

Aufgabenverzeichnis

0	Inhaltsverzeichnis	1
1	ArithLogik/Betrag	5
2	ArithLogik/BinKoeff	6
3	ArithLogik/Geometrie	7
4	ArithLogik/Logik	8
5	ArithLogik/PotWurz	10
6	ArithLogik/SumProd	12
7	ArithLogik/Terme	15
8	ArithLogik/UnGleichungen	19
9	ArithLogik/VollstInd	23
10	ArithLogik/Zahlbereiche	26
11	DGL/ErsteOrd	27
12	DGL/ErsteOrdSubst	31
13	DGL/MitLaplaceTrans	32
14	DGL/NteOrdHom	34
15	DGL/NteOrdInhom	37
16	DGL/PartDGL	40
17	DGL/SysHomDiag	42
18	DGL/ZTests	43
19	DiffEinDim/DiffQuot	44
20	DiffEinDim/DiffRegeln	45
21	DiffEinDim/Geometrisches	48
22	DiffEinDim/Kurvendisk	49
23	DiffEinDim/LHospital	51
24	DiffEinDim/MWS	52
25	DiffEinDim/Optimierung	53
26	DiffEinDim/Taylor	55

27 DiffEinDim/ZUebersichten	56
28 DiffMehrDim/DiffbarPart	57
29 DiffMehrDim/DiffbarRichtung	59
30 DiffMehrDim/DiffbarTotal	60
31 DiffMehrDim/DiffbarVermischt	62
32 DiffMehrDim/ExtremaMitNB	63
33 DiffMehrDim/ExtremaOhneNB	64
34 DiffMehrDim/Geometrisches	66
35 DiffMehrDim/HoehereAbl	67
36 DiffMehrDim/ImplDefFktn	68
37 DiffMehrDim/MWS	70
38 DiffMehrDim/Taylor	71
39 DiffMehrDim/Umkehrbar	72
40 DiffMehrDim/Vektorwertig	73
41 FktAllg/BildUrbild	75
42 FktAllg/Eigenschaften	76
43 FktAllg/Verkettung	78
44 FktEinDim/EigenschaftenReell	79
45 FktEinDim/ExpLn	80
46 FktEinDim/Fortsetzung	82
47 FktEinDim/Graphen	83
48 FktEinDim/Hyperb	85
49 FktEinDim/Polynome	86
50 FktEinDim/Rational	90
51 FktEinDim/Trig	91
52 FktEinDim/Umkehrung	94
53 FktMehrDim/Grenzwerte	95
54 FktMehrDim/Hoehenlinien	97
55 FktMehrDim/Stetigkeit	98
56 Folgen/Definition	100

57 Folgen/FktnFolgen	101
58 Folgen/Haeufung	102
59 Folgen/Komplex	103
60 Folgen/Konvergenz	104
61 Folgen/Rekursiv	105
62 Folgen/Vektorwertig	107
63 GWStetig/FktGW	108
64 GWStetig/GlmUndLStetig	112
65 GWStetig/Stetigkeit	113
66 GWStetig/ZWS	114
67 IntEinDim/DefRiemann	115
68 IntEinDim/Integrale	116
69 IntEinDim/PBZ	119
70 IntEinDim/Partiell	120
71 IntEinDim/Stammfkt	121
72 IntEinDim/SubstRegel	124
73 IntEinDim/Uneigentlich	125
74 IntEinDim/Vermischt	127
75 IntMehrDim/CavalieriRotation	129
76 IntMehrDim/Intervalle	131
77 IntMehrDim/Normalbereiche	133
78 IntMehrDim/StandardSub	137
79 IntMehrDim/Substitution	140
80 IntMehrDim/Theorie	141
81 IntTrafo/Fourier	142
82 IntTrafo/FourierAusrechnen	144
83 KomplAna/Laurentreihen	145
84 KomplAna/Residuensatz	146
85 KomplZahlen/Darstellung	147
86 KomplZahlen/Funktionen	149

87	KomplZahlen/GlgnAlg	150
88	KomplZahlen/GlgnTransz	152
89	KomplZahlen/Kartesisch	153
90	KomplZahlen/Polar	154
91	KomplZahlen/Wurzeln	155
92	KomplZahlen/Zahlenebene	156
93	KurvenOberfl/IntSaetze	158
94	Mengen/Grundbegriffe	160
95	Mengen/Maechtigkeit	161
96	Mengen/Schreibweisen	162
97	Mengen/Skizzieren	164
98	Mengen/Topologie	165
99	Mengen/Verknuepfen	168
100	Numerik/Gleichungen	172
101	Reihen/Bekannt	173
102	Reihen/CauchyProd	175
103	Reihen/Fourierreihen	176
104	Reihen/Komplex	179
105	Reihen/Kriterien	180
106	Reihen/Potenzreihen	182
107	WSTheorie/Begriffe	184
108	WSTheorie/Kombinatorik	185
109	WSTheorie/WSRechnung	188
110	ZUnfachliches/Sonstiges	189
111	ZUnfachliches/Uebersichten	190

Aufgabenblatt 1

ArithLogik/Betrag



ArithLogik/Betrag/Ag_Betrag_UnglFuerBetragAlsDoppelUnglSchreiben.tex

Aufgabe 1.1 (Eigenschaften des Betrags)

Weisen Sie mit Hilfe einer Fallunterscheidung nach, dass für alle reellen x und alle reellen $c \geq 0$ gilt:

$$|x| \leq c \iff -c \leq x \leq c.$$



ArithLogik/Betrag/Ag_Betrag_lineareBetragsglgn.tex

Aufgabe 1.2 (Lineare Betragsgleichungen)

Lösen Sie die folgenden Gleichungen, indem Sie jeweils eine Fallunterscheidung vornehmen. Überprüfen Sie stets, ob die erhaltenen Lösungen den Fallvoraussetzungen genügen!

a) $2x = 2 \cdot |x| - 2$

d) $|x - 4| = 3x + 5$

g) $\left| \frac{2x + 4}{x - 3} \right| = 1$

b) $|3x - 5| = 2$

e) $|x + 4| = 2 \cdot |x - 1|$

h) $|x + 2| + |x + 4| - 12 = 0$

c) $|3x - 5| = x - 2$

f) $\frac{|1 + x|}{|3 - x|} = 5$

i) $|x + 1| + |2x + 3| = |x - 4|$



ArithLogik/Betrag/Ag_Betrag_lineareBetragsunglgn.tex

Aufgabe 1.3 (lineare Betragsungleichungen)

Geben Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen an!

a) $|4x + 1| > -2$

d) $\frac{|7 - 3x|}{2x + 3} < 1$

f) $\left| \frac{3x - 5}{3 - 2x} \right| \geq 1$

b) $|7 - 3x| < 5$

e) $|2x - 5| + |4x + 5| < 9 + |3x|$

g) $\frac{|x - 3| + 2x - 2}{|5 - 2x| - 2} \geq 1$

c) $|7 - 3x| < 2x + 3$

Aufgabenblatt 2

ArithLogik/BinKoeff



ArithLogik/BinKoeff/Ag_BinKoeff_AlleAchtUeberKMitFormelUndPascalBerechnen.tex

Aufgabe 2.4 (Binomialkoeffizienten — Berechnungsformel und Pascal'sches-Dreieck)

Ermitteln Sie für alle $k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ die Binomialkoeffizienten $\binom{8}{k}$

- a) mittels der Berechnungsformel! b) mit Hilfe des Pascal'schen Dreiecks!



ArithLogik/BinKoeff/Ag_BinKoeff_FakUndBinKoeffKennenlernen.tex

Aufgabe 2.5 (Fakultät und Binomialkoeffizient)

Seien $\ell \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}$.

- a) Berechnen Sie $5!$ und $(3!)!$!
- b) Berechnen Sie $\binom{10}{4}$ und $\binom{12}{5}$!
- c) Ist $(m + \ell)!$ dasselbe wie $(m! + \ell)!$?
- d) In welchem Fall ist $(m \cdot \ell)!$ dasselbe wie $(m! \cdot \ell)!$?
- e) Kürzen Sie $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ so weit wie möglich!
- f) Bringen Sie den Term $\frac{n^3 - 7n - 6}{(n+2)!} - \frac{1}{(n-1)!}$ auf einen Bruch!
- g) Wollen Sie wissen, warum Binomialkoeffizienten mit dem Pascal'schen Dreieck berechnet werden können?
- Rechnen Sie $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ nach!

Aufgabenblatt 3

ArithLogik/Geometrie

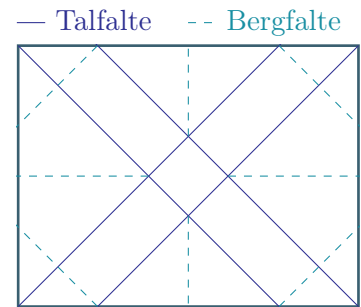


ArithLogik/Geometrie/Ag_PythagorasUndLGS_BoxFalten.tex

Aufgabe 3.6 (Falten einer Box aus Papier)

Mit der rechts stehenden Faltanleitung kann man aus einem rechteckigen Papier der Breite $b \in \mathbb{R}$ und der Länge $\ell \in \mathbb{R}$ mit $0 < b < \ell < 2b$ eine quaderförmige oben offene Box falten.

- Welche Voraussetzungen muss man an b und ℓ stellen, damit die Box breiter wird als hoch?
- Welche Seitenlängen muss das Papier haben, damit die fertige Box die Maße $e \times e \times \pi$ bekommt, wobei $e \approx 2.71828$ die Euler'sche Zahl und $\pi \approx 3.14159$ die Kreiszahl bezeichnen?



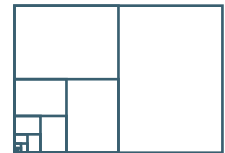
Die vollständige Faltanleitung stammt von Stephen Hecht.



ArithLogik/Geometrie/Ag_Pythagoras_DINPapierEckenAufeinanderfalten.tex

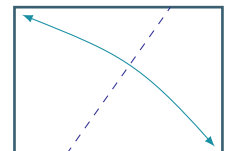
Aufgabe 3.7 (DIN-A-Papier knicken)

- Die A-Serie der DIN-Papiere basiert auf vier Vorgaben ($n \in \mathbb{N}_0$):
 - Ein DIN-A0-Papier ist 1 m^2 groß.
 - Ein DIN-A n - und ein DIN-A($n+1$)-Papier haben eine gleichlange Seite.
 - Ein DIN-A n -Papier ist doppelt so groß wie ein DIN-A($n+1$)-Papier.
 - Alle Papiere sind rechteckig und haben das gleiche Seitenverhältnis.



Berechnen Sie das Seitenverhältnis der Papiere der DIN-A-Serie!

- Wenn Sie zwei gegenüberliegende Ecken eines Papiers der DIN-A-Serie aufeinander falten, werden die langen Seiten des Papiers in zwei Teile geteilt. Geben Sie eine Vermutung an, in welchem Längen-Verhältnis die beiden Teile zueinander stehen! Können Sie Ihre Vermutung beweisen?



ArithLogik/Geometrie/Ag_Winkel_GradUndBogenmassIneinanderUmrechnen.tex

Aufgabe 3.8 (Grad- und Bogenmaß)

Rechnen Sie die folgenden Winkel vom Grad- ins Bogenmaß bzw. vom Bogen- ins Gradmaß um!

Gradmaß	20°	−96°	118.6°		297°	371.5°	
Bogenmaß		$\frac{\pi}{3}$		$-\frac{2}{7} \cdot \pi$	5.621		$-\frac{2}{37} \cdot \pi$

Hinweis: Sie können dazu einen Taschenrechner oder eine Mathe-App benutzen.



ArithLogik/Geometrie/Text_LinUnabh_PapierseiteDritteln.txt

Aufgabe 3.9 ()

Die Aufgabe

VektorraumRn/LinearUnabhaengigBasis/Ag_LinUnabh_PapierseiteDritteln
aus der Aufgabensammlung zur Linearen Algebra kann auch mit Hilfe der
Strahlensätze bearbeitet werden.

Aufgabenblatt 4

ArithLogik/Logik



ArithLogik/Logik/Ag_Logik_AussagenNegieren.tex

Aufgabe 4.10 (Negation von Aussagen)

Verneinen Sie die folgenden Aussagen:

- a) A : Weiß ist keine Farbe und jedes Bild ist von Hand gemalt.
- b) B : Alle Fische leben im Wasser.
- c) C : Es gibt eine ganzzahlige Quadratzahl, die gerade ist.
- d) D : Jede natürliche Zahl ist größer als 1.



ArithLogik/Logik/Ag_Logik_Beweismethoden.tex

Aufgabe 4.11 (Beweismethoden)

Zeigen Sie die Gültigkeit der nachstehenden Aussagen:

- a) mit Fallunterscheidung: $\forall n \in \mathbb{N} : 3 \text{ teilt } n \cdot \text{ggT}(n^2 - 3n - 1, 3)$.
- b) direkt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -23$: $\sqrt{2x + 46} - 2x = 4 \implies x \in \{\frac{3}{2}, -5\}$.
Frage: Was ist noch zu zeigen, um die Lösungsmenge der Gleichung anzugeben? Bestimmen Sie diese.
- c) indirekt für alle $n \in \mathbb{Z}$: $3 \text{ teilt } n^2 \implies 3 \text{ teilt } n$.
- d) mittels Widerspruch, dass $\sqrt{3}$ irrational ist.



ArithLogik/Logik/Ag_Logik_Beweismethoden2.tex

Aufgabe 4.12 (Beweismethoden)

Zeigen Sie die Gültigkeit der nachstehenden Aussagen.

- a) Mit einer Kontraposition:

Seien $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Es gilt: $\left(\sum_{k=1}^n |x_k| = 0 \right) \implies (x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0)$.

- b) Mit einem Widerspruch:

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 + ax$.

Es gilt: $(\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) > 0) \implies (\forall x \in \mathbb{R} : (f(x) = 0) \implies (x = 0))$.

(D.h., falls die Ableitung von f überall positiv ist, ist Null die einzige mögliche Nullstelle.)

- c) Mit einem direkten Beweis:

Seien $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$. Es gilt: $((x \in \mathbb{Z}) \wedge (x^3 + a_2x^2 + a_1x + 3 = 0)) \implies (x \in \{1, -1, 3, -3\})$.

