_d = \sqrt{Q_4(\vec{x})}, \quad Q_4(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + x_1x_2 + x_2x_1 + x_2^2, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

zeigt ebenfalls, dass es keine Norm ist: Wegen $\det(B) = 0$ ist die Matrix nicht positiv-definit.

- c) Zeichnen Sie für die Normen aus a) die sog. Einheitssphären $S_i^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_i = 1\}$.

Hinweis: eine geschickte lineare Substitution kann die Rechenarbeit erheblich vereinfachen!

Lösung:

Die Norm $\|\cdot\|_a$:

Suche alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$:

$$\|\vec{x}\|_a = \max\{|x_1 + x_2|, |x_1 - x_2|\} = 1.$$

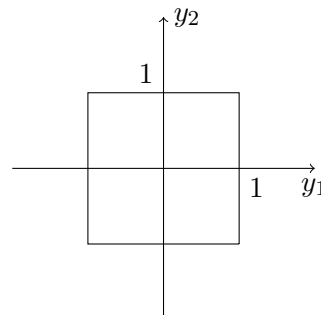
Um die Rechnungen zu vereinfachen, verwende die Substitution

$$x_1 + x_2 = y_1, \quad x_1 - x_2 = y_2 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \quad x_2 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2)$$

Dann gilt

$$\|\vec{x}\|_a = \max\{|x_1 + x_2|, |x_1 - x_2|\} = \max\{|y_1|, |y_2|\}$$

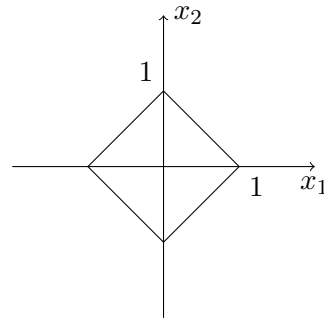
Die Einheitssphäre in der (y_1, y_2) Ebene ist der Quadrat:



Die durchgeführte Substitution ist linear, damit werden Geradenabschnitte zu Geradenabschnitten abgebildet. Um die Einheitssphäre in der (x_1, x_2) Ebene darzustellen werden deswegen nur die (x_1, x_2) -Koordinaten der Eckpunkte benötigt:

y_1	y_2	$x_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$	$\frac{1}{2}(y_1 - y_2)$
1	1	1	0
-1	1	0	-1
-1	-1	-1	0
1	-1	0	1

Die berechneten (x_1, x_2) Koordinaten sind die Eckpunkte der Einheitssphäre in (x_1, x_2) -Koordinatensystem.



Die Norm $\|\cdot\|_b$:

Suche $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$:

$$\|\vec{x}\|_b = |x_1 - 2x_2| + |6x_1 + 2x_2| = 1$$

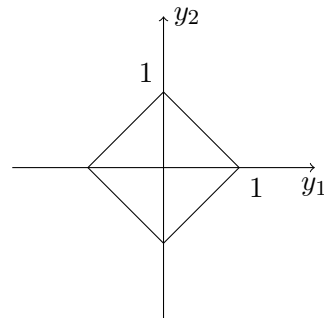
Um Berechnungen zu vereinfachen, lineare Substitution:

$$x_1 - 2x_2 = y_1 \quad , \quad 6x_1 + 2x_2 = y_2 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = \frac{1}{7}(y_1 + y_2) \quad , \quad x_2 = \frac{1}{14}(y_2 - 6y_1)$$

Dann ist

$$\|\vec{x}\|_b = |x_1 - 2x_2| + |6x_1 + 2x_2| = |y_1| + |y_2|.$$

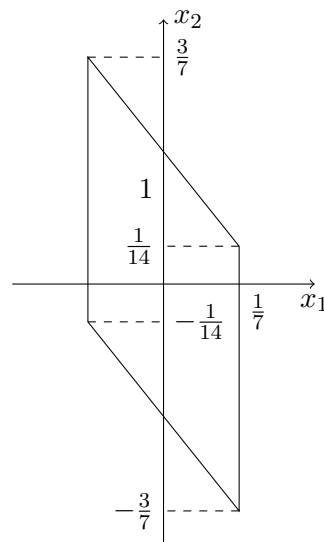
Die Einheitssphäre in der (y_1, y_2) -Ebene:



Die durchgeführte Substitution ist linear, damit werden Geradenabschnitte zu Geradenabschnitten abgebildet. Um die Einheitssphäre in der (x_1, x_2) Ebene darzustellen werden deswegen nur die (x_1, x_2) -Koordinaten der Eckpunkte benötigt:

y_1	y_2	$x_1 = \frac{1}{7}(y_1 + y_2)$	$\frac{1}{14}(y_2 - 6y_1)$
1	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{14}$
0	1	$\frac{1}{7}$	$-\frac{3}{7}$
-1	0	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{14}$
0	-1	$-\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$

Die berechneten (x_1, x_2) Koordinaten sind die Eckpunkte der Einheitssphäre in (x_1, x_2) -Koordinatensystem.





Mengen/Verknüpfungen/Ag_MengenLogik_Zusammenhaenge.tex

Aufgabe 99.457 (Mengen und Aussagen)

VT

Gegeben seien vier Mengen:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 2 = x\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid (2x - 2)^2 = x^2\},$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 2| = |x|\} \quad \text{und}$$

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(2x - 2)^2} = \sqrt{x^2}\right\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $A \subset B$, $B \not\subset A$ und $B = C$.

Lösung:

- Die Menge A kann durch Äquivalenzumformungen direkt bestimmt werden:

$$(2x - 2 = x) \iff (x - 2 = 0) \iff (x = 2) \implies (A = \{2\})$$

- Zeige, dass $A \subset B$:

$$(x \in A) \iff (x = 2) \implies ((2x - 2)^2 = x^2) \implies (x \in B)$$

Damit ist $A \subset B$.

- Bestimme die Menge B :

$$\begin{aligned} ((2x - 2)^2 = x^2) &\iff (4x^2 - 8x + 4 = x^2) \iff (3x^2 - 8x + 4 = 0) \\ &\iff (x = 2 \vee x = \frac{2}{3}) \implies (B = \{2; \frac{2}{3}\}) \end{aligned}$$

- Für $x = \frac{2}{3}$ gilt:

$$(x = \frac{2}{3}) \implies (x \in B \wedge x \notin A).$$

Damit ist $B \not\subset A$.

- Wegen $|2 \cdot 2 - 2| = |2|$ gilt $2 \in B$ und $2 \in C$.

Wegen $|2 \cdot \frac{2}{3} - 2| = |\frac{2}{3}|$ gilt $\frac{2}{3} \in B$ und $\frac{2}{3} \in C$.

Damit gilt

$$(x \in B) \iff (x = 2 \vee x = \frac{2}{3}) \implies (x \in C)$$

bzw. $B \subset C$.

Desweiteren gilt wegen $|a|^2 = a^2$ für alle $a \in \mathbb{R}$

$$x \in C \iff |2x - 2| = |x| \implies |2x - 2|^2 = |x|^2 \implies (2x - 2)^2 = x^2 \iff x \in B$$

D.h., $C \subset B$.

Aus $(B \subset C) \wedge (C \subset B)$ folgt dann $B = C$.

b) Zu welche(r/n) der anderen Mengen ist die Menge D gleich?

B, C

Lösung:

Durch direktes Einsetzen der Zahlen 2 und $\frac{2}{3}$ in der beschreibenden Gleichung von D erhält man, dass sowohl $2 \in D$ wie auch $\frac{2}{3} \in D$.

Damit ist $A \subset D$, aber $A \neq D$ und $B = C \subset D$.

Wegen $\sqrt{a^2} = |a|$ für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sqrt{(2x - 2)^2} = |2x - 2| \quad \text{und} \quad \sqrt{x^2} = |x|.$$

Damit ist für alle $x \in \mathbb{R}$

$$(x \in D) \iff \left(\sqrt{(2x-2)^2} = \sqrt{x^2} \right) \iff (|2x-2| = |x|) \iff (x \in C)$$

D.h., $D = C (= B)$.

- c) Setzen Sie an der Stelle $\boxed{?}$ zwischen den Aussagen den mathematisch am besten passenden Symbol aus der Menge $\{ \implies, \impliedby, \iff \}$ ein.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(i) \quad (2x-2=x) \boxed{?} ((2x-2)^2 = x^2) \implies$$

Lösung:

$$(2x-2=x) \iff (x \in A) \boxed{\overset{A \subseteq B}{\implies}} (x \in B) \iff ((2x-2)^2 = x^2)$$

$$(ii) \quad (2x-2=x) \boxed{?} (|2x-2| = |x|) \implies$$

Lösung:

$$(2x-2=x) \iff (x \in A) \boxed{\overset{A \subseteq B}{\implies}} (x \in B) \overset{B=C}{\iff} (x \in C) \iff (|2x-2| = |x|)$$

$$(iii) \quad ((2x-2)^2 = x^2) \boxed{?} (|2x-2| = |x|) \iff$$

Lösung:

$$((2x-2)^2 = x^2) \iff (x \in B) \boxed{\overset{B=C}{\iff}} (x \in C) \iff (|2x-2| = |x|)$$

$$(iv) \quad (2x-2=x) \boxed{?} \left(\sqrt{(2x-2)^2} = \sqrt{x^2} \right) \implies$$

Lösung:

$$(2x-2=x) \iff (x \in A) \boxed{\overset{A \subseteq B}{\implies}} (x \in B) \overset{B=D}{\iff} (x \in C) \iff \left(\sqrt{(2x-2)^2} = \sqrt{x^2} \right)$$



Mengen/Verknuepfen/Ag_Mengen_EineAdjunktiveNformUeberVerknTab.tex

Aufgabe 99.458 (Verknüpfungstabellen zur Vereinfachung von Termen nutzen)

SPF

Seien G eine beliebige Menge, $A \subseteq G$, $B \subseteq G$, $C \subseteq G$, $\complement A := G \setminus A$, $\complement B := G \setminus B$, $\complement C := G \setminus C$ und

$$\mathcal{D} := \{ \emptyset; A; B; C; \complement A; \complement B; \complement C; G \}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe einer Verknüpfungstabelle, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ und für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ drei Mengen $X_k \in \mathcal{D}$, $Y_k \in \mathcal{D}$ und $Z_k \in \mathcal{D}$ gibt mit

$$L := ((A \cup B) \setminus C) \cup (A \setminus (B \cap C)) = \bigcup_{k=1}^n (X_k \cap Y_k \cap Z_k).$$

Geben Sie dann auf möglichst einfache Art an, wie L aus A , B und C entsteht!

Es ist zum Beispiel $L = (A \cap \complement B \cap G) \cup (G \cap B \cap \complement C)$. Also gilt $L = (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$.

Lösung:

Dann ergibt sich die folgende Verknüpfungstabelle

A	B	C	$A \cup B$	C	$A \cap B$	$B \cap C$	$(A \cup B) \setminus C$	$A \setminus (B \cap C)$	L
$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

Also gilt

$$((A \cup B) \setminus C) \cup (A \setminus (B \cap C)) = (A \cap B \cap \complement C) \cup (A \cap \complement B \cap C) \cup (A \cap \complement B \cap \complement C) \cup (\complement A \cap B \cap \complement C) \\ = (B \cap \complement C) \cup (A \cap \complement B) = (G \cap B \cap \complement C) \cup (A \cap \complement B \cap G).$$



Mengen/Verknuepfen/Ag_Mengen_EinfacheVerknuepfungen.tex

Aufgabe 99.459 (Mengen verknüpfen)

3.2.1

In den letzten Aufgabenteilen seien A und B beliebige Mengen.

a) Vergleichen Sie die beiden Mengen

$$C := \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\} \quad \text{und} \quad D := \{x \mid 0 < x \leq 7 \text{ und } x \text{ ist eine natürliche Zahl}\}$$

und schreiben sie D als Schnitt eines Intervalls mit einer mathematischen Grundmenge auf!

C und D sind gleich. Es ist $D = [1; 7] \cap \mathbb{N}$.

Lösung:

Die beiden Bedingungen $0 < x \leq 7$ und $x \in \mathbb{N}$ sind genau für die Elemente aus C erfüllt. Deshalb gilt $C = D$. Die Zahlen aus D liegen im Intervall $[1; 7]$ und in $\mathbb{N}$. Diese beiden Mengen haben keine weiteren gemeinsamen Elemente.

b) Bilden Sie die Vereinigung und den Durchschnitt der beiden Mengen

$$C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\} \quad \text{und} \quad E := \{-1; 2; 3; 4\} \quad !$$

$$C \cup E = \{-1; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\} \quad \text{und} \quad C \cap E = \{2; 3; 4\}$$

Lösung:

Wende die Definition der Vereinigung bzw. des Durchschnitts an.

Die Vereinigung $C \cup E$ enthält alle Elemente, die entweder in C oder in E oder in beiden Mengen enthalten sind. Es gilt also $C \cup D = \{-1; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

Der Durchschnitt $C \cap E$ enthält alle Elemente, die sowohl in C als auch in E enthalten sind. Das heißt, es gilt $C \cap D = \{2; 3; 4\}$.

c) Bilden Sie die Differenzmenge $I \setminus J$ und den Durchschnitt der beiden Mengen

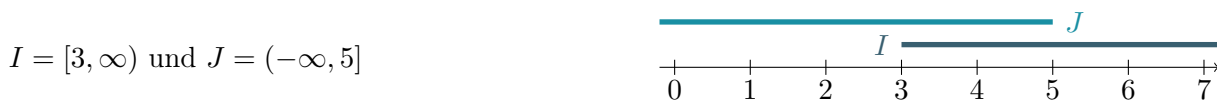
$$I := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\} \quad \text{und} \quad J := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\} \quad !$$

$$I = [3; \infty), J = (-\infty; 5], I \setminus J = (5; \infty) \quad \text{und} \quad I \cap J = [3; 5]$$

Lösung:

Wende die Definition der Differenzmenge bzw. des Durchschnitts an.

Zur Veranschaulichung kann man (muss aber nicht) die gegebenen Mengen zunächst in Intervallform darstellen und auf dem Zahlenstrahl einzeichnen:



$I \setminus J$ ist die Menge all derjenigen Elemente aus I , die nicht in J liegen. Also sind darin alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 3$ und $x \not\leq 5$ enthalten. Damit ist

$$I \setminus J = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3 \text{ und } x > 5\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\} = (5; \infty).$$

Der Schnitt ist die Menge aller Elemente, die in beiden Mengen liegen:

$$x \in I \cap J \iff x \geq 3 \text{ und } x \leq 5,$$

und folglich

$$I \cap J = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3 \text{ und } x \leq 5\} = [3; 5].$$

- d) Welche der Aussagen $A \subseteq (A \cup B)$ bzw. $A \subseteq (A \cap B)$ ist richtig? Begründen Sie Ihre Antwort!

$A \subseteq A \cup B$ stimmt immer, $A \subseteq A \cap B$ nur für $A \subseteq B$

Lösung:

Hier bietet es sich an, mit Verknüpfungstabellen zu arbeiten. Es gilt:

Eine Menge ist eine Teilmenge einer Verknüpfung, wenn in der Spalte der Verknüpfung in jeder Zeile, die in der Spalte der Menge ein „ $\in$ “ enthält, ebenfalls ein „ $\in$ “ steht.

A	B	$A \cup B$	A	B	$A \cap B$
$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

Für die Menge A ist dies bei der Verknüpfung $A \cup B$ der Fall, bei der Verknüpfung $A \cap B$ allerdings (im allgemeinen) nicht.

Sonderfall: Enthält A keine Elemente, die B nicht auch enthält, sprich gilt $A \subseteq B$, so ist $A \cap B = A$, und dann gilt $A \subseteq (A \cap B)$.

- e) Geben Sie alle Teilmengen der Menge $M := \{1; 2; 3; 4\}$ an!

$$\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{4\}; \{1; 2\}; \{2; 3\}; \{3; 4\}; \{4; 1\}; \{1; 3\}; \{2; 4\}; \{1; 2; 3\}; \{2; 3; 4\}; \{3; 4; 1\}; \{4; 1; 2\}; M$$

Lösung:

Die Teilmengen von M sind all diejenigen Mengen, die sich als Kombinationen der Elemente 1, 2, 3 und 4 ergeben. Davon gibt es $2^4 = 16$ verschiedene:

Anzahl Elemente	Teilmengen von M
0	$\emptyset$
1	$\{1\}; \{2\}; \{3\}; \{4\}$
2	$\{1; 2\}; \{1; 3\}; \{1; 4\}; \{2; 3\}; \{2; 4\}; \{3; 4\}$
3	$\{1; 2; 3\}; \{1; 2; 4\}; \{1; 3; 4\}; \{2; 3; 4\}$
4	M

- f) Welche der Aussagen $(A \cap B) \subseteq (A \setminus (A \setminus B))$ bzw. $(A \cap B) \supseteq (A \setminus (A \setminus B))$ ist richtig?
Begründen Sie Ihre Antwort!

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$$

Lösung:

Für die beiden verknüpften Mengen $A \cap B$ und $A \setminus (A \setminus B)$ notiert man die zugehörigen Verknüpfungstabellen und vergleicht die jeweils rechts stehenden Spalten bezüglich der Enthaltenseinsrelationen $\subseteq$ und $\supseteq$:

A	B	$A \cap B$	A	B	$A \setminus B$	$A \setminus (A \setminus B)$
$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$

Da diese beiden Spalten übereinstimmen, gilt sowohl

$$(A \cap B) \subseteq (A \setminus (A \setminus B)) \quad \text{als auch} \quad (A \cap B) \supseteq (A \setminus (A \setminus B))$$

und somit dann auch

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B).$$



Mengen/Verknuepfen/Ag_Mengen_Hockeyspielerinnen.tex

Aufgabe 99.460 (Hockeyspielerinnen gruppieren)

spf

In einer Hockeymannschaft wurden die Spielerinnen befragt, was für Hobbys sie außer dem Hockeysport sonst noch verfolgen. Es wurde gefragt, ob sie eine weitere Sportart ausüben, ob sie sich musikalisch betätigen und ob sie einem anderen Zeitvertreib (wie Malen, Stricken, Computer spielen, etwas Sammeln, Holzbearbeitung, ...) nachgehen. Die Spielerinnen gaben folgende Antworten:

	Beate	Nele	Raphaela	Katrin	Theresa	Paula	Christine	Felicitas	Verena	Doris	Lisa
Sport	✓	×	×	✓	×	✓	✓	×	×	×	×
Musik	×	✓	×	✓	✓	×	×	✓	×	✓	×
Anderes	✓	✓	✓	✓	×	×	✓	×	✓	✓	×

- a) Geben Sie drei Mengen S , M und A an, die zeigen, welche Spielerinnen neben dem Hockey einen weiteren Sport machen, welche musizieren und welche einem anderen Hobby nachgehen!

$$S = \{B, C, K, P\}$$

$$M = \{D, F, K, N, T\}$$

$$A = \{B, C, D, K, N, R, V\}$$

Lösung:

Es sind $S := \{B, K, P, C\} = \{B, C, K, P\}$, $M := \{N, K, T, F, D\} = \{D, F, K, N, T\}$ und $A := \{B, N, R, K, C, V, D\} = \{B, C, D, K, N, R, V\}$.

- b) Welche Menge zeigt Ihnen, welche Spielerinnen Musik machen und einem anderen (nicht-sportlichen) Hobby nachgehen? Welche Elemente hat diese Menge?

$$M \cap A = \{D, K, N\}$$

Lösung:

Will man nun wissen, welche Spielerinnen Musik machen und noch einen weiteren nicht-sportlichen Zeitvertreib haben, so schneidet man M mit A und erhält

$$M \cap A = \{D, F, K, N, T\} \cap \{B, C, D, K, N, R, V\} = \{D, K, N\},$$

also Nele, Katrin und Doris.

- c) Welche Menge müssen Sie bilden, um die Spielerinnen zu sammeln, die mindestens zwei Sportarten betreiben oder Musik machen? Geben Sie die Menge an!

$$S \cup M = \{B, C, D, F, K, N, P, T\}$$

Lösung:

Die Spielerinnen, die neben dem Hockey noch eine andere Sportart ausüben oder Musik machen, finden sich in der Vereinigung von S und M

$$S \cup M = \{B, C, K, P\} \cup \{D, F, K, N, T\} = \{B, C, D, F, K, N, P, T\}.$$

(Da rechts eine Menge steht, genügt es, Katrin einmal dort einzutragen.)

- d) Wer macht Musik, aber außer dem Hockey keinen anderen Sport?

$$M \setminus S = \{D, F, N, T\}$$

Lösung:

Interessiert man sich für die Spielerinnen, die zwar Musik machen, aber keinem anderen Sport nachgehen, so schaut man auf die Differenz von M und S

$$M \setminus S = \{D, F, K, N, T\} \setminus \{B, C, K, P\} = \{D, F, N, T\}.$$

- e) Gibt es Spielerinnen, die nur Sport oder Musik in ihrer Freizeit machen?

$$\complement A = \{F, L, P, T\}$$

Lösung:

Und will man wissen, welche Spielerinnen nur Sport oder Musik in ihrer Freizeit machen, so betrachtet man das Komplement von A

$$\complement A = \complement \{B, C, D, K, N, R, V\} = \{F, L, P, T\}.$$

- f) Bilden Sie $S \cup (M \cap A)$ und $(S \cup M) \cap A$! Sind die beiden Mengen identisch?

nein

Lösung:

Es gilt

$$\begin{aligned} S \cup (M \cap A) &= \{B, C, K, P\} \cup (\{D, F, K, N, T\} \cap \{B, C, D, K, N, R, V\}) \\ &= \{B, C, K, P\} \cup \{D, K, N\} \\ &= \{B, C, D, K, N, P\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (S \cup M) \cap A &= (\{B, C, K, P\} \cup \{D, F, K, N, T\}) \cap \{B, C, D, K, N, R, V\} \\ &= \{B, C, D, F, K, N, P, T\} \cap \{B, C, D, K, N, R, V\} \\ &= \{B, C, D, K, N\}. \end{aligned}$$

Bei der einen Klammerung gehört Paula also zur Resultatmenge dazu, bei der anderen nicht.



Mengen/Verknuepfen/Ag_Mengen_MengenAbbildungen_vkmwmitki.tex

Aufgabe 99.461 (Mengen und Abbildungen)

dh

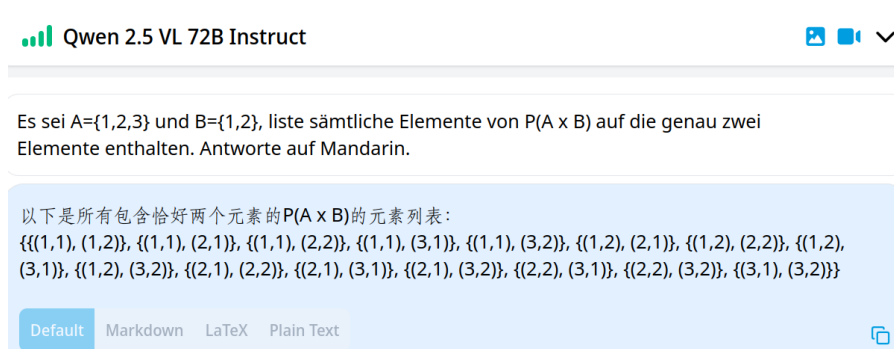
Es seien $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{1, 2\}$:

- a) Listen Sie sämtliche Elemente von $\mathcal{P}(A \times B)$ auf, die genau zwei Elemente enthalten.
- b) Geben Sie sämtliche injektiven Abbildungen von A nach B sowie von B nach A an.

Warum sollten Sie nicht die Formeln für Kombinationen/Permutationen benutzen?

Lösung:

Wenn die Aufgabe „ohne Begründung“ in der Klausur gestellt ist, reicht die Angabe der Liste:



Wenn die Aufgabe mit Begründung verlangt wird, muss jeder Einzelschritt aufgeführt und begründet werden (entweder Definition, grundlegende Umformungen oder Sätze aus der Vorlesung). Zuerst berechnet man das kartesische Produkt:

$$A \times B = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2)\}.$$

Die Potenzmenge mit $2^6 = 64$ Elementen sollte man nicht ausrechnen, sondern nur die zweielementigen Mengen darin auflisten. Ein Element der Potenzmenge ist eine Teilmenge von $A \times B$, also eine Menge aus Paaren. Sie soll laut Aufgabe genau zwei Paare (diese dann jeweils mit zwei Einträgen) enthalten. Das ergibt dann die Kombinationsmöglichkeiten aus der KI-Antwort.

Typische Fehler mit Punktabzug sind hier:

- Elemente in Mengen gibt es nicht mehrfach: $\{(1, 1), (1, 1)\}$ ist keine zweielementige Teilmenge.
- Die Menge soll zwei Elemente/Paare haben und nicht die Paare (dass diese auch zwei Elemente haben ist hier Zufall). Auflisten nur der Paare $(1, 1), (2, 1)$, etc. gibt keine Punkte.
- Die Paare $(1, 2)$ und $(2, 1)$ sind verschieden da Paare und keine Mengen, die Mengen $\{(1, 2), (2, 1)\}$ und $\{(2, 1), (1, 2)\}$ sind dagegen gleich.
- Die Verwendung der Kombinatorikformeln liefert nur die Anzahl der Paare, aber nicht die konkreten Paare. Die typische Antwort aus der Schule „Es gibt $\binom{6}{2} = 15$ mögliche Mengen“ gibt keine Punkte.

Bei Teil b) muss einem zuerst einfallen, dass A mehr Elemente besitzt als B , also kann es keine injektive Abbildung von A nach B geben (mindestens ein Element von B muss mehrfach als Bildelement auftreten). Umgekehrt gibt es die folgenden Möglichkeiten, die man entweder als Mini-Wertetabellen oder als Zuordnungen auflisten kann:

x	1	2
$f(x)$	1	2

,

x	1	2
$f(x)$	2	1

,

x	1	2
$f(x)$	1	3

,

x	1	2
$f(x)$	3	1

,

x	1	2
$f(x)$	2	3

,

x	1	2
$f(x)$	3	2

Es gibt viele alternative Antwortmöglichkeiten, man könnte auch einfach alle Paare aus den Elementen 1, 2, 3 listen und sagen, dass die Bildelemente von 1 und 2 gemeint sind. Die Angabe nur der Anzahl $2 \cdot 3 = 6$ der Möglichkeiten wäre dagegen nicht richtig.

**Aufgabe 99.462** (Mengen beschreiben und verknüpfen)

jgl

Als Grundmenge sei $G := \{n \in \mathbb{N} \mid 0 < n \leq 10\}$ gegeben; weiter gegeben seien die Mengen

$$A := \{1, 4, 5\}, B := \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10\} \text{ und } C := A \cap B.$$

- a) Geben Sie die Mengen $A \cup B$, C , $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\overline{C} = \mathbb{C}C = G \setminus C$, $\overline{A} \setminus B$ und $\overline{B \cap \overline{A}} \cup A$ in aufzählender Weise an. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$, $C = A \cap B = \{1, 5\}$, $A \setminus B = \{4\}$, $B \setminus A = \{2, 3, 7, 8, 9, 10\}$, $\overline{C} = \mathbb{C}C = G \setminus C = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $\overline{A} \setminus B = (G \setminus A) \setminus B = \{6\}$, $\overline{B \cap \overline{A}} = (G \setminus (B \cap (G \setminus A))) \cup A = \{1, 4, 5, 6\}$
- b) Geben Sie alle Teilmengen von C an. $\emptyset, \{1\}, \{5\}, \{1, 5\}$
- c) Geben Sie die Potenzmenge von C an. $\{\emptyset, \{1\}, \{5\}, \{1, 5\}\}$
- d) Notieren Sie alle Teilmengen der Potenzmenge von C (das heißt, die Elemente der Potenzmenge der Potenzmenge).
- $$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{1\}\}, \{\{5\}\}, \{\{1, 5\}\}$$
- $$\{\emptyset, \{1\}\}, \{\emptyset, \{5\}\}, \{\emptyset, \{1, 5\}\}, \{\{1\}, \{5\}\}, \{\{1\}, \{1, 5\}\}, \{\{5\}, \{1, 5\}\}$$
- $$\{\emptyset, \{1\}, \{5\}\}, \{\emptyset, \{1\}, \{1, 5\}\}, \{\emptyset, \{5\}, \{1, 5\}\}, \{\{1\}, \{5\}\}, \{\{1\}, \{1, 5\}\},$$
- $$\{\emptyset, \{1\}, \{5\}, \{1, 5\}\}$$

Lösung:

- a) Es ist

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\} \\ C = A \cap B &= \{1, 5\} \\ A \setminus B &= \{4\} \\ B \setminus A &= \{2, 3, 7, 8, 9, 10\} \\ \overline{C} = \mathbb{C}C = G \setminus C &= \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10\} \\ \overline{A} \setminus B = (G \setminus A) \setminus B &= \{6\} \\ \overline{B \cap \overline{A}} = (G \setminus (B \cap (G \setminus A))) \cup A &= \{1, 4, 5, 6\} \end{aligned}$$

- b) Die Teilmengen von $C = A \cap B = \{1, 5\}$ sind $\emptyset, \{1\}, \{5\}, \{1, 5\}$.
- c) Die Potenzmenge $\mathcal{P}(C)$ von $C = \{1, 5\}$ ist $\mathcal{P}(C) = \{\emptyset, \{1\}, \{5\}, \{1, 5\}\}$.
- d) Die Teilmengen von $\mathcal{P}(\{1, 5\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{5\}, \{1, 5\}\}$ sind
- $$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{1\}\}, \{\{5\}\}, \{\{1, 5\}\}$$
- $$\{\emptyset, \{1\}\}, \{\emptyset, \{5\}\}, \{\emptyset, \{1, 5\}\}, \{\{1\}, \{5\}\}, \{\{1\}, \{1, 5\}\}, \{\{5\}, \{1, 5\}\}$$
- $$\{\emptyset, \{1\}, \{5\}\}, \{\emptyset, \{1\}, \{1, 5\}\}, \{\emptyset, \{5\}, \{1, 5\}\}, \{\{1\}, \{5\}\}, \{\{1\}, \{1, 5\}\},$$
- $$\{\emptyset, \{1\}, \{5\}, \{1, 5\}\}.$$

**Aufgabe 99.463** (Mengenoperationen)

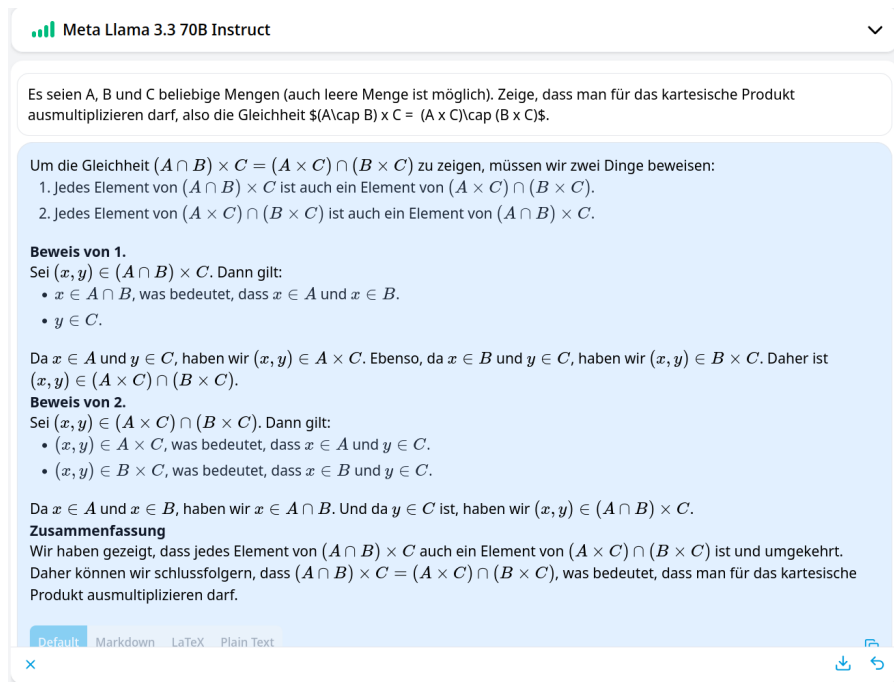
dh

Es seien A , B und C beliebige Mengen (auch leere Menge ist möglich). Zeigen Sie, dass man für das kartesische Produkt ausmultiplizieren darf, also die Gleichheit

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C).$$

Lösung:

Eine Gleichheit von Mengen zerlegt man typischerweise in die Aussagen $\subseteq$ und $\supseteq$, das ist das aufwendige Standardverfahren das auch die KI benutzt:



Kürzer ist ein klassischer Logik-Beweis, indem man die Definition des kartesischen Produkts und des Schnitts aufschreibt und direkt umformt:

$$\begin{aligned}
 (A \cap B) \times C &\stackrel{\text{Def. Produkt}}{=} \{(x, y) \mid x \in A \cap B, y \in C\} \\
 &= \{(x, y) \mid x \in A \text{ und } x \in B \text{ und } y \in C\} \\
 &= \{(x, y) \mid x \in A \text{ und } y \in C \text{ und } x \in B \text{ und } y \in C\} \\
 &= \{(x, y) \mid x \in A \text{ und } y \in C\} \cap \{(x, y) \mid x \in B \text{ und } y \in C\} = (A \times C) \cap (B \times C).
 \end{aligned}$$

Wir haben verwendet, dass man die Bedingung $y \in C$ doppelt hinschreiben darf ohne dass sich etwas ändert und dass man die Menge dann am mittleren *und* auftrennen darf. Das sind Grundoperationen ohne $\times$ und können daher ohne Begründung verwendet werden.

Keine Punkte gibt es für ausschweifenden Fließtext, Angabe von einfachen Beispielen, oder wenn man $\times$ mit dem Zahlenprodukt verwechselt und die Paare nicht bildet.