- d) Mit einem direkten Beweis:

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ und $n_\varepsilon = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$. Es gilt: $((n \in \mathbb{N}) \wedge (n > n_\varepsilon)) \implies \left(\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon \right)$.



ArithLogik/Logik/Ag_Logik_Minibeweise1.tex

Aufgabe 4.13 (Aussagen beweisen bzw. widerlegen)

Folgende Aussagen sind *wahr*. Weisen Sie dies mithilfe einer kurzen Beweiskette nach.

- a) $\forall x \in \mathbb{R} : x^3 > 1 \implies x^6 > 1$.
- b) $\forall a, b \in \mathbb{N} : a \text{ und } b \text{ gerade} \implies 3a - 2b \text{ gerade}$.
- c) $\forall x, y \in \mathbb{R} : 3x < 2y - 6 \iff y > 1.5x + 3$.
- d) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}_{>0} : x < y \iff x^2 < y^2$.

Folgende Aussagen sind *falsch*. Geben Sie zum Nachweis jeweils *ein* Gegenbeispiel an.

- e) $\forall x \in \mathbb{R} : x^3 > 1 \iff x^6 > 1$.
- f) $\forall a, b \in \mathbb{N} : a \text{ gerade und } b \text{ gerade} \iff 3a - 2b \text{ gerade}$.
- g) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : x < y \iff x^2 < y^2$.



ArithLogik/Logik/Ag_Logik_Quantoren.tex

Aufgabe 4.14 (Aussagen entscheiden)

Entscheiden Sie, ob diese quantisierten Aussagen für reelle Zahlen $x, y, z \in \mathbb{R}$ wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils eine kurze Begründung (bei $\exists$ müssen Sie sagen, welcher Wert existiert). Beachten Sie die Reihenfolge der Quantoren:

- a) $\forall x \exists y : x^2 + 1 = \sqrt{y + 1}$
- b) $\forall y \exists x : x^2 + 1 = \sqrt{y + 1}$
- c) $\forall x \forall y \exists z : x < y < z$
- d) $\forall x \exists y \exists z : x < y < z$
- e) $\exists x \forall y \exists z : x < y < z$



ArithLogik/Logik/Ag_Logik_VerknuepfungenPruefen_wiwi.tex

Aufgabe 4.15 (Wahrheitstafeln für verknüpfte Aussagen)

In den Vorlesungsmaterialien sind Rechengesetze für verknüpfte Aussagen formuliert. Bestätigen Sie

- das zweite Assoziativgesetz $(A \vee (B \vee C)) = ((A \vee B) \vee C)$,
- das zweite Distributivgesetz $(A \vee (B \wedge C)) = ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$,
- das zweite Gesetz von De Morgan $\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$,
- die Kontraposition $(A \Rightarrow B) \iff (\neg B \Rightarrow \neg A)$

anhand einer Wahrheitstafel.

Aufgabenblatt 5

ArithLogik/PotWurz



ArithLogik/PotWurz/Ag_Potenzen_BuchstabeBasisBuchstabeExponent.tex

Aufgabe 5.16 (Potenzen mit variablen Basen und variablen Exponenten vereinfachen)

Seien $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{R}$ mit $\min(\{a; b; c; x; y; z\}) > 0$ und $x > y$.

Seien $n \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{R}$. Vereinfachen Sie die folgenden Terme!

a) $\frac{3a^{n+1} \cdot 6x^{n+7} \cdot 9b^{x+1}}{3x^n \cdot 2b^{x+1} \cdot 3a}$

d) $\frac{a^{5x-2y}}{b^{6m-1}} : \frac{a^{4x+y}}{b^{m-2}}$

b) $\frac{a^{n+1} \cdot a^{n+1} \cdot a^n}{a^0 \cdot a^n \cdot a^{n-1}}$

e) $\frac{42a^2 \cdot b^3 \cdot x^{n+1}}{36c^3 \cdot y^2 \cdot z^{n-3}} : \frac{70a^3 \cdot b^2 \cdot x^{n+2}}{54c^2 \cdot y^4 \cdot z^{n-2}}$

c) $\frac{a^{3n-x} \cdot b^{2n+x}}{a^{n+2x} \cdot b^{2n-x}} \cdot \frac{x^{3n+2} \cdot y^{2n-1}}{x^{2n-3} \cdot y^{n+1}}$

f) $\frac{(ax - ay)^m \cdot (3bx + 3by)^n}{(cx^2 - cy^2)^{m+n}}$



ArithLogik/PotWurz/Ag_Potenzen_BuchstabeBasisZahlExponent.tex

Aufgabe 5.17 (Potenzen mit variablen Basen und ganzzahligen Exponenten vereinfachen)

Vereinfachen Sie die nachstehenden Terme!

a) $\frac{18^4 \cdot (a^2 \cdot b)^2}{27^3 \cdot (2a \cdot \sqrt{a} \cdot b)^2}$

d) $\left(\frac{45b^2 \cdot y^3}{48a^3 \cdot x}\right)^2 \cdot \left(\frac{6b \cdot x^3}{9a \cdot y^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{75b^3 \cdot x^3}{36a^4 \cdot y}\right)^2$

b) $\frac{(5ab)^3 \cdot (5ba^2)^4}{s^2 \cdot 3ab^2 \cdot (25a \cdot \sqrt{b})^2}$

e) $\frac{a^{-2} \cdot x^{-4} \cdot y^{-6}}{b^3 \cdot c^{-4} \cdot z^{-5}} : \frac{a^{-3} \cdot b^{-5} \cdot x^{-3}}{c^{-5} \cdot y^6 \cdot z^{-7}}$

c) $\left(\frac{4b^2 \cdot y^2}{6a^2 \cdot x^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{8a^3 \cdot y^2}{6b^3 \cdot x^3}\right)^4 \cdot \left(\frac{18b^3 \cdot x^6}{16a^3 \cdot y^3}\right)^2$

f) $\frac{27x^{-5} \cdot y^{-6} \cdot z^{-1}}{45x^{-4} \cdot y^{-5} \cdot z^0} \cdot \frac{49x^{-2} \cdot y^{-3} \cdot z^{-4}}{42x^{-3} \cdot y^{-4} \cdot z^{-3}}$



ArithLogik/PotWurz/Ag_Potenzen_ZahlpotenzenAlsBruchSchreiben.tex

Aufgabe 5.18 (Zahl-Potenzen als gekürzten Bruch schreiben)

Schreiben Sie die folgenden Zahlen als einen vollständig gekürzten Bruch mit positivem Nenner!

a) $\left(-\frac{1}{3 \cdot 2^{-4}}\right)^{-3}$

c) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-3}$

e) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} : \left(\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}\right)^{-2}$

b) $4^{-2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-4}$

d) $\left(1 + \frac{3}{4}\right)^2 : \left(2 + \frac{1}{3}\right)^3$

f) $\left(\frac{\left(\frac{9}{8}\right)^{-2}}{\left(\frac{16}{6}\right)^2}\right)^{-3}$



ArithLogik/PotWurz/Ag_Wurzeln_GlgnMitWurzelnLoesen.tex

Aufgabe 5.19 (Gleichungen mit Wurzeln lösen)

Geben Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen an!

a) $x^2 + 12 = 61$

c) $6x^2 - \frac{3}{75} = \frac{1}{15}$

e) $x^3 + 190 = 65$

g) $4x^5 - 28 = \frac{19}{8}$

b) $4x^2 = 144$

d) $-\frac{x^2}{3} + \frac{5}{2} = \frac{7}{54}$

f) $3x^6 - 45 = 83 + x^6$

h) $\frac{x^5}{27} + 5^2 = 4^2$



ArithLogik/PotWurz/Ag_Wurzeln_NennerRationalMachenBuchstabenUndZahlen.tex

Aufgabe 5.20 (Rechnen mit Wurzeltermen — Nenner rational machen)

Seien $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R} \setminus \{x\}$ mit $\min(\{x; y\}) > 0$. Formulieren Sie die Brüche durch Erweitern so um, dass schließlich im Nenner keine Wurzelterme mehr stehen!

a) $\frac{x}{\sqrt[3]{x}}$

c) $\frac{x}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

e) $\frac{4 + \sqrt{7}}{\sqrt{7} - 2}$

g) $\frac{\frac{22}{1-\sqrt{3}}}{\sqrt{5}-4}$

b) $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x^5}}$

d) $\frac{x}{\sqrt{x-y}}$

f) $\frac{\sqrt{11} - \sqrt{10}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$



ArithLogik/PotWurz/Ag_Wurzeln_WurzeltermeMitBuchstabenVereinfachen.tex

Aufgabe 5.21 (Potenzen von Wurzeln von Potenzen)

Seien $t \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{R}$ mit $\min(\{t; x; y; z\}) > 0$.

Vereinfachen Sie die folgenden Terme und formulieren Sie die Ergebnisse ohne Wurzeln im Nenner!

a) $\frac{x^3}{\sqrt{x^2}}$

c) $\frac{x-y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

f) $\sqrt[4]{x^3} \cdot \sqrt[4]{(-2y)^6} \cdot (-\sqrt{2})^4 : \sqrt[8]{x^5 \cdot y^{-\frac{1}{3}}}$

b) $\sqrt[7]{z} \cdot \sqrt[5]{z^3} \cdot \sqrt[15]{z^4}$

d) $\frac{9-t}{(\sqrt{t}+3) \cdot (2-\sqrt{t})}$

g) $\left(\frac{\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt{y^2} \cdot (z^2 \cdot x^3)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{x^3} \cdot y^6 \cdot \sqrt[3]{z^4}} \right)^{-\frac{1}{2}}$

e) $\sqrt[3]{\sqrt{x \cdot y^{-2}} \cdot \sqrt[4]{x^2 \cdot y}} \cdot \sqrt[6]{x^2 \cdot y^{-3}}$



ArithLogik/PotWurz/Ag_Wurzeln_WurzeltermeMitZahlenVereinfachen.tex

Aufgabe 5.22 (Zahlen mit Wurzeln vereinfachen)

Geben Sie möglichst einfache Darstellungen der folgenden Zahlen an!

a) $\sqrt{16 \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt{16}}$

b) $\sqrt[5]{102\,400\,000}$

c) $(\sqrt{3} \cdot \sqrt[5]{3^2})^{10}$

d) $(\sqrt{75} - \sqrt{12})^2$



ArithLogik/PotWurz/Text_Glgn_WurzelGlgnFuenfVonSechsZweimalQuadrieren.txt

Aufgabe 5.23 ()

Eine Aufgabe zum Lösen von Wurzelgleichungen findet sich in
ArithLogik/UnGleichungen/Ag_Glgn_WurzelGlgnFuenfVonSechsZweimalQuadrieren

Aufgabenblatt 6

ArithLogik/SumProd



ArithLogik/SumProd/Ag_Grundlagen_Indextransformation_mittel.tex

Aufgabe 6.24 (Indextransformation)

Führen Sie die angegebene Indextransformation durch und vereinfachen Sie die resultierenden Terme!

a) $\prod_{\ell=0}^{q-1} \frac{\ell+2}{q+\ell+1} \quad (z = \ell+1)$

b) $\prod_{j=1}^n \left(\frac{n+1}{j} - 1 \right) \quad (k = n-j)$



ArithLogik/SumProd/Ag_Grundlagen_SummenzeichenZahlen_leicht.tex

Aufgabe 6.25 (Summen- und Produktzeichen)

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die folgenden Zahlen!

a) $\sum_{j=4}^6 j$

e) $\sum_{\nu=1}^4 4^{4-\nu} \cdot 3^{\nu}$

i) $\sum_{c=1}^4 \frac{1}{c^2 + c}$

m) $\prod_{\mu=0}^4 \frac{\mu+2}{\mu+1}$

b) $\sum_{k=2}^4 \frac{1}{k-1}$

f) $\sum_{j=-4}^4 3$

j) $\prod_{\nu=2}^6 (\nu-1)$

n) $\prod_{q=1}^5 \left(\frac{q+1}{q} \right)^q$

c) $\sum_{\ell=0}^3 \frac{2}{\ell^2 + 1}$

g) $\sum_{m=0}^5 (-1)^m$

k) $\prod_{p=1}^4 \frac{3-p}{3}$

o) $\sum_{k=1}^4 ak \cdot \sum_{j=1}^4 \frac{b}{j}$

d) $\sum_{k=-2}^0 3k$

h) $\sum_{\lambda=0}^5 \lambda \cdot (\lambda-1)$

l) $\prod_{z=-3}^0 \frac{z-1}{2}$

p) $\sum_{k=1}^4 ak \cdot \sum_{j=k}^4 \frac{b}{j}$



ArithLogik/SumProd/Ag_SumProd_DoppelteIndexverschInTeleskopProd.tex

Aufgabe 6.26 (Eine zweifache Indexverschiebung)

Das Produkt $\prod_{\ell=2}^{200} \frac{\ell^2 - 1}{\ell^2}$ kann man mit Hilfe von Indexverschiebungen berechnen.

- Schreiben Sie das Produkt mit Hilfe von vier Produktzeichen: je zwei im Zähler und im Nenner!
Tipp: Nutzen Sie eine binomische Formel!
- Nehmen Sie in insgesamt zwei der vier Produkten eine sinnvolle Indexverschiebung vor!
- Ziehen Sie aus jedem Produkt je einen Faktor heraus, um im Anschluss kürzen zu können und so leicht das Ergebnis des Ursprungsprodukts zu berechnen!



ArithLogik/SumProd/Ag_SumProd_ErsteFormelnNutzenGeomLattenzaunGauss.tex

Aufgabe 6.27 (Rechnen mit Summen)

Seien $n \in \mathbb{N} \setminus \{1; 2\}$, $p \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{N}_0$ drei vorgegebene Parameter.