Mengen/Verknuepfen/Ag_Mengen_Mengengleichheit_mittel.tex

Aufgabe 99.464 (Mengengleichheit)

Welche der im Folgenden genannten Mengengleichheiten gelten für alle Mengen A , B und C ? Begründen Sie Ihre Aussage mit den Rechenregeln für logische Verknüpfungen, wenn die Gleichheit gilt, oder geben Sie anderenfalls ein Gegenbeispiel an:

a) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$,

richtig

Lösung:

Durch Einsetzen der Definition der Differenzmenge und mit den Rechenregeln für logische Ver-

knüpfungen erhält man, dass für jedes x gilt:

$$\begin{aligned}
 x \in (A \setminus B) \setminus C &\iff x \in (A \setminus B) \text{ und } x \notin C \\
 &\iff x \in A \text{ und } x \notin B \text{ und } x \notin C \\
 &\iff x \in A \text{ und } x \notin C \text{ und } x \notin B \\
 &\iff x \in (A \setminus C) \text{ und } x \notin B \\
 &\iff x \in (A \setminus C) \setminus B.
 \end{aligned}$$

Folglich gilt $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$.

b) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C),$

falsch: Bsp.: $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2\}, C = \{1\}$

Lösung:

Diese Gleichheit gilt *nicht* für alle Mengen A, B und C . Gegenbeispiel: Für $A := \{1, 2, 3\}$, $B := \{1, 2\}$ und $C := \{1\}$ gilt $A \setminus B = \{3\}$ und $B \setminus C = \{2\}$. Damit ist

$$(A \setminus B) \setminus C = \{3\} \neq \{1, 3\} = A \setminus (B \setminus C).$$

c) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B.$

richtig

Lösung:

Mit der Definition der Differenzmenge und den Rechenregeln für logische Verknüpfungen erhält man, dass für alle x gilt:

$$\begin{aligned}
 x \in A \setminus (A \setminus B) &\iff x \in A \text{ und } x \notin (A \setminus B) \\
 &\iff x \in A \text{ und } \neg(x \in A \text{ und } x \notin B) \\
 &\iff x \in A \text{ und } (x \notin A \text{ oder } x \in B) \\
 &\iff \underbrace{(x \in A \text{ und } x \notin A)}_{\text{immer falsch}} \text{ oder } (x \in A \text{ und } x \in B) \\
 &\iff x \in A \text{ und } x \in B \\
 &\iff x \in A \cap B
 \end{aligned}$$

Daraus folgt $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.



Mengen/Verknuepfen/Ag_Mengen_SehrEinfacheVerknuepfungen.tex

Aufgabe 99.465 (Mengenoperationen)

vr

Seien $G := \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 10\}$ die Grundmenge und $A := \{1, 2, 3, 4\}$, $B := \{n \in G \mid 2 < n \leq 7\}$.

Geben Sie die folgenden Mengen an:

a) $A \cup B$

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Lösung: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

b) $A \cap B$

$\{3, 4\}$

Lösung: $A \cap B = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{3, 4\}$

c) $A \setminus B$

$\{1, 2\}$

Lösung: $A \setminus B = \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{1, 2\}$

d) $B \setminus A$

$\{5, 6, 7\}$

Lösung: $B \setminus A = \{3, 4, 5, 6, 7\} \setminus \{1, 2, 3, 4\} = \{5, 6, 7\}$

e) $\complement A$

$\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Lösung: $\complement A = G \setminus A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \setminus \{1, 2, 3, 4\} = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

f) $\complement A \setminus \complement B$

$\{5, 6, 7\}$

Lösung: $\complement A \setminus \complement B = (G \setminus A) \setminus (G \setminus B) = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\} \setminus \{1, 2, 8, 9, 10\} = \{5, 6, 7\}$



Mengen/Verknuepfen/Ag_Mengen_einfacheVerknuepfungen_beweise.tex

Aufgabe 99.466 (Kleine Beweise)

dh

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen für Mengen A und B wahr oder falsch sind, und geben Sie ggf. einen kleinen Beweis oder ein Gegenbeispiel:

a) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C).$	wahr	d) $\text{Pot}(A \cup B) = \text{Pot}(A) \cup \text{Pot}(B).$	falsch
b) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C),$ $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2\}, C = \{1\}$	falsch: Bsp.:	e) $\text{Pot}(A \times B) = \text{Pot}(A) \times \text{Pot}(B).$	falsch
c) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B.$	richtig	f) $\bigcup_{a \in A} \{a\} = A.$	wahr

Lösung:

a) Die Aussage ist wahr, denn

$$\begin{aligned} (A \cap B) \times C &= \{(x, y) \mid x \in A \cap B, y \in C\} \\ &= \{(x, y) \mid x \in A \wedge x \in B \wedge y \in C\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (A \times C) \cap (B \times C) &= \{(x, y) \mid (x \in A, y \in C) \wedge (x \in B, y \in C)\} \\ &= \{(x, y) \mid x \in A \wedge x \in B \wedge y \in C\} \end{aligned}$$

sind die selben Mengen.

- b) Diese Aussage ist falsch. Zum Beispiel gilt für $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{1, 4\}$, dass $(A \setminus B) \setminus C = \{2\} \setminus C = \{2\}$, wobei $A \setminus (B \setminus C) = A \setminus \{3\} = \{1, 2\}$. Diese beiden sind offensichtlich nicht gleich.
- c) Diese Aussage ist korrekt. Wir betrachten die Obermenge $A \cup B$. Alle Komplemente $\overline{A}$ etc. werden bezüglich dieser Obermenge gebildet. Damit gilt: $A \setminus B = A \cap \overline{B}$. Außerdem gilt für das Komplement des Schnitts: $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A} \cup B$. Damit erhalten wir:

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B.$$

- d) Diese Aussage ist falsch, denn im Allgemeinen ist $A \cup B$ zwar in $\text{Pot}(A \cup B)$ enthalten, jedoch nicht in $\text{Pot}(A) \cup \text{Pot}(B)$. Als konkretes Gegenbeispiel dient $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$. Dann ist $A \cup B = \{1, 2, 3\} \notin \text{Pot}(A) \cup \text{Pot}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$.
- e) Auch diese Aussage ist falsch. Seien zum Beispiel $A = B = \{1\}$. Dann ist $(\{1\}, \{1\}) \in \text{Pot}(A) \times \text{Pot}(B)$, aber es handelt sich hierbei nicht um eine Menge, deshalb kann es kein Element von $\text{Pot}(A \times B) = \{\emptyset, \{(1, 1)\}\}$ sein.

$$f) \bigcup_{a \in A} \{a\} = \{x \mid \exists a \in A \text{ mit } x \in \{a\}\} = \{x \mid \exists a \in A \text{ mit } x = a\} = \{x \mid x \in A\} = A.$$



Mengen/Verknuepfen/Ag_Mengen_einfacheVerknuepfungen_mehrBeweise.tex

Aufgabe 99.467 (Kleine Beweise)

dh

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie ggf. einen kleinen Beweis oder ein Gegenbeispiel:

a) $\emptyset \times A = \emptyset$	richtig	e) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.	richtig
b) $P(\emptyset) = \emptyset$	falsch	f) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$,	falsch
c) $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$	falsch	g) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.	richtig
d) $(C \setminus A) \times (C \setminus B) = (C \times C) \setminus (A \times B)$	falsch	h) $\text{Pot}(A \cup B) = \text{Pot}(A) \cup \text{Pot}(B)$.	falsch
		i) $\text{Pot}(A \times B) = \text{Pot}(A) \times \text{Pot}(B)$.	falsch

Lösung:

- a) Die Aussage ist wahr. Da die Aussage $x \in \emptyset$ für jedes x falsch ist, gibt es kein (x, y) mit $(x, y) \in \emptyset \times A$. Daher folgt $\emptyset \times A = \emptyset$
- b) Die Aussage ist falsch. Jede Potenzmenge enthält immer die leere Menge. Somit gilt $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$ und nicht $P(\emptyset) = \emptyset$.
- c) Die Aussage ist falsch. $C \setminus (A \cap B)$ sind alle Elemente aus C , welche nicht sowohl in A als auch in B liegen. $(C \setminus A) \cap (C \setminus B)$ sind alle Elemente von C , welche weder in A noch in B liegen.
- d) Die Aussage ist falsch. Als Gegenbeispiel wählen wir $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{1, 2\}$. Dann ist:
 $(C \setminus A) \times (C \setminus B) = \{2\} \times \{1\} = \{(2, 1)\}$
 $(C \times C) \setminus (A \times B) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\} \setminus \{(1, 2)\} = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2)\}$
- e) Die Aussage ist wahr, denn

$$\begin{aligned} (A \cap B) \times C &= \{(x, y) \mid x \in A \cap B, y \in C\} \\ &= \{(x, y) \mid x \in A \wedge x \in B \wedge y \in C\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (A \times C) \cap (B \times C) &= \{(x, y) \mid (x \in A, y \in C) \wedge (x \in B, y \in C)\} \\ &= \{(x, y) \mid x \in A \wedge x \in B \wedge y \in C\} \end{aligned}$$

sind die selben Mengen.

- f) Diese Aussage ist falsch. Zum Beispiel gilt für $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{1, 4\}$, dass $(A \setminus B) \setminus C = \{2\} \setminus C = \{2\}$, wobei $A \setminus (B \setminus C) = A \setminus \{3\} = \{1, 2\}$. Diese beiden sind offensichtlich nicht gleich.
- g) Diese Aussage ist korrekt. Wir betrachten die Obermenge $A \cup B$. Alle Komplemente $\overline{A}$ etc. werden bezüglich dieser Obermenge gebildet. Damit gilt: $A \setminus B = A \cap \overline{B}$. Außerdem gilt für das Komplement des Schnitts: $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A} \cup B$. Damit erhalten wir:

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B.$$

- h) Diese Aussage ist falsch, denn im Allgemeinen ist $A \cup B$ zwar in $\text{Pot}(A \cup B)$ enthalten, jedoch nicht in $\text{Pot}(A) \cup \text{Pot}(B)$. Als konkretes Gegenbeispiel dient $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$. Dann ist $A \cup B = \{1, 2, 3\} \notin \text{Pot}(A) \cup \text{Pot}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$.

- i) Auch diese Aussage ist falsch. Seien zum Beispiel $A = B = \{1\}$. Dann ist $(\{1\}, \{1\}) \in \text{Pot}(A) \times \text{Pot}(B)$, aber es handelt sich hierbei nicht um eine Menge, deshalb kann es kein Element von $\text{Pot}(A \times B) = \{\emptyset, \{(1, 1)\}\}$ sein.



Numerik/Gleichungen/Ag_NewtonVerfahren_1.tex

Aufgabe 100.468 (Newton-Verfahren)

vr

Berechnen Sie die ersten drei Schritte des Newton-Verfahrens (d.h., x_1 , x_2 und x_3) für die Lösung der nichtlinearen Gleichung $2x = -\cos x$. Als Anfangswert nehmen Sie $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

$$x_0 = \frac{\pi}{2}, x_1 = -\frac{\pi}{2}, x_2 = -\frac{\pi}{6}, x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{5} - \frac{\pi}{30}$$

Lösung:

Funktion und Ableitung:

$$f(x) = 2x + \cos x \quad , \quad f'(x) = 2 - \sin x$$

Newton-Verfahren:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

- $x_0 = \frac{\pi}{2}$

- $k = 0$:

$$f(x_0) = f(\frac{\pi}{2}) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} + \cos(\frac{\pi}{2}) = \pi + 0 = \pi,$$

$$f'(x_0) = f'(\frac{\pi}{2}) = 2 - \sin(\frac{\pi}{2}) = 2 - 1 = 1$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{1} = -\frac{\pi}{2}, \text{ d.h., } \underline{\underline{x_1 = -\frac{\pi}{2}}}$$

- $k = 1$:

$$f(x_1) = f(-\frac{\pi}{2}) = 2 \cdot (-\frac{\pi}{2}) + \cos(-\frac{\pi}{2}) = -\pi + 0 = -\pi,$$

$$f'(x_1) = f'(-\frac{\pi}{2}) = 2 - (-1) = 3$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6}. \text{ D.h., } \underline{x_2 = -\frac{\pi}{6}}$$

- $k = 2$:

$$f(x_2) = f(-\frac{\pi}{6}) = 2 \cdot (-\frac{\pi}{6}) + \cos(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$f'(x_2) = f'(-\frac{\pi}{6}) = 2\sin(-\frac{\pi}{6}) = 2 - (-\frac{1}{2}) = \frac{5}{2}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = -\frac{\pi}{6} - \frac{-\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{5}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{5} - \frac{\pi}{30}. \text{ D.h, } \underline{\underline{x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{5} - \frac{\pi}{30}}}.$$



Numerik/Gleichungen/Ag_Numerik_NewtonVerfahren.tex

Aufgabe 100.469 (Newton-Verfahren)

vr

Berechnen Sie die ersten drei Schritte des Newton-Verfahrens (d.h., x_1 , x_2 und x_3) für die Lösung der nichtlinearen Gleichung

$$x^3 - 2x^2 - x - 1 = 0.$$

Als Anfangswert nehmen Sie $x_0 = 0$.

$$x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{7}$$

Lösung: Funktion und Ableitung:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x - 1 \quad , \quad f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$$

Newton-Verfahren:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

- $x_0 = 0$

- $k = 0$:

$$f(x_0) = f(0) = 0^3 - 2 \cdot 0^2 - 0 - 1 = -1, \quad f'(x_0) = f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 - 1 = -1$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{f(0)}{f'(0)} = 0 - \frac{(-1)}{(-1)} = -1, \text{ d.h., } \underline{\underline{x_1 = -1}}$$

- $k = 1$:

$$f(x_1) = f(-1) = (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 - (-1) - 1 = -1 - 2 + 1 - 1 = -3,$$

$$f'(x_1) = f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -1 - \frac{f(-1)}{f'(-1)} = -1 - \frac{-3}{6} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}. \text{ D.h., } \underline{\underline{x_2 = -\frac{1}{2}}}$$

- $k = 2$:

$$f(x_2) = f(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2})^3 - 2 \cdot (-\frac{1}{2})^2 - (-\frac{1}{2}) - 1 = -\frac{1}{8} - 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{8} - 1 = -\frac{9}{8}$$

$$f'(x_2) = f'(-\frac{1}{2}) = 3 \cdot (-\frac{1}{2})^2 - 4 \cdot (-\frac{1}{2}) - 1 = 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{2} - 1 = \frac{7}{4}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{f(-\frac{1}{2})}{f'(-\frac{1}{2})} = -\frac{1}{2} - \frac{-\frac{9}{8}}{\frac{7}{4}} = -\frac{1}{2} + \frac{9 \cdot 4}{8 \cdot 7} = -\frac{1}{2} + \frac{9}{2 \cdot 7} = \frac{-7 + 9}{2 \cdot 7} = \frac{2}{2 \cdot 7} = \frac{1}{7}. \text{ D.h., } \underline{\underline{x_3 = \frac{1}{7}}}.$$

Aufgabenblatt 101

Reihen/Bekannt



Reihen/Bekannt/Ag_Reihen_ExpReiheErkennenMitIndexTransf.tex

Aufgabe 101.470 (Taylorreihe)

vr

Bestimmen Sie die folgenden Reihenwerte mit Hilfe der Taylorreihe $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k}{k!}$

e^4

Lösung: Setze in der Taylorreihe direkt $x = 4$ ein.

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^k}{k!}$

$e^{-2} - 1$

Lösung:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^k}{k!} = -\frac{(-2)^0}{0!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{k!} = -1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{k!} = e^{-2} - 1.$$

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k}{(k+1)!}$

$\frac{1}{4} \cdot (e^4 - 1)$

Lösung: Mit der Indexverschiebung $m = k + 1$ erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k}{(k+1)!} \stackrel{m=k+1}{=} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4^{m-1}}{m!} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4^m \cdot 4^{-1}}{m!} = \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4^m}{m!} = \frac{1}{4} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{4^m}{m!} - \frac{4^0}{0!} \right) = \frac{1}{4} (e^4 - 1)$$

d) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-2)^{k+1}}{(k-1)!}$

$4 \cdot (e^{-2} - 1)$

Lösung: Mit der Indexverschiebung $m = k - 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-2)^{k+1}}{(k-1)!} &\stackrel{m=k-1}{=} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-2)^{m+2}}{m!} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-2)^m \cdot (-2)^2}{m!} = 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-2)^m}{m!} \\ &= 4 \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-2)^m}{m!} - \frac{(-2)^0}{0!} \right) = 4 (e^{-2} - 1) \end{aligned}$$



Reihen/Bekannt/Ag_Reihen_Partialsummen_Konvergenz_kurz.tex

Aufgabe 101.471 (Endliche Summen auswerten)

a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion die Gleichheit

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Rechnen Sie zuerst die ersten Gleichheiten für $n = 1, 2, 3$ per Hand nach.

Lösung:

• **Induktionsanfang:**

– $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^1 \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot (1+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$$

– $n = 2$ (für den eigentlichen Induktionsbeweis nicht erforderlich zu überprüfen):

$$\sum_{k=1}^2 \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot (1+1)} + \frac{1}{2 \cdot (2+1)} = \frac{2}{3} = \frac{2}{2+1}$$

– $n = 3$ (für den eigentlichen Induktionsbeweis nicht erforderlich zu überprüfen):

$$\sum_{k=1}^3 \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot (1+1)} + \frac{1}{2 \cdot (2+1)} + \frac{1}{3 \cdot (3+1)} = \frac{3}{4} = \frac{3}{3+1}$$

• **Induktionsvoraussetzung (IV):**

Für $n \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest gilt:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

• **Induktionsschluss:**

Zeige, dass dann auch

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$$

gilt.

Fange mit der linken Seite an:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)((n+1)+1)} \stackrel{(IV)}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} \stackrel{1.B.F.}{=} \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+1}{(n+1)+1}. \end{aligned}$$

Damit ist der Induktionsschluss erledigt.

b) Folgern Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot (k+1)}$$

konvergiert und berechnen Sie den Reihenwert.

Lösung:

Die Folge (s_n) der Partialsummen mit

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

ist konvergent:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n(1 + \frac{1}{n})} = 1.$$

Damit ist auch die Reihe konvergent mit dem Reihenwert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1.$$



Reihen/Bekannt/Ag_Reihen_ReihenwertPartialsummen.tex

Aufgabe 101.472 (Grenzwerte)

[jl](#), [ahs](#)

Untersuchen Sie, ob folgende Reihen konvergieren und berechnen Sie gegebenenfalls den Reihenwert. Stellen Sie hierfür die Partialsummenfolge $(s_N)_{N \in \mathbb{N}}$ auf und bilden Sie den Grenzwert $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N$.

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2 + k}$

2

Lösung:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n \frac{2}{k^2 + k} = \sum_{k=1}^n \frac{2}{k \cdot (k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{k} - \frac{2}{k+1} \right) \\ &= \frac{2}{1} - \frac{2}{2} + \frac{2}{2} - \frac{2}{3} + \dots + \frac{2}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} \\ &= 2 - \frac{2}{n+1} \rightarrow 2 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

b) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{8}{k^2 - k}$

8

Lösung:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=2}^n \frac{8}{k^2 - k} = \sum_{k=2}^n \frac{8}{k \cdot (k-1)} = \sum_{k=2}^n \left(-\frac{8}{k} + \frac{8}{k-1} \right) \\ &= -\frac{8}{2} + \frac{8}{1} - \frac{8}{3} + \frac{8}{2} + \dots - \frac{8}{n-1} + \frac{8}{n-2} - \frac{8}{n} + \frac{8}{n-1} \\ &= 8 - \frac{8}{n} \rightarrow 8 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3+5^k}{6^k}$

$\frac{48}{5}$

Lösung:

$$\begin{aligned}s_n &= \sum_{k=0}^n \frac{3+5^k}{6^k} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{3}{6^k} + \frac{5^k}{6^k} \right) = \sum_{k=0}^n \frac{3}{6^k} + \sum_{k=0}^n \frac{5^k}{6^k} = 3 \cdot \sum_{k=0}^n \frac{1}{6^k} + \sum_{k=0}^n \frac{5^k}{6^k} \\ &= 3 \cdot \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{6} \right)^k + \sum_{k=0}^n \left(\frac{5}{6} \right)^k \rightarrow 3 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{6}} + \frac{1}{1-\frac{5}{6}} = 3 \cdot \frac{6}{5} + 6 = \frac{48}{5} \quad (n \rightarrow \infty).\end{aligned}$$

d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k - 2^k}{4^k}$

2

Lösung:

$$\begin{aligned}s_n &= \sum_{k=0}^n \frac{3^k - 2^k}{4^k} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{3^k}{4^k} - \frac{2^k}{4^k} \right) = \sum_{k=0}^n \frac{3^k}{4^k} - \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{4^k} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{3}{4} \right)^k - \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{4} \right)^k \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{3}{4} \right)^k - \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2} \right)^k \rightarrow \frac{1}{1-\frac{3}{4}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 4 - 2 = 2 \quad (n \rightarrow \infty).\end{aligned}$$



Reihen/Bekannt/Ag_Reihen_Teleskopreihen.tex

Aufgabe 101.473 (Teleskopreihen)

jgl

Zeigen Sie, dass die nachfolgenden Reihen Teleskopreihen sind, welche konvergieren, und bestimmen Sie ihren Grenzwert:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k \cdot (k+1)}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1) \cdot (2k+1)}$

4

$\frac{1}{2}$

Tipp: Suchen Sie $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $\frac{c}{p(k) \cdot q(k)} = \frac{a}{p(k)} + \frac{b}{q(k)}$!

Lösung:

- a) Wir machen den Partialbruchzerlegungsansatz: $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$ Bringt man die rechte Seite der Gleichung auf den Hauptnenner, $k \cdot (k+1)$, so erhält man die Gleichung $1 = 0 \cdot k + 1 = a(k+1) + bk$. Dies muss für alle $k \in \mathbb{N}$ gelten, also vergleichen wir die Terme mit und ohne k . Es ergeben sich zwei Gleichungen:

$$1 = a \quad (\text{Terme ohne } k)$$

$$0 = a + b \quad (\text{Terme mit } k)$$

Also gilt $a = 1$, $b = -1$. Damit untersuchen wir die endliche (!) Summe

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^N \frac{4}{k(k+1)} &= 4 \sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+1)} = 4 \cdot \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 4 \cdot \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^N \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 4 \cdot \left(1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{N}}_{=0} - \frac{1}{N+1} \right) \\ &= 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{N+1} \right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 4.\end{aligned}$$

Also konvergiert die Reihe in der Aufgabenstellung gegen den Wert 4.

b) Wir machen den gleichen Partialbruchzerlegungsansatz wie bei der vorigen Teilaufgabe:

$$\frac{1}{(2k+1)(2k-1)} = \frac{c}{2k+1} + \frac{d}{2k-1} = \frac{(2k-1)c + (2k+1)d}{(2k+1)(2k-1)}.$$

Wir erhalten daraus wie zuvor die Gleichungen

$$1 = d - c \quad (\text{Terme ohne } k)$$

$$0 = 2c + 2d \quad (\text{Terme mit } k)$$

Löst man diese Gleichungen, erhält man $c = -\frac{1}{2}$ und $d = \frac{1}{2}$. Damit gilt für die endliche Summe

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^N \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2N-1} - \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2N-1}}_{=0} - \frac{1}{2N+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2N+1} \right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Also konvergiert die angegebene Reihe gegen den Wert $\frac{1}{2}$.



Reihen/Bekannt/Ag_Reihen_Teleskopreihen_leicht1.tex

Aufgabe 101.474 (Teleskopreihe)

jgl

Begründen Sie, weshalb die nachstehenden Reihen konvergieren, und bestimmen Sie den Grenzwert (Reihenwert).

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{k}}{(k+1)^2} - \sqrt{\frac{k-1}{k^4}} \right)$ 0

Lösung: $\sum_{k=1}^n \left(\frac{\sqrt{k}}{(k+1)^2} - \frac{\sqrt{k-1}}{k^2} \right) = \frac{\sqrt{n}}{(n+1)^2} - \frac{\sqrt{1-1}}{1^2} \rightarrow 0 - 0 = 0.$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{k+1}}{2 \cdot (k+1)!} - \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{k} \cdot (k-1)!} \right)$ $-\frac{1}{2}$

Lösung: $\sum_{k=1}^n \left(\frac{\sqrt{k+1}}{2 \cdot (k+1)!} - \frac{\sqrt{k}}{2 \cdot k!} \right) = \frac{\sqrt{n+1}}{n!} - \frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}.$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2k}\right)}{\cos\left(\frac{2\pi}{k+1}\right)} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2k+2}\right)}{\cos\left(\frac{2\pi}{k+2}\right)} \right)$ -1

Lösung: $\sum_{k=1}^n \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2k}\right)}{\cos\left(\frac{2\pi}{k+1}\right)} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2k+2}\right)}{\cos\left(\frac{2\pi}{k+2}\right)} \right) = -1 - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{k+1}\right)}{\cos\left(\frac{2\pi}{k+2}\right)} \rightarrow -1$



Reihen/Bekannt/Ag_Reihen_mehrGeometrischeReihen.tex

Aufgabe 101.475 (geometrische Reihen)

spf

Konvergieren die folgenden Reihen? Wenn ja, gegen welchen Wert?

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^{k-1}}{4^k}$ $\frac{1}{7}$

Lösung:

Es gilt $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^{k-1}}{4^k} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^{k-1}}{4^{k-1}} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-3}{4}\right)^{k-1} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^j = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - (-\frac{3}{4})} = \frac{1}{4+3} = \frac{1}{7}$
wegen $|\frac{-3}{4}| = \frac{3}{4} < 1$.

b) $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi^m}{3^{m+1}}$ nein

Lösung:

Wegen $|\frac{\pi}{3}| = \frac{\pi}{3} > \frac{3}{3} = 1$ ist $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi^m}{3^{m+1}} = \frac{\pi}{3^2} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi^{m-1}}{3^{m-1}} = \frac{\pi}{9} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{3}\right)^{m-1} = \frac{\pi}{9} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{3}\right)^n$ divergent.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{2n}}$ $\frac{1}{e^2-1}$

Lösung:

Es gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(e^2)^n} = \frac{1}{e^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^{n-1}}{(e^2)^{n-1}} = \frac{1}{e^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^2}\right)^{n-1} = \frac{1}{e^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e^2}\right)^k = \frac{1}{e^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{e^2}} = \frac{1}{e^2-1}$
wegen $|\frac{1}{e^2}| = \frac{1}{e^2} < \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} < 1$.

d) $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{5^{-3+2j}}$ $\frac{3 \cdot 125}{24}$

Lösung:

Es gilt $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{5^{-3+2j}} = \frac{1}{5^{-3}} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{5^{2j}} = 5^3 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1^j}{(5^2)^j} = 125 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{25}\right)^j = 125 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{125}{\frac{25-1}{25}} = \frac{125 \cdot 25}{24} = \frac{3 \cdot 125}{24}$
wegen $|\frac{1}{25}| = \frac{1}{25} < 1$.

e) $\sum_{p=1}^{\infty} 2^{2p} \cdot 3^{1-p}$ nein

Lösung:

$\sum_{p=1}^{\infty} 2^{2p} \cdot 3^{1-p} = \sum_{p=1}^{\infty} (2^2)^p \cdot 3^{-(p-1)} = 2^2 \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(2^2)^{p-1}}{3^{p-1}} = 4 \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{2^2}{3}\right)^{p-1} = 4 \cdot \sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^q$ ist wegen $|\frac{4}{3}| = \frac{4}{3} > 1$ divergent.

f) $\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{6^{3\ell}}{9^{2\ell} \cdot 8^{\ell}}$ $\frac{1}{2}$

Lösung:

Für alle $\ell \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{6^{3\ell}}{9^{2\ell} \cdot 8^{\ell}} = \left(\frac{6^3}{9^2 \cdot 8}\right)^{\ell} = \left(\frac{6^3}{9^2 \cdot 8}\right)^{\ell} = \left(\frac{6 \cdot 6 \cdot 6}{9 \cdot 9 \cdot 8}\right)^{\ell} = \left(\frac{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}\right)^{\ell} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\ell}$. Mit $|\frac{1}{3}| = \frac{1}{3} < 1$ folgt also $\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{6^{3\ell}}{9^{2\ell} \cdot 8^{\ell}} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{\ell} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{\ell-1} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$.

$$\text{g)} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{125^{\mu} \cdot 4^{\mu}}{5^{\mu-1} \cdot 10^{2\mu+1}}$$

nein

Lösung:

Für alle $\mu \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{125^{\mu} \cdot 4^{\mu}}{5^{\mu-1} \cdot 10^{2\mu+1}} = \frac{125^{\mu} \cdot 4^{\mu}}{\frac{5^{\mu}}{5} \cdot 10 \cdot 10^{2\mu}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{125^{\mu} \cdot 4^{\mu}}{5^{\mu} \cdot (10^2)^{\mu}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{125 \cdot 4}{5 \cdot 10^2}\right)^{\mu} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{500}{500}\right)^{\mu} = \frac{1}{2} \cdot 1^{\mu} = \frac{1}{2}$.

Da also unendlich oft $\frac{1}{2}$ addiert wird, divergiert $\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{125^{\mu} \cdot 4^{\mu}}{5^{\mu-1} \cdot 10^{2\mu+1}} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{2}$ gegen ∞ .

$$\text{h)} 5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} \pm \dots$$

3

Lösung:

Wegen $5 = 5 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^0$, $-\frac{10}{3} = 5 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^1$, $\frac{20}{9} = 5 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2$ und $-\frac{40}{27} = 5 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^3$ ist vermutlich $\sum_{\ell=0}^{\infty} 5 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{\ell}$ gemeint. Wegen $\left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} < 1$ konvergiert diese Reihe gegen

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} 5 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{\ell} = 5 \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^{\ell} = 5 \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{5}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{5}{\frac{5}{3}} = \frac{5 \cdot 3}{5} = 3.$$

$$\text{i)} \frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{18}{25} + \frac{108}{125} + \dots$$

nein

Lösung:

Wegen $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^0$, $\frac{3}{5} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^1$, $\frac{18}{25} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^2$ und $\frac{108}{125} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^3$ ist vermutlich $\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{\ell} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{6}{5}\right)^{\ell}$ gemeint. Wegen $\left|\frac{6}{5}\right| = \frac{6}{5} > 1$ divergiert diese Reihe.



Reihen/Bekannt/Ag_Reihen_vieleGeometrischeReihen.tex

Aufgabe 101.476 (geometrische Reihen)

spf

Berechnen Sie die Grenzwerte der folgenden Reihen, sofern die Reihe konvergiert!

$$\text{a)} \sum_{h=0}^{\infty} 4^{-3h}$$

$\frac{64}{63}$

Lösung:

Wegen $\left|\frac{1}{64}\right| < 1$ gilt

$$\sum_{h=0}^{\infty} 4^{-3h} = \sum_{h=0}^{\infty} (4^3)^{-h} = \sum_{h=0}^{\infty} (64^{-1})^h = \sum_{h=0}^{\infty} \left(\frac{1}{64}\right)^h = \frac{1}{1 - \frac{1}{64}} = \frac{1}{\frac{63}{64}} = \frac{64}{63}.$$

$$\text{b)} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{5^{-(3-p)}}$$

$\frac{625}{4}$

Lösung:

Wegen $\left|\frac{1}{5}\right| < 1$ gilt

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{5^{-(3-p)}} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{5^{-3+p}} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{5^3}{5^p} = 5^3 \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^p = 5^3 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = 125 \cdot \frac{1}{\frac{4}{5}} = 125 \cdot \frac{5}{4} = \frac{625}{4}.$$

$$c) \sum_{\ell=-1}^{\infty} \frac{7^{\ell-1}}{28^{\ell}}$$

$\frac{16}{21}$

Lösung:

Wegen $|\frac{1}{4}| < 1$ gilt

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=-1}^{\infty} \frac{7^{\ell-1}}{28^{\ell}} &= \frac{7^{-1-1}}{28^{-1}} + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{7^{\ell} \cdot 7^{-1}}{28^{\ell}} = \frac{7^{-2}}{28^{-1}} + 7^{-1} \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{7}{28}\right)^{\ell} = \frac{28}{49} + \frac{1}{7} \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{\ell} \\ &= \frac{4}{7} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{7} + \frac{1}{7} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{7} + \frac{4}{21} = \frac{12+4}{21} = \frac{16}{21}. \end{aligned}$$

$$d) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{32^k}{3^{k+1} \cdot 2^{k+2} \cdot 5^{k-1}}$$

div.

Lösung:

Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{32^k}{3^{k+1} \cdot 2^{k+2} \cdot 5^{k-1}} = \frac{32^k}{3^k \cdot 3 \cdot 2^k \cdot 2^2 \cdot 5^k \cdot 5^{-1}} = \frac{32^k}{(3 \cdot 2 \cdot 5)^k \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{5}} = \frac{1}{\frac{12}{5}} \cdot \left(\frac{32}{30}\right)^k = \frac{5}{12} \cdot \left(\frac{16}{15}\right)^k.$$

Wegen $|\frac{16}{15}| > 1$ divergiert die Reihe.

$$e) \sum_{m=2}^{\infty} \frac{3^{2m+1} \cdot 5^{3m-1}}{15^{3m-2} \cdot 3^{-m+2}}$$

div.

Lösung:

Für alle $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{3^{2m+1} \cdot 5^{3m-1}}{15^{3m-2} \cdot 3^{-m+2}} &= \frac{3^{2m} \cdot 3^1 \cdot 5^{3m} \cdot 5^{-1}}{15^{3m} \cdot 15^{-2} \cdot 3^{-m} \cdot 3^2} = \frac{(3^2)^m \cdot 3 \cdot (5^3)^m \cdot \frac{1}{5}}{(15^3)^m \cdot \frac{1}{15^2} \cdot (3^{-1})^m \cdot 9} \\ &= \left(\frac{3^2 \cdot 5^3}{(3 \cdot 5)^3 \cdot \frac{1}{3}}\right)^m \cdot \frac{\frac{3}{225}}{\frac{9}{225}} = \left(\frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3}}\right)^m \cdot \frac{3 \cdot 225}{5 \cdot 9} = 1^m \cdot \frac{45}{3} = 15. \end{aligned}$$

Die Reihe $\sum_{m=2}^{\infty} \frac{3^{2m+1} \cdot 5^{3m-1}}{15^{3m-2} \cdot 3^{-m+2}} = \sum_{m=2}^{\infty} 15$ divergiert also gegen ∞ .

$$f) \sum_{t=1}^{\infty} 15^{2t-1} \cdot 3^{-5t}$$

$\frac{5}{6}$

Lösung:

Wegen $|\frac{25}{27}| < 1$ gilt

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{\infty} 15^{2t-1} \cdot 3^{-5t} &= -15^{2 \cdot 0 - 1} \cdot 3^{-5 \cdot 0} + \sum_{t=0}^{\infty} 15^{2t} \cdot 15^{-1} \cdot (3^{-5})^t = -15^{-1} \cdot 3^0 + \sum_{t=0}^{\infty} (15^2)^t \cdot \frac{1}{15} \cdot \left(\frac{1}{3^5}\right)^t \\ &= -\frac{1}{15} + \frac{1}{15} \cdot \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{225}{9 \cdot 9 \cdot 3}\right)^t = -\frac{1}{15} + \frac{1}{15} \cdot \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{25}{27}\right)^t = \frac{1}{15} \cdot \left(-1 + \frac{1}{1 - \frac{25}{27}}\right) \\ &= \frac{1}{15} \cdot \left(-1 + \frac{1}{\frac{2}{27}}\right) = \frac{1}{15} \cdot \left(-1 + \frac{27}{2}\right) = \frac{1}{15} \cdot \frac{25}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

$$\text{g)} \sum_{u=1}^{\infty} \frac{(3^{4-u} - 1)^2}{9^u}$$

$\frac{78\,943}{1\,040}$

Lösung:

Es gilt

$$\sum_{u=1}^{\infty} \frac{(3^{4-u} - 1)^2}{9^u} = \sum_{u=1}^{\infty} \frac{(3^{4-u})^2 - 2 \cdot 3^{4-u} + 1}{9^u} = \sum_{u=1}^{\infty} \left(\frac{9^{4-u}}{9^u} - \frac{2 \cdot 3^{4-u}}{9^u} + \frac{1}{9^u} \right).$$

Wenn die drei Reihen zu den einzelnen Summanden konvergieren, konvergiert auch die gesamte Reihe. Wegen $|\frac{1}{9}| < 1$, $|\frac{1}{27}| < 1$ und $|\frac{1}{81}| < 1$ gilt

$$\begin{aligned} \sum_{u=1}^{\infty} \frac{1}{9^u} &= -1 + \sum_{u=0}^{\infty} \frac{1}{9^u} = -1 + \sum_{u=0}^{\infty} \left(\frac{1}{9} \right)^u = -1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = -1 + \frac{1}{\frac{8}{9}} = -1 + \frac{9}{8} = \frac{1}{8}, \\ \sum_{u=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^{4-u}}{9^u} &= 2 \cdot \sum_{u=1}^{\infty} \frac{3^4}{9^u} = 2 \cdot 81 \cdot \sum_{u=1}^{\infty} \left(\frac{1}{27} \right)^u = 162 \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{27}} - 1 \right) = 162 \cdot \left(\frac{27}{26} - 1 \right) = \frac{162}{26} = \frac{81}{13} \end{aligned}$$

und

$$\sum_{u=1}^{\infty} \frac{9^{4-u}}{9^u} = \sum_{u=1}^{\infty} \frac{9^4}{9^u} = 81^2 \cdot \sum_{u=1}^{\infty} \left(\frac{1}{81} \right)^u = 81^2 \cdot \left(-1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{81}} \right) = 81^2 \cdot \left(-1 + \frac{81}{80} \right) = \frac{6\,561}{80}.$$

Es folgt

$$\sum_{u=1}^{\infty} \frac{(3^{4-u} - 1)^2}{9^u} = \frac{6\,561}{80} - \frac{81}{13} + \frac{1}{8} = \frac{6\,561 \cdot 13 - 81 \cdot 80 + 130}{13 \cdot 80} = \frac{65\,610 + 19\,683 - 6\,480 + 130}{1\,040} = \frac{78\,943}{1\,040}.$$

$$\text{h)} \sum_{j=-1}^{\infty} 13^{2j} \cdot \frac{3^{2 \cdot (1-j)}}{16^j}$$

div.

Lösung:

$$\text{Für alle } j \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\} \text{ gilt } 13^{2j} \cdot \frac{3^{2 \cdot (1-j)}}{16^j} = (13^2)^j \cdot \frac{3^2 \cdot \left(\frac{1}{3^2}\right)^j}{16^j} = 9 \cdot \left(\frac{13^2}{9 \cdot 16} \right)^j = 9 \cdot \left(\frac{169}{144} \right)^j.$$

Wegen $|\frac{169}{144}| > 1$ divergiert die Reihe.



Reihen/CauchyProd/Ag_Potenzreihen_Cauchyprodukt.tex

Aufgabe 102.477 (Cauchyprodukt von Potenzreihen)

Prüfen Sie, wo die beiden Potenzreihen absolut konvergieren und bestimmen Sie das Cauchyprodukt sowie die zugehörige (Wert-)Funktion. Berechnen Sie die Wertfunktion sowohl über die Auswertung des Cauchyprodukts als auch über das Produkt der Wertfunktionen der ursprünglichen Reihen:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \cdot (x-1)^j \quad \text{und} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k} \cdot (x-1)^k.$$

$$f(x) = \frac{2}{3-x} \text{ für alle } x \in (-1; 3) \text{ und } g(x) = \frac{4}{5-x} \text{ für alle } x \in (-3; 5)$$

Lösung:

Beide Reihen sind Potenzreihen, ihre Konvergenzbereiche sind Intervalle um den Entwicklungspunkt $\xi = 1$. Für das Wurzelkriterium (für Potenzreihen) erhalten wir

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \sqrt[j]{|a_j|} = \limsup_{j \rightarrow \infty} \sqrt[j]{2^{-j}} = \frac{1}{2}$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|b_k|} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{4^{-k}} = \frac{1}{4}$$

Daher besitzt die erste Reihe den Konvergenzradius $r = 2$ und die zweite Reihe $r = 4$. Das Kriterium sichert die absolute Konvergenz auf den Intervallen $(-1; 3)$ bzw. $(-3; 5)$. In den Randpunkten sind beide Reihen divergent. Der Satz vom Cauchyprodukt gilt nur dort, wo *beide* Reihen absolut konvergent sind, also auf der Menge $(-1; 3) \cap (-3; 5) = (-1; 3)$, dem Konvergenzbereich der Reihe mit der „schlechteren“ Konvergenz.

Die erste Reihe konvergiert (mit der Formel für die geometrische Reihe) gegen

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \cdot (x-1)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{2}\right)^j \stackrel{\text{GR}}{=} \frac{1}{1 - \frac{x-1}{2}} = \frac{2}{3-x}.$$

Die zweite Reihe konvergiert gegen

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k} \cdot (x-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{4}\right)^k \stackrel{\text{GR}}{=} \frac{1}{1 - \frac{x-1}{4}} = \frac{4}{5-x}.$$

Wir erwarten daher, dass die Produktreihe gegen

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{2}{3-x} \cdot \frac{4}{5-x} = \frac{8}{(3-x) \cdot (5-x)}$$

konvergiert.

Die Reihenglieder des Produkts der Potenzreihen(!) ergeben sich mit der geometrischen Summe zu

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{\ell=0}^n a_{\ell} \cdot (x-1)^{\ell} \cdot b_{n-\ell} \cdot (x-1)^{n-\ell} = (x-1)^n \cdot \sum_{\ell=0}^n 2^{-\ell} \cdot 4^{\ell-n} \\ &= (x-1)^n \cdot 4^{-n} \cdot \sum_{\ell=0}^n 2^{\ell} \stackrel{\text{GS}}{=} (x-1)^n \cdot 4^{-n} \cdot \frac{1-2^{n+1}}{1-2} \\ &= (x-1)^n \cdot 4^{-n} \cdot (2^{n+1} - 1) = (x-1)^n \cdot (2 \cdot 2^{-n} - 4^{-n}). \end{aligned}$$

Das Auswerten der Reihe über diese Glieder ergibt

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} c_n &= 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot (x-1)^n - \sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} \cdot (x-1)^n \stackrel{\text{GR}}{=} 2 \cdot \frac{2}{3-x} - \frac{4}{5-x} \\ &= \frac{4 \cdot (5-x) - 4 \cdot (3-x)}{(3-x) \cdot (5-x)} = \frac{8}{(3-x) \cdot (5-x)} \end{aligned}$$

wie es der Satz vom Cauchyprodukt auch vorhersagt.



Reihen/CauchyProd/Ag_Zahlenreihen_Cauchyprodukt.tex

Aufgabe 102.478 (Cauchyprodukt von Reihen)

Zeigen Sie, dass die beiden Reihen absolut konvergieren und bestimmen Sie das Cauchyprodukt sowie seinen Wert. Berechnen Sie den Wert ab sowohl über die Auswertung des Cauchyprodukts als auch über das Produkt der beiden Reihenwerte!

$\frac{8}{3}$

$$a := \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \quad \text{und} \quad b := \sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k}$$

Lösung:

Beide Reihen sind konvergent, denn es gilt

$$a = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j \stackrel{\text{GR}}{=} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

sowie

$$b = \sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k \stackrel{\text{GR}}{=} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

Da in beiden Reihen keine negativen Terme auftreten, sind sie auch absolut konvergent. Damit gilt der Satz vom Cauchyprodukt, und wir wissen dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n, \quad c_n = \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}$$

absolut gegen das Produkt der Reihenwerte $ab = \frac{8}{3}$ konvergiert. Die Reihenglieder des Produkts sind

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j} = \sum_{j=0}^n 2^{-j} 4^{j-n} = 4^{-n} \sum_{j=0}^n 2^j \stackrel{\text{endliche GR}}{=} 4^{-n} \cdot \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} \\ &= 4^{-n} \cdot (2^{n+1} - 1) = 2 \cdot 2^{-n} - 4^{-n}. \end{aligned}$$

Das Auswerten der Reihe über diese Glieder ergibt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} \stackrel{\text{GRs}}{=} 2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3},$$

wie es der Satz vom Cauchyprodukt auch vorhersagt.



Reihen/Fourierreihen/Ag_Fourierreihen_2RechteckeUnd1Saegezahn.tex

Aufgabe 103.479 (Fourierreihen von Rechteck- und Sägezahnsignalen)

kr + spf

Berechnen Sie die reellen Fourierreihen der folgenden Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto f(t)$, den angegebenen Funktionswerten für alle $t \in (-\pi; \pi]$ und $f(t + 2\pi) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$:

Lösung:

Es gibt unterschiedliche Definitionen des Fourierkoeffizienten a_0 in der einschlägigen Literatur. Hier wird mit $a_0 := \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} y(x) dx$ statt mit dem ebenfalls verbreiteten $\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} y(x) dx$ gerechnet.

$$\text{a) } f(t) := \begin{cases} 1, & \text{für } |t| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{für } \frac{\pi}{2} \leq |t| \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} \cdot \cos((2n-1) \cdot t)$$

Lösung:

Die Funktion ist gerade, daher sind die Koeffizienten $b_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

a_0 wird getrennt von den anderen Koeffizienten berechnet zu

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{1}{\pi} \cdot [t]_{t=-\frac{\pi}{2}}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \pi = 1.$$

Wir berechnen die Koeffizienten a_k für alle $k \in \mathbb{N}$ bei einer geraden Funktion mit

$$a_k = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(t) \cdot \cos(kt) dt = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot \cos(kt) dt = \frac{2}{\pi} \cdot \left[\frac{\sin(kt)}{k} \right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{k}.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt also

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{2}{2n\pi} \cdot \sin\left(2n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{n\pi} \cdot \sin(n\pi) = \frac{1}{n\pi} \cdot 0 = 0 \\ \text{und} \quad a_{2n-1} &= \frac{2}{(2n-1) \cdot \pi} \cdot \sin\left((2n-1) \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{(2n-1) \cdot \pi} \cdot \sin\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{2}{(2n-1) \cdot \pi} \cdot \left(\sin(n\pi) \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos(n\pi) \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) \\ &= \frac{2}{(2n-1) \cdot \pi} \cdot \left(0 \cdot 0 + (-1)^n \cdot (-1) \right) = \frac{2}{(2n-1) \cdot \pi} \cdot (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Die Fourierreihe ist von der Form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(kt) + b_k \cdot \sin(kt)) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2}{(2n-1) \cdot \pi} \cdot \cos((2n-1) \cdot t).$$

$$\text{b) } f(t) := \begin{cases} -1 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

$$\frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \cdot \sin((2n-1) \cdot t)$$

Lösung:

Die Funktion ist wegen $f(-0) = f(0) = 1 \neq -1 = -f(0)$ und $f(-\pi) = f(\pi) = 1 \neq -1 = -f(\pi)$ leider nur fast ungerade. Da diese Eigenschaft aber nur an endlich vielen Stellen des Intervalls $[-\pi; \pi]$ verletzt ist, sind alle Koeffizienten a_k und a_0 trotzdem null für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int_{-\pi}^0 (-1) dt + \int_0^{\pi} 1 dt \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \left([-t]_{t=-\pi}^{t=0} + [t]_{t=0}^{t=\pi} \right) = \frac{1}{\pi} \cdot (-0 + (-\pi) + \pi - 0) = \frac{1}{\pi} \cdot 0 = 0 \\ \text{und} \quad a_k &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \cos(kt) dt = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int_{-\pi}^0 (-1) \cdot \cos(kt) dt + \int_0^{\pi} 1 \cdot \cos(kt) dt \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\left[-\frac{1}{k} \cdot \sin(kt) \right]_{t=-\pi}^{t=0} + \left[\frac{1}{k} \cdot \sin(kt) \right]_{t=0}^{t=\pi} \right) \\ &= \frac{1}{k\pi} \cdot (-\sin(0) + \sin(-k\pi) + \sin(k\pi) - \sin(0)) = \frac{1}{k\pi} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Die Berechnung der Koeffizienten b_k für alle $k \in \mathbb{N}$ verläuft analog:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \sin(kt) dt = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int_{-\pi}^0 (-1) \cdot \sin(kt) dt + \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(kt) dt \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\left[\frac{1}{k} \cdot \cos(kt) \right]_{t=-\pi}^{t=0} + \left[-\frac{1}{k} \cdot \cos(kt) \right]_{t=0}^{t=\pi} \right) \\ &= \frac{1}{k\pi} \cdot (\cos(0) - \cos(-k\pi) - \cos(k\pi) + \cos(0)) \\ &= \frac{1}{k\pi} \cdot (1 - (-1)^k - (-1)^k + 1) = \frac{2}{k\pi} \cdot (1 - (-1)^k). \end{aligned}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt also

$$\begin{aligned} b_{2n} &= \frac{2}{2n\pi} \cdot (1 - (-1)^{2n}) = \frac{1}{n\pi} \cdot (1 - 1) = \frac{1}{n\pi} \cdot 0 = 0 \\ \text{und} \quad b_{2n-1} &= \frac{2}{(2n-1)\pi} \cdot (1 - (-1)^{2n-1}) = \frac{2}{(2n-1)\pi} \cdot (1 - (-1)) = \frac{2}{(2n-1)\pi} \cdot (1 + 1) = \frac{4}{(2n-1)\pi}. \end{aligned}$$

Die Fourierreihe ist von der Form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(kt) + b_k \cdot \sin(kt)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \cdot \sin((2n-1) \cdot t).$$

c) $f(t) := \frac{1}{\pi} \cdot \begin{cases} t, & \text{für } t \neq \pi \\ 0, & \text{für } t = \pi \end{cases}$

$$\frac{2}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot \sin(kt)$$

Lösung:

Die Funktion ist ungerade, daher sind die Koeffizienten $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Für die anstehende partielle Integration seien $u(t) := t$ und $v_k(t) := -\frac{1}{k} \cdot \cos(kt)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $u'(t) = 1$ und $v'_k(t) = \sin(kt)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Wir berechnen die Koeffizienten b_k für alle $k \in \mathbb{N}$ bei einer ungeraden Funktion mit

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(t) \cdot \sin(kt) dt = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \frac{t}{\pi} \cdot \sin(kt) dt = \frac{2}{\pi^2} \cdot \int_0^{\pi} \underbrace{t}_{=u(t)} \cdot \underbrace{\sin(kt)}_{=v'_k(t)} dt \\ &= \frac{2}{\pi^2} \cdot \left(\left[\underbrace{\frac{t}{\pi}}_{=u(t)} \cdot \underbrace{\left(-\frac{\cos(kt)}{k} \right)}_{=v_k(t)} \right]_{t=0}^{t=\pi} - \int_0^{\pi} \underbrace{1}_{=u'(t)} \cdot \underbrace{\left(-\frac{\cos(kt)}{k} \right)}_{=v_k(t)} dt \right) \\ &= \frac{2}{k\pi^2} \cdot (-\pi \cdot \cos(k\pi) + 0 \cdot \cos(0)) + \frac{2}{k\pi^2} \cdot \int_0^{\pi} \cos(kt) dt \\ &= \frac{-2}{k\pi} \cdot (-1)^k + \frac{2}{k\pi^2} \cdot \left[\frac{1}{k} \cdot \sin(kt) \right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{2}{k\pi} \cdot (-1)^{k+1} + \frac{2}{k^2 \cdot \pi^2} \cdot (\sin(k\pi) - \sin(0)) \\ &= \frac{2}{k\pi} \cdot (-1)^{k+1}. \end{aligned}$$

Die Fourierreihe ist von der Form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(kt) + b_k \cdot \sin(kt)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \cdot 2}{k\pi} \cdot \sin(kt).$$



Reihen/Fourierreihen/Ag_Fourierreihen_KoeffZuHalbemKosinusKmpl.tex

Aufgabe 103.480 (Fourierkoeffizienten berechnen)

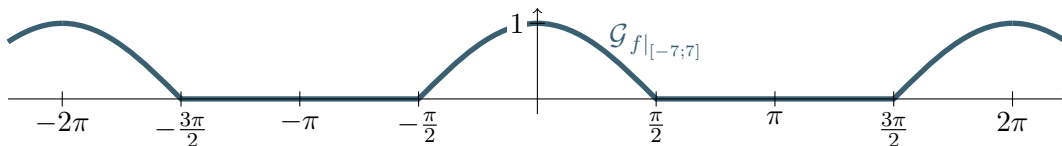
Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x)$ eine 2π -periodische Funktion mit $f(x + 2\pi) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x), & \text{falls } |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{falls } \frac{\pi}{2} < |x| \leq \pi \end{cases} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| \leq \pi.$$

$$c_1 = c_{-1} = \frac{1}{4}, \quad c_{2k} = \frac{(-1)^{k+1}}{\pi \cdot (4k^2 - 1)} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z} \text{ und } c_{2\ell-1} = 0 \text{ für alle } \ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0; 1\}$$

- a) Skizzieren Sie den Graphen von f , wobei die horizontale Achse den Bereich $[-7; 7]$ umfasst!

Lösung:



- b) Berechnen Sie den komplexen Fourierkoeffizienten c_0 zu f !

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-i \cdot 0 \cdot x} dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x) dx = \frac{1}{2\pi} \cdot [\sin(x)]_{x=-\pi/2}^{x=\pi/2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot (\sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(-\frac{\pi}{2})) = \frac{1}{2\pi} \cdot (1 - (-1)) = \frac{1}{2\pi} \cdot 2 = \frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$

- c) Berechnen Sie die komplexen Fourierkoeffizienten c_n zu f mit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1; 0; 1\}$ über eine partielle Integration! *Tip:* Unterscheiden Sie gerade und ungerade n , um das Ergebnis zu vereinfachen!

Lösung: Seien $u(x) := \cos(x)$, $v_n(x) := \frac{1}{-in} \cdot e^{-inx}$ für alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $w(x) := \sin(x)$. Dann gilt $u'(x) = -\sin(x)$, $v'_n(x) = e^{-inx}$ für alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $w'(x) = \cos(x)$.

Für alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ liefern zwei partielle Integrationen wegen $\cos(\pm\frac{\pi}{2}) = 0$ und $\sin(\pm\frac{\pi}{2}) = \pm 1$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\cos(x)}_{=u(x)} \cdot \underbrace{e^{-inx}}_{=v'_n(x)} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\underbrace{\cos(x)}_{=u(x)} \cdot \underbrace{\frac{e^{-inx}}{-in}}_{=v_n(x)} \right]_{x=-\pi/2}^{x=\pi/2} - \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{(-\sin(x))}_{=u'(x)} \cdot \underbrace{\frac{e^{-inx}}{-in}}_{=v_n(x)} dx \\ &= \frac{i}{2\pi n} \cdot \left(\cos(\frac{\pi}{2}) \cdot e^{-\frac{in\pi}{2}} - \cos(-\frac{\pi}{2}) \cdot e^{\frac{in\pi}{2}} \right) + \frac{i}{2\pi n} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\sin(x)}_{=w(x)} \cdot \underbrace{e^{-inx}}_{=v'_n(x)} dx \\ &= \frac{i}{2\pi n} \cdot \left[\underbrace{\sin(x)}_{=w(x)} \cdot \underbrace{\frac{e^{-inx}}{-in}}_{=v_n(x)} \right]_{x=-\pi/2}^{x=\pi/2} - \frac{i}{2\pi n} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\cos(x)}_{=w'(x)} \cdot \underbrace{\frac{e^{-inx}}{-in}}_{=v_n(x)} dx \\ &= \frac{-1}{2\pi n^2} \cdot \left(\sin(\frac{\pi}{2}) \cdot e^{-\frac{in\pi}{2}} - \sin(-\frac{\pi}{2}) \cdot e^{\frac{in\pi}{2}} \right) + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x) \cdot e^{-inx} dx \\ &= \frac{-1}{\pi n^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(e^{i \cdot n \cdot \frac{\pi}{2}} + e^{-i \cdot n \cdot \frac{\pi}{2}} \right) + \frac{1}{n^2} \cdot c_n = \frac{-1}{\pi n^2} \cdot \cos(n \cdot \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{n^2} \cdot c_n. \end{aligned}$$

Nach Multiplikation der äußeren Gleichung mit n^2 ergibt sich für alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$n^2 \cdot c_n = \frac{-1}{\pi} \cdot \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) + c_n \quad \stackrel{\leftarrow c_n}{\Longleftrightarrow} \quad (n^2 - 1) \cdot c_n = \frac{-1}{\pi} \cdot \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

Division der Gleichung durch $(n^2 - 1)$ liefert für alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1; 0; 1\}$

$$c_n = \frac{-\cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{\pi \cdot (n^2 - 1)}.$$

Beachtet man nun $\cos(k\pi) = (-1)^k$ und $\cos\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, so folgt

$$\begin{aligned} c_{2k} &= \frac{-\cos\left(2k \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{\pi \cdot ((2k)^2 - 1)} = \frac{-\cos(k\pi)}{\pi \cdot (4k^2 - 1)} = \frac{(-1)^{k+1}}{\pi \cdot (4k^2 - 1)} && \text{für alle } k \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \\ c_{2\ell-1} &= \frac{-\cos\left((2\ell-1) \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{\pi \cdot ((2\ell-1)^2 - 1)} = \frac{-\cos\left((\ell-1) \cdot \pi + \frac{\pi}{2}\right)}{\pi \cdot (2\ell-1-1) \cdot (2\ell-1+1)} = 0 && \text{für alle } \ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0; 1\}. \end{aligned}$$

- d) Verwenden Sie die Euler'sche Formel $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$ für alle $\varphi \in \mathbb{C}$, um auch die komplexen Fourierkoeffizienten c_1 und c_{-1} zu bestimmen!

Lösung:

Für alle $\sigma \in \{-1; 1\}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^{-i\sigma x} = \cos(-\sigma x) + i \cdot \sin(-\sigma x) = \cos(x) - \sigma \cdot i \cdot \sin(x).$$

Damit folgt für alle $\sigma \in \{-1; 1\}$

$$\begin{aligned} c_\sigma &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-i\sigma x} dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cdot (\cos(x) - \sigma \cdot i \cdot \sin(x)) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x))^2 dx + i \cdot \frac{-\sigma}{2\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cdot \sin(x) dx. \end{aligned}$$

Für $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \cos(x) \cdot \sin(x)$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$h(-x) = \cos(-x) \cdot \sin(-x) = \cos(x) \cdot (-\sin(x)) = -\cos(x) \cdot \sin(x) = -h(x).$$

Also ist h eine ungerade Funktion. Im hinteren der beiden Integrale wird diese über ein symmetrisch zur 0 liegendes Intervall integriert. Das hintere Integral verschwindet also:

$$c_\sigma = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x))^2 dx \quad \text{für alle } \sigma \in \{-1; 1\}.$$

Dieses verbliebene Integral kann man zum Beispiel über eine partielle Integration, den trigonometrischen Pythagoras und den Rüberschauelfeltrick bestimmen. Eine Alternative bietet das Additionstheorem für doppelte Winkel im Kosinus: Die Additionstheoreme liefern für alle $\varphi \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \cos(2\varphi) &= \cos(\varphi + \varphi) = \cos(\varphi) \cdot \cos(\varphi) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\varphi) \\ &= (\cos(\varphi))^2 - (\sin(\varphi))^2 = (\cos(\varphi))^2 - (1 - (\cos(\varphi))^2) = 2 \cdot (\cos(\varphi))^2 - 1, \end{aligned}$$

$$\text{also } (\cos(\varphi))^2 = \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos(2\varphi)).$$

Damit folgt für alle $\sigma \in \{-1; 1\}$

$$\begin{aligned} c_\sigma &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x))^2 dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos(2\varphi)) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{1}{2} \cdot \cos(2x) \right) \right]_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8\pi} \cdot [2x + \cos(2x)]_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{8\pi} \cdot \left(2 \cdot \frac{\pi}{2} + \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) - 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \right) \\ &= \frac{1}{8\pi} \cdot (\pi + \cos(\pi) + \pi - \cos(\pi)) = \frac{1}{8\pi} \cdot 2\pi = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

- e) Berechnen Sie erneut alle komplexen Fourierkoeffizienten zu f , indem Sie $f(x)$ für alle $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ mit Hilfe der komplexen Exponentialfunktion schreiben! (Warum müssen Sie $c_{\pm 1}$ separat berechnen?)

Lösung:

Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt $\cos(\varphi) = \frac{1}{2} \cdot (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$.

Damit folgt für alle $\sigma \in \{-1; 1\}$ und alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1; 1\}$

$$\begin{aligned} c_\sigma &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-i\sigma x} dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cdot e^{-i\sigma x} dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cdot (e^{ix} + e^{-ix}) \cdot e^{-i\sigma x} dx \\ &= \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (e^{i(1-\sigma)x} + e^{i(-1-\sigma)x}) dx = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + e^{-2\sigma ix}) dx = \frac{1}{4\pi} \cdot \left[x + \frac{e^{-2\sigma ix}}{-2\sigma i} \right]_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{4\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) + \frac{\sigma i}{8\pi} \cdot (e^{-\sigma i\pi} - e^{\sigma i\pi}) \quad e^{-\sigma i\pi} = -1 = e^{\sigma i\pi} \quad \frac{1}{4} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cdot e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cdot (e^{ix} + e^{-ix}) \cdot e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (e^{i(1-n)x} + e^{-i(1+n)x}) dx = \frac{1}{4\pi} \cdot \left[\frac{e^{i(1-n)x}}{i \cdot (1-n)} + \frac{e^{-i(1+n)x}}{-i \cdot (1+n)} \right]_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{i}{4\pi} \cdot \left(\frac{e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} \cdot e^{-in \cdot \frac{\pi}{2}}}{n-1} + \frac{e^{-i \cdot \frac{\pi}{2}} \cdot e^{-in \cdot \frac{\pi}{2}}}{n+1} - \frac{e^{-i \cdot \frac{\pi}{2}} \cdot e^{in \cdot \frac{\pi}{2}}}{n-1} - \frac{e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} \cdot e^{in \cdot \frac{\pi}{2}}}{n+1} \right) \\ &= \frac{i}{4\pi} \cdot \left(\frac{i \cdot e^{-in \cdot \frac{\pi}{2}}}{n-1} + \frac{-i \cdot e^{-in \cdot \frac{\pi}{2}}}{n+1} - \frac{-i \cdot e^{in \cdot \frac{\pi}{2}}}{n-1} - \frac{i \cdot e^{in \cdot \frac{\pi}{2}}}{n+1} \right) \\ &= \frac{i}{4\pi} \cdot \left(\frac{i}{n-1} \cdot (e^{-in \cdot \frac{\pi}{2}} + e^{in \cdot \frac{\pi}{2}}) + \frac{i}{n+1} \cdot (-e^{-in \cdot \frac{\pi}{2}} - e^{in \cdot \frac{\pi}{2}}) \right) \\ &= \frac{-1}{4\pi} \cdot \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) \cdot (e^{in \cdot \frac{\pi}{2}} + e^{-in \cdot \frac{\pi}{2}}) = \frac{-1}{2\pi} \cdot \frac{n+1-(n-1)}{(n-1) \cdot (n+1)} \cdot \frac{1}{2} \cdot (e^{in \cdot \frac{\pi}{2}} + e^{-in \cdot \frac{\pi}{2}}) \\ &= \frac{-1}{(n^2-1) \cdot \pi} \cdot \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Wie in Aufgabenteil c) ergibt sich $c_{2k} = \frac{(-1)^{k+1}}{\pi \cdot (4k^2-1)}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und $c_{2\ell-1} = 0$ für alle $\ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0; 1\}$.



Reihen/Fourierreihen/Ag_Fourierreihen_KoeffZuHalbemKosinusReell.tex

Aufgabe 103.481 (Fourierkoeffizienten berechnen)

Skizzieren Sie den Graphen von $f|_{[-7;7]}$ für die 2π -periodische Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x)$ und

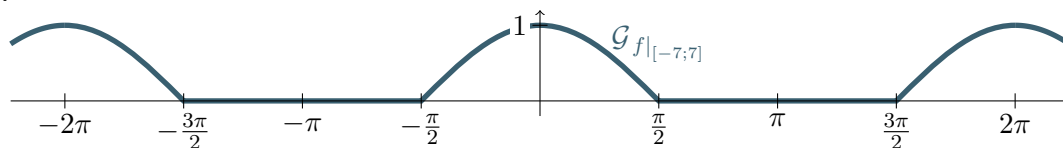
$$f(x) = \begin{cases} \cos(x), & \text{falls } |x| \leq \frac{\pi}{2} \text{ ist} \\ 0, & \text{falls } \frac{\pi}{2} < |x| \leq \pi \text{ ist} \end{cases} \quad \text{für alle } x \in (-\pi; \pi].$$

Berechnen Sie außerdem die reellen Fourierkoeffizienten a_0 , a_k und b_k für alle $k \in \mathbb{N}$ von f .

Hinweis: Für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $k \in \mathbb{R}$ gilt $2 \cdot \cos(x) \cdot \cos(kx) = \cos((k-1) \cdot x) + \cos((k+1) \cdot x)$.

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} + \frac{\cos(x)}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(4n^2-1)} \cdot \cos(2nx)$$

Lösung:



Da f eine gerade Funktion ist, gilt $b_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Es gibt unterschiedliche Definitionen des Fourierkoeffizienten a_0 in der einschlägigen Literatur. Hier wird mit $a_0 := \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} y(x) dx$ statt mit dem ebenfalls verbreiteten $\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} y(x) dx$ gerechnet.