Verwenden Sie Ihnen bekannte Summen, um die folgenden Terme zu berechnen!

a) $\sum_{k=-10}^5 2^{-k}$

b) $\sum_{k=1}^n (n-k)^2 - \sum_{\ell=2}^{n-1} (1+\ell)^2$

c) $\sum_{k=1}^p \sum_{\ell=0}^q (k\ell + 2^\ell)$



ArithLogik/SumProd/Ag_SumProd_ErsteSummenUndProdukte.tex

Aufgabe 6.28 (Summen- und Produktzeichen)

Berechnen Sie die folgenden Summen und Produkte, indem Sie sie zunächst ausschreiben!

a) $\sum_{k=-2}^3 (5k+1)$

d) $\sum_{k=2}^6 \frac{k-1}{k}$

g) $\sum_{k=1}^4 \sum_{\ell=0}^2 (k\ell + 2^\ell)$

j) $\sum_{k=0}^3 \prod_{\ell=1}^7 \frac{k}{\ell}$

b) $\prod_{k=2}^6 \frac{k^2-1}{k^2}$

e) $\sum_{k=0}^{11} (-1)^n \cdot n^2$

h) $\prod_{k=-1}^2 \prod_{\ell=3}^6 \frac{2k-\ell}{2k+\ell}$

k) $\sum_{k=0}^3 \prod_{\ell=1+k}^{7-k} \frac{k}{\ell}$

c) $\sum_{k=2}^6 \frac{k^2-1}{k^2}$

f) $\sum_{k=-5}^6 7$

i) $\sum_{k=-1}^3 \sum_{\ell=k}^{\max(\{2;k\})} k^{2\ell}$

l) $\prod_{k=-4}^0 \sum_{\ell=2}^{2-k} \frac{(-1)^\ell \cdot \ell^3}{k+5}$



ArithLogik/SumProd/Ag_SumProd_KleinenGaussNachGaussIdeeBeweisen.tex

Aufgabe 6.29 (Beweis der „kleinen Gauß-Formel“)

Beweisen Sie die „kleine Gauß-Formel“ $\sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ auf dem folgenden Weg!

- Teilen Sie die Summe für den Fall, dass $n \in \mathbb{N}$ gerade ist, in der Mitte auf!
- Machen Sie in einer der beiden Summen die Indexverschiebung $\ell = 1 - k$!
- Verschieben Sie den Index der anderen Summe so, dass die Summationsgrenzen beider resultierenden Summen identisch werden!
- Fassen Sie die beiden Summen zu einer Summe zusammen, vereinfachen Sie die Summanden dieser Summe und berechnen Sie den resultierenden Term!
- Verwenden Sie das bereits gezeigte Resultat zu geraden Zahlen nun beim Beweis für den Fall, in dem $n \in \mathbb{N}$ ungerade ist!



ArithLogik/SumProd/Ag_SumProd_TeleskopMitFibonacciBasiertenSummandenOhneFolgennotation.tex

Aufgabe 6.30 (Teleskopsummen mit Fibonacci-basierten Summanden)

Die Fibonacci-Zahlen $F: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit $n \mapsto F(n)$ werden rekursiv definiert durch

$$F(0) := 0, \quad F(1) := 1 \quad \text{und} \quad F(n+1) := F(n) + F(n-1) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Die Fibonacci-Zahlen erfüllen die folgenden Aussagen (die Sie ohne Beweis verwenden dürfen):

- Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $F(n) \leq F(n+1)$.
- Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $m \in \mathbb{N}_0 \setminus \{n\}$ gilt $F(n) = F(m)$ genau dann, wenn $\{n; m\} = \{1; 2\}$ gilt.
- Für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gilt $\frac{1}{F(n-1) \cdot F(n+1)} = \frac{1}{F(n-1) \cdot F(n)} - \frac{1}{F(n) \cdot F(n+1)}$.

- a) Berechnen Sie alle einstelligen und alle zweistelligen Fibonacci-Zahlen!

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{F(k-1) \cdot F(k+1)} \text{ an!}$$

- b) Geben Sie für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ eine Darstellung ohne Summenzeichen für

- c) Finden Sie auch für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ eine Summenzeichen-freie Darstellung von

$$\sum_{k=2}^n \frac{F(k)}{F(k-1) \cdot F(k+1)}?$$

- d) Welcher Grenzwert ergibt sich jeweils für die beiden Summen aus den Aufgabenteilen b) und c) beim Grenzübergang $n \rightarrow \infty$?



ArithLogik/SumProd/Ag_SumProd_TeleskopSummandVereinfachenUndUmEinsVerschieben.tex

Aufgabe 6.31 (Teleskopsummen)

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$. Schreiben Sie die folgenden Terme ohne Summenzeichen oder Pünktchen!

a) $\sum_{k=1}^n \left(\frac{\sqrt{k}}{(k+1)^2} - \sqrt{\frac{k-1}{k^4}} \right)$

b) $\sum_{\ell=1}^m \left(\frac{\sqrt{\ell+1}}{2 \cdot (\ell+1)!} - \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\ell} \cdot (\ell-1)!} \right)$



ArithLogik/SumProd/Ag_SummeFakultaet_HermitePolynome.tex

Aufgabe 6.32 (Hermite-Polynome als Summe)

Die Hermite-Polynome $H_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sind unter anderem in der Physik von Bedeutung. Eine mögliche Darstellung erfolgt über die Summe in der üblichen Schreibweise

$$H_n(x) = (-1)^n \sum_{\substack{k_1+2k_2=n \\ k_1, k_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}}} \frac{n!}{k_1!k_2!} (-1)^{k_1+k_2} (2x)^{k_1}.$$

Werten Sie die Summe für $n \leq 3$ aus, um eine explizite Darstellung der ersten Polynome zu erhalten.

Aufgabenblatt 7

ArithLogik/Terme



ArithLogik/Terme/Ag_BinomForm_BeweisArithGeomMittelUndPythTripel.tex

Aufgabe 7.33 (Kleine Beweise mit Verwendung der binomischen Formeln)

Seien $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$, sowie $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$ und $y \geq 0$.

- Zeigen Sie, dass $2mn$ und $(m^2 - n^2)$ Seitenlängen von rechtwinkligen Dreiecken mit ganzzahligen Seitenlängen sind! Wie lang ist die dritte Seite?
- Zeigen Sie die Ungleichung $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ vom geometrischen und arithmetischen Mittel!



ArithLogik/Terme/Ag_BinomForm_HinUndZurueckAnwenden.tex

Aufgabe 7.34 (Binomische Formeln)

Seien $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ mit $ac \geq 0$.

Formulieren Sie die folgenden Terme mit Hilfe der binomischen Formeln um!

- $169a^2 - 130ab + 25b^2$
- $9a^4b^2 + 12a^2b + 4$
- $(a + b + 1) \cdot (a + b - 1)$
- $a^2 - 2ab + 2b^2 + 2b + 1$
- $(\sqrt{ac} - 1) \cdot (-1 - \sqrt{ac})$
- $(-5a - 3b)^2 + (-5a + 3b)^2$



ArithLogik/Terme/Ag_BinomForm_TrinomischeFormelAllgemeinUndKonkret.tex

Aufgabe 7.35 (Die erste „trinomische Formel“)

Seien $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$ und $D \in \mathbb{R}$ mit $D \neq 0$.

- Rechnen Sie nach, dass

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

für alle reellen Zahlen $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt!

- Faktorisieren Sie $4x^2 - 16xy + 16y^2 + 25z^4 + 20xz^2 - 40yz^2$ mit Hilfe der obigen Formel!
- Faktorisieren Sie $\frac{A^2}{4} + 3AB^2 - \frac{4A}{D} + 9B^4 - \frac{24B^2}{D} + \frac{16}{D^2}$ so weit wie möglich!



ArithLogik/Terme/Ag_BinomForm_UngewoehnlicheQuadratischeErgaenzung.tex

Aufgabe 7.36 (Ungewöhnliche quadratische Ergänzung)

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $5a^2 \cdot b \neq 4a^4 + 3b^2$.

Führen Sie eine quadratische Ergänzung aus, um im Bruch $\frac{16a^8 - a^4 \cdot b^2 + 9b^4}{4a^4 - 5a^2 \cdot b + 3b^2}$ kürzen zu können!



ArithLogik/Terme/Ag_BinomSatz_EinfuehrungMitBuchstaben.tex

Aufgabe 7.37 (Binomischer Satz)

Seien $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Schreiben Sie die folgenden Potenzausdrücke ohne Klammern!

- $(2a + b)^3$
- $\left(3a - \frac{b}{2}\right)^4$
- $\left(\frac{1}{c} + c^2\right)^5$
- $\left(\frac{8a}{3} \cdot \frac{9}{4c}\right)^{11}$



ArithLogik/Terme/Ag_Logarithmus_Werte_berechnen.tex

Aufgabe 7.38 (Logarithmen zu unterschiedlichen Basen)

Berechnen Sie:

- a) $\text{lb}(4)$ c) $\log_3(81)$ e) $\lg(0.001)$ g) $\lg(1\,000\,000)$ i) $\log_3\left(\frac{1}{27}\right)$
b) $\text{lb}\left(\frac{1}{4}\right)$ d) $\log_5(25)$ f) $\lg(\sqrt{10})$ h) $\log_{17}(1)$ j) $\log_4(4\,096)$



ArithLogik/Terme/Ag_Terme_AusklammernUndPotenzgesetzeGemischt.tex

Aufgabe 7.39 (Rechnen mit Potenzen)

Seien $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{Z}$.

Faktorisieren Sie die Terme möglichst weit!

- a) $12a^2 \cdot b - 6a \cdot b^2 - 15a^2 \cdot b + 6a \cdot b^2 - 7a^2 \cdot b$ c) $-\left(\frac{-1}{c^{-2}} \cdot \frac{-1}{c^{-2}} \cdot \frac{-1}{c^{-2}}\right)$
b) $(3a + 2b) \cdot x^4 - x^4 \cdot (2b - 3a) + x^4 \cdot (3a + 2b)$ d) $\frac{18y^{n+4}}{2z^{5n+7}} : \frac{4y^{7-3n}}{9z^{8+5n}}$



ArithLogik/Terme/Ag_Terme_BruchrechnungPlusMinusMalGeteilt.tex

Aufgabe 7.40 (Bruchrechnung)

Fassen Sie die folgenden Terme zu einem Bruch mit je einer Zahl in Zähler und Nenner zusammen!

- a) $\frac{3}{7} + \frac{7}{3}$ d) $10 - \frac{17}{2} + \frac{6}{5}$ g) $\frac{7}{4} \cdot \frac{14}{3} - \frac{19}{10}$ j) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} - \frac{3}{4} : \frac{7}{2}$
b) $3 - \frac{8}{3}$ e) $\frac{12}{5} + 4 - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}$ h) $-\frac{6}{4} : \frac{3}{7} + \frac{1}{2}$ k) $\frac{\frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{6}}{\frac{7}{8} - \frac{10}{9} + \frac{11}{12}}$
c) $\frac{17}{4} \cdot \frac{4}{11}$ f) $\frac{11}{7} \cdot 2 - \frac{11}{3} : \frac{2}{5}$ i) $\frac{\frac{8}{3} - \frac{9}{4} + \frac{3}{5}}{\frac{2}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{7}{2}}$ l) $\frac{\frac{11}{12} - \frac{12}{11} + \frac{11}{9}}{\frac{1}{6} - \frac{4}{11} + \frac{11}{12}}$



ArithLogik/Terme/Ag_Terme_EinsetzenUndVereinfachen_VKM.tex

Aufgabe 7.41 (Terme ineinander einsetzen und vereinfachen)

Setzen Sie jeweils den Term B in den Term A ein und vereinfachen Sie den dabei entstehenden Term $A(B)$ so weit wie möglich.

- a) $A: 2x - 3y$ d) $A: x - xy$ g) $A: \frac{1}{x} - 3b$
 $B: x = 2 - y$ $B: y = \frac{1}{x} - 1$ $B: x = 2a + 3b$
b) $A: 2x - 3y$ e) $A: 2x - 4ax$ h) $A: \frac{-2(y^2-1)}{x^2}$
 $B: y = 2 - x$ $B: a = x - 1$ $B: x = \frac{1}{y} - y$
c) $A: x - xy$ f) $A: 2x - 4ax$ i) $A: x + \frac{2}{x}$
 $B: x = y + 1$ $B: x = a^2 - 2a - 1$ $B: x = z - \frac{1}{z}$



ArithLogik/Terme/Ag_Terme_Faktorisieren.tex

Aufgabe 7.42 (Produktdarstellung von Termen)

Seien $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$.

Faktorisieren Sie die folgenden Terme so weit wie möglich!

- a) $-4x - 16$ d) $192 \cdot x^2 \cdot y^2 + 216 \cdot x^3 \cdot y - 144 \cdot x \cdot y^2$
b) $49y^2 - 64$ e) $-(u - v) \cdot (u + v) + 2u \cdot (u + v)$
c) $ax - ay + bx - by$ f) $(2m - n)^2 - (n + 2m)^2$



ArithLogik/Terme/Ag_Terme_Logarithmengesetze1.tex

Aufgabe 7.43 (Logarithmenterme umschreiben)

Formen Sie die Terme so um, dass die Logarithmen nur noch auf einzelne Variablen oder auf möglichst einfach gebaute Terme aus einzelnen Variablen angewandt werden:

a) $\ln\left(\frac{\sqrt{a} \cdot b^2}{\sqrt[4]{c}}\right)$

c) $\ln(e \cdot \sqrt[3]{e})$

e) $\ln\left(\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2^3}\right)$

b) $\ln\left(\left(\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[4]{b}}{\sqrt[10]{c}}\right)^{10}\right)$

d) $\ln\left(\frac{\sqrt[5]{x^2} \cdot (\sqrt[6]{y})^2}{\sqrt{u} \cdot \sqrt{v}}\right)$

f) $\ln\left(\left(\frac{a^2 - \sqrt[7]{2-x}}{\sqrt{4f+2s^4}}\right)^4\right)$



ArithLogik/Terme/Ag_Terme_Logarithmengesetze2.tex

Aufgabe 7.44 (Logarithmenterme vereinfachen)

Fassen Sie so zusammen, dass nur noch ein Logarithmus gezogen werden muss!

a) $2\ln(u) + 3\ln(v)$

c) $\ln(x^2) + \frac{1}{3}\ln(y) - \frac{2}{5}\ln(z)$

b) $\ln(u+v) + \ln((u+v)^2) - \frac{1}{2}\ln(u) - \frac{1}{3}\ln(v)$

d) $\ln(11) - 2\ln(7x) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x}\right)$



ArithLogik/Terme/Ag_Terme_OhneKlammernSchreibenUndZusammenfassen.tex

Aufgabe 7.45 (Rechnen mit Termen)

Seien $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$. Formen Sie die folgenden Terme so um, dass keine Klammern mehr auftreten, und fassen Sie im Anschluss so weit wie möglich zusammen ohne Klammern zu verwenden!

a) $7a - 3b + (-a + 2c) + (3c - 6b) - (6a - 3c)$

e) $(7a - 5b) \cdot (3a + 4b) - (5a - 9b) \cdot (4a - b)$

b) $5a + (7c - (2a - 3b)) - (4c - a + b)$

f) $(3a + 2b - 5c)^2$

c) $a \cdot (b - 2a) - b \cdot (a + 2b)$

g) $(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2$

d) $(3a + 2b) \cdot (4a - 3b) \cdot (5a - 7b)$

h) $(2a - 5b) \cdot (5b - 3a) - (2b - 4a) \cdot (6a + 7b)$



ArithLogik/Terme/Ag_Terme_Potenzen5_leicht.tex

Aufgabe 7.46 (Potenzen, Fakultäten, Binomialkoeffizienten, binomischer Satz)

a) Vereinfachen Sie den Term $2a^8b^5 - 7a^5b^3 + a^7 \cdot (-b)^4$ durch Ausklammern.

b) Vereinfachen Sie $\left(-\frac{1}{a^{-4}}\right)^{-5}$. Welche $a \in \mathbb{R}$ müssen ausgeschlossen werden?

c) Berechnen Sie die folgenden Fakultäten und Binomialkoeffizienten:

(i) $6!$

(ii) $7!$

(iii) $\binom{11}{5}$

(iv) $\binom{13}{6}$

d) Berechnen Sie $(2a - b)^5$ mit dem binomischen Satz.

e) Vereinfachen Sie $\frac{18^3 \cdot (ab^2)^2}{6^3 \cdot ((a^2b)^3 \cdot (a^{-1})^2)^3}$.