Für a_0 finden wir

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot [\sin(x)]_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi} \cdot (\sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(-\frac{\pi}{2})) = \frac{1}{\pi} \cdot (1 - (-1)) = \frac{1}{\pi} \cdot 2 = \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Hinweises erhält man a_1 durch

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(1 \cdot x) dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cdot \cos(1 \cdot x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos((1-1) \cdot x) + \cos((1+1) \cdot x)}{2} dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(0) + \cos(2x)) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot [x + \frac{1}{2} \cdot \sin(2x)]_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2\pi} \cdot (\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sin(\pi) - (-\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2} \cdot \sin(-\pi)) = \frac{1}{2\pi} \cdot \pi = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Für alle $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ liefert der Hinweis, das Additionstheorem für den Sinus und $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ sowie $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \int \cos(x) \cdot \cos(kx) dx &= \int \frac{\cos((k-1) \cdot x) + \cos((k+1) \cdot x)}{2} dx \\ &= \frac{\sin((k-1) \cdot x)}{2 \cdot (k-1)} + \frac{\sin((k+1) \cdot x)}{2 \cdot (k+1)} = \frac{\sin(kx + (-x))}{2 \cdot (k-1)} + \frac{\sin(kx + x)}{2 \cdot (k+1)} \\ &= \frac{\sin(kx) \cdot \cos(-x) + \cos(kx) \cdot \sin(-x)}{2 \cdot (k-1)} + \frac{\sin(kx) \cdot \cos(x) + \cos(kx) \cdot \sin(x)}{2 \cdot (k+1)} \\ &= \frac{\sin(kx) \cdot \cos(x)}{2} \cdot \left(\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k+1} \right) + \frac{\cos(kx) \cdot \sin(x)}{2} \cdot \left(-\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{\sin(kx) \cdot \cos(x)}{2} \cdot \frac{k+1+k-1}{(k-1) \cdot (k+1)} + \frac{\cos(kx) \cdot \sin(x)}{2} \cdot \frac{-k-1+k-1}{(k-1) \cdot (k+1)} \\ &= \frac{k \cdot \sin(kx) \cdot \cos(x) - \cos(kx) \cdot \sin(x)}{k^2 - 1}. \end{aligned}$$

Wegen $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$ und $\sin(\alpha) = -\sin(-\alpha)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt für alle $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

$$\begin{aligned} a_k a_k &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(kx) \, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cdot \cos(kx) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{k \cdot \sin(kx) \cdot \cos(x) - \cos(kx) \cdot \sin(x)}{k^2 - 1} \right]_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{k \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \cdot \overbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{=0} - \overbrace{\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{=1} - k \cdot \sin\left(-\frac{k\pi}{2}\right) \cdot \overbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}^{=0} + \overbrace{\cos\left(-\frac{k\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}^{=\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \cdot (-1)} }{\pi \cdot (k^2 - 1)} \\ &= \frac{-\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{\pi \cdot (k^2 - 1)} = \frac{-2}{\pi \cdot (k^2 - 1)} \cdot \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Für alle $\ell \in \mathbb{Z}$ sind $\cos(\ell\pi) = (-1)^\ell = \sin\left(\ell\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ und $\sin(\ell\pi) = 0 = \cos\left(\ell\pi + \frac{\pi}{2}\right)$.
Das liefert für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{-2}{\pi \cdot ((2n)^2 - 1)} \cdot \cos(n\pi) = \frac{-2}{\pi \cdot (4n^2 - 1)} \cdot (-1)^n = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2}{\pi \cdot (4n^2 - 1)} \\ \text{und } a_{2n+1} &= \frac{-2}{\pi \cdot ((2n+1)^2 - 1)} \cdot \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-2}{\pi \cdot (2n-1-1) \cdot (2n-1+1)} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$



Reihen/Fourierreihen/Ag_Fourierreihen_PiQuadratSechstel.tex

Aufgabe 103.482 ($\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$)

Heuser

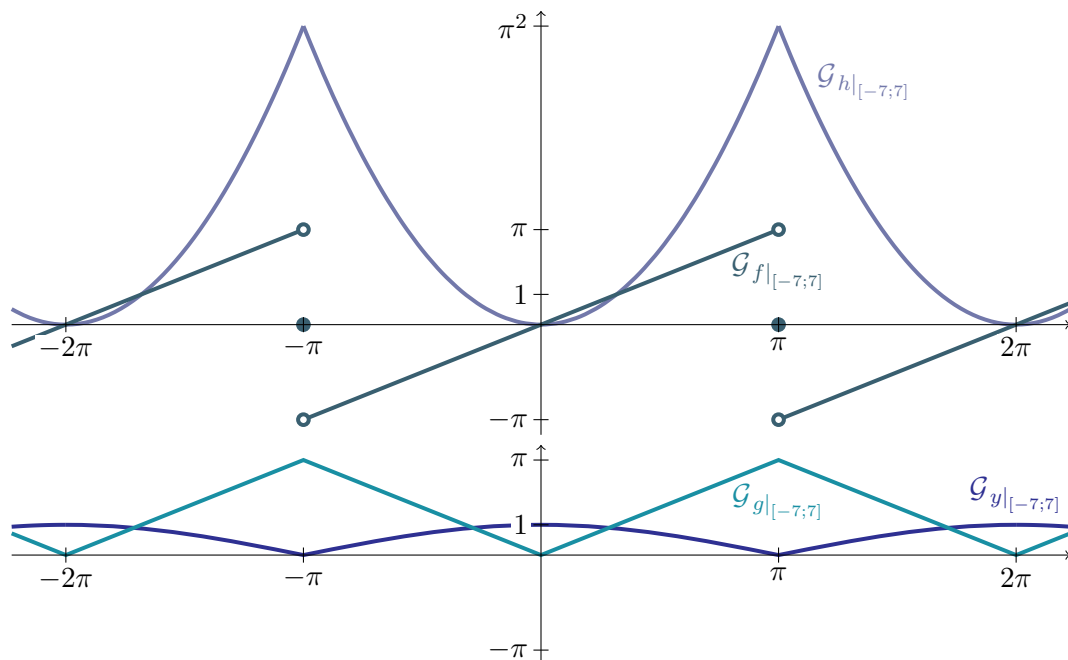
Sei $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto u(t)$ eine 2π -periodische Funktion mit $u(t) := t$ für alle $t \in (-\pi; \pi]$.

Seien $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x)$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto g(x)$, $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto h(x)$ und $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto y(x)$ Funktionen, für die für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x) := \begin{cases} u(x), & \text{für } \frac{x}{\pi} \notin \mathbb{Z} \\ 0, & \text{für } \frac{x}{\pi} \in \mathbb{Z} \end{cases}, \quad g(x) := |u(x)|, \quad h(x) := (u(x))^2 \quad \text{und} \quad y(x) := \left| \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right|.$$

Zeichnen Sie die Graphen von $f|_{[-7;7]}$, $g|_{[-7;7]}$ und $h|_{[-7;7]}$!

Lösung:



Für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt mit $p(x) = x$, $v_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \sin(nx)$ und $w_n(x) = \frac{-1}{n} \cdot \cos(nx)$

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_{=p(x)} \cdot \underbrace{\cos(nx)}_{=v'_n(x)} dx &= \underbrace{x}_{=p(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{n} \cdot \sin(nx)}_{=v_n(x)} - \int \underbrace{1}_{=p'(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{n} \cdot \sin(nx)}_{=v_n(x)} dx = \frac{x}{n} \cdot \sin(nx) - \frac{1}{n} \cdot \int \underbrace{\sin(nx)}_{=v'_n(x)} dx \\ &= \frac{x}{n} \cdot \sin(nx) - \frac{1}{n} \cdot \frac{-1}{n} \cdot \cos(nx) = \frac{x}{n} \cdot \sin(nx) + \frac{1}{n^2} \cdot \cos(nx) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_{=p(x)} \cdot \underbrace{\sin(nx)}_{=w'_n(x)} dx &= \underbrace{x}_{=p(x)} \cdot \underbrace{\frac{-1}{n} \cdot \cos(nx)}_{=w_n(x)} - \int \underbrace{1}_{=p'(x)} \cdot \underbrace{\frac{-1}{n} \cdot \cos(nx)}_{=w_n(x)} dx \\ &= \frac{-x}{n} \cdot \cos(nx) + \frac{1}{n} \cdot \int \underbrace{\cos(nx)}_{=w'_n(x)} dx = \frac{-x}{n} \cdot \cos(nx) + \frac{1}{n^2} \cdot \sin(nx). \end{aligned}$$

Es gibt unterschiedliche Definitionen des Fourierkoeffizienten a_0 in der einschlägigen Literatur. Hier wird mit $a_0 := \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} z(x) dx$ statt mit dem ebenfalls verbreiteten $\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} z(x) dx$ gerechnet.

a) Berechnen Sie die Fourierreihe von f !

$$2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \sin(nx)$$

Lösung:

$$\text{Es gilt } a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=-\pi}^{x=\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{(-\pi)^2}{2} \right) = 0.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt mit der Vorbemerkung

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{x}{n} \cdot \sin(nx) + \frac{1}{n^2} \cdot \cos(nx) \right]_{x=-\pi}^{x=\pi} \\ &= \frac{\pi}{\pi n} \cdot \underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} + \frac{1}{\pi n^2} \cdot \underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} - \frac{-\pi}{\pi n} \cdot \underbrace{\sin(n \cdot (-\pi))}_{=0} - \frac{1}{\pi n^2} \cdot \underbrace{\cos(n \cdot (-\pi))}_{=(-1)^n} = \frac{(-1)^n - (-1)^n}{\pi n^2} = 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{-x}{n} \cdot \cos(nx) + \frac{1}{n^2} \cdot \sin(nx) \right]_{x=-\pi}^{x=\pi} \\ &= \frac{-\pi}{\pi n} \cdot \underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} + \frac{1}{\pi n^2} \cdot \underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} - \frac{\pi}{\pi n} \cdot \underbrace{\cos(n \cdot (-\pi))}_{=(-1)^n} - \frac{1}{\pi n^2} \cdot \underbrace{\sin(n \cdot (-\pi))}_{=0} \\ &= \frac{-(-1)^n - (-1)^n}{n} = \frac{2 \cdot (-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

Die Fourierreihe von f ist $\frac{0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(0 \cdot \cos(nx) + \frac{2 \cdot (-1)^{n+1}}{n} \cdot \sin(nx) \right) = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \sin(nx)$.

b) Zeigen Sie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$!

Lösung:

f ist stückweise glatt sowie stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1) \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, da f dort eine Komposition stetiger Funktionen darstellt. Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (2k+1) \cdot \pi^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow (2k+1) \cdot \pi^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} x + \lim_{x \rightarrow -\pi^+} x \\ &= \pi + (-\pi) = 0 = 2 \cdot f((2k+1) \cdot \pi). \end{aligned}$$

Damit folgt, dass der Reihenwert der Fourierreihe auf ganz $\mathbb{R}$ mit dem Funktionswert übereinstimmt (Dirichlet'sche Regel).

Insbesondere folgt für $x = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1+1}}{2k+1} \cdot \sin\left((2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{2k} \cdot \sin\left(2k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2 \cdot (k+1)}}{2k+1} \cdot \underbrace{\sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)}_{=\cos(k\pi)=(-1)^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)}{2k} \cdot \underbrace{\sin(k\pi)}_{=0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.\end{aligned}$$

c) Berechnen Sie die Fourierreihe von g !

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cdot \cos((2n-1) \cdot x)$$

Lösung:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cdot \sin(nx) \, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int_0^{\pi} x \cdot \sin(nx) \, dx + \int_{-\pi}^0 (-x) \cdot \sin(nx) \, dx \right) \\ &\stackrel{t=-x}{=} \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int_0^{\pi} x \cdot \sin(nx) \, dx - \int_{\pi}^0 t \cdot \sin(-nt) \, dt \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int_0^{\pi} x \cdot \sin(nx) \, dx + \int_0^{\pi} t \cdot (-\sin(nt)) \, dt \right) = 0.\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |x| \, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int_0^{\pi} x \, dx + \int_{-\pi}^0 (-x) \, dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=\pi} - \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=-\pi}^{x=0} \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{0^2}{2} - \frac{0^2}{2} + \frac{(-\pi)^2}{2} \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{2} \right) = \pi.\end{aligned}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt mit der Vorbemerkung

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cdot \cos(nx) \, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int_0^{\pi} x \cdot \cos(nx) \, dx + \int_{-\pi}^0 (-x) \cdot \cos(nx) \, dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int_0^{\pi} x \cdot \cos(nx) \, dx - \int_{-\pi}^0 x \cdot \cos(nx) \, dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\left[\frac{x}{n} \cdot \sin(nx) + \frac{1}{n^2} \cdot \cos(nx) \right]_{x=0}^{x=\pi} - \left[\frac{x}{n} \cdot \sin(nx) + \frac{1}{n^2} \cdot \cos(nx) \right]_{x=-\pi}^{x=0} \right) \\ &= \frac{\pi}{\pi n} \cdot \underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} + \frac{1}{\pi n^2} \cdot \underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} - \frac{0}{\pi n} \cdot \underbrace{\sin(n \cdot 0)}_{=0} - \frac{1}{\pi n^2} \cdot \underbrace{\cos(n \cdot 0)}_{=1} \\ &\quad - \frac{0}{\pi n} \cdot \underbrace{\sin(n \cdot 0)}_{=0} - \frac{1}{\pi n^2} \cdot \underbrace{\cos(n \cdot 0)}_{=1} + \frac{-\pi}{\pi n} \cdot \underbrace{\sin(n \cdot (-\pi))}_{=0} + \frac{1}{\pi n^2} \cdot \underbrace{\cos(n \cdot (-\pi))}_{=(-1)^n} \\ &= \frac{(-1)^n - 1 - 1 + (-1)^n}{\pi n^2} = 2 \cdot \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ gerade ist} \\ \frac{-4}{\pi n^2}, & \text{falls } n \text{ ungerade ist} \end{cases}.\end{aligned}$$

Die Fourierreihe von g ist also

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(2 \cdot \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cdot \cos(nx) + 0 \cdot \sin(nx) \right) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi \cdot (2k-1)^2} \cdot \cos((2k-1) \cdot x).$$

d) Zeigen Sie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$!

Lösung:

g ist stückweise glatt sowie stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1) \cdot \pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z}\}$, da g dort eine Komposition stetiger Funktionen darstellt. Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow (2k+1) \cdot \pi^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} |x| = |\pi| = \pi,$$

$$\lim_{x \rightarrow (2k+1) \cdot \pi^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi^+} |x| = |-\pi| = \pi$$

und

$$g((2k+1) \cdot \pi) = \left| (2k+1) \cdot \pi - \left\lfloor \frac{(2k+1) \cdot \pi + \pi}{2\pi} \right\rfloor \cdot 2\pi \right| = |(2k+1) \cdot \pi - (k+1) \cdot 2\pi| = |-\pi| = \pi.$$

Mit der Stetigkeit von g auf $\mathbb{R}$ folgt, dass der Reihenwert der Fourierreihe auf ganz $\mathbb{R}$ mit dem Funktionswert übereinstimmt.

Insbesondere folgt für $x = \pi$

$$\pi = g(\pi) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \overbrace{\frac{\cos((2k-1) \cdot \pi)}{(2k-1)^2}}^{=\cos(\pi)=-1} = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2},$$

was nach Subtraktion von $\frac{\pi}{2}$ und Multiplikation mit $\frac{\pi}{4}$ die gewünschte Formel liefert.

e) Berechnen Sie die Fourierreihe von h ! $\frac{\pi^2}{3} + 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot \cos(nx)$

Lösung:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cdot \sin(nx) \, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int_0^{\pi} x^2 \cdot \sin(nx) \, dx + \int_{-\pi}^0 x^2 \cdot \sin(nx) \, dx \right) \\ &\stackrel{t=-x}{=} \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int_0^{\pi} x^2 \cdot \sin(nx) \, dx - \int_{\pi}^0 (-t)^2 \cdot \sin(-nt) \, dt \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int_0^{\pi} x^2 \cdot \sin(nx) \, dx + \int_0^{\pi} t^2 \cdot (-\sin(nt)) \, dt \right) = 0. \end{aligned}$$

Es gilt $a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=-\pi}^{x=\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi^3}{3} - \frac{(-\pi)^3}{3} \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi^3}{3} - \frac{-\pi^3}{3} \right) = \frac{2\pi^2}{3}.$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt mit $q(x) = x^2$, $v_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \sin(nx)$ und der Vorbemerkung

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x^2}_{=q(x)} \cdot \underbrace{\cos(nx)}_{=v'_n(x)} \, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\underbrace{x^2}_{=q(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{n} \cdot \sin(nx)}_{=v_n(x)} \right]_{x=-\pi}^{x=\pi} - \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{2x}_{=q'(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{n} \cdot \sin(nx)}_{=v_n(x)} \, dx \\ &= \frac{\pi^2}{\pi n} \cdot \underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} - \frac{(-\pi)^2}{\pi n} \cdot \underbrace{\sin(n \cdot (-\pi))}_{=0} - \frac{2}{\pi n} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin(nx) \, dx \\ &= 0 - 0 - \frac{2}{\pi n} \cdot \left[\frac{-x}{n} \cdot \cos(nx) + \frac{1}{n^2} \cdot \sin(nx) \right]_{x=-\pi}^{x=\pi} \\ &= \frac{2\pi}{\pi n^2} \cdot \underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} - \frac{2}{\pi n^3} \cdot \underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} - \frac{2 \cdot (-\pi)}{\pi n^2} \cdot \underbrace{\cos(n \cdot (-\pi))}_{=(-1)^n} + \frac{2}{\pi n^3} \cdot \underbrace{\sin(n \cdot (-\pi))}_{=0} \\ &= \frac{2}{n^2} \cdot ((-1)^n + (-1)^n) = \frac{4}{n^2} \cdot (-1)^n. \end{aligned}$$

Die Fourierreihe von h ist also

$$\frac{\frac{2\pi^2}{3}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2} \cdot (-1)^n \cdot \cos(nx) + 0 \cdot \sin(nx) \right) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot \cos(nx).$$

f) Zeigen Sie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$!

Lösung:

h ist stückweise glatt sowie stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1) \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, da h dort eine Komposition stetiger Funktionen darstellt. Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (2k+1) \cdot \pi^-} h(x) &= \lim_{x \rightarrow \pi^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} x^2 = \pi^2, \\ \lim_{x \rightarrow (2k+1) \cdot \pi^+} h(x) &= \lim_{x \rightarrow -\pi^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi^+} x^2 = (-\pi)^2 = \pi^2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} h((2k+1) \cdot \pi) &= \left((2k+1) \cdot \pi - \left\lfloor \frac{(2k+1) \cdot \pi + \pi}{2\pi} \right\rfloor \cdot 2\pi \right)^2 \\ &= ((2k+1) \cdot \pi - (k+1) \cdot 2\pi)^2 = (-\pi)^2 = \pi^2. \end{aligned}$$

Mit der Stetigkeit von h auf $\mathbb{R}$ folgt, dass der Reihenwert der Fourierreihe auf ganz $\mathbb{R}$ mit dem Funktionswert übereinstimmt.

Insbesondere folgt für $x = 0$

$$0 = -0^2 = -h(0) = -\frac{\pi^2}{3} - 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot \underbrace{\cos(n \cdot 0)}_{=1} = -\frac{\pi^2}{3} + 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2},$$

was nach Addition von $\frac{\pi^2}{3}$ und Multiplikation mit $\frac{1}{4}$ die gewünschte Formel liefert.

g) Folgern Sie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$!

Lösung:

Subtrahiert man die Formel aus Aufgabenteil f) von der aus Aufgabenteil d), so erhält man

$$\frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2},$$

wegen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k-1+1}}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{(2k)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{4k^2}.$

Multiplikation mit 4 liefert das gewünschte Ergebnis.

Alternativ kann man auch wie in Aufgabenteil f) argumentieren und $x = \pi$ wählen.

h) Berechnen Sie die Fourierreihe von y ! $\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} \cdot \cos(nx)$

Lösung:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin(nx) \, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin(nx) \, dx + \int_{-\pi}^0 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin(nx) \, dx \right) \\ &\stackrel{t=-x}{=} \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin(nx) \, dx - \int_{\pi}^0 \cos\left(\frac{-t}{2}\right) \cdot \sin(-nt) \, dt \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin(nx) \, dx + \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{t}{2}\right) \cdot (-\sin(nt)) \, dt \right) = 0. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} y(x) \, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \left[2 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right]_{x=-\pi}^{x=\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot (2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2 \cdot \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)) = \frac{1}{\pi} \cdot (2 \cdot 1 - 2 \cdot (-1)) = \frac{4}{\pi}. \end{aligned}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich mit $r(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$, $v_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \sin(nx)$, $s(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ und $w_n(x) = \frac{-1}{n} \cdot \cos(nx)$ mit Hilfe zweier partieller Integrationen

$$\begin{aligned} \int \underbrace{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}_{=r(x)} \cdot \underbrace{\cos(nx)}_{=v'_n(x)} \, dx &= \underbrace{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}_{=r(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{n} \cdot \sin(nx)}_{=v_n(x)} - \int \underbrace{\frac{-1}{2} \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)}_{=r'(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{n} \cdot \sin(nx)}_{=v_n(x)} \, dx \\ &= \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin(nx)}{n} + \frac{1}{2n} \cdot \int \underbrace{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}_{=s(x)} \cdot \underbrace{\sin(nx)}_{=w'_n(x)} \, dx \\ &= \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin(nx)}{n} + \frac{1}{2n} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}_{=s(x)} \cdot \underbrace{\frac{-1}{n} \cdot \cos(nx)}_{=w_n(x)} - \frac{1}{2n} \cdot \int \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)}_{=s'(x)} \cdot \underbrace{\frac{-1}{n} \cdot \cos(nx)}_{=w_n(x)} \, dx \\ &= \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin(nx)}{n} - \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos(nx)}{2n^2} + \frac{1}{4n^2} \cdot \int \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos(nx) \, dx \end{aligned}$$

Subtrahieren von $\frac{1}{4n^2} \cdot \int \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos(nx) \, dx$ und Division durch $(1 - \frac{1}{4n^2}) = \frac{4n^2-1}{4n^2}$ auf beiden Seiten liefert für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\int \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos(nx) \, dx = \frac{4n \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin(nx)}{4n^2 - 1} - \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos(nx)}{4n^2 - 1}$$

Damit folgt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos(nx) \, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{4n \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin(nx)}{4n^2 - 1} - \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos(nx)}{4n^2 - 1} \right]_{x=-\pi}^{x=\pi} \\ &= \frac{4n \cdot \overbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{=0} \cdot \overbrace{\sin(n\pi)}^{=0}}{\pi \cdot (4n^2 - 1)} - \frac{2 \cdot \overbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{=1} \cdot \overbrace{\cos(n\pi)}^{=(-1)^n}}{\pi \cdot (4n^2 - 1)} \\ &\quad - \frac{4n \cdot \overbrace{\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right)}^{=0} \cdot \overbrace{\sin(-n\pi)}^{=0}}{\pi \cdot (4n^2 - 1)} + \frac{2 \cdot \overbrace{\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)}^{=-1} \cdot \overbrace{\cos(-n\pi)}^{=(-1)^n}}{\pi \cdot (4n^2 - 1)} \\ &= \frac{-2 \cdot (-1)^n - 2 \cdot (-1)^n}{\pi \cdot (4n^2 - 1)} = \frac{4 \cdot (-1)^{n+1}}{\pi \cdot (4n^2 - 1)}. \end{aligned}$$

Die Fourierreihe von y ist

$$\frac{4}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4 \cdot (-1)^{n+1}}{\pi \cdot (4n^2 - 1)} \cdot \cos(nx) + 0 \cdot \sin(nx) \right) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} \cdot \cos(nx).$$

i) Zeigen Sie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}$!

Lösung:

y ist stückweise glatt sowie auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, weswegen die Fourierreihe auf ganz $\mathbb{R}$ gegen y konvergiert.

Insbesondere ergibt sich für $x = \pi$

$$0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} \cdot \underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{4n^2 - 1} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}.$$

Subtrahieren von $\frac{2}{\pi}$ und multiplizieren mit $-\frac{\pi}{4}$ liefert die Behauptung.



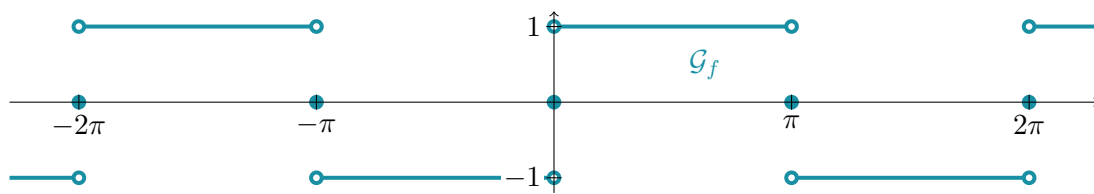
Reihen/Fourierreihen/Ag_Fourierreihen_PktwKonvSignum.tex

Aufgabe 103.483 (Reihenwert über die Fourierreihe der Signumsfunktion berechnen)

SPF

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x)$, $f(x + 2\pi) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $f(0) := 0 =: f(\pi)$ und $f(x) = \frac{x}{|x|}$ für alle $x \in (-\pi; \pi) \setminus \{0\}$. Fertigen Sie eine Skizze des Graphen von $f|_{[-7;7]}$ an!

Lösung:



- a) Finden Sie eine endliche Menge $M \subseteq [-\pi; \pi]$, so dass f auf $\mathbb{R} \setminus \{t + 2k\pi \in \mathbb{R} \mid t \in M \text{ und } k \in \mathbb{Z}\}$ stetig differenzierbar ist!

$$M \supseteq \{0; \pi\} \text{ oder } M \supseteq \{-\pi; 0\}$$

Lösung:

Ist M eine Obermenge von $\{0; \pi\}$ oder von $\{-\pi; 0\}$, so enthält $\{t + 2k\pi \in \mathbb{R} \mid t \in M \text{ und } k \in \mathbb{Z}\}$ alle Unstetigkeitsstellen von f . Für jede Stetigkeitsstelle von f gibt es eine Umgebung der Stelle, auf der f konstant ist. Damit ist f in jeder Stetigkeitsstelle von f unendlich oft differenzierbar und damit insbesondere stetig differenzierbar. Für das Folgende setzen wir also $M := \{0; \pi\}$.

- b) Prüfen Sie für jedes $x \in M$, ob die Limites $\lim_{t \rightarrow x^+} f(t)$, $\lim_{t \rightarrow x^-} f(t)$, $\lim_{t \rightarrow x^+} f'(t)$ und $\lim_{t \rightarrow x^-} f'(t)$ existieren!

Lösung:

Es gilt $f': \mathbb{R} \setminus \{k\pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto f'(t) = 0$.

Wegen $M \subseteq \{k\pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ und der Diskretheit dieser Menge folgt $\lim_{t \rightarrow x^+} f'(t) = \lim_{t \rightarrow x^+} 0 = 0$ und $\lim_{t \rightarrow x^-} f'(t) = \lim_{t \rightarrow x^-} 0 = 0$ für alle $x \in M$. Für die Grenzwerte von f berechnet man

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{t}{|t|} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{t}{-t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} (-1) = -1, \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{|t|} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} 1 = 1, \\ \lim_{t \rightarrow \pi^-} f(t) &= \lim_{t \rightarrow \pi^-} \frac{t}{|t|} = \lim_{t \rightarrow \pi^-} \frac{t}{t} = \lim_{t \rightarrow \pi^-} 1 = 1 \\ \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow \pi^+} f(t) &= \lim_{t \rightarrow \pi^+} \frac{t-2\pi}{|t-2\pi|} = \lim_{t \rightarrow \pi^+} \frac{t-2\pi}{-(t-2\pi)} = \lim_{t \rightarrow \pi^+} (-1) = -1. \end{aligned}$$

c) Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ mit Hilfe der zu f gehörenden Fourierreihe!

$\frac{\pi}{4}$

Lösung:

Für alle $x \in [-\pi; \pi]$ gilt $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in (0; \pi) \\ 0, & \text{falls } x \in \{-\pi; 0; \pi\} \\ -1, & \text{falls } x \in (-\pi; 0) \end{cases}$.

Also ist f eine ungerade Funktion und es gilt $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(\ell x) dx = 0$ für alle $\ell \in \mathbb{N}_0$.

Außerdem gilt für alle $\ell \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} b_{\ell} &:= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(\ell x) dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin(\ell x) dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(\ell x) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \left[\frac{-\cos(\ell x)}{\ell} \right]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{\cos(0) - \cos(\ell\pi)}{\frac{1}{2} \cdot \ell\pi} = \frac{1 - (-1)^{\ell}}{\frac{1}{2} \cdot \ell\pi} = \begin{cases} 0, & \text{falls } \ell \text{ gerade ist} \\ \frac{4}{\ell\pi}, & \text{falls } \ell \text{ ungerade ist} \end{cases}. \end{aligned}$$

Die zu f gehörende Fourierreihe ergibt sich also zu $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1) \cdot \pi} \cdot \sin((2k-1) \cdot x)$.

Da f stückweise stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$ und stetig in $\frac{\pi}{2}$ ist, ergibt sich

$$\begin{aligned} 1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{2} \cdot \left(\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(t) + \lim_{s \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(s) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1) \cdot \pi} \cdot \sin\left((2k-1) \cdot \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-(-1)^k}{2k-1} \stackrel{n=k-1}{=} \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(-1)^{n+1}}{2 \cdot (n+1) - 1} = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}. \end{aligned}$$

Multipliziert man die äußere Gleichung mit $\frac{\pi}{4}$, so erhält man den Reihenwert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.



Reihen/Fourierreihen/Ag_Fourierreihen_ReziprokeBiquadrateUngeraderZahlenMitParseval.tex

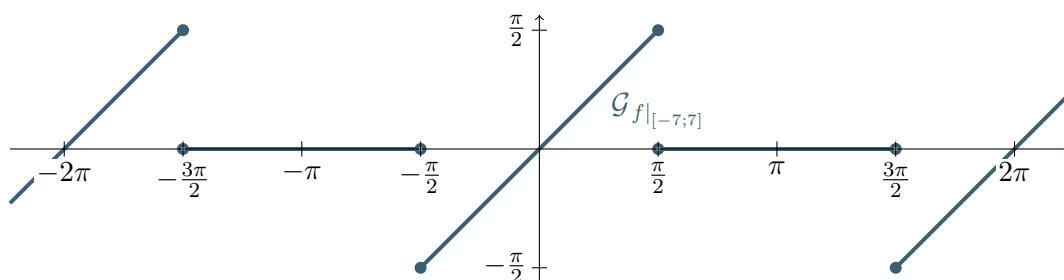
Aufgabe 103.484 (Fourierkoeffizienten berechnen und Identität nachrechnen, Klausurniveau)

Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x)$ ist definiert als die ungerade 2π -periodische Fortsetzung von

$$\psi: [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad x \mapsto \psi(x) := \begin{cases} x, & \text{für } x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{für } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

a) Skizzieren Sie den Graphen von $f|_{[-7;7]}$!

Lösung:



b) Bestimmen Sie die reellen Fourierkoeffizienten a_0 sowie a_k und b_k für alle $k \in \mathbb{N}$ von f !

$$a_k = 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0, b_{2\ell} = \frac{(-1)^{\ell+1}}{2\ell} \text{ und } b_{2\ell-1} = \frac{2 \cdot (-1)^{\ell+1}}{\pi \cdot (2\ell-1)^2} \text{ für alle } \ell \in \mathbb{N}$$

Lösung:

Da f ungerade ist, gilt $a_0 = 0$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - \left(-\frac{\pi}{2} \right)^2 \right) = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{4} \right) = 0.$$

Seien $u(x) := x$, $v_k(x) := \frac{1}{k} \cdot \sin(kx)$ und $w_k(x) := \frac{-1}{k} \cdot \cos(kx)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Dann gilt $u'(x) = 1$, $v'_k(x) = \cos(kx)$ und $w'_k(x) = \sin(kx)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Da f ungerade ist, gilt für die Fourierkoeffizienten $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(kx) \, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{x}_{=u(x)} \cdot \underbrace{\cos(kx)}_{=v'_k(x)} \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \left[\underbrace{x}_{=u(x)} \cdot \underbrace{\frac{\sin(kx)}{k}}_{=v_k(x)} \right]_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{1}_{=u'(x)} \cdot \underbrace{\frac{\sin(kx)}{k}}_{=v_k(x)} \, dx \\ &= \frac{1}{k\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{2} \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(-\frac{k\pi}{2}\right) \right) + \frac{1}{k\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-\sin(kx)) \, dx \\ &\stackrel{\text{sin ist ungerade}}{=} \frac{1}{k\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{2} \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \right) + \frac{1}{k\pi} \cdot \left[\frac{1}{k} \cdot \cos(kx) \right]_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=\frac{\pi}{2}} \\ &= 0 + \frac{1}{k^2\pi} \cdot \left(\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \cos\left(-\frac{k\pi}{2}\right) \right) \stackrel{\text{cos ist gerade}}{=} \frac{1}{k^2\pi} \cdot \left(\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \right) = 0. \end{aligned}$$

Weiter erhalten wir mit partieller Integration für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(kx) \, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{x}_{=u(x)} \cdot \underbrace{\sin(kx)}_{=w'_k(x)} \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \left[\underbrace{x}_{=u(x)} \cdot \underbrace{\frac{-\cos(kx)}{k}}_{=w_k(x)} \right]_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{1}_{=u'(x)} \cdot \underbrace{\frac{-\cos(kx)}{k}}_{=w_k(x)} \, dx \\ &= \frac{1}{k\pi} \cdot \left(-\frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(-\frac{k\pi}{2}\right) \right) + \frac{1}{k\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(kx) \, dx \\ &\stackrel{\text{cos ist gerade}}{=} \frac{-1}{2k} \cdot \left(\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \right) + \frac{1}{k\pi} \cdot \left[\frac{1}{k} \cdot \sin(kx) \right]_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{-1}{k} \cdot \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{1}{k^2\pi} \cdot \left(\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{k\pi}{2}\right) \right) \\ &\stackrel{\text{sin ist ungerade}}{=} \frac{-1}{k} \cdot \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{1}{k^2\pi} \cdot \left(\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \right) = \frac{-1}{k} \cdot \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{2}{\pi k^2} \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Für alle $n \in \mathbb{Z}$ sind $\cos(n\pi) = (-1)^n = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ und $\sin(n\pi) = 0 = \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$.