ArithLogik/Terme/Ag_Terme_VerschiedeneUmformungen.tex

Aufgabe 7.47 (Brüche und Terme mit Variablen umformen)

Seien $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ und $d \in \mathbb{R}$ mit $c \neq \frac{b-a}{2}$ und $d \neq 0$.

- Fassen Sie $\frac{2}{9} - \frac{1}{2} + \frac{5}{7}$ zu einem Bruch zusammen!
- Fassen Sie $\left(\frac{2}{a} - \frac{3}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right)$ im Fall $a \neq 0 \neq b$ zu einem Bruch ohne Klammern zusammen!
- Schreiben Sie $(5a+4)^2 - (3a-5)^2 + 4 \cdot (a+3) \cdot (a-3) + 5$ einmal als Summe ohne Klammern und einmal als Produkt ohne Brüche!
- Vereinfachen Sie $\frac{a^2 - b^2}{a^2 - ab}$ durch Kürzen! Was muss für a und b gelten?
- Schreiben Sie $\left(\frac{a}{4d} - \frac{b}{2d} + \frac{2c}{8d}\right) \cdot \frac{12d}{4a - 4b + 8c}$ als einen Bruch ohne Klammern!
- Wie lautet der vereinfachte Kehrwert von $\frac{\frac{a+b}{a} + \frac{a-b}{b}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$? Was muss hierbei für a und b gelten?



ArithLogik/Terme/Ag_Terme_Wurzeln1_leicht.tex

Aufgabe 7.48 (Rechnen mit Wurzeln und Potenzen)

Fassen Sie folgende Terme (möglichst geschickt) zusammen:

- $2^2 \cdot 2^3$
- $(-x^2)^3$
- $(\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2^2})^6$
- $x^5 = \frac{243}{32}$
- $x^{1.4} = 5$
- $\sqrt[7]{10\,000\,000}$
- $y^2 \cdot z^2 \cdot u^3$
- $\sqrt{x \cdot \sqrt[8]{x^3} \cdot \sqrt[16]{x^5}}$
- $\frac{(x^{-2} \cdot z^2 \cdot w^{-3})^2}{(x^{-1} \cdot z^{-2} \cdot x^{-3})^3}$
- $(\frac{7}{4}x^{2m+3} - \frac{3}{2}x^{2m-3} + \frac{4}{5}x^{m+4}) : (\frac{3}{4}x^{2m+1})$
- $\sqrt{a \cdot \sqrt{a \cdot \sqrt{a}}}$



ArithLogik/Terme/Ag_Terme_Wurzeln4_leicht.tex

Aufgabe 7.49 (Rechnen mit Wurzeltermen)

Fassen Sie folgende Wurzelterme zusammen:

- $\sqrt{1-x} + \frac{x+1}{2 \cdot \sqrt{1-x}}$
- $\frac{2x \cdot (r^2 - 4x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}} - 8x \cdot \sqrt{r^2 - x^2}$
- $\sqrt{\frac{a^2 + 2ab + b^2}{4}} : \sqrt{\frac{a^2 - 2ab + b^2}{4}}$
- $\frac{\sqrt{(a-b)^2 + a^2 + b^2 - 2ab}}{\sqrt{2 \cdot (a+b) \cdot (a-b)}}$



ArithLogik/Terme/Text_Polynome_QuadErgDreiEinfuehrungsBspe.txt

Aufgabe 7.50 ()

Eine Aufgabe zum Trainieren von quadratischer Ergänzung findet sich in
FktEinDim/Polynome/Ag_Polynome_QuadErgDreiEinfuehrungsBspe

Aufgabenblatt 8

ArithLogik/UnGleichungen



ArithLogik/UnGleichungen/Ag_Gleichungen_QuadGleichungen1_leicht.tex

Aufgabe 8.51 (Quadratische Gleichungen)

Lösen Sie folgende Gleichungen auf verschiedene Arten (etwa durch Termumformungen, mittels quadratischer Ergänzung, mit Hilfe von Lösungsformeln für quadratische Gleichungen).

a) $x^2 + 4 = 8$

e) $2x^2 + \frac{1}{2} = 5$

h) $4x^2 - 6x + 2 = 0$

b) $16 - x^2 = 7$

f) $(2x + 1)^2 - 4x = 2$

i) $\frac{1}{3} \cdot x^2 - x - 6 = 0$

c) $x^2 - \frac{49}{4} = 0$

g) $2x^2 + 2x - 4 = 0$

j) $(x - 1) \cdot (x + 2) = 3x + 6$

d) $4x^2 - 14 = 11$



ArithLogik/UnGleichungen/Ag_Gleichungen_Umformungsregeln_leicht.tex

Aufgabe 8.52 (Äquivalenzumformungen für Gleichungen)

- Stellen Sie alle Ihnen bekannten Äquivalenzumformungen zusammen, die zum Lösen von *Gleichungen* verwendet werden können.
- Kennen Sie weitere (nicht äquivalente) Umformungen? Notieren Sie diese ebenfalls und erläutern Sie, was zu beachten ist, wenn eine solche Umformung auf eine Gleichung angewandt wird.



ArithLogik/UnGleichungen/Ag_Gleichungen_lineareGleichungen_leicht.tex

Aufgabe 8.53 (Lineare Gleichungen)

Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $2 - (4 - 2x) = 0$

e) $-\frac{1}{9} \cdot y + 2 = 0$

i) $-5s + 5 = 5s - 5$

b) $x + 2 = 2x - 2$

f) $\frac{4}{5} = -\left(2 - \frac{3}{5}\right) + \frac{1}{2} \cdot z$

j) $\frac{11}{9} + \frac{9}{11} \cdot b = \frac{1}{19}$

c) $4x - \frac{3}{5} = \frac{34}{10}$

g) $\frac{1}{2} \cdot u + \frac{7}{3} = -\frac{1}{2} \cdot u - \frac{1}{3}$

k) $\frac{2}{\frac{2}{n} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

d) $11t = -10t + 21$

h) $k + 3 = k + 5$



ArithLogik/UnGleichungen/Ag_Glgn_DefLsgMengeNachAusmultAblesbar.tex

Aufgabe 8.54 (Definitions- und Lösungsmenge von Gleichungen)

Bestimmen Sie jeweils die maximale Definitionsmenge $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ und die Lösungsmenge $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{D}$!

a) $(x - 1)^2 - (6 - x)^2 = 5$

c) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{6-x} = \frac{4}{5}$

e) $\frac{1}{x^3+8} + \frac{7}{(x^3+8) \cdot (1+x^3)} = \frac{1}{1+x^3}$

b) $\frac{x+3}{x-1} + \frac{6-x}{2-x} = 0$

d) $\frac{3}{3x^2-12} + \frac{2}{4-x^2} = 0$

f) $(x - 1)^2 - \frac{27}{6-x} = x - 8$



ArithLogik/UnGleichungen/Ag_Glgn_LineareGlgnSechsStueck.tex

Aufgabe 8.55 (Lineare Gleichungen)

Geben Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen an!

a) $8 - (2 - 3x) = 0$

c) $\frac{x}{4} + \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$

e) $2x - 3 = \frac{6x+11}{3}$

b) $5x - 3 = 3x + 7$

d) $\frac{3x}{2} + 8 = \frac{7}{8} - \frac{2x}{5}$

f) $\frac{3}{\frac{2}{x} + \frac{1}{4}} = \frac{20}{3}$



ArithLogik/UnGleichungen/Ag_Glgn_WurzelGlgnFuenfVonSechsZweimalQuadrieren.tex

Aufgabe 8.56 (Gleichungen mit Wurzeln)

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der folgenden Gleichungen!

a) $\sqrt{8x-7} + 3 = 2x$

c) $2 \cdot \sqrt{1+\sqrt{x}} = \sqrt{x+7}$

e) $\sqrt[4]{x+1} - \sqrt{x-1} = 0$

b) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 1$

d) $\sqrt{9-\sqrt{9-x^2}} - x = 0$

f) $2 \cdot \sqrt{x-3} - \sqrt{2x+1} = -5$



ArithLogik/UnGleichungen/Ag_Glgn_quadratischInBruechenVersteckt.tex

Aufgabe 8.57 (Gleichungen mit Brüchen)Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen mit $-a \neq b \neq a$. Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmengen der folgenden reellen Gleichungen!

a) $\frac{11}{x-1} - \frac{21}{1+x} = 4$

e) $\frac{x^2-5x-6}{x+1} = 1$

b) $\frac{2}{1-x} - \frac{2}{1+x} = 4$

f) $\frac{x^2-1}{(x+1) \cdot (x+2)} = 1$

c) $\frac{2}{1-x} + \frac{4}{1+x} = 4$

g) $\frac{a^2-1}{x-a} + \frac{a^2+1}{x+a} = a + \frac{a^3}{x^2-a^2}$

d) $\frac{2}{1-x} - \frac{2}{1+x} = \frac{4}{1-x^2}$

h) $\frac{2x-a}{a-b} + \frac{x+b}{a+b} = \frac{2ab}{a^2-b^2}$



ArithLogik/UnGleichungen/Ag_Logarithmus_Gleichungen.tex

Aufgabe 8.58 (Gleichungen mit Logarithmen)Sei $b \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ mit $b > 0$. Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $\ln(x^3) + 2 = 0$

d) $\ln(x) + \ln(\sqrt{x}) = 2 \ln(x)$

g) $4^{x-1} + \frac{5}{2} \cdot 2^x - \frac{11}{4} = 0$

b) $3^{x-2} = 5^3$

e) $4^{3x-5} = 32$

c) $e^{2x} + e^x - 1 = 0$

f) $b^7 \cdot b^{3(x+2)} = b \cdot b^{x(x-1)}$

h) $2^{2x-1} + 5 \cdot 2^x + \frac{9}{2} = 0$



ArithLogik/UnGleichungen/Ag_Potenzen_QuadGleichungen_leicht.tex

Aufgabe 8.59 (Gleichung lösen)Lösen Sie die Gleichung $\frac{3 \cdot (x+2)^2 - (-2) \cdot 2^{2x-2}}{3x+6} = \frac{-2^{3^2} + (2^3)^2 \cdot x}{(2^2)^3}$ in den reellen Zahlen.

ArithLogik/UnGleichungen/Ag_UnGlgn_AequivalentOderNicht.tex

Aufgabe 8.60 (Gleichungen und Ungleichungen umformen)

Überlegen Sie für die folgenden Umformungen jeweils für Gleichungen und für Ungleichungen, ob zwischen die ursprüngliche (Un-)Gleichung und die umgeformte (Un-)Gleichung ein Äquivalenzpfeil ($\iff$) geschrieben werden kann oder ob nur einer der beiden Folgepfeile ($\impliedby$ oder $\implies$) dort stehen darf. Oder sind die drei Pfeile alle fehl am Platz und die entsprechende Umformung ist nicht erlaubt? Ist die Umformung einer Ungleichung nur erlaubt, wenn gleichzeitig das Ungleichheitszeichen umgedreht wird, so markieren Sie das Umformungszeichen entsprechend ($\overset{\leftarrow}{\iff}$, $\overset{\leftarrow}{\impliedby}$ bzw. $\overset{\leftarrow}{\implies}$).

- | | | |
|---|--|--|
| a) Addieren einer Zahl auf beiden Seiten | e) Kehrbruch bilden, wenn beide Seiten $\neq 0$ sind | i) Quadrieren, wenn beide Seiten positiv sind |
| b) Auf beiden Seiten mit einer Zahl $\neq 0$ multiplizieren | f) Kehrbruch bilden, wenn beide Seiten positiv sind | j) Quadrieren, wenn beide Seiten negativ sind |
| c) Auf beiden Seiten mit einer Zahl > 0 multiplizieren | g) Kehrbruch bilden, wenn beide Seiten negativ sind | k) Beide Seiten in die Exponentialfunktion einsetzen |
| d) Auf beiden Seiten mit einer Zahl < 0 multiplizieren | h) Quadrieren | l) Beide Seiten in den Sinus einsetzen |



ArithLogik/UnGleichungen/Ag_UnGln_QuadrOhneBetrag.tex

Aufgabe 8.61 (quadratische Ungleichungen)

Welche reellen Zahlen erfüllen die folgenden Ungleichungen?

- a) $x^2 - 3x + 3 < 7 \cdot (x + 2)$ b) $(x + 2) \cdot (2x + 1) \geq x + 18$ c) $\frac{x+36}{4x-3} \leq x - 4$



ArithLogik/UnGleichungen/Ag_Ungleichungen_Gleichungen_mit_Betrag_mittel.tex

Aufgabe 8.62 (Gleichungen und Ungleichungen mit Beträgen)

Lösen Sie die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen. Wenn Sie verschiedene Fälle unterscheiden (müssen), schreiben Sie stets auf, welchen Fall Sie gerade behandeln. Überprüfen Sie unbedingt, ob Ihre Lösungen die entsprechenden Fallvoraussetzungen erfüllen!

- | | | |
|----------------------------|--|-----------------------------|
| a) $ 2x - 4 > -1$ | e) $\frac{ 1+x }{ 3-x } = 5$ | h) $ x+2 + x+4 - 12 = 0$ |
| b) $ 5 - 2x < 1$ | f) $\left \frac{2x+4}{x-3} \right = 1$ | i) $ 5 - x \leq 11$ |
| c) $ x+4 = 2 \cdot x-1 $ | g) $ 2x-4 \geq x+1$ | j) $ x+1 + 2x+3 = x-4 $ |
| d) $ x-4 = 3x+5$ | | |



ArithLogik/UnGleichungen/Ag_Ungleichungen_verschiedene_leicht.tex

Aufgabe 8.63 (Ungleichungen)

Lösen Sie folgende Ungleichungen (a sei eine gegebene reelle Zahl).

- | | | |
|--|---|--|
| a) $2x - 5 < 7$ | e) $\left 11 - \frac{x}{2} \right \leq 5$ | h) $ax < x + a$ |
| b) $-3x - 4 \geq \frac{1}{2}$ | f) $\frac{2}{2-x} \geq 7$ | i) $\frac{x}{a+1} - \frac{1}{a-1} > \frac{1}{a^2-1}$ |
| c) $\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{4}{3}\right) \geq x - 1$ | g) $\frac{x-4}{5} > 3$ | j) $ x+2 \leq 5$ |
| d) $ x-22 < 5$ | | |



ArithLogik/UnGleichungen/Ag_UnGln_ADurchBUndBDurchAMit1Vergleichen.tex

Aufgabe 8.64 (Größen- und Abstandsvergleich)

Es seien $a \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen mit $0 < a < b$.

- a) Ordnen Sie die Zahlen 1 , $\frac{a}{b}$ und $\frac{b}{a}$ der Größe nach!
- b) Welche der beiden Zahlen $\frac{a}{b}$ und $\frac{b}{a}$ liegt näher an 1 ? Begründen Sie Ihre Antwort!
- Hinweis:* Beispiele können Ihnen eine Idee liefern, genügen allerdings nicht als Beweis.



ArithLogik/UnGleichungen/Ag_Unglgn_LinearFuenfOhneZweiMitParameter.tex

Aufgabe 8.65 (lineare Ungleichungen)

Sei $a \in \mathbb{R}$ eine fest vorgegebene reelle Zahl. Lösen Sie die folgenden Ungleichungen!

a) $2x - 5 < 7$

d) $\frac{2}{2-x} \geq 7$

f) $ax < x + a$

b) $-3x - 4 \geq \frac{1}{2}$

g) $\frac{x}{a+1} - \frac{1}{a-1} > \frac{1}{a^2-1}$
mit $1 \neq a \neq -1$

c) $\frac{1}{2} \cdot (x - \frac{4}{3}) \geq x - 1$

e) $\frac{x-4}{5} > 3$



ArithLogik/UnGleichungen/Ag_Wurzeln_QuadGleichungen_leicht.tex

Aufgabe 8.66 (Gleichungen mit Wurzeln)

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen x der folgenden Gleichungen:

a) $16x^2 - 81 = 0$

f) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 1$

b) $\frac{2}{3} \cdot x^2 + \frac{4}{5} \cdot x = 0$

g) $\sqrt{x+7} - \sqrt{8 \cdot (x-3)} = 2 \cdot \sqrt{2}$

c) $4x^2 + 12x + 5 = 0$

h) $\frac{x+1}{x-2} + \frac{x-1}{x+2} = \frac{3x^2 - 5x + 10}{x^2 - 4}$

d) $4^x - 10 \cdot 2^x = -16$

i) $\frac{x+1}{x-2} - \frac{2x+4}{x+3} = -2 + \frac{x^2 + 6x - 1}{(x-2) \cdot (x+3)}$

e) $\sqrt{8x-7} + 3 = 2x$



ArithLogik/UnGleichungen/Ag_Wurzeln_Vieta.tex

Aufgabe 8.67 (Satz von Vieta)

Gegeben sind reelle Zahlen p und q . Weiter sind x_1 und x_2 reelle Zahlen mit der Eigenschaft

$$x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Dann sind x_1 und x_2 Lösungen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ (warum?).

Rechnen Sie nach, dass gilt:

$$p = -(x_1 + x_2) \quad \text{und} \quad q = x_1 \cdot x_2.$$



ArithLogik/UnGleichungen/Text_Polynome_QuadErgDreiEinfuehrungsBspe.txt

Aufgabe 8.68 ()

Eine Aufgabe zum Trainieren von quadratischer Ergänzung findet sich in
FktEinDim/Polynome/Ag_Polynome_QuadErgDreiEinfuehrungsBspe



ArithLogik/UnGleichungen/Text_Wurzeln_GlgnMitWurzelnLoesen.txt

Aufgabe 8.69 ()

Eine Aufgabe zum Lösen von Gleichungen durch Wurzelziehen findet sich in
ArithLogik/PotWurz/Ag_Wurzeln_GlgnMitWurzelnLoesen

Aufgabenblatt 9

ArithLogik/VollstInd



ArithLogik/VollstInd/Ag_VollstInd_FormelVonMoivre.tex

Aufgabe 9.70 (Die Formel von Moivre)

Für alle $\varphi \in \mathbb{C}$ und alle $\psi \in \mathbb{C}$ gelten die Additionstheoreme

$$\sin(\varphi + \psi) = \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) + \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi) \quad \text{und} \quad \cos(\varphi + \psi) = \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi).$$

- a) Zeigen Sie die für alle $z \in \mathbb{C}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gültige „Formel von MOIVRE“: $(i^2 = -1)$

$$(\cos(z) + i \cdot \sin(z))^n = \cos(nz) + i \cdot \sin(nz)$$

- b) Zeigen Sie, dass die Formel von Moivre auch für alle $z \in \mathbb{C}$ und alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$ gilt!



ArithLogik/VollstInd/Ag_VollstInd_UngleichungenKreuzUndQuer.tex

Aufgabe 9.71 (Ungleichungen: kreuz und quer)

- a) Verifizieren Sie die folgenden Ungleichungen für alle $n \in \mathbb{N}$ mittels vollständiger Induktion.

$$(i) \quad \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2} \qquad (ii) \quad \frac{n}{2} < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq n$$

- b) Finden Sie jeweils das kleinstmögliche $n_0 \in \mathbb{N}$, für welches die folgenden Ungleichungen gelten, und weisen Sie mithilfe vollständiger Induktion nach, dass die Ungleichungen für alle $n \geq n_0$ erfüllt sind.

$$(i) \quad n \cdot \sqrt{n} > n + \sqrt{n} \qquad (ii) \quad \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$



ArithLogik/VollstInd/Ag_VollstInd_VerallgUnglArtihGeomMittel.tex

Aufgabe 9.72 (Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel)

- a) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a_1 \in \mathbb{R}, \dots, a_{2^n} \in \mathbb{R}$ mit $\min(\{a_k \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{N} \text{ und } k \leq 2^n\}) \geq 0$ die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel:

$$\sqrt[2^n]{\prod_{k=1}^{2^n} a_k} \leq \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{k=1}^{2^n} a_k.$$

- b) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a_1 \in \mathbb{R}, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $\min(\{a_k \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{N} \text{ und } k \leq n\}) \geq 0$ die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel:

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k} \leq \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n a_k.$$

Tipp: Definieren Sie $N := \min(\{\ell \in \mathbb{N} \mid n \leq 2^\ell\})$, sowie $a_m := A := \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n a_k$ für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $n < m \leq 2^N$, um Aufgabenteil a) verwenden zu können!



ArithLogik/VollstInd/Ag_VollstaendigeInduktion_Ag6_wiwi.tex

Aufgabe 9.73 (Geschlossene Ausdrücke beweisen)

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass diese rekursiv gegebenen Folgen den zugehörigen geschlossenen Ausdruck haben:

- a) $a_1 := 5, a_{n+1} := 4a_n + 1, a_n \stackrel{!}{=} 4^n - \frac{1}{3} \cdot (1 - 4^n)$ b) $b_1 := 2, b_{n+1} := 3b_n - 1, b_n \stackrel{!}{=} 3^n + \frac{1}{2} \cdot (1 - 3^n)$



ArithLogik/VollstInd/Ag_VollstaendigeInduktion_Binomialkoeffizienten.tex

Aufgabe 9.74 (Eine Binomialidentität)

Es seien $\ell, n \in \mathbb{N}_0$. Führen Sie eine vollständige Induktion über $\ell \geq 0$, um die Binomialidentität

$$A(\ell): \sum_{k=0}^{\ell} \binom{n+k}{n} = \binom{n+\ell+1}{n+1}$$

zu beweisen. Behandeln Sie n dabei wie eine unbestimmte Variable.



ArithLogik/VollstInd/Ag_VollstaendigeInduktion_Binomialkoeffizienten2.tex

Aufgabe 9.75 (Verschobene Binomialkoeffizienten)

Es seien ℓ, k, n natürliche Zahlen. Zeigen Sie durch vollständige Induktion über $n \geq \ell$ die Gleichung

$$A(n): \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} \binom{n-\ell}{k-j} = \binom{n}{k}.$$

Wenden Sie im Induktionsschritt die Zerlegungsregel auf den zweiten Binomialkoeffizienten in der Summe an und zerlegen Sie dann die Summe.

Hinweis: für $n < m$ gilt $\binom{n}{m} = 0$. Desweiteren gilt $\binom{n}{z} = 0$ für negative Zahlen $z \in \mathbb{Z}$ und $\binom{0}{0} = 1$.



ArithLogik/VollstInd/Ag_VollstaendigeInduktion_InWi_SehrLeicht.tex

Aufgabe 9.76 (Induktion zum Einstieg)

- a) Zeigen Sie die Aussage $n^2 > 2n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1; 2\}$ durch vollständige Induktion. Schreiben Sie sauber Induktionsanfang, Induktionsvoraussetzung und Induktionsschluss auf.
- b) Zeigen Sie nun die Aussage $2^n > n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5$. Im Induktionsschluss dürfen Sie die Aussage aus Aufgabenteil a) verwenden.



ArithLogik/VollstInd/Ag_VollstaendigeInduktion_Summenformeln_leicht.tex

Aufgabe 9.77 (Summen- und Produktformeln)

Beweisen Sie die folgenden für alle $n \in \mathbb{N}$ gültigen Formeln mit Vollständiger Induktion!

a) $\sum_{m=0}^n 2^m = 2^{n+1} - 1$

e) $\sum_{\ell=1}^n \frac{4}{\ell \cdot (\ell + 2)} = \frac{n \cdot (3n + 5)}{(n + 1) \cdot (n + 2)}$

b) $\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{6}$

f) $\prod_{m=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{n + 1}$

c) $\sum_{j=1}^n (-1)^j \cdot j^2 = (-1)^n \cdot \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$

g) $\prod_{m=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{m^2}\right) = \frac{n + 2}{2n + 2}$

d) $\sum_{\nu=1}^{2n} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu} = \sum_{\mu=n+1}^{2n} \frac{1}{\mu}$

h) $\prod_{p=1}^n \left(1 + \frac{1}{n + p}\right) = 2 - \frac{1}{n + 1}$



ArithLogik/VollstInd/Ag_VollstaendigeInduktion_Teilbarkeit.tex

Aufgabe 9.78 (Teilbarkeit)

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die folgenden Teilbarkeitsaussagen für alle natürlichen Zahlen n gelten:

- a) 5 teilt $(7^n - 2^n)$ b) 7 teilt $(2^{3n} + 13)$ c) 6 teilt $(7^n - 1)$ d) 6 teilt $(n^3 + 5n)$

Hinweis: Schreiben Sie die Behauptung mittels einer Aussage auf, die eine Gleichung enthält, indem Sie die Definition der Teilbarkeit verwenden.



ArithLogik/VollstInd/Ag_VollstaendigeInduktion_Teilbarkeit_leichtAuswahl.tex

Aufgabe 9.79 (Teilbarkeitsregeln)

Zeigen Sie mit Vollständiger Induktion die folgenden Teilbarkeitsregeln!

- a) $9^n - 1$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 8 teilbar. b) $2^{3n} - 1$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 7 teilbar.

Zur Erinnerung: Eine ganze Zahl $a \in \mathbb{Z}$ teilt eine ganze Zahl $b \in \mathbb{Z}$ (bzw. b ist durch a teilbar), falls es eine ganze Zahl $c \in \mathbb{Z}$ mit $b = ca$ gibt.



ArithLogik/VollstInd/Text_VollstInd_FaltungMitMonomDurchFortgesetztesIntegrieren.txt

Aufgabe 9.80 ()

Eine weitere Induktionsaufgabe findet sich in
IntMehrDim/Normalbereiche/Ag_VollstInd_FaltungMitMonomDurchFortgesetztesIntegrieren

Aufgabenblatt 10

ArithLogik/Zahlbereiche



ArithLogik/Zahlbereiche/Ag_InfUndSup_unterschiedlicheGrundmengen.tex

Aufgabe 10.81 (Infimum und Supremum hängen von der Grundmenge ab)

Für alle $K \in D := \{\mathbb{N}; \mathbb{Z}; \mathbb{R}; (0; \infty); \mathbb{Q}\}$ sei $M_K := \{x \in K \mid 3 < x^2 \leq 30\} \subseteq \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie für alle $K \in D$ das Infimum und das Supremum von M_K und prüfen Sie jeweils, ob M_K ein Minimum bzw. ein Maximum hat!

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass zwischen je zwei reellen Zahlen stets eine rationale Zahl liegt, dass die Wurzelfunktion streng monoton wächst, und dass $\sqrt{30} \notin \mathbb{Q}$ ist.



ArithLogik/Zahlbereiche/Ag_Mengen_ParambeschreibungSupInf.tex

Aufgabe 10.82 (Supremum und Infimum)

- Zeigen Sie für $M := \left\{ \frac{t+1}{t} \in \mathbb{R} \mid t \in \mathbb{R} \text{ mit } t > 1 \right\}$, dass $\sup(M) = 2$ ist und M kein Maximum besitzt.
- Weisen Sie für $Q := \left\{ \frac{t-1}{t+t^2} \in \mathbb{R} \mid t \in \mathbb{R} \text{ mit } t > 2 \right\}$ nach, dass $\inf(Q) = 0$ ist und Q kein Minimum hat.