Das liefert für alle $\ell \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} b_{2\ell} &= \frac{-1}{2\ell} \cdot \cos\left(\frac{2\ell\pi}{2}\right) + \frac{2}{\pi \cdot (2\ell)^2} \cdot \sin\left(\frac{2\ell\pi}{2}\right) \\ &= \frac{-1}{2\ell} \cdot \cos(\ell\pi) + \frac{1}{2\pi\ell^2} \cdot \sin(\ell\pi) = \frac{-1}{2\ell} \cdot (-1)^\ell + \frac{1}{2\pi\ell^2} \cdot 0 = \frac{(-1)^{\ell+1}}{2\ell} \\ \text{und } b_{2\ell-1} &= \frac{-1}{2\ell-1} \cdot \cos\left(\frac{(2\ell-1)\pi}{2}\right) + \frac{2}{\pi \cdot (2\ell-1)^2} \cdot \sin\left(\frac{(2\ell-1)\pi}{2}\right) \\ &= \frac{-1}{2\ell-1} \cdot \cos\left((\ell-1) \cdot \pi + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{\pi \cdot (2\ell-1)^2} \cdot \sin\left((\ell-1) \cdot \pi + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{-1}{2\ell-1} \cdot 0 + \frac{2}{\pi \cdot (2\ell-1)^2} \cdot (-1)^{\ell-1} = \frac{2 \cdot (-1)^{\ell+1}}{\pi \cdot (2\ell-1)^2}. \end{aligned}$$

Die Fourierreihe zu f ergibt zu

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1}}{2\ell} \cdot \sin(2\ell x) + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{\ell+1}}{\pi \cdot (2\ell - 1)^2} \cdot \sin((2\ell - 1) \cdot x).$$

c) Zeigen Sie mit Hilfe der Parseval'schen Gleichung

$$\frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi^2} \cdot \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

die Identität

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{(2\ell - 1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Hinweis: Sie können ohne Beweis das Ergebnis $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ verwenden.

Lösung:

Die linke Seite der Parseval'schen Gleichung errechnet sich zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{3\pi} \cdot \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^3 - \left(-\frac{\pi}{2} \right)^3 \right) = \frac{1}{3\pi} \cdot \left(\frac{\pi^3}{8} + \frac{\pi^3}{8} \right) = \frac{1}{3\pi} \cdot \frac{\pi^3}{4} = \frac{\pi^2}{12}. \end{aligned}$$

Wegen $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ergibt sich die rechte Seite zu

$$\begin{aligned} \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 = \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{\ell+1}}{2\ell} \right)^2 + \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\frac{2 \cdot (-1)^{\ell+1}}{\pi \cdot (2\ell - 1)^2} \right)^2 \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{4\ell^2} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 \cdot (2\ell - 1)^4} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell^2} + \frac{4}{\pi^2} \cdot \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{(2\ell - 1)^4} \end{aligned}$$

Mit der Parseval'schen Gleichung folgt also

$$\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{4} \cdot \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell^2} + \frac{4}{\pi^2} \cdot \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{(2\ell - 1)^4}.$$

Stellt man diese Gleichung nach der hinteren Summe um, so liefert der Hinweis $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{(2\ell - 1)^4} = \frac{\pi^2}{4} \cdot \left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{4} \cdot \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell^2} \right) = \frac{\pi^2}{4} \cdot \left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} \right) = \frac{\pi^2}{4} \cdot \left(\frac{2\pi^2}{24} - \frac{\pi^2}{24} \right) = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^4}{96}.$$



Reihen/Fourierreihen/Ag_Fourierreihen_ReziprokeQuadrateUngeraderZahlen.tex

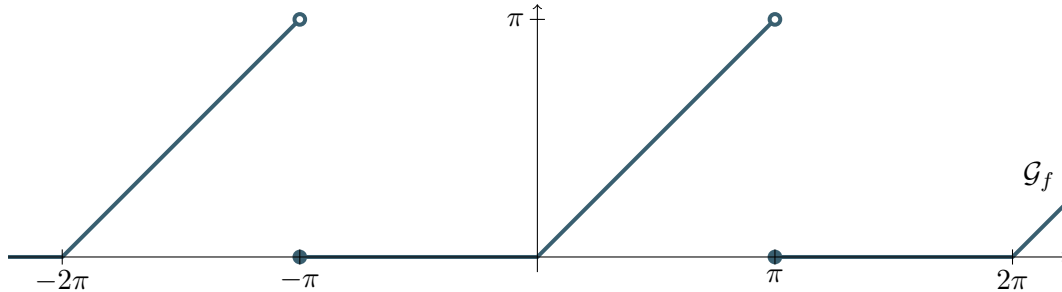
Aufgabe 103.485 (Fourierreihe, Reihenwert)

ahs-AGIP

- a) Bestimmen Sie die reelle Fourierreihe der Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x)$, $f(x+2\pi) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ für alle $x \in [-\pi; 0)$ und $f(x) = x$ für alle $x \in [0; \pi)$!

$$\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1) \cdot x)}{(2n-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot \sin(nx)$$

Lösung:



Wir berechnen zunächst die einzelnen reellen Fourierkoeffizienten. Es gilt

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{\pi} x \, dx = \frac{1}{4\pi} \cdot [x^2]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{\pi}{4},$$

Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(kx) \, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \underbrace{x}_{=u(x)} \cdot \underbrace{\cos(kx)}_{=v'(x)} \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \left[x \cdot \frac{\sin(kx)}{k} \right]_{x=0}^{x=\pi} - \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \underbrace{1}_{=u'(x)} \cdot \underbrace{\frac{\sin(kx)}{k}}_{=v(x)} \, dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{-\cos(kx)}{k^2} \right]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{falls } k = 2n \text{ mit } n \in \mathbb{N} \text{ ist,} \\ -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{(2n-1)^2}, & \text{falls } k = 2n-1 \text{ mit } n \in \mathbb{N} \text{ ist.} \end{cases} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(kx) \, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \underbrace{x}_{=u(x)} \cdot \underbrace{\sin(kx)}_{=w'(x)} \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \left[x \cdot \frac{-\cos(kx)}{k} \right]_{x=0}^{x=\pi} - \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \underbrace{1}_{=u'(x)} \cdot \underbrace{\frac{-\cos(kx)}{k}}_{=w(x)} \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \pi \cdot \frac{-\cos(k\pi)}{k} - \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{-\sin(kx)}{k^2} \right]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{(-1)^{k+1}}{k}. \end{aligned}$$

Damit ist die Fourierreihe $s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto s(x)$ von f gegeben durch

$$s(x) := \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1) \cdot x)}{(2n-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot \sin(nx)$$

- b) Berechnen Sie mit Hilfe der Fourierreihe von f den Wert der Reihe $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$!

$$\frac{\pi^2}{8}$$

Lösung:

Da die Funktion f stückweise stetig differenzierbar ist, gilt $\frac{1}{2} \cdot \left(\lim_{t \rightarrow x^+} f(t) + \lim_{t \rightarrow x^-} f(t) \right) = s(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Insbesondere gilt dies für $x = \pi$, und wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \frac{1}{2} \cdot (0 + \pi) = \frac{1}{2} \cdot \left(\lim_{t \rightarrow -\pi^+} f(t) + \lim_{t \rightarrow -\pi^-} f(t) \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\lim_{t \rightarrow \pi^+} f(t) + \lim_{t \rightarrow \pi^-} f(t) \right) \\ &= s(\pi) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1) \cdot \pi)}{(2n-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot \sin(n\pi). \end{aligned}$$

Also ist $\frac{\pi}{4} = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ und daher gilt auch $\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$.



Reihen/Fourierreihen/Ag_Fourierreihen_UnGeradeFortsetzenUndNurDreiKoeffBerechnen.tex

Aufgabe 103.486 (Fourierkoeffizienten berechnen)

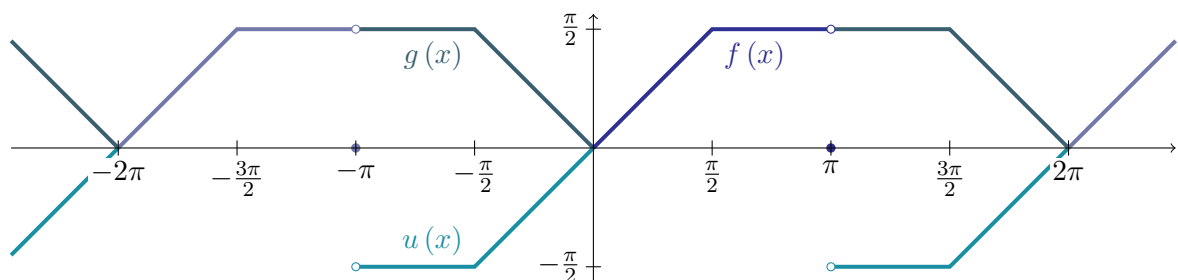
ahs

Gegeben ist die Funktion $f: [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x)$ durch $f(\pi) := 0$ und für alle $x \in [0; \pi]$

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}, & \text{falls } \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$$

- a) Skizzieren Sie die Graphen von f , sowie ihrer geraden 2π -periodischen Fortsetzung g und ihrer ungeraden 2π -periodischen Fortsetzung u in ein gemeinsames Koordinatensystem!

Lösung:



- b) Geben Sie die Zuordnungsvorschriften von g und u im Bereich $[-\pi; \pi]$ an!

Lösung:

Für alle $x \in [-\pi; \pi]$ gilt

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } |x| = \pi \\ \frac{\pi}{2}, & \text{falls } \frac{\pi}{2} < |x| < \pi \\ -x, & \text{falls } -\frac{\pi}{2} \leq x < 0 \\ x, & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{und} \quad u(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } |x| = \pi \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{falls } -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ x, & \text{falls } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}, & \text{falls } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

- c) Berechnen Sie die reellen Koeffizienten a_0 , a_1 und b_1 der beiden Fortsetzungen!

$$\text{gerade: } \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx = \frac{3\pi^2}{4}, a_1 = -\frac{2}{\pi}, b_1 = 0 \quad \text{ungerade: } a_0 = 0, a_1 = 0, b_1 = \frac{2}{\pi} + 1$$

Lösung:

Es gibt unterschiedliche Definitionen des Fourierkoeffizienten a_0 in der einschlägigen Literatur. Hier wird mit $a_0 := \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} y(x) dx$ statt mit dem ebenfalls verbreiteten $\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} y(x) dx$ gerechnet.

g Da g reell und gerade ist, gilt $b_1 = 0$. Ferner ist

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x) \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\pi}{2} \, dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \left(\left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{\pi x}{2} \right]_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\pi} \right) = \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi^2}{8} - 0 + \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{4} \right) = \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

und mit einer partiellen Integration ergibt sich

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos(x) \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos(x) \, dx + \frac{2}{\pi} \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\pi}{2} \cdot \cos(x) \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \left([x \cdot \sin(x)]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot \sin(x) \, dx \right) + [\sin(x)]_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{2} \cdot 1 - 0 \right) + \frac{2}{\pi} \cdot [\cos(x)]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} + 0 - 1 = 1 + \frac{2}{\pi} \cdot (0 - 1) - 1 = -\frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

Für die gerade Fortsetzung g ergibt sich also $a_0 = \frac{3\pi}{4}$, $a_1 = -\frac{2}{\pi}$ und $b_1 = 0$.

u Da u reell und ungerade ist, gilt $a_0 = a_1 = 0$. Zu berechnen bleibt

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin(x) \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin(x) \, dx + \frac{2}{\pi} \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\pi}{2} \cdot \sin(x) \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \left([x \cdot (-\cos(x))]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot (-\cos(x)) \, dx \right) + [-\cos(x)]_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{2} \cdot 0 - 0 \right) + \frac{2}{\pi} \cdot [\sin(x)]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} + 1 - 0 = 0 + \frac{2}{\pi} \cdot (1 - 0) + 1 = \frac{2}{\pi} + 1. \end{aligned}$$

Für die ungerade Fortsetzung u ergibt sich also $a_0 = 0$, $a_1 = 0$ und $b_1 = \frac{2}{\pi} + 1$.



Reihen/Komplex/Ag_ReihenKompl_GeometrischeReiheMitParameter.tex

Aufgabe 104.487 (Klausur Herbst 2004 Aufgabe 1 a (Physik))

4?/40 Punkten

Bestimmen Sie die Menge aller $w \in \mathbb{C}$, für welche die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{w} \right)^k$$

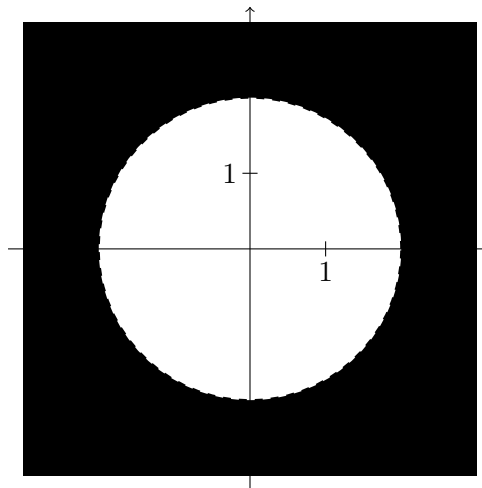
konvergiert. Beschreiben Sie die Menge geometrisch.

Lösung:

Es gilt das die Reihe $\sum_{l=0}^{\infty} q^l$ für $|q| < 1$ konvergent ist. Damit ergibt sich die Bedingung für w

$$\left| \frac{1 + i\sqrt{3}}{w} \right| < 1 \iff \frac{2}{|w|} < 1 \iff |w| > 2$$

Geometrisch sind das alle Zahlen der komplexen Eben außer die Menge der Zahlen in einem Kreis mit Radius 2 um die Null.



Reihen/Komplex/Ag_ReihenKompl_GeometrischeReiheMitUmformen.tex

Aufgabe 104.488 (Klausur SoSe 2009 Aufgabe 1 b (Physik))

3?/40 Punkten

Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(3i)^{n+1}}$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Reihenwert sowie den Betrag des Reihenwertes.

Lösung:

Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(3i)^{n+1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3i} \frac{2^n}{(3i)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3i} \left(\frac{2}{(3i)} \right)^n = -\frac{1}{3i} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3i} \left(\frac{2}{(3i)} \right)^n \\ &= -\frac{1}{3i} + \frac{1}{3i} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{(3i)} \right)^n \right). \end{aligned}$$

Bei der so entstandenen Reihe handelt es sich um die geometrische Reihe $\sum_{l=0}^{\infty} q^l$. Diese ist konvergent $|q| < 1$, hier ist $q = \frac{2}{3i}$ da $|\frac{2}{3i}| = \frac{2}{3} < 1$ gilt ist die Reihe konvergent. Der Reihenwert ist

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3i} + \frac{1}{3i} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{(3i)} \right)^n \right) &= -\frac{1}{3i} + \frac{1}{3i} \left(\frac{1}{1 - \frac{2}{3i}} \right) = \frac{1}{3i} \left(-1 + \frac{3i}{3i-2} \right) \\ &= \frac{1}{3i} \left(\frac{-3i+2+3i}{3i-2} \right) = \frac{1}{3i} \left(\frac{2}{3i-2} \right) = \frac{2}{-9-6i} \\ &= \frac{-18+12i}{81+36} = \frac{-6+4i}{39} = -\frac{2}{13} + \frac{4}{39}i. \end{aligned}$$



Reihen/Komplex/Ag_ReihenKompl_GeometrischeReihen.tex

Aufgabe 104.489 (Komplexe geometrische Reihen)

vr,mm

Bestimmen Sie die Reihenwerte, falls diese existieren!

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3i}{4} \right)^k$

$$\frac{16+12i}{25}$$

Lösung:

Es handelt sich um eine geometrische Reihe. Weiter ist $|\frac{3i}{4}| = \frac{3}{4} < 1$ daher ist die Reihe konvergent. Es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3i}{4} \right)^k = \frac{1}{1 - \frac{3i}{4}} = \frac{1 + \frac{3i}{4}}{1 + \frac{9}{16}} = \frac{1 + \frac{3i}{4}}{\frac{25}{16}} = \frac{16 + 12i}{25} = \frac{16}{25} + \frac{12}{25}i$$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3i-3}{4} \right)^k$

div.

Lösung:

Es handelt sich um eine geometrische Reihe. Weiter ist $|\frac{3i-3}{4}| = \frac{3\sqrt{2}}{4} > 1$ daher ist die Reihe divergent.

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3i}{3i-4} \right)^k$

$$\frac{4-3i}{4}$$

Lösung:

Es handelt sich um eine geometrische Reihe. Weiter ist $|\frac{3i}{3i-4}| = \frac{3}{5} < 1$ daher ist die Reihe konvergent. Es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3i}{3i-4} \right)^k = \frac{1}{1 - \frac{3i}{3i-4}} = \frac{3i-4}{3i-4-3i} = \frac{-4+3i}{-4} = \frac{4-3i}{4} = 1 - \frac{3}{4}i$$

d) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3i-4}{3i+4} \right)^k$

div.

Lösung:

Es handelt sich um eine geometrische Reihe. Weiter ist $\left| \frac{3i-4}{3i+4} \right| = \frac{5}{5} = 1$ daher ist die Reihe divergent.



Reihen/Komplex/Ag_ReihenKompl_Kriterien.tex

Aufgabe 104.490 (komplexe Reihen)

spf

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz!

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5i)^{n-2}}{(6+4i)^n}$

konv.

Lösung:

Es handelt sich um eine geometrische Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5i)^{n-2}}{(6+4i)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5i)^n \cdot (-5i)^{-2}}{(6+4i)^n} = (-5i)^{-2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5i)^n}{(6+4i)^n} = \frac{1}{(-5i)^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-5i}{6+4i} \right)^n.$$

Wegen

$$\left| \frac{-5i}{6+4i} \right| = \frac{|-5i|}{|6+4i|} = \frac{5}{\sqrt{6^2+4^2}} = \frac{5}{\sqrt{36+16}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{52}} = \sqrt{\frac{25}{52}} < \sqrt{1} = 1$$

konvergiert die betrachtete Reihe absolut und ist insbesondere auch konvergent.

Als Reihenwert ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{-25} \cdot \frac{1}{1 - \frac{-5i}{6+4i}} &= -\frac{1}{25} \cdot \frac{6+4i}{6+9i} = -\frac{1}{25} \cdot \frac{(6+4i) \cdot (2-3i)}{3 \cdot (2+3i) \cdot (2-3i)} = -\frac{1}{75} \cdot \frac{12-18i+8i+12}{4+9} \\ &= -\frac{1}{75} \cdot \frac{24-10i}{13} = -\frac{8}{25 \cdot 13} + \frac{2}{15 \cdot 13} \cdot i = -\frac{8}{325} + \frac{2}{195} \cdot i. \end{aligned}$$

b) $\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(4-2i)^{2\ell}}{(8+15i)^\ell \cdot \ell^2}$

div.

Lösung:

Für $\ell \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \sqrt[\ell]{\left| \frac{(4-2i)^{2\ell}}{(8+15i)^\ell \cdot \ell^2} \right|} &= \sqrt[\ell]{\frac{|(4-2i)^{2\ell}|}{|(8+15i)^\ell \cdot \ell^2|}} = \frac{\sqrt[\ell]{|4-2i|^{2\ell}}}{\sqrt[\ell]{|8+15i|^\ell \cdot |\ell^2|}} = \frac{\sqrt[\ell]{(\sqrt{16+4^2})^\ell}}{\sqrt[\ell]{\sqrt{64+225}^\ell \cdot \sqrt{\ell^2}}} \\ &= \frac{20}{\sqrt{289} \cdot \sqrt{\ell}^2} = \frac{20}{17 \cdot \sqrt{\ell}^2} \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} \frac{20}{17 \cdot 1^2} = \frac{20}{17 \cdot 1} = \frac{20}{17} > 1. \end{aligned}$$

Das Wurzelkriterium liefert die Divergenz der betrachteten Reihe.

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^i}$

div.

Lösung:

Definitionsgemäß ist $k^i = e^{i \cdot \ln(k)} = \cos(\ln(k)) + i \cdot \sin(\ln(k))$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Damit folgt

$$\left| \frac{1}{k^i} \right| = \frac{|1|}{|k^i|} = \frac{1}{\sqrt{(\cos(\ln(k)))^2 + (\sin(\ln(k)))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = \frac{1}{1} = 1$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist $\left(\frac{1}{k^i}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ keine Nullfolge und das Nullfolgenkriterium liefert die Divergenz der betrachteten Reihe.

d) $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2+3i}}$

konv.

Lösung:

Definitionsgemäß ist $m^{2+3i} = m^2 \cdot m^{3i} = m^2 \cdot e^{i \cdot 3 \cdot \ln(m)} = m^2 \cdot \cos(3 \cdot \ln(m)) + i \cdot m^2 \cdot \sin(3 \cdot \ln(m))$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Damit folgt

$$\left| \frac{1}{m^{2+3i}} \right| = \frac{|1|}{|m^{2+3i}|} = \frac{1}{\sqrt{(m^2 \cdot \cos(3 \cdot \ln(m)))^2 + (m^2 \cdot \sin(3 \cdot \ln(m)))^2}} = \frac{1}{\sqrt{m^4}} = \frac{1}{m^2}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$. Da $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}$ eine konvergente verallgemeinerte harmonische Reihe ist, konvergiert die betrachtete Reihe absolut und ist damit insbesondere konvergent.

e) $\sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{3}{p-i} - \frac{2}{p+i} \right)$

div.

Lösung:

Es gilt

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{3}{p-i} - \frac{2}{p+i} \right) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{3 \cdot (p+i) - 2 \cdot (p-i)}{(p-i) \cdot (p+i)} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p+5i}{p^2+1}.$$

Mit $\left| \frac{5i}{p^2+1} \right| = \frac{|5i|}{|p^2+1|} = \frac{5}{p^2+1} \leq \frac{5}{p^2}$ für alle $p \in \mathbb{N}$ und der Konvergenz der verallgemeinerten harmonischen Reihe $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{5}{p^2}$ liefert das Majorantenkriterium die absolute Konvergenz von $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{5i}{p^2+1}$.

Wegen $\frac{p}{p^2+1} \geq \frac{p}{p^2+2p+1} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (p+p)}{(p+1)^2} \geq \frac{\frac{1}{2} \cdot (p+1)}{(p+1)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p+1}$ für alle $p \in \mathbb{N}$ liefert das Minorantenkriterium wegen der Divergenz der harmonischen Reihe die Divergenz von $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{p}{p^2+1}$.

Die Annahme, dass die betrachtete Reihe konvergiert, führt wegen der Rechenregeln für konvergente Reihen und der Konvergenz von $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{5i}{p^2+1}$ auf die Konvergenz von $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{p}{p^2+1}$.

Also ist diese Annahme falsch und die betrachtete Reihe divergiert.

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^{n^2}}{(n!)^n}$

konv.

Lösung:

Sei $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $n \mapsto a_n := \frac{(3+4i)^{n^2}}{(n!)^n}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt dann wegen $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$$\begin{aligned}
 0 \leq \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{\frac{(3+4i)^{(n+1)^2}}{((n+1)!)^{n+1}}}{\frac{(3+4i)^{n^2}}{(n!)^n}} \right| = \left| \frac{(3+4i)^{(n+1)^2} \cdot (n!)^n}{(3+4i)^{n^2} \cdot ((n+1)!)^{n+1}} \right| = \left| \frac{(3+4i)^{n^2+2n+1} \cdot (n!)^n}{(3+4i)^{n^2} \cdot (n! \cdot (n+1))^{n+1}} \right| \\
 &= \left| \frac{(3+4i)^{2n+1} \cdot (n!)^n}{(n!)^{n+1} \cdot (n+1)^{n+1}} \right| = \frac{|3+4i|^{2n+1}}{n! \cdot (n+1)^{n+1}} = \frac{\sqrt{9+16}^{2n+1}}{n! \cdot (n+1)^{n+1}} = \frac{5^{2n+1}}{n! \cdot (n+1)^{n+1}} \\
 &= \underbrace{\frac{5}{n} \cdot \frac{5}{n-1} \cdot \frac{5}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{1}}_{n \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{\frac{5}{n+1} \cdot \frac{5}{n+1} \cdot \frac{5}{n+1} \cdot \dots \cdot \frac{5}{n+1} \cdot \frac{5}{n+1}}_{n+1 \text{ Faktoren}} \\
 &\leq \underbrace{1^{n-4} \cdot 5^4}_{n \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{1^{n+1-4} \cdot \left(\frac{5}{n+1}\right)^4}_{n+1 \text{ Faktoren}} = \frac{5^8}{(n+1)^4}.
 \end{aligned}$$

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^8}{(n+1)^4} = 0$ folgt mit Hilfe des Sandwichlemmas $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0 < 1$.

Das Quotientenkriterium liefert die Konvergenz der betrachteten Reihe.



Reihen/Kriterien/Ag_Reihen_Hilfsreihentrick.tex

Aufgabe 105.491 (Hilfsreihentrick für Nullfolgen)

kr

Um zu zeigen, dass eine gegebene Folge a_n eine Nullfolge ist, kann man folgenden Trick anwenden:

- Definiere eine Hilfsreihe $R := \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, mit geeignetem $n_0 \in \mathbb{N}$.
- Zeige, dass die Hilfsreihe R konvergent ist (z.B. mit Quotienten- oder Wurzelkriterium).
- Aus dem Nullfolgenkriterium für Reihen folgt dann $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Wenden Sie den Trick auf diese Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ an:

a) $a_n = \frac{3^n}{n!}$

Lösung:

Hilfsreihe $R := \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $a_n = \frac{3^n}{n!}$. Quotientenkriterium:

$|a_{n+1}| \cdot \frac{1}{|a_n|} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \frac{3}{n+1} \rightarrow 0 < 1$ für $n \rightarrow \infty$. Die Hilfsreihe R konvergiert also nach dem Quotientenkriterium. Somit gilt für die Summandenfolge $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!} = 0$ nach dem Nullfolgenkriterium für Reihen.

b) $a_n = \frac{n^8}{4^n}$

Lösung:

Hilfsreihe $R := \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $a_n = \frac{n^8}{4^n}$. Quotientenkriterium:

$|a_{n+1}| \cdot \frac{1}{|a_n|} = \frac{(n+1)^8}{4^{n+1}} \cdot \frac{4^n}{n^8} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^8 = \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^8 \rightarrow \frac{1}{4} \cdot (1+0)^8 = \frac{1}{4} < 1$ für $n \rightarrow \infty$. Die Hilfsreihe R konvergiert also nach dem Quotientenkriterium. Somit gilt für die Summandenfolge $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^8}{4^n} = 0$ nach dem Nullfolgenkriterium für Reihen.



Reihen/Kriterien/Ag_Reihen_Konvergenz2.tex

Aufgabe 105.492 (Konvergenz von Reihen)

jgl

Untersuchen Sie, ob die Reihen konvergieren:

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{16k^{15}}{5^k}$

konvergent

Lösung:

- Wurzelkriterium:

$$\begin{aligned} q &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left| \frac{16k^{15}}{5^k} \right|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{16k^{15}}{5^k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[k]{16k^{15}}}{\sqrt[k]{5^k}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[k]{16k^{15}}}{5} = \frac{1}{5} < 1 \quad \Rightarrow \text{absolut konvergent} \end{aligned}$$

- Quotientenkriterium:

$$\begin{aligned} q &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{16(k+1)^{15}}{5^{k+1}} \right|}{\left| \frac{16k^{15}}{5^k} \right|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{16(k+1)^{15}}{5^{k+1}}}{\frac{16k^{15}}{5^k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{5^k}{5^{k+1}} \cdot \frac{(k+1)^{15}}{k^{15}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{5} \left(\frac{k+1}{k} \right)^{15} = \frac{1}{5} < 1 \quad \Rightarrow \text{absolut konvergent} \end{aligned}$$

- Majoranten-/Minorantenkriterium:

Für große n dominiert die Potenzfunktion über jedes Polynom. Damit ist mit einer Konvergenz zu rechnen, suche eine geeignete konvergente Majorante. Für ausreichend große $k > K$ ist $k^{15} < 4^k$ und damit gilt

$$\frac{16k^{15}}{5^k} < \frac{16 \cdot 4^k}{5^k} = 16 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^k.$$

Für die Reihe folgt die Konvergenz nach Majorantenkriterium:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{16k^{15}}{5^k} = \sum_{k=0}^K \frac{16k^{15}}{5^k} + \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{16k^{15}}{5^k} < \underbrace{\sum_{k=0}^K \frac{16k^{15}}{5^k}}_{\text{Zahl}} + 16 \underbrace{\sum_{k=K+1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^k}_{\text{konvergente geometrische Reihe}}$$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{40 + 7^k}{6^k}$ divergent

Lösung:

- Da die Reihenglieder keine Nullfolge bilden, ist die Reihe auf jedem Fall divergent:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{40 + 7^k}{6^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{6^k \left(\frac{40}{6^k} + \frac{7^k}{6^k} \right)}{6^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{40}{6^k} + \left(\frac{7}{6} \right)^k \right) = +\infty$$

$\Rightarrow$ keine Nullfolge $\Rightarrow$ divergente Reihe

- Wurzelkriterium:

$$q = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left| \frac{40 + 7^k}{6^k} \right|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{40 + 7^k}{6^k}} > \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{7^k}{6^k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left(\frac{7}{6} \right)^k} = \frac{7}{6} > 1 \Rightarrow \text{divergente Reihe}$$

- Quotientenkriterium:

$$q = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{40 + 7^{k+1}}{6^{k+1}} \right|}{\left| \frac{40 + 7^k}{6^k} \right|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{40 + 7^{k+1}}{6^{k+1}}}{\frac{40 + 7^k}{6^k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{40 + 7^{k+1}}{40 + 7^k} \cdot \frac{6^k}{6^{k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{7^k \left(\frac{40}{7^k} + 7 \right)}{7^k \left(\frac{40}{7^k} + 1 \right)} \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{40}{7^k} + 7}{\frac{40}{7^k} + 1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{6} > 1 \Rightarrow \text{divergente Reihe}$$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{k^2 - 8}$ konvergent

Lösung:

- Bei rationalen Funktionen liefern Wurzel- und Quotientenkriterien keine Aussage ($q = 1$)
- Majoranten-/Minorantenkriterium:

Für große k Werte ist k^2 viel größer als 8 und die Summanden verhalten sich ähnlich wie $\frac{6}{k^2}$, was zu einer konvergenten Reihe führt. Also erwarte auch hier die Konvergenz und suche deshalb eine konvergente Majorante. Wegen $\frac{1}{k^2} \leq 8$ für $k \geq 4$ gilt

$$\frac{6}{k^2 - 8} \stackrel{k \geq 4}{\leq} \frac{6}{k^2 - \frac{1}{2}k^2} = \frac{12}{k^2}.$$

Damit ist die Reihe konvergent nach Majorantenkriterium:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{k^2 - 8} = \sum_{k=1}^3 \frac{6}{k^2 - 8} + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{6}{k^2 - 8} \leq \underbrace{\sum_{k=1}^3 \frac{6}{k^2 - 8}}_{\text{eine Zahl}} + \underbrace{\sum_{k=4}^{\infty} \frac{12}{k^2}}_{\text{konvergent}}$$

d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{18k \cdot 3^k}{2^{4k}}$ konvergent

Lösung:

- Wurzelkriterium:

$$\begin{aligned} q &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left| \frac{18k \cdot 3^k}{2^{4k}} \right|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{18k \cdot 3^k}{2^{4k}}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[k]{18k} \sqrt[k]{3^k}}{\sqrt[k]{(2^4)^k}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[k]{18k} \cdot 3}{2^4} = \frac{1 \cdot 3}{16} = \frac{3}{16} < 1 \quad \Rightarrow \text{absolut konvergent} \end{aligned}$$

- Quotientenkriterium:

$$\begin{aligned} q &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{18(k+1) \cdot 3^{k+1}}{2^{4(k+1)}} \right|}{\left| \frac{18k \cdot 3^k}{2^{4k}} \right|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{18(k+1) \cdot 3^{k+1}}{2^{4(k+1)}}}{\frac{18k \cdot 3^k}{2^{4k}}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{k} \cdot \frac{3^{k+1}}{3^k} \cdot \frac{2^{4k}}{2^{4(k+1)}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{k} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{3}{2^4} = \frac{3}{16} < 1 \quad \Rightarrow \text{absolut konvergent} \end{aligned}$$

- Majoranten-/Minorantenkriterium:

Für große k 's ist 3^k deutlich größer als k und die Summanden verhalten sich ähnlich zu $\frac{3^k}{2^{4k}}$. Die entsprechende geometrische Reihe ist konvergent; also ist auch hier Konvergenz zu erwarten. Suche eine konvergente Majorante.

Wegen $k < 2^k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\frac{18k \cdot 3^k}{2^{4k}} < \frac{18 \cdot 2^k \cdot 3^k}{2^{4k}} = 18 \cdot \frac{3^k}{2^{3k}} = 18 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^k$$

was zu einer konvergenten geometrischen Reihe führt. Die ursprüngliche Reihe ist damit konvergent nach Majorantenkriterium:

$$0 < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{18k \cdot 3^k}{2^{4k}} < \sum_{k=0}^{\infty} 18 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^k = 18 \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{8}\right)^k}_{\text{konvergente geometrische Reihe}}$$

e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{24}{\sqrt{16k+4k}}$ divergent

Lösung:

- Wurzel- und Quotientenkriterien liefern bei rationalen und ähnlichen Funktionen keine Aussage ($q = 1$).

- Majoranten-/Minorantenkriterium:

Für sehr große k Werte ist k viel größer als $\sqrt{k}$ und die Summanden verhalten sich ähnlich wie $\frac{24}{4k}$, was zu einer divergenten Reihe führt. Damit wird hier die Divergenz der Reihe erwartet und eine divergente Minorante wird benötigt. Es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{24}{\sqrt{16k} + 4k} = \frac{24}{4\sqrt{k} + 4k} \stackrel{\sqrt{k} \leq k}{\geq} \frac{24}{4k + 4k} = \frac{3}{k}.$$

Damit folgt die Divergenz der ursprünglichen Reihe nach Minorantenkriterium:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{24}{\sqrt{16k} + 4k} \geq \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k}}_{\text{harmonische Reihe divergiert}}$$

f) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{2k^3 - 6}}$ konvergent

Lösung:

- Wurzel- und Quotientenkriterien liefern bei rationalen und ähnlichen Funktionen keine Aussage ($q = 1$).
- Majoranten-/Minorantenkriterium:

Für große k ist k viel größer als 6 und die Summanden verhalten sich ähnlich wie $\frac{4}{\sqrt{2k^3}} = \frac{4}{\sqrt{2}k^{\frac{3}{2}}}$. Da die Potenz im Nenner größer als Eins ist, ist die entsprechende Reihe konvergent. Damit wird auch für die ursprüngliche Reihe Konvergenz erwartet und eine konvergente Majorante muss gesucht werden.