ArithLogik/Zahlbereiche/Ag_Verstaendnisfragen_InfSupMinMax.tex

Aufgabe 10.83 (Wahr oder falsch? — Schranken von Mengen)

Beurteilen Sie die Allgemeingültigkeit der folgenden Aussagen!

- Ist $S \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke einer Menge M , so ist jede kleinere Zahl ebenfalls eine obere Schranke von M . ☐ wahr ☐ falsch
- Ist $S \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke einer Menge M , so ist jede kleinere Zahl eine untere Schranke von M . ☐ wahr ☐ falsch
- Ist $S \in \mathbb{R}$ eine untere Schranke einer Menge M , so ist jede kleinere Zahl eine untere Schranke von M . ☐ wahr ☐ falsch
- Hat eine nach unten beschränkte Menge M ein Maximum, so ist es größer als ihr Infimum. ☐ wahr ☐ falsch
- Jede beschränkte Menge hat ein Infimum. ☐ wahr ☐ falsch
- Jede beschränkte Menge hat ein Maximum. ☐ wahr ☐ falsch
- Keine Teilmenge einer nach oben unbeschränkten Menge hat ein Maximum. ☐ wahr ☐ falsch

Aufgabenblatt 11

DGL/ErsteOrd



DGL/ErsteOrd/Ag_DGL01_Anfangswertaufgaben_HM3.tex

Aufgabe 11.84 (Anfangswertaufgaben)

Lösen Sie die nachstehenden Anfangswertaufgaben (über $\mathbb{R}$):

a) $y'(t) + 3y(t) = 6t, y(0) = 1$

c) $g'(x) = \frac{2 \cdot e^{2x}}{g(x)+2}$ und $g(0) = 0$

b) $y'(t) = \frac{1}{y(t)}, y(3) = 7$

d) $f'(y) + e^{3y} \cdot \sin(y) = 3f(y)$ und $f(0) = -1$



DGL/ErsteOrd/Ag_DGL01_AufLinearitaetPruefen.tex

Aufgabe 11.85 (Klassifizierung von Differentialgleichungen)

Untersuchen Sie, ob folgende Differentialgleichungen linear sind.

a) $y'(t) + 3y(t) = t^2 + t$

d) $y'(x) = xy(x) - x$

g) $t \cdot y'(t) = y(t) - e^t \cdot (y(t))^2$

b) $y'(t) = \frac{1}{y(t)}$

e) $x \cdot y'(x) + y'(x) = y(x)$

h) $y'(x) = 2 \cdot \sqrt{y(x)}$

c) $y'(t) = 4 \cdot (y(t))^2$

f) $\frac{y'(x)}{x^2+1} = \frac{1}{y(x)}$

i) $y'(t) = 1 + \sin(y(t))$



DGL/ErsteOrd/Ag_DGL01_LinearInhomogen.tex

Aufgabe 11.86 (Differentialgleichungen)

Finden Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen bzw. Anfangswertprobleme!

a) $y'(x) - \cos(x) \cdot e^{x^2} = 2x \cdot y(x)$ und $y(0) = 1$

c) $y'(x) = \tan(x) \cdot y(x) + \sin(x)$ und $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$

b) $y'(x) = \left(\frac{2}{x} + 3\right) \cdot y(x) + x^2 - x^3$

d) $y'(x) = \frac{2}{x} \cdot y(x) - \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$



DGL/ErsteOrd/Ag_DGL01_PotReihenAnsVerallg01Um1.tex

Aufgabe 11.87 (Potenzreihenansatz und verallgemeinerter Potenzreihenansatz)

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit der Differentialgleichung

$$(x-1) \cdot y'(x) + y(x) = \frac{1}{x}.$$

Entwickelt man die rechte Seite mittels der geometrischen Reihe in ihre Potenzreihe $\frac{1}{x} = \frac{1}{1-(1-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (x-1)^n$ um 1, so lässt sich vermuten, dass sich die Differentialgleichung mit einem Potenzreihenansatz bei Entwicklung um 1 lösen lässt.

a) Verwenden Sie den Potenzreihenansatz, um eine Lösung der Differentialgleichung zu ermitteln!

Tipp: Falls Sie die sich ergebende Potenzreihe nicht kennen: Wie können Sie die Potenzreihe von $\frac{1}{x}$ verwenden, um eine geschlossene Darstellung Ihrer Lösung zu erhalten?

b) Die Lösung aus Aufgabenteil a) enthält keine „Konstanten“, mit deren Hilfe man Anfangsbedingungen erfüllen könnte (falls sie gegeben wären). Es handelt sich bei der Lösung tatsächlich nur um eine partikuläre Lösung.

Vielleicht hilft Ihnen bei der Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung ein verallgemeinerter Potenzreihenansatz, sprich die Suche nach einer Koeffizientenfolge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und einem $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (x-\xi)^{n+\lambda}$ mit einem gewählten $\xi \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung löst...



DGL/ErsteOrd/Ag_DGL01_SeparabelOptionalMitArcustangensStattTangens.tex

Aufgabe 11.88 (Differentialgleichungen)

Finden Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen bzw. Anfangswertprobleme!

a) $y'(x) - \frac{y(x)}{x} \cdot (2x^2 + 1) = 0$ b) $y'(x) = 2x \cdot (\cos(y(x)))^2$ c) $y'(x) = \frac{4x^3}{y(x)+1}, y(1) = 0$



DGL/ErsteOrd/Ag_DGL01_separabel_HM3.tex

Aufgabe 11.89 (Differentialgleichungen mit nichtkonstanten Koeffizienten)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Anfangswertprobleme auf geeigneten Intervallen:

a) $y'(x) = x \cdot y(x) - x, y(0) = 3$ d) $y'(x) = 2 \cdot \sqrt{y(x)}$ mit $y(x) \geq 0, y(0) = 1$
b) $x \cdot y'(x) + y'(x) = y(x), y(1) = 1$ e) $y'(t) = \frac{2t^3}{y(t)}$ mit $y(3) = -10$
c) $\frac{y'(x)}{3x^2+1} = \sqrt{1 - (y(x))^2}, y(0) = 0$ f) $y'(t) = 4 \cdot (y(t))^2$ mit $y(0) = 3$



DGL/ErsteOrd/Ag_DGL_mit_FT.tex

Aufgabe 11.90 (DGL mit Fouriertransformation lösen)

Gegeben ist die Differentialgleichung (DGL)

$$y'(t) + 4y(t) = e^{-4t}\sigma(t).$$

Dabei ist $\sigma(t) = 0$ für $t < 0$ und $\sigma(t) = 1$ für $t \geq 0$ (Einheitssprungfunktion bzw. Heavisidefunktion).

- Geben Sie die homogene Lösung $y_h(t)$ der DGL an.
- Im Folgenden soll eine partikuläre Lösung $y_p(t)$ der DGL mit Hilfe einer Fouriertransformation berechnet werden. Wenden Sie dazu die Fouriertransformation auf beide Seiten der DGL an, um eine transformierte Gleichung (Gleichung im FFourierraum"bzw. FFrequenzraum") zu erhalten. Verwenden Sie die Notation $\mathcal{F}(y_p(t)) = Y_p(\omega)$ sowie die Korrespondenzen $\mathcal{F}(e^{-bt}\sigma(t)) = \frac{1}{b+i\omega}$ ($b > 0$) und $\mathcal{F}(\frac{d}{dt}g) = i\omega\mathcal{F}(g)$, g : beliebige fouriertransformierbare Funktion.
- Lösen Sie die Gleichung nach Y_p auf, um das Ergebnis im Fourierraum (bzw. Frequenzbereich) zu erhalten.
- Wenden Sie zur Vorbereitung der Rücktransformation in den Zeitbereich folgenden Trick an: Schreiben Sie $Y_p(\omega)$ in der Form $Y_p(\omega) = C \cdot \frac{d}{d\omega}G(\omega)$ mit einer geeigneten Konstanten $C \in \mathbb{C}$ und einer geeigneten Funktion $G(\omega)$. Im Idealfall ist dabei die zu $G(\omega)$ zugehörige Zeitbereichsfunktion $g(t)$, $g = \mathcal{F}^{-1}(G)$ bekannt.
- Verwenden Sie jetzt zur Rücktransformation in den Zeitbereich die Korrespondenzen $\mathcal{F}^{-1}(\frac{d}{d\omega}G) = -it\mathcal{F}^{-1}(G)$ und $\mathcal{F}^{-1}(\frac{1}{b+i\omega}) = e^{-bt}\sigma(t)$ ($b > 0$).
- Prüfen Sie das Ergebnis durch Einsetzen in die DGL.
- Berechnen Sie zum Vergleich $y_p(t)$ noch einmal mit einem Ansatz vom Typ der rechten Seite oder mit Variation der Konstanten.



DGL/ErsteOrd/Ag_ExakteDGLs.tex

Aufgabe 11.91 (Exakte Differentialgleichungen)

Finden Sie jeweils eine Funktion $F(x, y)$, so dass die allgemeine Lösung der Differentialgleichung in der Form $F(x, y) = c$ mit einer unbestimmten Konstanten $c \in \mathbb{R}$ geschrieben werden kann. Verwenden Sie dazu dass die Differentialgleichung exakt ist oder sich auf eine exakte Differentialgleichung zurückführen lässt.

- a) $(-6xe^{-x^2}y^2 + y) dx + (6e^{-x^2}y + x) dy$
- b) $(\sin(y) - 2y^2 \sin(2x)) dx + (x \cos(y) + 2y \cos(2x)) dy$
- c) $2y \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 2xy^2}{1+x^2}$



DGL/ErsteOrd/Ag_ExakteDGLs_AWP.tex

Aufgabe 11.92 (Anfangswertprobleme und exakte Differentialgleichungen)

Lösen Sie jeweils das gegebene Anfangswertproblem, indem Sie verwenden, dass die Differentialgleichung exakt ist oder sich auf eine exakte Differentialgleichung zurückführen lässt.

- a) $(4x^3y - 6x)dx + (1 + x^4)dy = 0, y(0) = 2$ b) $\frac{dy}{dx} = -\frac{1+ye^x}{e^x}, y(0) = 1$



DGL/ErsteOrd/Ag_FT_Gauss.tex

Aufgabe 11.93 (Fouriertransformation einer Gaußglocke)

Im Folgenden soll mit Hilfe von Differentialgleichungen gezeigt werden, dass die Fouriertransformierte der Gaußschen Glockenkurve

$$f(t) = e^{-\frac{1}{2}\Omega^2 t^2}$$

mit der Breite $\frac{1}{\Omega}$, $\Omega > 0$ ebenfalls eine Gaußglocke ist, nämlich

$$F(\omega) = C e^{-\frac{1}{2} \frac{1}{\Omega^2} \omega^2}$$

mit der Breite Ω und einer Konstanten C . (Dies ist ein Beispiel für die allgemeine Beziehung: „schmales /kurzes Signal im Zeitbereich“ $\rightarrow$ „breites Signal (also viele Frequenzen) im Frequenzbereich“ (und umgekehrt).)

- a) Zeigen Sie, dass $\frac{df}{dt} = -\Omega^2 t f$ gilt.
- b) Wenden Sie die Fouriertransformation auf beide Seiten der DGL aus a) an, um eine transformierte Gleichung (Gleichung im FFourierraum"bzw. FFrequenzraum") zu erhalten. Verwenden Sie die Korrespondenzen $\mathcal{F}(\frac{d}{dt}f) = i\omega \mathcal{F}(f)$ und $\mathcal{F}^{-1}(\frac{d}{d\omega}F) = -it \mathcal{F}^{-1}(F)$.
- c) Geben Sie die allgemeine Lösung der DGL aus b) an und bestimmen Sie damit $F(\omega)$ bis auf eine Integrationskonstante C . (Ein Vergleich mit der DGL aus a) kann dabei helfen, aber es geht auch anders.)



DGL/ErsteOrd/Ag_IntegrierenderFaktor.tex

Aufgabe 11.94 (Zusatzaufgabe für Interessierte: Integrierender Faktor)

- a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung $(4x + 3y)dx + xdy = 0$ nicht exakt ist. Erinnern Sie sich dazu an die Bedingung aus HM II für die Existenz von Potentialen.
- b) Versuchen Sie eine Funktion $f(x)$ zu finden, so dass die modifizierte Differentialgleichung $f(x)(4x + 3y)dx + f(x)xdy = 0$ exakt ist. (So eine Funktion f wird integrierender Faktor genannt. Ein alternativer Ansatz der Form $f(y)$ ist auch zuweilen erfolgreich.)
- c) Finden Sie eine Funktion $F(x, y)$, so dass die allgemeine Lösung der modifizierten Differentialgleichung in der Form $F(x, y) = c$ mit einer unbestimmten Konstanten $c \in \mathbb{R}$ geschrieben werden kann.
- d) Prüfen Sie ob damit auch die anfänglich gegebene Differentialgleichung gelöst wird.

**Aufgabe 11.95** (Picard-Iteration)

Begründen Sie jeweils zunächst, warum das gegebene Anfangswertproblem eindeutig lösbar ist. Berechnen Sie anschließend einige Picard-iterationen, um zu einer Vermutung für die Lösung zu kommen. Beginnen Sie die erste Picard-Iteration jeweils mit einer konstanten Funktion als erste Approximation $y_0(x)$. Bestätigen Sie dann Ihre Vermutung durch Einsetzen in die Differentialgleichung.

a) $y' = xy + 2x - x^3, y(0) = 0$

b) $y'(x) = 2x(y + 1), y(0) = 0$

Bemerkung: Diese beiden linearen inhomogenen Differenzialgleichungen lassen sich alternativ auch mit Variation der Konstanten lösen.



DGL/ErsteOrdSubst/Ag_DGL01_RiccatiMitVorgegebenerLoesung.tex

Aufgabe 12.96 (Riccati'sche Differentialgleichung)

Gesucht werden alle Lösungen der Differentialgleichung

$$(x^2 + 1) \cdot y'(x) + 8x + 4x \cdot y(x) = (y(x))^2 + 4 \cdot y(x) + 6x^2 + 7.$$

- a) Prüfen Sie, für welche $m \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ die Funktion $y_{m,b}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto y_{m,b}(x) := mx + b$ eine Lösung der Differentialgleichung darstellt!
- b) Verwenden Sie die in Aufgabenteil a) berechneten Parameter, um die Differentialgleichung für y mit Hilfe der Substitution $g := y - y_{m,b}$ in eine Bernoulli'sche Differentialgleichung der Form $u(x) \cdot g'(x) = v(x) \cdot g(x) + w(x) \cdot (g(x))^\alpha$ für g mit einem $\alpha \in \mathbb{R}$ zu transformieren!
- c) Mittels der Substitution $f := g^{1-\alpha}$ lässt sich die in Aufgabenteil b) gefundene Differentialgleichung für g in eine lineare inhomogene Differentialgleichung für f verwandeln.
- d) Geben Sie alle Lösungen der Differentialgleichungen für f , g und y an!

Aufgabenblatt 13

DGL/MitLaplaceTrans



DGL/MitLaplaceTrans/Ag_DGLOnInhom_LaplaceTransMitDiffImBildraumIdDurchExp.tex

Aufgabe 13.97 (DGL mit Laplace-Transformation und Differentiation im Bildraum lösen)
Prüfen Sie, ob das folgende Anfangswertproblem eine Lösung vom exponentiellen Typ hat!

$$t \cdot f''(t) + 3 \cdot f'(t) + (5 - t) \cdot f(t) = 3 \cdot e^{-t} \quad \text{mit} \quad f(0) = 0$$

Hinweis: Jede Laplace-Transformierte einer Funktion vom exponentiellen Typ geht mit steigendem Argument gegen 0.



DGL/MitLaplaceTrans/Ag_DGLOnInhom_MitLaplaceTrans03Abschnittsweise.tex

Aufgabe 13.98 (Anfangswertproblem mit verschiedenen Inhomogenitäten: Laplace-Transformation)
Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \alpha < \beta$. Prüfen Sie für das folgende Anfangswertproblem und jede der angegebenen rechten Seiten, ob es sich mit Hilfe von Laplace-Transformation lösen lässt:

$$y'''(x) + 3y''(x) + 7y'(x) + 5y(x) = u(x) \quad \text{mit} \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3 \quad \text{und} \quad y''(0) = 5$$

$$\begin{array}{lll} \text{a) } u(x) = 0 & \text{b) } u(x) = 20 & \text{c) } u(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } 0 \leq x < \alpha \\ p, & \text{für } \alpha \leq x < \beta \\ q, & \text{für } x \geq \beta \end{cases} \end{array}$$



DGL/MitLaplaceTrans/Ag_DGLOnInhom_MitLaplaceTransOderAvTdrSEinstieg02.tex

Aufgabe 13.99 (Anfangswertprobleme lösen)
Lösen Sie die folgenden Anfangswert-Probleme!

- a) $y''(x) + y(x) = \cos(2x)$ mit $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$
- b) $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 12e^x + 2$ mit $y(0) = 5$ und $y'(0) = 7$
- c) $y''(x) - 5y'(x) + 4y(x) = 16x$ mit $y(0) = 2$ und $y'(0) = 4$
- d) $y''(x) + 10y'(x) + 9y(x) = 60 \cdot \cos(3x)$ mit $y(0) = 1$ und $y'(0) = 5$

Hinweis: Die Anfangswertprobleme lassen sich unter anderem mit Hilfe von Laplace-Transformation oder mit einem Ansatz vom Typ der rechten Seite lösen. Für beide Methoden handelt es sich eher um Einstiegsaufgaben — dies gilt für den Ansatz vom Typ der rechten Seite noch mehr als für die Laplace-Transformation. Vielleicht wollen Sie beide Methoden versuchen?



DGL/MitLaplaceTrans/Ag_LaplaceTrans_FaltungsGlnAlsFormel.tex

Aufgabe 13.100 (Integralgleichungen)

Finden Sie die Lösungen vom exponentiellen Typ der folgenden Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen!

- a) $f(x) - \int_0^x (x-t) \cdot f(t) dt = 2 \cdot \cos(x)$
- b) $\int_0^x f(t) \cdot f(x-t) dt - 2f(x) = \frac{x^3}{6} - 2x$
- c) $f(x) - f'(x) - \int_0^x f'(x-t) \cdot f''(t) dt = 0$ mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = 4$
- d) $x \cdot f(x) - 2 \int_0^x \sinh(2t) \cdot f(x-t) dt = \sinh(2x)$

Hinweis: Für die Laplace-Transformierte einer Funktion f vom exponentiellen Typ gilt $\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}f(s) = 0$.



DGL/MitLaplaceTrans/Ag_LaplaceTrans_FaltungenGlnAlsText.tex

Aufgabe 13.101 („Einfach“ zu berechnende Faltungen)

Verwenden Sie Laplace-Transformation, um die folgenden Fragen zu beantworten!

- a) Für welche Funktion $f : [0; \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ stimmt die Faltung $f * \sin$ überein mit $f + \sin$?
- b) Welche Funktion muss man zu ihrer Faltung mit dem Sinus addieren, um 1 zu erhalten?
- c) Die Funktionen welcher Funktionenklasse kann man, um ihre Faltung mit sich selbst zu berechnen, einfach mit der Identität id multiplizieren?
($\text{id} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $t \mapsto \text{id}(t) := t$)
- d) Die Funktionen welcher Funktionenklasse kann man, um das Doppelte ihrer Faltung mit dem Kosinus zu berechnen, einfach mit id multiplizieren?
($\text{id} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $t \mapsto \text{id}(t) := t$)

Aufgabenblatt 14

DGL/NteOrdHom



DGL/NteOrdHom/Ag_DGLOnHom_EulerDglRwpAwpAlleKombis.tex

Aufgabe 14.102 (Euler'sche Differentialgleichungen)

Lösen Sie die folgenden linearen Differentialgleichungen zunächst allgemein!

Geben Sie außerdem alle reellen Lösungen an!

Sind zusätzlich Bedingungen angegeben, so suchen Sie die Lösung der Differentialgleichung, die sämtliche Bedingungen erfüllt!

a) $y'''(x) + \frac{12}{x^3} \cdot y(x) = \frac{6}{x^2} \cdot y'(x)$ mit $y(-1) = -1, y(1) = 1$ und $y(2) = -7$

b) $4x^3 \cdot y'''(x) + 4x^2 \cdot y''(x) + 45y(x) = 31x \cdot y'(x)$ mit $y(1) = 2, y'(1) = 0$ und $y''(1) = -9$

c) $8x^2 \cdot y^{(4)}(x) + 58y''(x) - \frac{9}{x^2} \cdot y(x) = -\frac{9}{x} \cdot y'(x) - 44x \cdot y'''(x)$

d) $x^3 \cdot y'''(x) + 4y(x) = 2x \cdot y'(x)$ mit $y(1) = 1, y'(1) = -1$ und $y''(1) = 11$

e) $x^4 \cdot y^{(4)}(x) + 4x^3 \cdot y'''(x) - x^2 \cdot y''(x) + 3x \cdot y'(x) + 5y(x) = 0$



DGL/NteOrdHom/Ag_DGLOnHom_LinHomKonstKoeff_HM3.tex

Aufgabe 14.103 (Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten)

Geben Sie jeweils die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung an.

a) $2y''(x) - 12y'(x) + 10y(x) = 0$

e) $\frac{1}{4} \cdot y''(z) + \frac{1}{2} \cdot y'(z) - 2y(z) = 0$

b) $4y''(x) - 12y'(x) + 9y(x) = 0$

f) $5y''(s) - 2y'(s) + y(s) = 0$

c) $y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 0$

d) $y''(t) - \frac{1}{2} \cdot y'(t) + \frac{5}{8} \cdot y(t) = 0$

g) $y'''(x) - 6y''(x) + 12y'(x) - 8y(x) = 0$



DGL/NteOrdHom/Ag_DGLOnHom_LinKonstKoeffDglAwpRwpAlleKombis.tex

Aufgabe 14.104 (lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten)

Lösen Sie die folgenden linearen Differentialgleichungen zunächst allgemein!

Geben Sie außerdem alle reellen Lösungen an!

Sind zusätzlich Bedingungen angegeben, so suchen Sie die Lösung der Differentialgleichung, die sämtliche Bedingungen erfüllt!

a) $2y'''(x) + 48y(x) = 6y''(x) + 20y'(x)$ mit $y(0) = 42, y'(0) = 42$ und $y'''(0) = 0$

b) $20y^{(4)}(x) + 11y''(x) + 9y'(x) = 4y(x) + 36y'''(x)$

c) $12y(x) + 16y'(x) + 7y''(x) + y'''(x) = 0$ mit $y(-1) = \frac{e^2}{2}, y(0) = 1$ und $y''(-1) = 2e^2$

d) $2y'''(x) + 6y''(x) + 8y'(x) + 4y(x) = 0$ mit $y(-\pi) = e^\pi, y(0) = 1$ und $y(\frac{\pi}{2}) = 0$

e) $y^{(4)}(x) + y''(x) + 52y(x) = 36y'(x)$



DGL/NteOrdHom/Ag_DGLOnHom_RedDerOrdBeideFundLsgnRaten.tex

Aufgabe 14.105 (Reduktion der Ordnung mit bekanntem Ziel üben)

An der Differentialgleichung $(1-x) \cdot y''(x) + x \cdot y'(x) = y(x)$ soll das Verfahren der Reduktion der Ordnung geübt werden.

- a) In dieser Differentialgleichung sind zwei Fundamentallösungen ratbar — ein eher seltenes Phänomen. Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an!
- b) Eine Fundamentallösung enthält neben einem Exponentialterm keine weiteren Terme. Reduzieren Sie die Ordnung der Differentialgleichung mit Hilfe dieser Lösung und prüfen Sie, ob sich auf diesem Weg dieselbe allgemeine Lösung der Differentialgleichung ergibt!

Tipp: Gibt es ein $(\zeta, \vartheta)^T \in \mathbb{C}^2$ mit $\frac{-x+2}{x-1} = \zeta + \frac{\vartheta}{x-1}$ für alle $x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$?

- c) Eine Fundamentallösung enthält neben einem polynomialen Term keine weiteren Terme. Reduzieren Sie die Ordnung der Differentialgleichung mit Hilfe dieser Lösung und prüfen Sie, ob sich auf diesem Weg dieselbe allgemeine Lösung der Differentialgleichung ergibt!

Tipp: Gibt es ein $(\varphi, \psi, \chi)^T \in \mathbb{C}^3$ mit $\frac{x^2-2x+2}{x(x-1)} = \varphi + \frac{\psi}{x} + \frac{\chi}{x-1}$ für alle $x \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1\}$?

$$\text{Es ist } \int e^x \cdot \frac{x-1}{x^2} dx = \int (e^x \cdot (x-1)) \cdot \frac{1}{x^2} dx.$$



DGL/NteOrdHom/Ag_DGLOnHom_RedDerOrdDreiPartBrueche.tex

Aufgabe 14.106 (Reduktion der Ordnung mit Partialbruchzerlegung)

Finden Sie eine Lösung der folgenden Differentialgleichung und bestimmen Sie eine zweite mit Hilfe des Verfahrens der Reduktion der Ordnung:

$$(1-t^2) \cdot f''(t) + 2t \cdot f'(t) = 2f(t)$$

Tipp: Gibt es ein $(\alpha, \beta, \gamma)^T \in \mathbb{C}^3$ mit $\frac{2}{t \cdot (t-1) \cdot (t+1)} = \frac{\alpha}{t} + \frac{\beta}{t-1} + \frac{\gamma}{t+1}$ für alle $t \in \mathbb{C} \setminus \{-1; 0; 1\}$?



DGL/NteOrdHom/Ag_DGLOnHom_RedDerOrdEinstieg.tex

Aufgabe 14.107 (Reduktion der Ordnung)

Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Verwenden Sie das Verfahren der Reduktion der Ordnung, um die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung zu erhalten:

$$x \cdot y''(x) + (a \cdot x + 2) \cdot y'(x) + a \cdot y(x) = 0.$$

Tipp: Prüfen Sie zunächst, ob eine allgemeine Potenz- oder eine allgemeine Exponentialfunktion die Differentialgleichung löst (sprich $f_k(x) = x^k$ oder $g_k(x) = e^{kx}$)!



DGL/NteOrdHom/Ag_DGLOnHom_RedDerOrdKomplizierteZweiteFundLsg.tex

Aufgabe 14.108 (Reduktion der Ordnung)

Wir wollen die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung finden:

$$(x^3 - 2x^2) \cdot y''(x) + 3x^2 \cdot y'(x) + 12 \cdot y(x) = 0$$

- a) Prüfen Sie, ob es ein $k \in \mathbb{C}$ und ein $I \subseteq \mathbb{C}$ gibt, so dass die Funktion $m_k: I \rightarrow \mathbb{C}$ mit $x \mapsto m_k(x) := x^k$ die Differentialgleichung löst!
- b) Reduzieren Sie die Ordnung der gegebenen Differentialgleichung! Sie erhalten eine Differentialgleichung erster Ordnung, deren Lösung in Aufgabenteil d) erarbeitet werden soll.
- c) Gibt es $a \in \mathbb{C}$ und $b \in \mathbb{C}$ mit $\frac{x-8}{x \cdot (x-2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2}$ für alle $x \in \mathbb{C} \setminus \{0; 2\}$?
- d) Finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung erster Ordnung aus Aufgabenteil b)!
- e) Finden Sie $p \in \mathbb{C}$, $q \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{C}$, $s \in \mathbb{C}$ und $t \in \mathbb{C}$ mit $\frac{x^4}{(x-2)^3} = px + q + \frac{r}{x-2} + \frac{s}{(x-2)^2} + \frac{t}{(x-2)^3}$ für alle $x \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$!

f) Geben Sie die allgemeine Lösung der Ursprungsdifferentialgleichung an!



DGL/NteOrdHom/Ag_LsgNachweisen_HermitePolynome.tex

Aufgabe 14.109 (Hermite-Polynome als DGL-Lösung)

Die Hermite-Polynome $H_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sind unter anderem in der Physik von Bedeutung. Sie sind Lösungen der Differentialgleichung

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0.$$

Weisen Sie dies für $n \leq 3$ mit $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$ und $H_3(x) = 8x^3 - 12x$ jeweils durch Ableiten und Einsetzen nach.