Für alle $k \geq 2$ gilt, dass $k^3 > 6$ und damit:

$$\frac{4}{\sqrt{2k^3 - 6}} < \frac{4}{\sqrt{2k^3 - k^3}} = \frac{4}{\sqrt{k^3}} = \frac{4}{k^{\frac{3}{2}}}.$$

Für die Reihe folgt daraus direkt die Konvergenz nach Majorantenkriterium:

$$0 < \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{2k^3 - 6}} < \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4}{k^{\frac{3}{2}}}}_{\text{konvergent}}.$$



Reihen/Kriterien/Ag_Reihen_KonvergenzkriterienGemischt.tex

Aufgabe 105.493 (Reihenkonvergenz entscheiden)

Prüfen Sie bei diesen Reihen mit jeweils nur einem Kriterium die Konvergenz/Divergenz:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} 15^{2n-1} \cdot 3^{-5n}$ abs. konv.

Lösung: Da bei dieser Reihe das n im Exponenten auftritt, empfiehlt sich das Wurzelkriterium:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{15^{2n-1} \cdot 3^{-5n}} = (15^{2n-1} \cdot 3^{-5n})^{\frac{1}{n}} = 15^{2-\frac{1}{n}} \cdot 3^{-5}.$$

Das ist eine stetige Funktion in $\frac{1}{n}$, also dürfen wir den Grenzwert $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ einfach einsetzen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 15^{2-0} \cdot 3^{-5} = \frac{15^2}{3^5} \approx 0.9259 < 1.$$

Da der Limes existiert ist er mit dem Limes superior identisch. Der Grenzwert ist < 1 , also ist die Reihe konvergent.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ abs. konv.

Lösung: Auch bei dieser Reihe bietet sich das Wurzelkriterium an:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt[n]{n} \right)^2 \xrightarrow{\rightarrow 1} \frac{1}{2}.$$

Weil ein Wert < 1 der Grenzwert (und damit der Limes superior) ist, konvergiert die Reihe.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ div.

Lösung: Diese Reihe divergiert: weil $(1 + \frac{1}{n})^n \rightarrow e$ keine Nullfolge ist, muss $\sum (1 + \frac{1}{n})^n$ divergent sein.

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6n+1}{n^3+3n-8}$ abs. konv.

Lösung: Bei dieser Reihe ist das Majorantenkriterium zum Entfernen der kleinen Störterme nützlich (Quotienten- und Wurzelkriterium versagen hier dagegen):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6n+1}{n^3+3n-8} \underset{\text{Majorante}}{\leq} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{6n+1}{n^3} \underset{\text{Majorante}}{\leq} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{6n+n}{n^3} = 7 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Wir haben die Reihe zu einer konvergenten Majorante abgeschätzt, also ist sie selbst konvergent. Dabei ist die erste Abschätzung mit $3n-8 > 0$ erst für $n \geq 3$ gültig. Das macht aber nichts, weil (wie bei allen Kriterien) der Startindex keine Rolle spielt und man endlich viele Reihenglieder immer weglassen darf.

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(-3)^n}$ abs. konv.

Lösung: Bei dieser Reihe ist wieder das Wurzelkriterium nützlich:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{\sqrt{n}}{3^n}} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt[n]{\sqrt{n}} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow{\rightarrow 1} \frac{1}{3}.$$

Weil der Grenzwert und damit der Limes superior kleiner als Eins ist, konvergiert die Reihe.

f) $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \cdot \ln \left(\frac{(j+2)^2}{(j+1)^2} \right)$ konv.

Lösung: Bei dieser Reihe wenden wir das Leibnizkriterium an, dazu müssen wir nur zeigen, dass der mit $(-1)^n$ multiplizierte Term eine monoton fallende Nullfolge ist. Durch Umformen erhalten wir

$$\log \left(\frac{(j+2)^2}{(j+1)^2} \right) = 2 \cdot \log \left(\frac{j+2}{j+1} \right) = 2 \cdot \log \left(1 + \frac{1}{j} \right).$$

Es ist $1 + \frac{1}{j} \rightarrow 1$ monoton fallend. Wegen $\log(1) = 0$ ist $\log(1 + \frac{1}{j}) \rightarrow 0$ eine monoton fallende Nullfolge und das Leibnizkriterium gilt. Damit konvergiert die Reihe.

$$g) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-2)^j}{j^3}$$

div.

Lösung: Diese Reihe ist dagegen divergent, es handelt sich um alternierende aber steigende Terme. Wir weisen die Divergenz mit dem Quotientenkriterium nach:

$$\left| \frac{a_{j+1}}{a_j} \right| = \left| \frac{\frac{(-2)^{j+1}}{(j+1)^3}}{\frac{(-2)^j}{j^3}} \right| = 2 \cdot \frac{j^3}{(j+1)^3} = 2 \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{j}\right)}_{\rightarrow 1}^3 \rightarrow 2.$$

Weil der Grenzwert der Quotienten eine Zahl > 1 ist (was bedeutet, die Folge hinter dem Summenzeichen wächst statt zu fallen) ist die Reihe nach dem Quotientenkriterium divergent.



Reihen/Kriterien/Ag_Reihen_Leibnizkriterium.tex

Aufgabe 105.494 (Leibnizkriterium)

jgl

Untersuchen Sie die Reihen mittels Leibnizkriterium auf Konvergenz:

$$a) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-5)^k}{(2k+1)!} \quad \text{konvergent} \quad b) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{(2k)!}{(k!)^2} \quad \text{keine Aussage (divergent)} \quad c) \sum_{k=5}^{\infty} \frac{\tan\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)}{\ln(k+2)} \quad \text{konvergent}$$

Lösung:

Leibnizkriterium: Wir betrachten die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k$. Falls $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge (d.h. konvergent mit Grenzwert Null) ist, dann konvergiert die Reihe (aber nicht unbedingt absolut).

- a) Wir müssen die Reihe in dieser Teilaufgabe zuerst umschreiben, damit sie die Form hat, für die wir das Leibnizkriterium anwenden können:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-5)^k}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{5^k}{(2k+1)!}.$$

Also gilt: Wenn wir zeigen können, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{5^n}{(2n+1)!}$ eine monoton fallende Nullfolge ist, dann konvergiert die Reihe nach dem Leibnizkriterium.

Wir begründen zuerst, dass (a_n) gegen Null konvergiert: Per Induktion zeigt man (das wird hier nicht ausgeführt), dass $(2k)! \geq 5^k$ für alle $k \geq 2$ gilt. Hat man dies bewiesen, dann gilt $a_n \leq \frac{1}{2n+1}$ für jedes $n \geq 2$. Da $\frac{1}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, gilt nach dem Sandwichkriterium, dass $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Nun zeigen wir, dass (a_n) monoton fällt. Dazu betrachten wir den Quotienten

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{5^{n+1}}{(2(n+1)+1)!}}{\frac{5^n}{(2n+1)!}} = \frac{5^{n+1}}{(2(n+1)+1)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{5^n} = \frac{5^{n+1}}{5^n} \cdot \frac{(2n+1)!}{(2(n+1)+1)!} = \frac{5}{(2n+3)(2n+2)} \leq 1.$$

Das gilt für beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Damit ist die Folge monoton fallend und die Reihe in der Aufgabenstellung nach dem Leibnizkriterium konvergent.

- b) Hier kann man das Leibnizkriterium nicht anwenden, denn die Folge (b_k) , $b_k = \frac{(2k)!}{(k!)^2}$ ist nicht monoton fallend, sondern monoton steigend. Wir rechnen dies nach und betrachten dazu den Quotienten

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{\frac{(2k+2)!}{((k+1)!)^2}}{\frac{(2k)!}{(k!)^2}} = \frac{(2k+2)!}{(2k)!} \cdot \frac{(k!)^2}{((k+1)!)^2} = \frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+1)(k+1)} = 2 \cdot \frac{2k+1}{k+1} \geq 2 > 1.$$

c) Da der Tangens periodisch ist, mit Periode π , und $\tan(\pm\frac{\pi}{4}) = \pm 1$, gilt

$$\tan\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) = \begin{cases} 1 & \text{falls } k \text{ gerade ist,} \\ -1 & \text{falls } k \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Das bedeutet, dass $\tan\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) = (-1)^k$. Also ist die Reihe gleich $\sum_{k=5}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{\ln(n+2)}$.

Da der Logarithmus monoton steigt und bestimmt gegen $+\infty$ divergiert, ist die Folge (c_n) , $c_n = \frac{1}{\ln(n+2)}$ eine monoton fallende Nullfolge und damit liefert das Leibnizkriterium die Konvergenz der Reihe.



Reihen/Kriterien/Ag_Reihen_Quotientenkriterium2.tex

Aufgabe 105.495 (Quotientenkriterium)

jgl

Welche Aussagen über die Konvergenz der folgenden Reihen erhalten Sie mit dem Quotientenkriterium?

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^8 \sqrt{k}}{5^k} & \text{kon-} & \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6\sqrt{4k}}{48k^6} & \text{keine} \\ & & \text{Aussage (konvergent)} & \\ \text{c) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3k \cdot k!}{(2k)!} & \text{kon-} & \text{d) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^k}{k^{60}} & \text{diver-} \\ & & \text{gent} & \end{array}$$

Lösung: Hier wird das **Quotientenkriterium** in folgender Weise verwendet: Wir betrachten die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Falls der Grenzwert $q^* := \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$ existiert, gilt im Fall

- $q^* < 1$: die Reihe ist absolut konvergent,
- $q^* > 1$: die Reihe ist divergent,
- $q^* = 1$: es gibt keine Aussage. Die Reihe kann sowohl konvergent als auch divergent sein.

a) Das Quotientenkriterium wird auf die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $a_k = \frac{k^8 \sqrt{k}}{5^k}$ angewandt: Es gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| &= \left| \frac{(k+1)^8 \sqrt{k+1} \cdot 5^k}{5^{k+1} \cdot k^8 \sqrt{k}} \right| \\ &= \left(\frac{k+1}{k} \right)^8 \cdot \sqrt{\frac{k+1}{k}} \cdot \frac{1}{5} \\ &= \left(1 + \frac{1}{k} \right)^8 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{k}} \cdot \frac{1}{5} \\ &\rightarrow 1^8 \cdot \sqrt{1} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

für $k \rightarrow \infty$. Da der Grenzwert $\frac{1}{5}$ echt kleiner als 1 ist, folgt aus dem Quotientenkriterium, dass die Reihe (absolut) konvergent ist.

b) Das Quotientenkriterium wird auf die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $a_k = \frac{6\sqrt{4k}}{48k^6}$ angewandt. Hier ist

$$a_k = \frac{6\sqrt{4k}}{48k^6} = \frac{6 \cdot 2\sqrt{k}}{48k^6} = \frac{\sqrt{k}}{4k^6}$$

und damit dann

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| &= \frac{\sqrt{k+1} \cdot 4k^6}{4(k+1)^6 \cdot \sqrt{k}} \\ &= \sqrt{\frac{k+1}{k}} \cdot \left(\frac{k}{k+1} \right)^6 \\ &= \sqrt{1 + \frac{1}{k}} \cdot \left(1 - \frac{1}{k+1} \right)^6 \\ &\rightarrow \sqrt{1} \cdot 1^6 = 1 \end{aligned}$$

für $k \rightarrow \infty$. Da der Grenzwert gleich 1 ist, ergibt sich aus dem Quotientenkriterium keine Aussage zur Konvergenz der Reihe.

Mit den Abschätzungen $0 < \sqrt{k} \leq k$ und $0 < k^2 \leq k^5$, also $0 < \frac{1}{k^5} \leq \frac{1}{k^2}$ für $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 0$ und der konvergenten Majorante $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ folgt aus dem Majorantenkriterium, dass die Reihe (absolut) konvergent ist.

c) Das Quotientenkriterium wird auf die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $a_k = \frac{3k \cdot k!}{(2k)!}$ angewandt: Für $k \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| &= \frac{3(k+1) \cdot (k+1)! \cdot (2k)!}{(2 \cdot (k+1))! \cdot 3k \cdot k!} \\ &= \frac{k+1}{k} \cdot \frac{(k+1)! \cdot (2k)!}{(2 \cdot (k+1))! \cdot k!} \\ &= \left(1 + \frac{1}{k}\right) \cdot \frac{(k+1)}{(2k+1) \cdot (2k+2)} \\ &= \left(1 + \frac{1}{k}\right) \cdot \frac{1}{2(2k+1)} \\ &\rightarrow 1 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

für $k \rightarrow \infty$. Da der Grenzwert 0 echt kleiner als 1 ist, folgt aus dem Quotientenkriterium, dass die Reihe (absolut) konvergent ist.

d) Hier ist $a_k = \frac{(-3)^k}{k^{60}}$. Damit ist

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{(-3)^{k+1} k^{60}}{(-3)^k (k+1)^{60}} \right| = 3 \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^{60} \rightarrow 3$$

für $k \rightarrow \infty$. Somit ist der gesuchte Grenzwert 3 echt größer als 1, sodass die Reihen nach dem Quotientenkriterium divergent ist.



Reihen/Kriterien/Ag_Reihen_Wurzelkriterium2.tex

Aufgabe 105.496 (Wurzelkriterium)

jgl

Welche Aussagen über die Konvergenz der folgenden Reihen erhalten Sie mit dem Wurzelkriterium?

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4k+2}{8+6k} \right)^{2k} & \text{konver-} & \text{b) } \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2k-7}{2k+3} \right)^k \quad \text{keine} \\ \text{gent} & & \text{Aussage (divergent)} \\ \text{c) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5 \cdot (-1)^{k-1} \cdot k^{2k}}{(k^4+3)^k} & \text{kon-} & \end{array}$$

Lösung:

Wurzelkriterium: Wir betrachten die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Falls $w^* := \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ existiert, gilt im Fall:

- $w^* < 1$: die Reihe ist absolut konvergent,
- $w^* > 1$: die Reihe ist divergent,
- $w^* = 1$: es gibt keine Aussage. Die Reihe kann sowohl konvergent als auch divergent sein.

a) Es ist $a_k = \left(\frac{4k+2}{6k+8} \right)^{2k}$. Also gilt für die k -te Wurzel von $|a_k|$:

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \left(\frac{4k+2}{6k+8} \right)^2 = \left(\frac{4 + \frac{2}{k}}{6 + \frac{8}{k}} \right)^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{6} \right)^2 = \frac{4}{9} < 1.$$

Damit konvergiert die Reihe nach dem Wurzelkriterium absolut.

b) Bei der zweiten Teilaufgabe ist $b_k = \left(\frac{2k-7}{2k+3}\right)^k$. Wir berechnen den Grenzwert von $\sqrt[k]{|b_k|}$:

$$\sqrt[k]{|b_k|} = \frac{2k-7}{2k+3} = \frac{2-\frac{7}{k}}{2+\frac{3}{k}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1.$$

Also macht das Wurzelkriterium keine Aussage über die Konvergenz der gegebenen Reihe.

c) Wir untersuchen die k -te Wurzel vom Betrag von $c_k = \frac{5 \cdot (-1)^{k-1} k^{2k}}{(k^4+3)^k}$:

$$\sqrt[k]{|c_k|} = \frac{\sqrt[k]{5} \cdot \sqrt[k]{|(-1)^{k-1}|} \cdot k^2}{k^4+3} = \underbrace{\sqrt[k]{5}}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1} \cdot \underbrace{\frac{k^2}{k^4+3}}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1 \cdot 0 = 0.$$

Da $0 < 1$, impliziert das Wurzelkriterium die absolute Konvergenz der zugehörigen Reihe.



Reihen/Potenzreihen/Ag_Konvergenzradius_Tricks.tex

Aufgabe 106.497 (Tricks bei der Berechnung von Konvergenzradien)

kr

Geben Sie jeweils den Entwicklungspunkt x_0 und den Konvergenzradius r der Potenzreihen an.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4+(-1)^n} \right)^n (x-7)^n$ $x_0 = 7, r = 3$

Lösung:

Der Entwicklungspunkt ist $x_0 = 7$. Konvergenzradius nach Definition: $r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ mit

$a_n = \left(\frac{1}{4+(-1)^n} \right)^n$. Definiere $b_n := \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{|4+(-1)^n|} = \frac{1}{4+(-1)^n}$. Berechne $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$ mit Teilfolgen:

$$q_{2j} = \frac{1}{4+(-1)^{2j}} = \frac{1}{5} \rightarrow \frac{1}{5} \text{ für } j \rightarrow \infty.$$

$$q_{2j+1} = \frac{1}{4+(-1)^{2j+1}} = \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{3} \text{ für } j \rightarrow \infty.$$

Damit gilt $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{3}$. Also folgt $r = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} 8^n \frac{(x-5)^{3n}}{n}$ $x_0 = 5, r = \frac{1}{2}$

Lösung:

Wir definieren $b_n(x) := 8^n \frac{(x-5)^{3n}}{n}$ und formen dann die Quotientenkriteriumsbedingung für Reihen, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}(x)}{b_n(x)} \right| < 1$ so lange um, bis sie wie $|x - x_0| < r$ aussieht, um x_0 und r abzulesen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}(x)}{b_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8^{n+1} |x-5|^{3n+3}}{n+1} \cdot \frac{n}{8^n |x-5|^{3n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 8 |x-5|^3 \cdot \frac{n}{n+1} = 8 |x-5|^3 < 1 \Leftrightarrow |x-5|^3 < \frac{1}{8} \Leftrightarrow |x-5| < \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \Leftrightarrow |x-5| < \frac{1}{2}.$$

Daraus lesen wir $x_0 = 5$ und $r = \frac{1}{2}$ ab.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{x^2+1}{3} \right)^{n-1}$ $x_0 = 0, r = \sqrt{2}$

Lösung:

Wir definieren $b_n(x) := n \left(\frac{x^2+1}{3} \right)^{n-1}$ und formen dann die Quotientenkriteriumsbedingung für Reihen, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}(x)}{b_n(x)} \right| < 1$ so lange um, bis sie wie $|x - x_0| < r$ aussieht, um x_0 und r abzulesen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}(x)}{b_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \left(\frac{x^2+1}{3} \right)^n}{n \left(\frac{x^2+1}{3} \right)^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \frac{x^2+1}{3} = \frac{x^2+1}{3} < 1 \Leftrightarrow x^2+1 < 3 \Leftrightarrow x^2 < 2 \Leftrightarrow |x|^2 < 2 \Leftrightarrow |x-0| < \sqrt{2}.$$

Daraus lesen wir $x_0 = 0$ und $r = \sqrt{2}$ ab.

d) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(1 - \frac{3}{n} \right)^{n^2} (x+2)^n$ $x_0 = 2, r = e^3$

Lösung:

Der Entwicklungspunkt ist $x_0 = -2$. Konvergenzradius nach Definition: $r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ mit

$$a_n = n \left(1 - \frac{3}{n} \right)^{n^2}.$$

$$\text{Für } n > 3 \text{ gilt: } \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n} \cdot \left(1 - \frac{3}{n} \right)^n \rightarrow 1 \cdot e^{-3} = e^{-3}.$$

Dabei wurde der bekannte Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = e^x$ mit $x = -3$ verwendet.

(Alternativ kann man auch eine Kombination aus e-hoch-ln-Trick und l'Hospital verwenden:

$$\left(1 - \frac{3}{n} \right)^n = e^{\ln\left(\left(1-\frac{3}{n}\right)^n\right)} = e^{n \ln\left(1-\frac{3}{n}\right)}. \text{ Mit der 0/0-Regel von l'Hospital folgt für das Argument der Exponentialfunktion: } \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln\left(1 - \frac{3}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{3}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{3}{n}\right)'}{\left(\frac{1}{n}\right)'} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1-\frac{3}{n}} \cdot \frac{3}{n^2}}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{3}{1-\frac{3}{n}} = -3.)$$

Für den Konvergenzradius folgt $r = \frac{1}{e^{-3}} = e^3$.

Tipp: a) Wurzelkriterium bzw. Definition des Konvergenzradius verwenden und $\limsup$ mit Teilfolgen ausrechnen.

Tipp: b),c) Definiere $b_n(x) := 8^n \frac{(x-5)^{3n}}{n}$ bzw. $b_n(x) := n \left(\frac{x^2+1}{3} \right)^{n-1}$. Forme die Quotientenkriteriumsbedingung für Reihen, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}(x)}{b_n(x)} \right| < 1$ so lange um, bis sie wie $|x - x_0| < r$ aussieht und lese x_0 und r ab.

Tipp: d) Scharfes Hinsehen oder e-hoch-ln-Trick bei der Grenzwertberechnung.



Reihen/Potenzreihen/Ag_Potenzreihen_KonvergenzbereichBestimmen.tex

Aufgabe 106.498 (Konvergenzradius von Potenzreihen)

jgl

Berechnen Sie den Konvergenzradius r der folgenden reellen Potenzreihen, geben Sie den Entwicklungspunkt x_0 an und bestimmen Sie den Konvergenzbereich:

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{10} \right)^k \cdot x^k$ $x_0 = 0, r = \frac{10}{3}, \left(-\frac{10}{3}; \frac{10}{3} \right)$

Lösung:

- Entwicklungspunkt $x_0 = 0$
 - Hilfsgröße $q := \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left| \left(\frac{3}{10} \right)^k \right|} = \frac{3}{10}$.
- Konvergenzradius $r := \frac{1}{q} = \frac{1}{\frac{3}{10}} = \frac{10}{3}$

- Ränder des Konvergenzbereiches K :

– Links: $x_{\text{links}} := x_0 - r = -\frac{10}{3}$. Eingesetzt in der Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{10} \right)^k \cdot \left(-\frac{10}{3} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$$

Diese Reihe divergiert, da die Summanden keine Nullfolge bilden. Damit ist $x_{\text{links}} \notin K$.

– Rechts: $x_{\text{rechts}} := x_0 + r = \frac{10}{3}$. Eingesetzt in der Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{10} \right)^k \cdot \left(\frac{10}{3} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} 1$$

Diese Reihe divergiert, da die Summanden keine Nullfolge bilden. Damit ist $x_{\text{rechts}} \notin K$.

Konvergenzbereich $K = (x_{\text{links}}; x_{\text{rechts}}) = \left(-\frac{10}{3}; \frac{10}{3} \right)$.

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} \cdot (x-2)^k$

$x_0 = 2, r = 1, [1; 3)$

Lösung:

- Entwicklungspunkt $x_0 = 2$.
- Hilfsgröße $\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left| \frac{1}{2k} \right|} = \frac{1}{1} = 1$. Konvergenzradius $r = \frac{1}{\alpha} = 1$.
- Ränder des Konvergenzbereiches:

- Links: $x_\ell = x_0 - r = 2 - 1 = 1$. Eingesetzt in der Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} (1-2)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} \cdot (-1)^k.$$

Diese Reihe konvergiert nach Leibniz Kriterium. Damit ist $x_\ell = 1 \in K$.

- Rechts: $x_r = x_0 + r = 2 + 1 = 3$. Eingesetzt in der Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} (3-2)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}.$$

Diese Reihe ist divergent. Damit ist $x_r = 3 \notin K$.

Konvergenzbereich $K = [x_\ell, x_r) = [1, 3)$.

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} \cdot (4-x)^k$
 $x_0 = 4, r = \infty, \mathbb{R}$

Lösung: Zuerst schreiben wir die Reihe in Standardform um:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} (4-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} \cdot (-1)^k (x-4)^k.$$

- Entwicklungspunkt ist $x_0 = 4$

- Hilfsgröße $\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|(-1)^{k+1} \frac{2^{k+1}}{(k+1)!}|}{|(-1)^k \frac{2^k}{k!}|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{2^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{k+1} = 0$

Damit ist der Konvergenzradius $r = \infty$ und Konvergenzbereich $K = \mathbb{R}$.

d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k-2}{k+2} \cdot (x+3)^k$
 $x_0 = -3, r = 1, (-4; -2)$

Lösung:

- Da $(x+3) = (x - (-3))$, ist der Entwicklungspunkt $x_0 = -3$

- Hilfsgröße $\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{(k+1)-2}{(k+1)+2} \right|}{\left| \frac{k-2}{k+2} \right|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k-1)(k+2)}{(k+3)(k-2)} = 1.$

Damit ist der Konvergenzradius $r = \frac{1}{\alpha} = 1$.

- Ränder des Konvergenzbereiches:

- Links: $x_\ell = x_0 - r = -3 - 1 = -4$. Eingesetzt in der Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k-2}{k+2} (-4+3)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k-2}{k+2} \cdot (-1)^k.$$

Diese Reihe ist divergent, da die Summanden keine Nullfolge bilden. Damit ist $x_\ell = -4 \notin K$.

– Rechts: $x_r = x_0 + r = -3 + 1 = -2$. Eingesetzt in der Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k-2}{k+2} (-2+3)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k-2}{k+2}.$$

Diese Reihe ist divergent, da die Summanden keine Nullfolge bilden. Damit ist $x_r = -2 \notin K$.

Konvergenzbereich ist $K = (x_\ell, x_r) = (-4, -2)$.

e) $\sum_{k=0}^{\infty} (3k+2) \cdot x^k$
 $x_0 = 0, r = 1, (-1; 1)$

Lösung:

- Da $x^k = (x-0)^k$ ist der Entwicklungspunkt $x_0 = 0$
- Hilfsgröße $\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|3k+2|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{3k+2} = 1$.

Konvergenzradius $r = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{1} = 1$

- Ränder des Konvergenzbereiches:

– Links: $x_\ell = x_0 - r = -1$. Eingesetzt in der Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (3k+2) \cdot (-1)^k.$$

Diese Reihe ist divergent, da die Summanden keine Nullfolge bilden. Damit ist $x_\ell = -1 \notin K$.

– Rechts: $x_r = x_0 + r = 1$. Eingesetzt in der Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (3k+2) \cdot 1^k = \sum_{k=0}^{\infty} (3k+2).$$

Diese Reihe ist divergent, da die Summanden keine Nullfolge bilden. Damit ist $x_r = 1 \notin K$.

Konvergenzbereich $K = (x_\ell, x_r) = (-1, 1)$.

f) $\sum_{k=0}^{\infty} (\sqrt{4k+1} - 2 \cdot \sqrt{k}) \cdot x^k$
 $x_0 = 0, r = 1, [-1; 1)$

Lösung:

- Wegen $x^k = (x-0)^k$ ist der Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

- Hilfsgröße

$$\begin{aligned}
 q &:= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\sqrt{4 \cdot (k+1) + 1} - 2 \cdot \sqrt{k+1}}{\sqrt{4k+1} - 2 \cdot \sqrt{k}} \right| \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(\sqrt{4k+5} - 2 \cdot \sqrt{k+1}) \cdot (\sqrt{4k+5} + 2 \cdot \sqrt{k+1}) \cdot (\sqrt{4k+1} + 2 \cdot \sqrt{k})}{(\sqrt{4k+1} - 2 \cdot \sqrt{k}) \cdot (\sqrt{4k+1} + 2 \cdot \sqrt{k}) \cdot (\sqrt{4k+5} + 2 \cdot \sqrt{k+1})} \right| \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(4k+5 - 4 \cdot (k+1)) \cdot \left(\sqrt{k \cdot \left(4 + \frac{1}{k}\right)} + 2 \cdot \sqrt{k}\right)}{(4k+1 - 4k) \cdot \left(\sqrt{k \cdot \left(4 + \frac{5}{k}\right)} + 2 \cdot \sqrt{k \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)}\right)} \right| \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{1 \cdot \sqrt{k} \cdot \left(\sqrt{4 + \frac{1}{k}} + 2\right)}{1 \cdot \sqrt{k} \cdot \left(\sqrt{4 + \frac{5}{k}} + 2 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{k}}\right)} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{k}} + 2}{\sqrt{4 + \frac{5}{k}} + 2 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{k}}} \\
 &= \frac{\sqrt{4+0} + 2}{\sqrt{4+0} + 2 \cdot \sqrt{1+0}} = \frac{\sqrt{4} + 2}{\sqrt{4} + 2 \cdot \sqrt{1}} = \frac{2+2}{2+2 \cdot 1} = \frac{4}{2+2} = \frac{4}{4} = 1.
 \end{aligned}$$

Der Konvergenzradius ist $r := \frac{1}{q} = \frac{1}{1} = 1$.

- Ränder des Konvergenzbereiches:

– Links: $x_\ell = x_0 - r = 0 - 1 = -1$. Eingesetzt in der Reihe:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{\infty} (\sqrt{4k+1} - 2 \cdot \sqrt{k}) \cdot (-1)^k &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{(\sqrt{4k+1} - 2 \cdot \sqrt{k}) \cdot (\sqrt{4k+1} - 2 \cdot \sqrt{k})}{\sqrt{4k+1} + 2 \cdot \sqrt{k}} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{\sqrt{4k+1} + 2 \cdot \sqrt{k}}.
 \end{aligned}$$

Diese Reihe ist konvergent nach Leibniz Kriterium, damit ist $x_\ell = -1 \in K$.

– Rechts: $x_r = x_0 + r = 0 + 1 = 1$. Eingesetzt in der Reihe:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{\infty} (\sqrt{4k+1} - 2 \cdot \sqrt{k}) \cdot 1^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{4k+1} - 2 \cdot \sqrt{k}) \cdot (\sqrt{4k+1} - 2 \cdot \sqrt{k})}{\sqrt{4k+1} + 2 \cdot \sqrt{k}} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4k+1} + 2 \cdot \sqrt{k}}.
 \end{aligned}$$

Diese Reihe ist divergent (Abschätzung mit Minorantenkriterium möglich). Damit ist $x_r = 1 \notin K$.

Konvergenzbereich $K = [x_\ell, x_r) = [-1, 1)$.



Reihen/Potenzreihen/Ag_Potzeihen_FktErkennen.tex

Aufgabe 106.499 (Potenzreihen in geschlossene Form bringen)

spf

Geben Sie zu den folgenden „Potenzreihen“ eine geschlossene Form (also eine Darstellung ohne Summenzeichen) an! Geben Sie an für welchen Bereich die jeweilige Darstellung gültig ist. ($i^2 = -1$)

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \cdot x^{n+1}$

$x \cdot e^{3x}$

Lösung:

Es gilt $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \cdot x^{n+1} = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \cdot x^n = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n!} = x \cdot \exp(3x)$. Dies ist gültig für alle $x \in \mathbb{C}$.

$$\text{b) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{(k+1)!} \cdot x^{k+1} \qquad 3 \cdot (e^x - 1)$$

Lösung:

Es gilt $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{(k+1)!} \cdot x^{k+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n!} \cdot x^n = 3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 3 \cdot \left(-1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) = 3 \cdot (\exp(x) - 1)$.
Dies ist gültig für alle $x \in \mathbb{C}$.

$$\text{c) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right)^{3k+3} \qquad \frac{(2t-1)^6}{128-8 \cdot (2t-1)^3}$$

Lösung:

Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right)^{3k+3} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right)^{3 \cdot (n+1)+3} = \frac{\left(t - \frac{1}{2}\right)^6}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right)^{3n} \\ &= \frac{(2t-1)^6}{2^6 \cdot 2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2t-1)^3}{2^3 \cdot 2}\right)^n = \frac{(2t-1)^6}{128} \cdot \frac{1}{1 - \frac{(2t-1)^3}{16}} = \frac{(2t-1)^6}{128 - 8 \cdot (2t-1)^3}. \end{aligned}$$

Dies ist gültig für alle $\left|\frac{(2t-1)^3}{2^3 \cdot 2}\right| < 1 \iff |(2t-1)^3| < 16$.

$$\text{d) } \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{2\ell+1}{(-1)^{\ell+1} \cdot (2\ell)!} \cdot t^{2\ell} \qquad t \cdot \sin(t) - \cos(t) + 1$$

Lösung:

Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1} \cdot (2\ell+1)}{(2\ell)!} \cdot t^{2\ell} &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{\ell+1} \cdot 2\ell}{(2\ell)!} + \frac{(-1)^{\ell+1} \cdot 1}{(2\ell)!} \right) \cdot t^{2\ell} \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1}}{(2\ell-1)!} \cdot t^{2\ell} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1}}{(2\ell)!} \cdot t^{2\ell} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+2}}{(2 \cdot (k+1) - 1)!} \cdot t^{2k+2} - \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell}}{(2\ell)!} \cdot t^{2\ell} \\ &= t \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2 \cdot k + 1)!} \cdot t^{2k+1} - \left(-1 + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell}}{(2\ell)!} \cdot t^{2\ell} \right) \\ &= t \cdot \sin(t) - \cos(t) + 1. \end{aligned}$$

Dies ist gültig für alle $t \in \mathbb{C}$.

$$\text{e) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n + (-i)^n + 1}{n!} \cdot (z-1)^n \qquad 2 \cdot \cos(z-1) + \exp(z-1)$$

Lösung:

Wegen $i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k = ((-i)^2)^k = (-i)^{2k}$ gilt

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n + (-i)^n + 1}{n!} \cdot (z-1)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n + (-i)^n}{n!} \cdot (z-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (z-1)^n \\
&= \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ gerade}}}^{\infty} \frac{i^n + (-i)^n}{n!} \cdot (z-1)^n + \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{i^n + (-i)^n}{n!} \cdot (z-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k} + (-i)^{2k}}{(2k)!} \cdot (z-1)^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1} + (-i)^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot (z-1)^{2k+1} + \exp(z-1) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k + (-1)^k}{(2k)!} \cdot (z-1)^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i \cdot (-1)^k + (-i) \cdot (-1)^k}{(2k+1)!} \cdot (z-1)^{2k+1} + \exp(z-1) \\
&= 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot (z-1)^{2k} + 0 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot (z-1)^{2k+1} + \exp(z-1) \\
&= 2 \cdot \cos(z-1) + \exp(z-1).
\end{aligned}$$

Dies ist gültig für alle $z \in \mathbb{C}$.

f) $\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\ell}{3^\ell} \cdot (z+3)^{\ell-1}$

$$\frac{3}{z^2}$$

Lösung:

Es gilt unter Verwendung des Cauchy-Produkts

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\ell}{3^\ell} \cdot (z+3)^{\ell-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{3^{k+1}} \cdot (z+3)^k = \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{3^k} \cdot (z+3)^k = \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^k \left(\frac{z}{3} + 1\right)^k \\
&= \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^k \left(\frac{z}{3} + 1\right)^{k-\ell} \cdot \left(\frac{z}{3} + 1\right)^\ell = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3} + 1\right)^n \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3} + 1\right)^j \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z}{3} + 1\right)} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z}{3} + 1\right)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{-\frac{z}{3}} \cdot \frac{1}{-\frac{z}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{z} \cdot \frac{3}{z} = \frac{3}{z^2}.
\end{aligned}$$

Alternativ erhält man unter Verwendung von Differentiations-Regeln

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\ell}{3^\ell} \cdot (z+3)^{\ell-1} &= \left(\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{3^\ell} \cdot (z+3)^\ell \right)' = \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3} + 1\right)^\ell \right)' \\
&= \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{z}{3} + 1\right)} \right)' = \left(\frac{1}{-\frac{z}{3}} \right)' = \left(-\frac{3}{z} \right)' = \frac{3}{z^2}.
\end{aligned}$$

Dies ist gültig für alle $\left| \frac{z}{3} + 1 \right| < 1 \iff |z+3| < 3$.



Reihen/Potenzreihen/Ag_Taylorreihe_BestimmenKonvergenzWert.tex

Aufgabe 106.500 (Taylorreihe)

Gegeben sei $f : (0; 2) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := \ln(|x-2|)$.

a) Zeigen Sie für die Ableitungen von f die Formel

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(x-2)^n} \quad \text{für alle } x \in (0; 2) \text{ und alle } n \in \mathbb{N}.$$

b) Stellen Sie die Taylorreihe von f im Punkt $x_0 := 1$ auf und bestimmen Sie den Konvergenzradius.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} \cdot (x-1)^n, \quad r = 1$$

c) Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$. ln(2)

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass sich f um $x_0 = 1$ in eine Potenzreihe entwickeln lässt.

Lösung:

(a) Wir beweisen die Formel durch vollständige Induktion. Der Induktionsanfang ist der Fall $n = 1$. Die erste Ableitung von f lautet für $0 < x < 2$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} (\ln(2-x)) = \frac{1}{2-x} (-1) = \frac{1}{x-2} = (-1)^0 \frac{0!}{(x-2)^1}.$$

Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass die Formel für ein $n \in \mathbb{N}$ richtig ist. Dann gilt für $x \in (0, 2)$

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx} f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} \left((-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(x-2)^n} \right) \\ &= (-1)^{n-1} (n-1)! (-n) \frac{1}{(x-2)^{n+1}} = (-1)^n \frac{n!}{(x-2)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Dies ist gerade die Formel für $n+1$. Somit sind Induktionsanfang und Induktionsschritt erbracht, die angegebene Formel ist also für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig.

(b) Die Taylorreihe ist gegeben durch

$$T_{f,1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n.$$

Für $n = 0$ ist der Koeffizient $f(1) = \ln|1-2| = \ln(1) = 0$. Somit ist nach der Formel aus Teil (a)

$$T_{f,1}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (x-1)^n.$$

Um den Konvergenzradius zu bestimmen, wenden wir das Wurzelkriterium an. Es ist

$$\sqrt[n]{\left| \frac{-1}{n} (x-1)^n \right|} = \frac{|x-1|}{\sqrt[n]{n}} \longrightarrow |x-1| \quad (n \rightarrow \infty).$$

Die Reihe konvergiert nach dem Wurzelkriterium also für $|x-1| < 1$ absolut. Somit ist der Konvergenzradius gleich 1.

(c) Wir suchen zunächst ein $x \in (0, 2)$, sodass die Reihe mit $T_{f,1}(x)$ bis auf eine Konstante übereinstimmt. Dies ist der Fall für

$$-\frac{1}{n 2^n} = \frac{-1}{n} (x-1)^n, \quad \text{also } x-1 = \frac{1}{2}.$$

Der Wert der Reihe ist also $-T_{f,1}\left(\frac{3}{2}\right)$. Da f sich um $x_0 = 1$ in eine Potenzreihe entwickeln lässt, stimmt der Wert $T_{f,1}(x)$ für x aus dem Konvergenzintervall $(0, 2)$ mit dem Funktionswert $f(x)$ überein. Somit ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} = -T_{f,1}\left(\frac{3}{2}\right) = -f\left(\frac{3}{2}\right) = -\ln\left|\frac{3}{2} - 2\right| = -\ln\frac{1}{2} = \ln(2).$$



WSTheorie/Begriffe/Ag_UntereFaktorielle.tex

Aufgabe 107.501 (Untere Faktorielle)

vr

Berechnen Sie:

a)	(i) $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$	625
	(ii) $5^{\underline{4}} = 5 \cdot (5-1) \cdot (5-2) \cdot (5-3) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$	120
b)	(i) $\left(\frac{1}{5}\right)^4 = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{625}$	$\frac{1}{625}$
	(ii) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\underline{4}} = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{5} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{5} - 2\right) \cdot \left(\frac{1}{5} - 3\right) = -\frac{504}{625}$	$-\frac{504}{625}$
c)	(i) $(-5)^4 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = 625$	625
	(ii) $(-5)^{\underline{4}} = (-5) \cdot (-5-1) \cdot (-5-2) \cdot (-5-3) = 1680$	1680
d)	(i) $\left(-\frac{1}{5}\right)^4 = \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{625}$	$\frac{1}{625}$
	(ii) $\left(-\frac{1}{5}\right)^{\underline{4}} = \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5} - 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{5} - 2\right) \cdot \left(-\frac{1}{5} - 3\right) = \frac{1056}{625}$	$\frac{1056}{625}$



WSTheorie/Kombinatorik/Ag_Kombinatorik_AbbildungenZaehlen.tex

Aufgabe 108.502 (Abbildungen zählen)

- a) Betrachten Sie alle Teilmengen $T \subseteq \{1, 2\}$ und alle Teilmengen $S \subseteq \{1, 2, 3\}$ mit $3 \in S$. Geben Sie eine bijektive Abbildung an, die jeder Menge T eine Menge S zuordnet. Eine solche Abbildung wird z. B. durch $f(T) := T \cup \{3\}$ für $T \subset \{1, 2\}$ definiert.

Lösung:

Gesucht ist eine bijektive Abbildung von

$$X = \text{Pot } \{1, 2\} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

nach

$$Y = \{S \in \text{Pot } \{1, 2, 3\} \mid 3 \in S\}$$

Die Menge Y ist

$$\begin{aligned} \text{Pot } \{1, 2, 3\} &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\} \\ &\implies Y = \{\{3\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\} \end{aligned}$$

Eine mögliche Bijektion wäre zum Beispiel $f: X \rightarrow Y$ mit

$$f(\emptyset) = \{3\}, f(\{1\}) = \{1, 3\}, f(\{2\}) = \{2, 3\}, f(\{1, 2\}) = \{1, 2, 3\}$$

d.h., $f(T) = T \cup \{3\}$.

- b) Wieviele Abbildungen $f: \{r, g, b\} \rightarrow \{0, 1\}$ gibt es?

8

Lösung:

Um eine Abbildung $f: \{r, g, b\} \rightarrow \{0, 1\}$ zu definieren, muss zu jedem Argument (d.h., zu jedem Element aus der Menge $\{r, g, b\}$) ein Element aus der Zielmenge $\{0, 1\}$ gewählt werden. Also man muss drei Mal (drei Argumente) aus zwei Elementen (zwei Möglichkeiten für den Wert) gewählt werden. Jeder Wert kann mehrmals gewählt werden – die Wiederholungen sind erlaubt.

Die Reihenfolge der gewählten Elemente ist wichtig. Wir setzten z.B., den ersten gewählten Wert immer als $f(r)$, den Zweiten als $f(g)$ und den Dritten als $f(b)$. Verschiedene Reihenfolge der gewählten Elemente bedeutet auch eine andere Abbildung.

Damit gibt es insgesamt

$$|\text{Var}_3^2 \text{ (m.W.)}| = 2^3 = 8$$

Abbildungen.

- c) Sei $M := \{3, 8, 7, 19, 15\}$. Wieviele Bijektionen $f: M \rightarrow M$ gibt es?

120

Lösung:

Bijektionen von M nach M sind nur Umsortierungen der Elemente aus M . Damit ist Anzahl der Bijektionen gleich mit dem Anzahl der Permutationen auf M mit $|M| = 5$: insgesamt $|\text{Per}_5^5 \text{ (o.W.)}| = 5! = 120$ bijektive Abbildungen.



WSTheorie/Kombinatorik/Ag_Kombinatorik_KombinationenMit.tex

Aufgabe 108.503 (Ungeordnete Stichproben mit Wiederholung)

kr

- a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 6 ununterscheidbare Kugeln auf 3 Töpfe zu verteilen, wenn in jedem Topf mehrere Kugeln sein können?

Dabei hilft folgender Trick: Man verwendet eine Notation mit Kugeln $\bigcirc$ und Trennstrichen $|$ und schreibt z.B.

$$\underbrace{\bigcirc\bigcirc}_{1.\text{Topf}}|\underbrace{\bigcirc}_{2.\text{Topf}}|\underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{3.\text{Topf}} \text{ für „2 Kugeln in Topf 1, 1 Kugel in Topf 2, 3 Kugeln in Topf 3“ oder}$$

$$\underbrace{}_{1.\text{Topf}}|\underbrace{\bigcirc\bigcirc}_{2.\text{Topf}}|\underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{3.\text{Topf}} \text{ für „0 Kugeln in Topf 1, 2 Kugeln in Topf 2, 4 Kugeln in Topf 3“.$$

$$\frac{(6+2)!}{6! \cdot 2!}$$

Lösung:

In der Kreis-Strich Notation gibt es insgesamt $6 + 1$ Positionen für die Trennstriche. Aus diesen 7 Positionen müssen 2 gewählt werden (2 Striche trennen Inhalt der 3 Töpfe). Die Reihenfolge ist dabei egal, auch Wiederholungen (d.h., 2 Striche auf der gleichen Position, was einen leeren Topf bedeutet) sind erlaubt. Damit ist der Anzahl der Möglichkeiten

$$|\text{Kom}_2^7 \text{ (m.W.)}| = \binom{2+7-1}{2} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = 28$$

Alternativlösung ohne Verwendung der „ $\bigcirc - |$ “ Notation:

Jede der 6 Kugeln hat 3 mögliche Endposition (eins der 3 Töpfe), wobei jede Position mehrmals gewählt werden kann (in einem Topf können mehrere Kugeln liegen). Das heißt, aus 3 Positionen müssen 6 gewählt werden für das Ablegen der Kugeln. Da die Kugeln nicht unterscheidbar sind, ist die Reihenfolge nicht wichtig und wir erhalten

$$|\text{Kom}_6^3 \text{ (m.W.)}| = \binom{3+6-1}{6} = \binom{8}{6} = \frac{8!}{6! \cdot 2!} = 28$$

Möglichkeiten die Kugeln zu verteilen.

- b) Allgemein: Wie viele Möglichkeiten gibt es, k ununterscheidbare Objekte auf n Töpfe zu verteilen, wenn in jedem Topf mehrere Objekte sein können?

$$\frac{(k+n-1)!}{k! \cdot (n-1)!} = \frac{(n+k-1)!}{((n+k-1)-k)! \cdot k!} = \binom{n+k-1}{k}$$

Lösung:

In „ $\bigcirc - |$ “ Notation: Es gibt insgesamt $k + 1$ mögliche Positionen für $n - 1$ Trennstriche. Jede Position kann mehrmals gewählt werden. Wir erhalten

$$\begin{aligned} |\text{Kom}_{n-1}^{k+1} \text{ (m.W.)}| &= \binom{(n-1) + (k+1) - 1}{(n-1)} = \binom{n+k-1}{n-1} \\ &= \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! \cdot ((n+k-1) - (n-1))!} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! \cdot k!} \end{aligned}$$

Alternativlösung:

Suche für k Objekte n mögliche Positionen (d.h., suche aus n Positionen k aus), jede Position kann dabei mehrmals vorkommen. Anzahl der Möglichen Verteilungen ist dann

$$|\text{Kom}_k^n \text{ (m.W.)}| = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot ((n+k-1) - k)!} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$$

**Aufgabe 108.504** (Ungeordnete Stichproben ohne Wiederholung)

kr

- a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus 9 verschiedenen Objekten vier Objekte **ohne** Beachtung der Reihenfolge auszuwählen?

$$126 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!} = \binom{9}{4}$$

Lösung: Aus 9 Objekten werden 4 gewählt, **ohne Beachtung der Reihenfolge**. Jedes Objekt kann **nur einmal** gewählt werden. Anzahl der Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} |\text{Kom}_4^9 (\text{o.W.})| &= \binom{9}{4} = \frac{9!}{4! \cdot (9-4)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot (5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9)} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{2 \cdot 3 \cdot 4} \\ &= \frac{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 9}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 7 \cdot 2 \cdot 9 = 126 \end{aligned}$$

- b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus n verschiedenen Objekten k Objekte **ohne** Beachtung der Reihenfolge auszuwählen?

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$

Lösung: Aus n Objekten werden k gewählt, **ohne Beachtung der Reihenfolge**. Jedes Objekt kann **nur einmal** gewählt werden. Anzahl der Möglichkeiten:

$$|\text{Kom}_k^n (\text{o.W.})| = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

- c) Wie viele mögliche Kombinationen eines ausgefüllten Lottoscheines gibt es beim Lottospiel „6 aus 49“?

$$13983816 = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6!} = \binom{49}{6}$$

Lösung: Aus 49 Kästchen werden 6 zum Ankreuzen gewählt, **ohne Beachtung der Reihenfolge**, da nur das fertig ausgefüllte Schein zählt. Jedes Kästchen kann **nur einmal** angekreuzt werden. Anzahl der Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} |\text{Kom}_6^{49} (\text{o.W.})| &= \binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot (49-6)!} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = \frac{43! \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49}{6! \cdot 43!} \\ &= \frac{44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{44 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 49}{3 \cdot 5} = 44 \cdot 3 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 49 = 13983816 \end{aligned}$$

- d) Wie viele 3-elementige Teilmengen einer Menge N mit 5 Elementen gibt es? Allgemein: Wie viele k -elementige Teilmengen einer Menge N mit n Elementen gibt es?

$$\binom{5}{3} \text{ bzw. } \binom{n}{k}$$

Lösung: Aus n Elementen der Menge werden k gewählt, **ohne Beachtung der Reihenfolge**. Jedes Element kann **nur einmal** gewählt werden. Anzahl der Möglichkeiten:

$$|\text{Kom}_k^n (\text{o.W.})| = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

**Aufgabe 108.505** (Türme auf dem Schachbrett)

spf

Ein Schachbrett besteht aus 64 quadratischen Feldern, die in 8 Zeilen und 8 Spalten angeordnet sind. Die Felder sind abwechselnd weiß und schwarz.

Ein Turm darf sich auf dem Schachbrett nur horizontal oder vertikal bewegen. Fährt ein Spielstein einer Farbe auf ein Feld, auf dem ein Spielstein der anderen Farbe steht, so wird dieser Spielstein „geschlagen“.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, zwei Türme auf ein Schachbrett zu stellen,

- a) wenn einer weiß und einer schwarz ist?

4 032

Lösung:

Für den weißen Turm gibt es 64 mögliche Felder. Für den schwarzen Turm sind dann noch 63 mögliche Felder übrig.

Das ergibt insgesamt $64 \cdot 63 = 3\,840 + 192 = 4\,032$ mögliche Positionierungen.

- b) wenn beide schwarze sind?

2 016

Lösung:

Für den ersten Turm gibt es 64 mögliche Felder. Für den zweiten Turm sind dann noch 63 mögliche Felder übrig. Dabei ergeben sich aber gleiche Stellungen, da man die beiden Türme nicht unterscheiden kann. Jede Positionierung wird aktuell zweimal gezählt.

Das ergibt in diesem Fall also $\frac{1}{2} \cdot 64 \cdot 63 = 32 \cdot 63 = 1\,920 + 96 = 2\,016$ mögliche Positionierungen.

Das entspricht der Anzahl $\binom{64}{2}$ der Möglichkeiten, aus den 64 Feldern zwei auszuwählen.

- c) wenn einer weiß und einer schwarz ist und beide so stehen sollen, dass sie sich nicht im nächsten Zug schlagen können?

3 136

Lösung:

Für den weißen Turm gibt es 64 mögliche Felder. Er blockiert dann für den schwarzen Turm alle Felder der Zeile und der Spalte in der er steht, da die Türme sich schlagen könnten, wenn der schwarze auf eines dieser Felder gestellt würde. Insgesamt handelt es sich um $8+8-1 = 15$ Felder. Für den schwarzen Turm sind also noch $64 - 15 = 49$ mögliche Felder übrig.

Das ergibt insgesamt $64 \cdot 49 = 64 \cdot (50 - 1) = 3\,200 - 64 = 3\,136$ mögliche Positionierungen.

- d) Wie viele Möglichkeiten hätte man, acht verschiedenfarbige Türme auf das Spielbrett zu stellen, die sich alle nicht gegenseitig schlagen können, wenn es beim Schach acht verschiedene Farben gäbe, die sich untereinander alle schlagen dürften?

1 625 702 400

Lösung:

Damit sich die acht Türme nicht gegenseitig schlagen können, muss jeder seine eigene Zeile und Spalte bekommen.

Der schwarze Turm kann stehen, wo er will: 64 Möglichkeiten

Der schwarze Turm blockiert eine Zeile und eine Spalte. Für den weißen Turm können wir uns vorstellen, dass das Spielbrett um diese Zeile und diese Spalte reduziert wird, sprich „nur noch je sieben Zeilen und Spalten hat“. Auf diesem „modifizierten Spielbrett“ kann der weiße Turm stehen, wo er will: 49 Möglichkeiten

Für den roten Turm muss vom neuen Spielbrett wieder eine Zeile und eine Spalte entfernt werden. Übrig bleiben je sechs Zeilen und Spalten: 36 Möglichkeiten

Der orangene Turm hat nur noch je fünf Zeilen und Spalten, also 25 Möglichkeiten.

Der gelbe Turm hat noch 16 Möglichkeiten.

Der grüne Turm bekommt noch 9 Möglichkeiten.

Dem blauen Turm stehen noch 4 Möglichkeiten zur Verfügung.

Der violette Turm muss die 1 Möglichkeit nehmen, die noch übrig bleibt.

Dies ergibt insgesamt die folgende Anzahl an Möglichkeiten:

$$64 \cdot 49 \cdot 36 \cdot 25 \cdot 16 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 1 = 8^2 \cdot 7^2 \cdot 6^2 \cdot 5^2 \cdot 4^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 1^2 = (8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)^2 = (8!)^2 \\ = (40\,320)^2 = 1\,612\,800\,000 + 12\,096\,000 + 806\,400 = 1\,625\,702\,400.$$

- e) Wie verändert sich die Situation aus Aufgabenteil d), wenn Sie Türme gleicher Farbe verwenden, die aber so stehen sollen, dass sie sich auch nicht schlagen könnten, wenn ihre Farben unterschiedlich wären?

40 320

Lösung:

Da die Türme nicht auf der gleichen Zeile stehen dürfen und es genausoviele Türme wie Zeilen gibt, muss auf jeder Zeile genau ein Turm stehen. Wir können die nicht unterscheidbaren Türme also mit ihren Zeilen identifizieren.

Auf der ersten Zeile stehen für den Turm 8 Felder zur Verfügung.

Damit der Turm auf der zweiten Zeile nicht von dem auf der ersten Zeile geschlagen werden kann, darf er nicht in derselben Spalte stehen. Ihm stehen also noch 7 Spalten bzw. Felder zur Verfügung.

Der Turm auf der dritten Zeile muss die beiden von den Türmen auf der ersten und zweiten Zeile blockierten Spalten vermeiden und hat noch 6 Felder zur Auswahl.

Und so weiter und so fort. Insgesamt ergeben sich

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \text{ Möglichkeiten} = 8! \text{ Möglichkeiten} = 40\,320 \text{ Möglichkeiten.}$$

Zusatzfrage: Was passiert in Aufgabenteil d) oder Aufgabenteil e) bei sieben oder neun Türmen?

Bei sieben Türmen gibt es genausoviele Möglichkeiten wie für acht Türme, bei neun Türmen Null.

Lösung:

Da in beiden Fällen der letzte Turm nur eine Möglichkeit hat, ändert sich im Fall von sieben Türmen nichts an der Anzahl der Möglichkeiten.

Da es beim Aufteilen von neun Türmen auf acht Zeilen notwendigerweise eine Zeile geben muss, die mindestens zwei Türme enthält, können sich auf dieser Zeile zwei Türme schlagen. Es gibt also keine Möglichkeit, für die sich die Türme nicht schlagen können.



WSTheorie/Kombinatorik/Ag_Kombinatorik_Variationen.tex

Aufgabe 108.506 (Geordnete Stichproben (Permutationen/Variationen) mit und ohne Wiederholung)

kr

Achtung: in einigen Studiengängen (z.B., WiWi HM) wird nicht zwischen Permutationen und Variationen unterschieden. In dieser Lösung wird der Begriff „Permutation“ verwendet, was aber für andere Autoren eigentlich Variationen sind.

- a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, n verschiedene Objekte anzuordnen? $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Lösung: Wir haben insgesamt n Positionen, auf denen n Objekte verteilt werden müssen.

- n Möglichkeiten für die erste Position
- $n - 1$ Möglichkeiten für die zweite Position (da ein Objekt bereits verlegt ist)
- $n - 2$ Möglichkeiten für die dritte Position

- ...
- 2 Möglichkeiten für die vorletzte Position
- 1 Möglichkeit für die letzte Position

Insgesamt also $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n! = |\text{Var}_n^n \text{ (o.W.)}|$ Möglichkeiten.

- b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 3 blaue, 2 rote und 2 grüne Kugeln anzuordnen? Wie lautet die Lösung im allgemeinen Fall mit jeweils $k_1, k_2, \dots, k_j$ ununterscheidbaren Objekten? $\frac{(3+2+2)!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 210$, allgemein $\frac{(k_1+k_2+\dots+k_j)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_j!}$

Lösung:

Lösung 1 mit Permutationen

- Im ersten Schritt nehmen wir an, dass die Kugeln unterscheidbar sind. D.h., wir haben
 - 3 unterschiedliche blaue Kugeln blau₁, blau₂ und blau₃
 - 2 unterschiedliche rote Kugeln rot₁ und rot₂
 - 2 unterschiedliche grüne Kugeln gruen₁ und gruen₂
 also insgesamt $3 + 2 + 2 = 7$ *unterschiedliche* Kugeln. Diese können auf $|\text{Per}_7^7 \text{ (o.W.)}| = 7!$ Wegen angeordnet werden.
- In zweitem Schritt beachten wir, dass die Kugeln einer Farbe eigentlich nicht zu unterscheiden sind.
 - Die drei blauen Kugeln haben $|\text{Per}_3^3 \text{ (o.W.)}| = 3!$ Anordnungen. Diese sind jedoch nicht voneinander zu unterscheiden.
 - Die zwei roten Kugeln haben $|\text{Per}_2^2 \text{ (o.W.)}| = 2!$ Anordnungen. Diese sind jedoch nicht voneinander zu unterscheiden.
 - Die zwei grünen Kugeln haben $|\text{Per}_2^2 \text{ (o.W.)}| = 2!$ Anordnungen. Diese sind jedoch nicht voneinander zu unterscheiden.

Damit haben wir insgesamt

$$\frac{|\text{Per}_{3+2+2}^{3+2+2} \text{ (o.W.)}|}{|\text{Per}_3^3 \text{ (o.W.)}| \cdot |\text{Per}_2^2 \text{ (o.W.)}| \cdot |\text{Per}_2^2 \text{ (o.W.)}|} = \frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 210$$

verschiedene Anordnungen der Kugeln.

- Für den allgemeinen Fall mit $k_1, k_2, \dots, k_j$ ununterscheidbaren Objekten erhalten wir analog

$$\frac{|\text{Per}_{k_1+k_2+\dots+k_j}^{k_1+k_2+\dots+k_j} \text{ (o.W.)}|}{|\text{Per}_{k_1}^{k_1} \text{ (o.W.)}| \cdot |\text{Per}_{k_2}^{k_2} \text{ (o.W.)}| \cdot \dots \cdot |\text{Per}_{k_j}^{k_j} \text{ (o.W.)}|} = \frac{(k_1+k_2+\dots+k_j)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_j!}$$

Anordnungen.

Lösung 2 mit Kombinationen

- Wir haben insgesamt $3 + 2 + 2 = 7$ Positionen für die Kugeln.
 - Im ersten Schritt werden aus 7 Positionen 3 für die blauen Kugeln gewählt. Da die Kugeln nicht zu unterscheiden sind, ist die Reihenfolge egal, damit haben wir Kombinationen. Also haben wir insgesamt $|\text{Kom}_3^7 \text{ (o.W.)}| = \binom{7}{3}$ Möglichkeiten.
 - Im zweiten Schritt werden aus den übrig gebliebenen 4 Positionen zwei für die roten Kugeln gewählt. Dafür gibt es $|\text{Kom}_2^4 \text{ (o.W.)}| = \binom{4}{2}$ Möglichkeiten.
 - In dem letzten Schritt werden aus den übrig gebliebenen 2 Positionen zwei für die grünen Kugeln gewählt. Dafür gibt es $|\text{Kom}_2^2 \text{ (o.W.)}| = \binom{2}{2} = 1$ Möglichkeit.

- Damit haben wir insgesamt

$$|\text{Kom}_3^7 \text{ (o.W.)}| \cdot |\text{Kom}_2^4 \text{ (o.W.)}| \cdot |\text{Kom}_2^2 \text{ (o.W.)}| = \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{2!}{2! \cdot 0!} = 210$$

Möglichkeiten, die Kugeln anzuordnen.

- Für den allgemeinen Fall erhalten wir analog

$$\begin{aligned} & \left| \text{Kom}_{k_1}^{k_1+k_2+\dots+k_j} \text{ (o.W.)} \right| \cdot \left| \text{Kom}_{k_2}^{k_2+\dots+k_j} \text{ (o.W.)} \right| \cdot \dots \cdot \left| \text{Kom}_{k_j}^{k_j} \text{ (o.W.)} \right| \\ &= \binom{k_1+k_2+\dots+k_j}{k_1} \cdot \binom{k_2+\dots+k_j}{k_2} \cdot \dots \cdot \binom{k_j}{k_j} \\ &= \frac{(k_1+k_2+\dots+k_j)!}{k_1! \cdot (k_2+\dots+k_j)!} \cdot \frac{k_2+\dots+k_j!}{k_2! \cdot (k_3+\dots+k_j)!} \cdot \dots \cdot \frac{k_j!}{k_j! \cdot 0!} \\ &= \frac{(k_1+k_2+\dots+k_j)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_j!} \end{aligned}$$

Möglichkeiten.

- c) Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus 9 verschiedene Objekten vier Objekte **mit** Beachtung der Reihenfolge auszuwählen? $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 9^4$

Lösung: Wir haben

- 9 Möglichkeiten für die erste Position
- 8 Möglichkeiten für die zweite Position
- 7 Möglichkeiten für die dritte Position
- 6 Möglichkeiten für die vierte Position

also insgesamt $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 9^4 = |\text{Var}_4^9 \text{ (o.W.)}| = 3024$ Möglichkeiten.

- d) Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus n verschiedene Objekten eine Anzahl $k \leq n$ **mit** Beachtung der Reihenfolge auszuwählen? $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = n^k$

Lösung: Wir haben

- n Möglichkeiten für die 1. Position
- $(n-1)$ Möglichkeiten für die 2. Position
- ...
- $(n-k+1)$ Möglichkeiten für die k . Position

also insgesamt $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = n^k = |\text{Var}_k^n \text{ (o.W.)}|$ Möglichkeiten.

- e) Sei N eine Menge mit 3 Elementen und M eine Menge mit 5 Elementen.

- (i) Wie viele Funktionen $N \rightarrow M$ gibt es?

$$5^3 = 125$$

Lösung:

O.B.d.A. gilt $N = \{1, 2, 3\}$ und $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Damit eine Funktion definiert ist, muss zu jedem $n \in \mathbb{N}$ genau ein Element aus M gewählt werden, wobei Wiederholungen erlaubt sind. D.h., aus der 5 Elementen der Menge M müssen genau drei Elemente gewählt werden, wobei die Reihenfolge wichtig ist (der erste gewählte Element ist dann $f(1)$, der zweite ist $f(2)$ und der dritte ist $f(3)$). Damit ist der Anzahl der Funktionen gegeben durch

$$|\text{Var}_3^5 \text{ (m.W.)}| = 5^3 = 125$$

(ii) Wie viele davon sind injektiv?

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Lösung:

Damit eine Abbildung injektiv ist, dürfen die Elemente aus M sich nicht wiederholen. Also, wir haben

$$|\text{Var}_3^5(\text{o.W.})| = 5^{\underline{3}} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

injektive Funktionen.

(iii) Wie sieht es aus im allgemeinen Fall für die Kardinalitäten $|N| = n$ und $|M| = m$? m^n
Funktionen, $m^{\underline{n}}$ davon injektiv

Lösung:

In dem allgemeinen Fall können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen dass $n = \{1, 2, \dots, n\}$ und $M = \{1, 2, \dots, m\}$. Um eine Abbildung $N \rightarrow M$ festzulegen, müssen aus der Menge M genau n Elemente gewählt werden, wobei die Wiederholungen erlaubt sind und die Reihenfolge wichtig ist. Es gibt damit insgesamt $|\text{Var}_n^m(\text{m.W.})| = m^n$ Abbildungen.

Für die injektiven Abbildungen sind die Wiederholungen nicht erlaubt, also es gibt

$$|\text{Var}_n^m(\text{o.W.})| = m^{\underline{n}}$$

injektive Abbildungen.

(iv) Wie viele bijektive Abbildungen gibt es im Fall $n = m$? $m!$

Lösung:

Im Fall $n = m$ ist jede Injektive Abbildung auch surjektiv (da ohne Wiederholungsmöglichkeit müssen *alle* Elemente aus M gewählt werden) und damit auch bijektiv. Insgesamt gibt es $|\text{Per}_m^m(\text{o.W.})| = m^{\underline{m}} = m!$ solche Abbildungen.



WSTheorie/Kombinatorik/Ag_Kombinatorik_WabeFaerben.tex

Aufgabe 108.507 (Felder färben)

spf

Sie haben die neun Farben rot, orange, gelb, grün, blau, violett, türkis, rosa und braun. Wieviele Möglichkeiten haben Sie, die sieben unten stehenden Felder zu färben, wenn

a) keine Einschränkung besteht?

$$9^7 = 4\,782\,969$$

Lösung:

Für jedes der sieben Felder stehen neun Farben zur Verfügung.

Insgesamt ergeben sich $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^7$ Möglichkeiten. Es gilt

$$\begin{aligned} 9^7 &= 3^{14} = 3^5 \cdot 3^5 \cdot 3^4 = 243 \cdot 243 \cdot 81 = 243 \cdot (19\,440 + 243) \\ &= 243 \cdot 19\,683 = 3\,936\,600 + 787\,320 + 59\,049 = 4\,782\,969. \end{aligned}$$

b) das linke Feld rot und das rechte Feld blau werden sollen?

$$1^2 \cdot 9^5 = 59\,049$$

Lösung:

Für das linke und das rechte Feld stehen jeweils nur eine Farbe zur Verfügung. Für jedes der anderen fünf Felder stehen neun Farben zur Verfügung.

Insgesamt ergeben sich $1 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^5$ Möglichkeiten.

Es gilt $9^5 = 3^{10} = 3^5 \cdot 3^5 = 243 \cdot 243 = 48\,600 + 9\,720 + 729 = 59\,049$.

c) alle Felder unterschiedlich gefärbt werden sollen?

$$\frac{9!}{(9-7)!} = 181\,440$$

Lösung:

Für das erste Feld kann aus 9 Farben ausgewählt werden, für das zweite aus 8, das dritte aus 7, das vierte aus 6, das fünfte aus 5, das sechste aus 4 und das siebte aus 3.

Insgesamt ergeben sich $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot 9!$ Möglichkeiten.

Es gilt $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 72 \cdot 42 \cdot 5 \cdot 12 = (2\,880 + 144) \cdot 60 = 3\,024 \cdot 60 = 181\,440$.

d) drei Felder rot, zwei blau und die anderen Felder grün sein sollen?

$$\frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 210$$

Lösung:

Für die roten Felder stehen $\binom{7}{3}$ Möglichkeiten zur Verfügung. Die beiden blauen Felder haben dann noch $\binom{4}{2}$ Möglichkeiten. Die restlichen beiden Felder werden grün, hierfür gibt es noch $\binom{2}{2}$ Möglichkeiten. Insgesamt ergeben sich also

$$\begin{aligned} \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} &= \frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{2!}{2! \cdot 0!} = \frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= 7 \cdot 6 \cdot 5 = 42 \cdot 5 = 210 \text{ Möglichkeiten.} \end{aligned}$$

e) zwei benachbarte Felder nicht die gleiche Farbe haben sollen?

3-Eck: 3 024

4-Eck: 21 672

5-Eck: 151 200

6-Eck: 1 058 904

Lösung:

In allen vier Figuren stehen für das mittlere Feld neun Farben zur Verfügung.

Dreieck: Ist in der Mitte ein Dreieck, so dürfen keine gleichen Farben verwendet werden und es bleiben für die anderen Felder je 8, 7 und 6 Farben zur Auswahl. Sind insgesamt $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 72 \cdot 42 = 2\,880 + 144 = 3\,024$ Möglichkeiten.

Viereck: Ist in der Mitte ein Viereck, so müssen die beiden letzten Flächen kombiniert betrachtet werden. Rechts hat man immer noch 8 Farben und oben 7 Farben zur Auswahl. Unter den 7 Farben, welche unter Beachtung von Mitte und oben für links zur Verfügung stehen, ist die Farbe von rechts. Wird diese gewählt, stehen für unten wieder 7 Farben zur Verfügung. Wählt man aber links eine der 6 anderen zur Verfügung stehenden Farben, so hat die untere Fläche drei verschiedenfarbige Nachbarn und somit nur noch 6 Farben zur Auswahl. Insgesamt ergeben sich $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot (1 \cdot 7 + 6 \cdot 6) = 72 \cdot 7 \cdot 43 = 72 \cdot 301 = 21\,070 + 602 = 21\,672$ Möglichkeiten für das Viereck in der Mitte.

Fünfeck: Auch für das Fünfeck startet nach zwei Flächen die kombinierte Betrachtung. Für das untere Feld stehen 8 Farben zur Verfügung, für das Feld unten rechts noch 7.

Bekommt das Feld oben rechts dieselbe Farbe wie das untere Feld, so kann das Feld oben links diese Farbe nicht erhalten und das Feld unten links hat auf jeden Fall drei verschiedenfarbene Nachbarn. In diesem Fall hat also das Feld oben links 7 Farben zur Auswahl und das Feld unten links 6 Farben.

Bekommt das Feld oben rechts eine der 6 anderen von Mitte und unten rechts nicht ausgeschlossenen Farben, so kann das Feld oben links wieder die Farbe des unteren Feldes bekommen und so dem Feld unten links 7 Farben zur Auswahl lassen. Haben die beiden oberen Felder nicht die Farbe des unteren Feldes, so bleiben dem Feld unten links noch 6 Farben zur Auswahl.

Insgesamt gibt es also beim Fünfeck

$$\begin{aligned} & 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot (1 \cdot 7 \cdot 6 + 6 \cdot (1 \cdot 7 + 6 \cdot 6)) \\ &= 72 \cdot 7 \cdot (42 + 6 \cdot 43) = (490 + 14) \cdot (42 + 258) \\ &= 504 \cdot 300 = 150\,000 + 1\,200 = 151\,200 \text{ Möglichkeiten.} \end{aligned}$$

Sechseck: Auch beim Sechseck stehen für das rechte Feld acht Farben und für das Feld oben rechts sieben Farben zur Verfügung.

Ab hier muss darüber nachgedacht werden, in welchen Fällen das Feld unten links dieselbe Farbe haben kann wie das rechte Feld. Dann stehen dem Feld unten rechts nämlich 7 Farben zur Verfügung, statt nur 6 in den 6 anderen Fällen. Das Feld unten links kann nur dann die gleiche Farbe haben wie das rechte Feld, wenn das linke Feld eine andere Farbe hat. Dafür gibt es 6 Möglichkeiten.

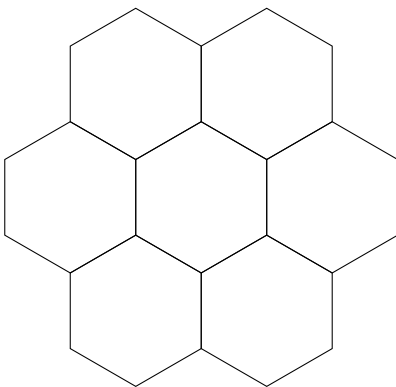
Damit links überhaupt dieselbe Farbe wie rechts auftreten kann, darf das Feld oben links nicht diese Farbe haben.

Die Anzahl der Möglichkeiten für die letzten vier Flächen ergibt sich also zu

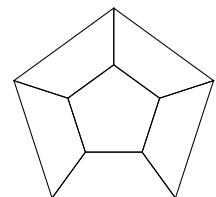
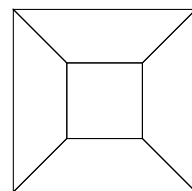
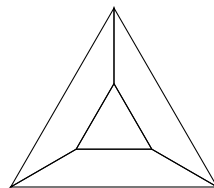
$$\begin{array}{ccccccc} \text{oben links = rechts,} & \text{unten links} & \text{links = rechts, dann} & \text{unten links} \\ \text{dann links} \neq \text{rechts} & \neq \text{rechts} & \text{unten links} \neq \text{rechts} & = \text{rechts} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \boxed{1 \cdot 7} \cdot (\boxed{1 \cdot 7} + \boxed{6 \cdot 6}) + \boxed{6} \cdot (\boxed{1 \cdot 7 \cdot 6} + \boxed{6} \cdot (\boxed{1 \cdot 7} + \boxed{6 \cdot 6})) \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{unten links} & \text{oben links} & \text{links} \neq & \text{unten links} \\ \text{= rechts} & \neq \text{rechts} & \text{rechts} & \neq \text{rechts} \end{array}$$

Insgesamt ergeben sich damit

$$\begin{aligned} & 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot (1 \cdot 7 \cdot (1 \cdot 7 + 6 \cdot 6) + 6 \cdot (1 \cdot 7 \cdot 6 + 6 \cdot (1 \cdot 7 + 6 \cdot 6))) \\ &= 72 \cdot 7 \cdot (7 \cdot 43 + 6 \cdot (42 + 6 \cdot 43)) = 504 \cdot (301 + 6 \cdot 300) \\ &= 504 \cdot 2\,101 = 1\,008\,000 + 50\,400 + 504 = 1\,058\,904 \text{ Möglichkeiten.} \end{aligned}$$



Tipp: Überlegen Sie in Aufgabenteil e) zunächst, wie die Antwort auf die wirklich schwere Frage in den folgenden drei Fällen aussehen würde:



WSTheorie/Kombinatorik/Ag_Permutationen_Zerlegen.tex

Aufgabe 108.508 (Permutationen)

VT

a) Berechnen Sie die folgenden Permutationen aus Π_7 :

(i) $\pi = [1, 2] \circ [3, 5] \circ [5, 1] \circ [6, 7]$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Berechne die Permutation mit der Wertetabelle. Die Transpositionen werden von rechts nach links angewendet:

	1	2	3	4	5	6	7
[6, 7]	1	2	3	4	5	7	6
[5, 1]	5	2	3	4	1	7	6
[3, 5]	3	2	5	4	1	7	6
[1, 2]	3	1	5	4	2	7	6

D.h., die resultierende Permutation in Matrixnotation ist

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

(ii) $\sigma = [7, 1] \circ [4, 5] \circ [4, 7] \circ [1, 3]$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 7 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Berechne die Permutation mit Hilfe der Wertetabelle:

	1	2	3	4	5	6	7
[1, 3]	3	2	1	4	5	6	7
[4, 7]	3	2	1	7	5	6	4
[4, 5]	3	2	1	7	4	6	5
[7, 1]	3	2	7	1	4	6	5

b) Schreiben Sie die folgenden Permutationen als Kompositionen der Transpositionen und bestimmen Sie das Signum!

(i) $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

$$s = [1, 3] \circ [2, 3] \circ [3, 4] \circ [5, 7], \text{ sign}(s) = 1$$

Lösung:

Algorithmus:

Die Transpositionen werden von links nach rechts aufgestellt. Falls $s(i) = i$ für alle $i < k$ und $s(k) \neq m$, für ein $k \in \{1, 2, \dots, 7\}$, dann wende auf s die Transposition $\tau = [k, s(k)]$ an.

Nach m Schritten (m ist höchstens 7) ist dann

$$\text{id} = \tau_m \circ \tau_{m-1} \circ \dots \circ \tau_1 \circ s$$

und damit

$$s = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_m$$

Konkret:

- $s(1) = 3 \neq 1 \implies \tau_1 = [1, s(1)] = [1, 3].$

$$s_1 = \tau_1 \circ s = \left[\begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline s & 3 & 1 & 4 & 2 & 7 & 6 & 5 \\ \hline [1, 3] & 1 & 3 & 4 & 2 & 7 & 6 & 5 \end{array} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

- $s_1(2) = 3 \neq 2 \implies \tau_2 = [2, s_1(2)] = [2, 3]$.

$$s_2 = \tau_2 \circ s_1 = \left[\begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline s_1 & 1 & 3 & 4 & 2 & 7 & 6 & 5 \\ \hline [2, 3] & 1 & 2 & 4 & 3 & 7 & 6 & 5 \end{array} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

- $s_2(3) = 4 \implies \tau_3 = [3, s_2(3)] = [3, 4]$

$$s_3 = \tau_3 \circ s_2 = \left[\begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline s_2 & 1 & 2 & 4 & 3 & 7 & 6 & 5 \\ \hline [3, 4] & 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 6 & 5 \end{array} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

- $s_3(4) = 4$: nichts zu tun
- $s_3(5) = 5 \neq 5 \implies \tau_4 = [5, s_3(5)] = [5, 7]$.

$$s_4 = \tau_4 \circ s_3 = \left[\begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline s_3 & 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 6 & 5 \\ \hline [5, 7] & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \text{id}.$$

Also es gilt

$$\text{id} = \tau_4 \circ s_3 = \tau_4 \circ (\tau_3 \circ s_2) = \tau_4 \circ \tau_3 \circ (\tau_2 \circ s_1) = \tau_4 \circ \tau_3 \circ \tau_2 \circ (\tau_1 \circ s)$$

und daraus folgt wegen $[i, j] \circ [i, j] = \text{id}$ dass

$$s = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \tau_3 \circ \tau_4 = [1, 3] \circ [2, 3] \circ [3, 4] \circ [5, 7].$$

Die Permutation s ist eine Komposition von 4 Transpositionen, damit ist

$$\text{sign}(s) = (-1)^4 = 1.$$

$$(ii) \quad p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad p = [1, 2] \circ [2, 3] \circ [3, 5] \circ [4, 5] \circ [5, 7] \circ [6, 7], \text{sign}(p) = 1$$

Lösung:

Wende den gleiche Algorithmus wie in der vorherigen Teilaufgabe an:

- $p(1) = 2 \neq 1 \implies \tau_1 = [1, p(1)] = [1, 2]$.

$$p_1 = \tau_1 \circ p = \left[\begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline p & 2 & 3 & 5 & 1 & 7 & 4 & 6 \\ \hline [1, 2] & 1 & 3 & 5 & 2 & 7 & 4 & 6 \end{array} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

- $p_1(2) = 3 \neq 2 \implies \tau_2 = [2, p_1(2)] = [2, 3]$.

$$p_2 = \tau_2 \circ p_1 = \left[\begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline p_1 & 1 & 3 & 5 & 2 & 7 & 4 & 6 \\ \hline [2, 3] & 1 & 2 & 5 & 3 & 7 & 4 & 6 \end{array} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

- $p_2(3) = 5 \neq 3 \implies \tau_3 = [3, p_2(3)] = [3, 5]$.

$$p_3 = \tau_3 \circ p_2 = \left[\begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline p_2 & 1 & 2 & 5 & 3 & 7 & 4 & 6 \\ \hline [3, 5] & 1 & 2 & 3 & 5 & 7 & 4 & 6 \end{array} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

- $p_3(4) = 5 \neq 4 \implies \tau_4 = [4, p_3(4)] = [4, 5]$.

$$p_4 = \tau_4 \circ p_3 = \left[\begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline p_3 & 1 & 2 & 3 & 5 & 7 & 4 & 6 \\ \hline [4, 5] & 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 5 & 6 \end{array} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

- $p_4(5) = 7 \neq 5 \implies \tau_5 = [5, p_4(5)] = [5, 7]$.

$$p_5 = \tau_5 \circ p_4 = \left[\begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline p_4 & 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 5 & 6 \\ \hline [5, 7] & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 6 \end{array} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

- $p_5(6) = 7 \neq 6 \implies \tau_6 = [6, p_5(6)] = [6, 7]$.

$$p_6 = \tau_6 \circ p_5 = \left[\begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline p_5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 6 \\ \hline [6, 7] & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \text{id}.$$

Also es gilt:

$$\text{id} = \tau_6 \circ \tau_5 \circ \tau_4 \circ \tau_3 \circ \tau_2 \circ \tau_1 \circ p$$

bzw.

$$p = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \tau_3 \circ \tau_4 \circ \tau_5 \circ \tau_6 = [1, 2] \circ [2, 3] \circ [3, 5] \circ [4, 5] \circ [5, 7] \circ [6, 7].$$

p ist eine Komposition aus 6 Transpositionen, Signum:

$$\text{sign}(p) = (-1)^6 = 1.$$



WSTheorie/WSRechnung/Ag_Wahrscheinlichkeiten_Skatblatt.tex

Aufgabe 109.509 (Skatblatt)

kr

Wir betrachten ein übliches Skatblatt (französisch) mit 32 Karten:

♣ A	♣ K	♣ D	♣ B	♣ 10	♣ 9	♣ 8	♣ 7
♠ A	♠ K	♠ D	♠ B	♠ 10	♠ 9	♠ 8	♠ 7
♦ A	♦ K	♦ D	♦ B	♦ 10	♦ 9	♦ 8	♦ 7
♥ A	♥ K	♥ D	♥ B	♥ 10	♥ 9	♥ 8	♥ 7

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit

- a) ... in einem Zug aus dem vollen Stapel ein As zu ziehen?

$$4/32 = 1/8$$

Lösung:

Alle möglichen Ereignisse bei 1x Ziehen (Grundraum):

$$\Omega_{1x} = \{\clubsuit A, \clubsuit K, \clubsuit D, \clubsuit B, \clubsuit 10, \clubsuit 9, \clubsuit 8, \clubsuit 7, \spadesuit A, \spadesuit K, \spadesuit D, \spadesuit B, \spadesuit 10, \spadesuit 9, \spadesuit 8, \spadesuit 7, \\ \diamondsuit A, \diamondsuit K, \diamondsuit D, \diamondsuit B, \diamondsuit 10, \diamondsuit 9, \diamondsuit 8, \diamondsuit 7, \heartsuit A, \heartsuit K, \heartsuit D, \heartsuit B, \heartsuit 10, \heartsuit 9, \heartsuit 8, \heartsuit 7\}$$

Es gilt $|\Omega_{1x}| = 32$.

Die Menge der günstigen Ereignisse:

$$A = \{\clubsuit A, \spadesuit A, \diamondsuit A, \heartsuit A\} \quad \text{mit} \quad |A| = 4$$

Damit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega_{1x}|} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

- b) ... in einem Zug aus dem vollen Stapel kein As zu ziehen?

$$1 - 1/8 = 7/8$$

Lösung:

Dies ist genau der Gegenteil zu der vorherigen Teilaufgabe. Grundmenge ist genauso wie vorher, die Menge der günstigen Ereignisse ist

$$B = \overline{A}$$

Damit ist

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

- c) ... in einem Zug aus dem vollen Stapel einen schwarzen Buben zu ziehen?

$$1/16$$

Lösung:

Die Grundmenge Ω_{1x} ist die gleiche wie in den vorherigen Teilaufgaben. Die Menge der günstigen Ereignisse:

$$C = \{\clubsuit B, \spadesuit B\} \quad \text{mit} \quad |C| = 2$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$\mathbb{P}(C) = \frac{|C|}{|\Omega_{1x}|} = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$$

- d) ... in zwei Zügen **mit** zurücklegen zuerst einen schwarzen Buben und dann ein As zu ziehen?

$$\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{128}$$

Lösung:

Grundraum $\Omega_{2x(m.Z.)}$ für zweimal ziehen mit Zurücklegen:

$$\Omega_{2x(m.Z.)} = \{(\clubsuit A, \clubsuit A), (\clubsuit A, \clubsuit K), \dots, (\heartsuit 7, \heartsuit 7)\}$$

Anzahl aller möglichen Ereignisse: 32 Möglichkeiten für die erste Position, 32 Möglichkeiten für die zweite Position, insgesamt also

$$|\Omega_{2x(m.Z.)}| = 32 \cdot 32 = 32^2 = 1024 = |\text{Var}_2^{32} \text{ (m.W.)}|$$

Die Menge D aller günstigen Ereignisse: es gibt 2 Möglichkeiten, die erste Position mit einem schwarzen Bub zu belegen und 4 Möglichkeiten, die zweite Position mit einem As zu belegen. Damit ist

$$|D| = 2 \cdot 4 = 8.$$

Hier kann die Menge auch explizit angegeben werden:

$$D = \{(\clubsuit B, \clubsuit A), (\clubsuit B, \spadesuit A), (\clubsuit B, \diamond A), (\clubsuit B, \heartsuit A), (\spadesuit B, \clubsuit A), (\spadesuit B, \spadesuit A), (\spadesuit B, \diamond A), (\spadesuit B, \heartsuit A)\}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$\mathbb{P}(D) = \frac{|D|}{|\Omega_{2x(m.Z.)}|} = \frac{8}{32^2} = \frac{1}{128}$$

Alternativlösung: direkt mit Wahrscheinlichkeiten rechnen:

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(C) \cdot \mathbb{P}(A) = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{128}$$

- e) ... in zwei Zügen **mit** zurücklegen zwei Asse zu ziehen?

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$$

Lösung:

Die Grundmenge $\Omega_{2x(m.Z.)}$ ist hier die Gleiche wie in der vorherigen Teilaufgabe.

Die Menge der günstigen Ereignisse: Es gibt 4 Möglichkeiten, die erste Position mit einem As zu belegen, und es gibt 4 Möglichkeiten, die 2. Position mit einem As zu belegen. Insgesamt gilt also

$$|E| = 4 \cdot 4 = 16 = |\text{Var}_2^4 \text{ (m.W.)}| = 4^2$$

Die Menge E explizit ausgeschrieben:

$$D = \{(\clubsuit A, \clubsuit A), (\clubsuit A, \spadesuit A), (\clubsuit A, \diamond A), (\clubsuit A, \heartsuit A), (\spadesuit A, \clubsuit A), (\spadesuit A, \spadesuit A), (\spadesuit A, \diamond A), (\spadesuit A, \heartsuit A), (\diamond A, \clubsuit A), (\diamond A, \spadesuit A), (\diamond A, \diamond A), (\diamond A, \heartsuit A), (\heartsuit A, \clubsuit A), (\heartsuit A, \spadesuit A), (\heartsuit A, \diamond A), (\heartsuit A, \heartsuit A)\}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$\mathbb{P}(E) = \frac{|E|}{|\Omega_{2x(m.Z.)}|} = \frac{4^2}{32^2} = \frac{1}{64}$$

Alternativlösung direkt mit Wahrscheinlichkeiten:

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(A) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$$

f) ... in zwei Zügen **mit** zurücklegen genau ein As zu ziehen?

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{7}{8} + \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{7}{32}$$

Lösung:

Der Grundraum $\Omega_{2x(m.Z.)}$ ist gleich wie in den vorherigen Beispielen. Die Menge F aller günstigen Ereignisse:

- Es gibt 4 Möglichkeiten, die erste Position mit einem As zu belegen und $32 - 4 = 28$ Möglichkeiten, die zweite Position mit einem nicht-As zu belegen. Also insgesamt $4 \cdot 28$ Möglichkeiten.
- Es gibt $32 - 4 = 28$ Möglichkeiten, die erste Position mit einem nicht-As zu belegen, und 4 Möglichkeiten, die zweite Position mit einem As zu belegen. Insgesamt $28 \cdot 4$ Möglichkeiten.

Damit ist

$$|F| = 4 \cdot 28 + 28 \cdot 4 = 224$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\mathbb{P}(F) = \frac{|F|}{|\Omega_{2x(m.Z.)}|} = \frac{224}{32^2} = \frac{7}{32}$$

Alternativlösung mit Wahrscheinlichkeiten:

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A) = \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{8} + \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{7}{32}$$

g) ... in zwei Zügen **mit** zurücklegen mindestens ein As zu ziehen?

$$\frac{7}{32} + \frac{1}{64} = \frac{15}{64}$$

Lösung:

Die Grundmenge $\Omega_{2x(m.Z.)}$ bleibt auch in dieser Teilaufgabe gleich. Die Menge G der günstigen Ereignisse (mindestens einmal As) besteht aus der Menge E (genau 2 Asse) und der Menge F (genau 1 As).

$$G = E \cup F$$

Da der Schnitt der Mengen E und F leer ist, gilt

$$E \cap F = \emptyset \Rightarrow |G| = |E| + |F| = 16 + 224 = 240.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\mathbb{P}(G) = \frac{|G|}{|\Omega_{2x(m.Z.)}|} = \frac{240}{32^2} = \frac{15}{64}$$

Alternativlösung mit Wahrscheinlichkeiten:

$$\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F) = \frac{1}{64} + \frac{7}{32} - 0 = \frac{15}{64}$$

h) ... in fünf Zügen **mit** zurücklegen genau zwei Asse zu ziehen?

$$\binom{5}{2} \cdot (1/8)^2 \cdot (7/8)^3$$

Lösung:

Grundraum $\Omega_{5x(m.Z.)}$ beim 5x ziehen mit Zurücklegen: Es gibt 32 Möglichkeiten für jede der 5 Positionen, also insgesamt

$$|\Omega_{5x(m.Z.)}| = 32^5 = |\text{Var}_5^{32}(\text{m.W.})|$$

Alle günstigen Ereignisse:

- 1. Schritt: Wähle aus 5 Positionen 2 für die Asse aus. Dafür gibt es

$$|\text{Kom}_2^5 \text{ (m.W.)}| = \binom{5}{2} = 10$$

Möglichkeiten.

- 2. Schritt: Befülle diese 2 ausgewählten Positionen mit Assen. Für jede der zwei Positionen gibt es 4 Möglichkeiten, also insgesamt

$$4 \cdot 4 = 16 = |\text{Per}_2^4 \text{ (m.W.)}|$$

Möglichkeiten.

- 3. Schritt: Befülle die restlichen 3 Positionen mit nicht-Assen. Für jede dieser drei Positionen gibt es $32 - 4 = 28$ Möglichkeiten, also insgesamt

$$28^3 = 21952 = |\text{Var}_3^{28} \text{ (m.W.)}|$$

Möglichkeiten.

Damit gilt für die Menge H aller günstigen Ereignisse

$$|H| = \binom{5}{2} \cdot 4^2 \cdot 28^3$$

und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$\mathbb{P}(H) = \frac{|H|}{|\Omega_{5x(m.Z.)}|} = \frac{\binom{5}{2} \cdot 4^2 \cdot 28^3}{32^5} = \frac{1715}{16384}$$

Alternativlösung: Verwende Urnenmodell mit Zurücklegen.

Karten bestehen aus 4 Assen und 28 nicht-Assen. Zufallsvariable X : Anzahl der in $n = 5$ Versuchen gezogenen Assen. Trefferwahrscheinlichkeit in einem Durchgang

$$p = (\mathbb{P}(A)) = \frac{4}{4 + 28} = \frac{1}{8}$$

Nietenwahrscheinlichkeit in einem Durchgang:

$$q = 1 - p = \frac{7}{8}$$

Dann ist

$$\mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^3 = \frac{1715}{16384}$$

wobei die Formel

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

verwendet wurde mit $n = 5$: Anzahl der Versuchen.

- i) ... in zwei Zügen **ohne** zurücklegen zuerst einen schwarzen Buben und dann ein As zu ziehen?

$$\frac{1}{16} \cdot \frac{4}{31} = \frac{1}{124}$$

Lösung:

Grundraum $\Omega_{2x(o.Z.)}$ aller Ereignisse: Es gibt 32 Möglichkeiten, die erste Position zu belegen und 31 Möglichkeit, die zweite Position zu belegen. Also insgesamt gilt

$$|\Omega_{2x(o.Z.)}| = 32 \cdot 31 = |\text{Per}_2^{32} \text{ (o.W.)}|$$

Die Menge I aller günstigen Ereignisse:

- 2 Möglichkeiten, die erste Position mit einem schwarzen Buben zu belegen
- 4 Möglichkeiten, die zweite Position mit einem As zu belegen

insgesamt $2 \cdot 4 = 8$ günstige Ereignisse. Damit ist $|I| = 8$.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(I) = \frac{|I|}{|\Omega_{2x(o.Z.)}|} = \frac{8}{32 \cdot 31} = \frac{1}{124}$$

Alternativlösung

Die Wahrscheinlichkeit, aus 32 Karten in dem ersten Zug eins der beiden Buben zu ziehen ist $\frac{2}{32}$. Die Wahrscheinlichkeit, aus den restlichen 31 Karten einen As zu ziehen ist $\frac{4}{31}$. Damit ist

$$\mathbb{P}(I) = \frac{2}{32} \cdot \frac{4}{31} = \frac{1}{124}$$

j) ... in zwei Zügen **ohne** zurücklegen zwei Asse zu ziehen?

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{3}{31} = \frac{3}{248}$$

Lösung:

Grundraum $\Omega_{2x(o.Z.)}$ ist wie in der vorherigen Teilaufgabe. Der Raum J der günstigen Ereignisse: die erste Position kann beliebig mit einem der 4 Asse belegt werden, die zweite kann mit einem der übrig gebliebenen 3 Asse belegt werden. Insgesamt gilt also $|J| = 4 \cdot 3 = 12$. Die Menge explizit:

$$J = \{(\clubsuit A, \spadesuit A), (\clubsuit A, \diamond A), (\clubsuit A, \heartsuit A), (\spadesuit A, \clubsuit A), (\spadesuit A, \diamond A), (\spadesuit A, \heartsuit A), (\diamond A, \clubsuit A), (\diamond A, \spadesuit A), (\diamond A, \heartsuit A), (\heartsuit A, \clubsuit A), (\heartsuit A, \spadesuit A), (\heartsuit A, \diamond A)\}$$

Damit gilt

$$\mathbb{P}(J) = \frac{|J|}{|\Omega_{2x(o.Z.)}|} = \frac{12}{32 \cdot 31} = \frac{3}{248}$$

Alternativlösung:

Wahrscheinlichkeit, dass eins der 4 Asse im ersten Zug gezogen wird ist $\frac{4}{32}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass eins der 3 übrigen Asse im zweiten Zug (mit nur 31 Karten!) gezogen wird ist $\frac{3}{31}$. Insgesamt gilt also

$$\mathbb{P}(J) = \frac{4}{32} \cdot \frac{3}{31} = \frac{3}{248}$$

k) ... in zwei Zügen **ohne** zurücklegen genau ein As zu ziehen?

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{28}{31} + \frac{7}{8} \cdot \frac{4}{31} = \frac{7}{31}$$

Lösung:

Der Grundraum $\Omega_{2x(o.Z.)}$ ist genauso wie in den vorherigen Teilaufgaben. Die Menge K aller günstigen Ereignisse:

- 4 Möglichkeiten, einen As in der 1. Position zu haben und 28 Möglichkeiten, einen nicht-As in der 2. Position
- 28 Möglichkeiten, einen nicht-As in der 1. Position zu haben und 4 Möglichkeiten, einen As in der 2. Position

Insgesamt gilt $|K| = 4 \cdot 28 + 28 \cdot 4 = 224$ und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$\mathbb{P}(K) = \frac{|K|}{|\Omega_{2x(o.Z.)}|} = \frac{224}{42 \cdot 31} = \frac{7}{31}$$

Alternativlösung:

Wahrscheinlichkeit, einen Ass in der 1. Stelle und keinen Ass in der 2. Stelle zu haben ist $\frac{4}{32} \cdot \frac{28}{31}$.
 Wahrscheinlichkeit, keinen Ass in der 1. Stelle und einen Ass in der 2. Stelle zu haben ist $\frac{28}{32} \cdot \frac{4}{31}$.
 Zusammen:

$$\mathbb{P}(K) = \frac{4}{32} \cdot \frac{28}{31} + \frac{28}{32} \cdot \frac{4}{31} = \frac{7}{31}$$

l) ... in zwei Zügen **ohne** zurücklegen mindestens ein As zu ziehen?

$$\frac{7}{31} + \frac{3}{248} = \frac{59}{248}$$

Lösung:

Grundraum $\Omega_{2x(o.Z.)}$ ist wie in den vorherigen Teilaufgaben. Die Menge L aller günstigen Ereignisse besteht aus der Menge aller Ereignisse mit genau einem Ass (die Menge K) und mit genau 2 Assen (die Menge J):

$$L = K \cup J$$

Da die Mengen K und J disjunkt sind, ist

$$|L| = |K| + |J| = 2 \cdot 4 \cdot 28 + 12 = 236$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\mathbb{P}(L) = \frac{|L|}{|\Omega_{2x(o.Z.)}|} = \frac{236}{31 \cdot 32} = \frac{59}{248}$$

Alternativlösung:

$$\mathbb{P}(L) = \mathbb{P}(K \cup J) = \mathbb{P}(K) + \mathbb{P}(J) - \mathbb{P}(K \cap J) = \frac{7}{31} + \frac{3}{248} - 0 = \frac{59}{248}$$

m) ... in fünf Zügen **ohne** zurücklegen genau zwei Asse zu ziehen?

$$\binom{5}{2} \cdot \frac{4 \cdot 28^3}{32^5} = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{28}{5-2}}{\binom{4+28}{5}}$$

Lösung:

Grundraum $\Omega_{5x(o.Z.)}$:

- 32 Möglichkeiten für die 1. Position
- 31 Möglichkeiten für die 2. Position
- 30 Möglichkeiten für die 3. Position
- 29 Möglichkeiten für die 4. Position
- 28 Möglichkeiten für die 5. Position

insgesamt:

$$|\Omega_{5x(o.Z.)}| = 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 = 32^5 = |\text{Var}_5^{32} \text{ (o.W.)}|$$

Menge M der günstigen Ereignisse:

- Schritt 1: Aus 5 Positionen wähle 2 für Asse aus. Dafür gibt es

$$|\text{Kom}_2^5 \text{ (o.W.)}| = \binom{5}{2} = 10$$

Möglichkeiten

- Schritt 2: Befülle diese zwei Positionen mit Assen (ohne Wiederholung). 4 Möglichkeiten für die erste und 3 Möglichkeiten für die zweite Position:

$$4 \cdot 3 = 12 = |\text{Var}_2^4 \text{ (o.W.)}|$$

Möglichkeiten.

- Schritt 3: Befülle die restlichen 3 Positionen mit nicht Assen (insgesamt 28 Karten, ohne Wiederholung). 28 Möglichkeiten für die erste Position, 27 Möglichkeiten für die zweite und 26 Möglichkeiten für die dritte Position. Insgesamt:

$$28 \cdot 27 \cdot 26 = 28^{\underline{3}} = |\text{Var}_3^{28} \text{ (o.W.)}|$$

Damit ist der Anzahl der Ereignisse in der Menge M :

$$|M| = |\text{Kom}_2^5 \text{ (o.W.)}| \cdot |\text{Var}_2^4 \text{ (o.W.)}| \cdot |\text{Var}_3^{28} \text{ (o.W.)}| = \binom{5}{2} \cdot 12 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26$$

und damit

$$\mathbb{P}(M) = \frac{|M|}{|\Omega_{5x(o.Z.)}|} = \frac{\binom{5}{2} \cdot 12 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28} = \frac{351}{3596}$$

Alternativlösung: Urnenmodell ohne Zurücklegen (die hypergeometrische Verteilung).

Karten bestehen aus 4 Assen und 28 nicht-Assen. Zufallsvariable X : Anzahl der in $n = 5$ Versuchen gezogenen Assen.

Trefferwahrscheinlichkeit in einem Durchgang $p = \frac{4}{4+28} = \frac{1}{8}$. Nietenwahrscheinlichkeit in einem Durchgang $q = 1 - p = \frac{7}{8}$.

Damit ist

$$\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{28}{5-2}}{\binom{4+28}{5}} = \frac{351}{3596}$$



ZUnfachliches/Sonstiges/Text_FroheWeihnachten.tex

Stellen Sie die Gleichung $y = \frac{1}{r^2} \cdot \ln\left(\frac{x}{m} - sa\right)$ möglichst schön um!

$$me^{r^2 y} = x - mas$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{r^2} \cdot \ln\left(\frac{x}{m} - sa\right) &\iff r^2 \cdot y = \ln\left(\frac{x}{m} - sa\right) &\iff e^{r^2 \cdot y} = \frac{x}{m} - sa \\ &\iff m \cdot e^{r^2 \cdot y} = x - msa &\iff me^{r^2 y} = x - mas. \end{aligned}$$



ZUnfachliches/Uebersichten/Text_GriechischesAlphabet.tex

α , A	„alpha“	ξ , Ξ	„xi“	ι , I	„iota“	o , O	„omikron“	π , Π	„pi“
β , B	„beta“*	ζ , Z	„zeta“	κ , K	„kappa“	ω , Ω	„omega“	φ , Φ	„phi“
γ , Γ	„gamma“	η , H	„eta“	λ , Λ	„lambda“	ϱ , P	„rho“	ψ , Ψ	„psi“
δ , Δ	„delta“	ϑ , Θ	„theta“	μ , M	„mü“	σ , Σ	„sigma“	χ , X	„chi“
ε , E	„epsilon“			ν , N	„nü“	τ , T	„tau“*	υ , Υ	„üpsilon“

*Im Neu-Griechischen wird das β /B als „vita“ und das τ /T als „taf“ gesprochen.