DGL/NteOrdHom/Ag_Picard_vektoriell.tex

Aufgabe 14.110 (Picard-Iteration vektoriell)

Geben Sie das wohlbekannte Anfangswertproblem $x''(t) = -x(t)$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

- Führen Sie die Variable $v(t) = x'(t)$ ein und schreiben Sie die Differentialgleichung 2. Ordnung in ein System in Ordnung um.
- Zeigen Sie, dass die exakte Lösung $x(t) = \cos(t)$ tatsächlich ein Fixpunkt der Picard-Iteration ist.
- Führen Sie die ersten vier Picard-Iterationen mit der Startapproximation $x_0(t) = 1$, $v_0(t) = 0$ durch und vergleichen Sie die erhaltene Picard-Näherung mit der Taylor-Entwicklung der exakten Lösung.



DGL/NteOrdInhom/Ag_DGLOnInhom_AvTdrSAufOderUeberKlausurniveau.tex

Aufgabe 15.111 (Ansätze vom Typ der rechten Seite auf oder über Klausurniveau)

Geben Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen an!

a) $y'''(x) + 9y'(x) = 4y''(x) + 36y(x) + 20 \cdot (5x + 6) \cdot \sin(2x)$

b) $y'''(x) + 5y'(x) + 50y(x) = 8y''(x) + 12 \cdot (14x^2 + 4x - 7) \cdot e^{5x}$



DGL/NteOrdInhom/Ag_DGLOnInhom_AvTdrSAwpsRwpAlleKombis.tex

Aufgabe 15.112 (Ansatz vom Typ der rechten Seite)

Geben Sie zu den folgenden Differentialgleichungen zunächst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung an!

Bestimmen Sie danach eine partikuläre Lösung mit Hilfe eines Ansatzes vom Typ der rechten Seite!

Sind Anfangs- bzw. Randbedingungen angegeben, so bestimmen Sie die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung, die diese Anfangs- bzw. Randbedingungen erfüllt!

a) $y''(x) - 2y'(x) - 8y(x) = (36x + 12) \cdot e^{4x}$ mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 2$

b) $y'''(x) - 5y''(x) + 3y'(x) + 9y(x) = (16x - 8) \cdot e^x + 32e^{-x}$ mit $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$ und $y''(0) = 10$

c) $y''(x) + 4y(x) = 25x \cdot \sin(3x)$ mit $y(0) = 0$ und $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{9}{2}$

d) $y'''(x) - 3y''(x) + y'(x) - 3y(x) = (40x - 4) \cdot \sin(x)$

e) $y^{(4)}(x) + 2y''(x) + 8y'(x) + 5y(x) = (20x + 16) \cdot \sin(x) + 96x \cdot e^{-x}$



DGL/NteOrdInhom/Ag_DGLOnInhom_AvTdrSMitLaplaceTransOderAvTdrSEinstieg02.txt

Aufgabe 15.113 ()

Die Aufgabe

\MagSPfadM/DGL/MitLaplaceTrans/Ag_DGLOnInhom_MitLaplaceTransOderAvTdrSEinstieg02
eignet sich auch als Einstiegsaufgabe in den Ansatz vom Typ der rechten Seite.



DGL/NteOrdInhom/Ag_DGLOnInhom_AvTdrS02GeradenRechts.tex

Aufgabe 15.114 (Inhomogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten)

Geben Sie jeweils die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an!

a) $3y''(x) - 8y'(x) + 5y(x) = 35$

b) $y''(x) + y'(x) - 12y(x) = -144x$



DGL/NteOrdInhom/Ag_DGLOnInhom_EulerInhomogenVieleVerfahren.tex

Aufgabe 15.115 (Suchen einer partikulären Lösung)

Finden Sie eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung

$$x^2 \cdot f''(x) + 5x \cdot f'(x) + 3 \cdot f(x) = (x^2 - 3) \cdot \sin(x) - 5x \cdot \cos(x) \quad !$$

Hinweise: Sie können die partikuläre Lösung raten, mit Laplace-Transformation berechnen, über Variation der Konstanten bestimmen oder über einen Potenzreihenansatz ermitteln.

Falls Sie Laplace-Transformation verwenden, bedenken Sie, dass die Laplace-Transformierte einer Funktion vom exponentiellen Typ mit wachsendem Argument gegen 0 konvergiert.



DGL/NteOrdInhom/Ag_DGLOnInhom_PotReihenAnsAblDesArctan.tex

Aufgabe 15.116 (Potenzreihenansatz)

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertaufgabe mit dem Potenzreihenansatz!

Berechnen Sie die ersten sieben Koeffizienten der Potenzreihe!

Geben Sie außerdem eine Stammfunktion der Lösungsfunktion an!

$$(1+x^2) \cdot (y''(x) - 2) + 4xy'(x) + (x^4 + 2x^2 + 3) \cdot y(x) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$$

Handelt es sich um eine homogene Differentialgleichung?



DGL/NteOrdInhom/Ag_DGLOnInhom_PotReihenAnsKonstKoeffWieInAvTdrSO2GeradenRechts.tex

Aufgabe 15.117 (Inhomogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten)

Verwenden Sie einen Potenzreihenansatz, um die Lösungen der Anfangswertaufgaben zu erhalten:

a) $3y''(x) - 8y'(x) + 5y(x) = 35$

mit $y(0) = 9$ und $y'(0) = 2$

b) $y''(x) + y'(x) - 12y(x) = -144x$

mit $y(0) = -6$ und $y'(0) = -9$

Tipp: Es ergeben sich im Laufe der Rechnung doppelt rekursiv dargestellte Folgen. Falls Sie keine zündende Idee haben, wie die Folgen in geschlossener Darstellung aussehen, können Sie versuchen, als Zwischenschritt eine einfach rekursive Produktdarstellung zu finden.



DGL/NteOrdInhom/Ag_DGLOnInhom_PotReihenAnsZumUeben.tex

Aufgabe 15.118 (Potenzreihenansätze)

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme mittels eines Potenzreihenansatzes!

a) $(2x^2 + 3x) \cdot y''(x) - 2y'(x) - 4y(x) = 8x - 4$ mit $y(0) = 1$

b) $xy''(x) - y'(x) + 4xy(x) = 12x^4 - 8x^3 + 9x^2$ mit $y''(0) = -4$

c) $(x^3 + x^2) \cdot y''(x) - xy'(x) + y(x) = x^2$ mit $y'(0) = A \in \mathbb{C}$



DGL/NteOrdInhom/Ag_DGLOnInhom_TypDerRechtenSeiteMehr_kurz.tex

Aufgabe 15.119 (Ansatz vom Typ der rechten Seite)

Geben Sie zu den folgenden Differentialgleichungen zunächst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung an!

Bestimmen Sie danach eine partikuläre Lösung mit Hilfe eines Ansatzes vom Typ der rechten Seite!

Sind Anfangs- bzw. Randbedingungen angegeben, so bestimmen Sie die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung, die diese Anfangs- bzw. Randbedingungen erfüllt!

a) $y''(x) - 2y'(x) - 8y(x) = (36x + 12) \cdot e^{4x},$

$y(0) = 0$ und $y'(0) = 2$

b) $f''(z) + 4f(z) = 25z \cdot \sin(3z),$

$f(0) = 0$ und $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{9}{2}$

c) $v'''(t) - 3v''(t) + v'(t) - 3v(t) = (40t - 4) \cdot \sin(t)$

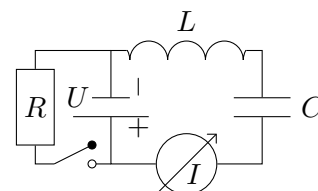


DGL/NteOrdInhom/Ag_DGLOnInhom_VdKAvTdrSLCKreisMitU.tex

Aufgabe 15.120 (Spannungsabfall im LC -Kreis)

Eine Spule und ein Kondensator werden in Reihe an eine (als widerstandsfrei angenommene) Batterie angeschlossen. Aus den Einzelspannungen an Spule ($L \cdot \dot{I}$) und Kondensator ($\frac{Q}{C}$) ergibt sich die Differentialgleichung

$$\dot{U}(t) = L \cdot \ddot{I}(t) + \frac{1}{C} \cdot I(t).$$



- Zu Beginn der Messung ist die Batterie voll im Saft und liefert eine konstante Spannung. Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an!
- Nach einiger Zeit wird ein Widerstand parallel zum bisherigen Kreis an die Batterie angeschlossen. Dadurch nimmt die Leistungsfähigkeit der Batterie ab und die Spannung fällt jetzt exponentiell mit der Zeit (präzise: $U(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{T_0}}$, wobei $T_0 \in \mathbb{R}$ mit $T_0 > 0$ von R abhängt). Berechnen Sie die Lösung der jetzt inhomogenen Differentialgleichung mittels Variation der Konstanten!
- Überprüfen Sie Ihre Lösung aus Aufgabenteil b) mit Hilfe eines Ansatzes vom Typ der rechten Seite!
(*Bemerkung:* Der Ansatz vom Typ der rechten Seite funktioniert hier neben der Variation der Konstanten auch, weil die Differentialgleichung konstante Koeffizienten hat.)



DGL/NteOrdInhom/Ag_DGLOnInhom_VdKEulerRedDerOrdEuler.tex

Aufgabe 15.121 (Variation der Konstanten)

Geben Sie zu den folgenden Differentialgleichungen die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung an! Bestimmen Sie danach eine partikuläre Lösung mittels Variation der Konstanten!

a) $x^2 \cdot y''(x) + 2x \cdot y'(x) - 6y(x) = 5x^2 + 30$

b) $(x^2 - x) \cdot y''(x) + (-2x^2 + 1) \cdot y'(x) + (4x - 2) \cdot y(x) = (x^2 - x)^2 \cdot e^x$

Tipp: e^{2x} ist eine Fundamentallösung der homogenen Gleichung. Bestimmen Sie eine von e^{2x} linear unabhängige Lösung der homogenen Gleichung durch Reduktion der Ordnung!

c) $x^3 \cdot y'''(x) - x^2 \cdot y''(x) + 2x \cdot y'(x) - 2y(x) = x^6 + x^2$

Aufgabenblatt 16

DGL/PartDGL



DGL/PartDGL/Ag_LineareTransportgleichung.tex

Aufgabe 16.122 (Lineare Transportgleichung)

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung. Es gelte $t, x, y, u \in \mathbb{R}$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 4 \frac{\partial u}{\partial x} = \cos(t), \quad u(x, 0) = \sin^2(x)$$



DGL/PartDGL/Ag_LineareTransportgleichungen.tex

Aufgabe 16.123 (Lineare Transportgleichungen)

Bestimmen Sie jeweils die Lösung der Differentialgleichung. Es gelte $t, x, y, s \in \mathbb{R}$.

a) $\frac{\partial u}{\partial t} - 5 \frac{\partial u}{\partial x} = e^{-2t}, u(x, 0) = x^4$

b) $\frac{\partial u}{\partial t} + 4 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, u(s, 2s) = 1 + s^2$

c) $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0, u(x, y, 0) = x^2 \cdot \sin(y^2)$

d) $\frac{\partial u}{\partial t} + 7 \frac{\partial u}{\partial x} = xe^{-t}, u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}$



DGL/PartDGL/Ag_Separationsansatz_AWP.tex

Aufgabe 16.124 (Separationsansatz)

Lösen Sie das Anfangswertproblem mit einem Separationsansatz der Form $u(x, t) = v(x) \cdot w(t)$.

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + (1 + x^2) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \cos(t) u(x, t), \quad u(x, 0) = e^{2 \arctan(x)}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2$$



DGL/PartDGL/Ag_Separationsansatz_Einstieg.tex

Aufgabe 16.125 (Separationsansatz)

Lösen Sie das Anfangswertproblem mit einem Separationsansatz der Form $u(x, t) = v(x) \cdot w(t)$.

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + (1 + x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \sin(t) u(x, t), \quad u(x, 0) = (1 + x)^4, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2$$



DGL/PartDGL/Ag_Separationsansatz_Transportgl.tex

Aufgabe 16.126 (Zusatzaufgabe: Separationsansatz bei Transportgleichungen)

Welche Lösung ergibt sich mit einem Separationsansatz der Form $u(x, t) = v(x) \cdot w(t)$ bzw. $u(x, y, t) = v(x) \cdot w(y) \cdot r(t)$? Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem was Sie über solche Transportgleichungen wissen bzw. mit den entsprechenden Ergebnissen aus Aufgabe 5.2.

a) $\frac{\partial u}{\partial t} + 4 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$

b) $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

**Aufgabe 16.127** (Separationsansatz bei der Wellengleichung)

Wir betrachten die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L$$

für eindimensionale Schallausbreitung in einer luftgefüllten Röhre der Länge L , wobei c die Schallgeschwindigkeit in Luft ist. Es soll $x, t, L, c, u(x, t) \in \mathbb{R}$ gelten.

- a) Berechnen Sie die Lösungen der Wellengleichung, die mit dem Separationsansatz $u(x, t) = v(x) \cdot w(t)$ zu finden sind und die Randbedingungen $u(0, t) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$ erfüllen. (Bem.: Das entspricht dem Fall, dass die Röhre bei $x = 0$ geschlossen und bei $x = L$ offen ist.)
- b) Jetzt seien zusätzlich die Anfangsbedingungen $u(x, 0) = 2 \sin(\frac{\pi}{2L}x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = -2\frac{5\pi}{2L}c \cdot \sin(\frac{5\pi}{2L}x)$ gegeben. Lösen Sie dieses Anfangswertproblem mit Hilfe des Ergebnisses aus a) und der Linearität der Wellengleichung.



DGL/SysHomDiag/Ag_DGLSysHomDiag_AngebotKaufverhalten.tex

Aufgabe 17.128 (Gegenseitige Beeinflussung von Angebot und Kaufverhalten)

Angebot eines Artikels und das Kaufverhalten der Kunden bei diesem Artikel beeinflussen sich gegenseitig: Hat ein Händler eine hohe Stückzahl des Artikels beim Hersteller gekauft, so sind bei diesem nicht mehr viele Teile vorrätig und er kann kurze Zeit später nicht mehr viele Artikel nachbestellen. Andererseits ist der Artikel dann beim Händler weniger schnell ausverkauft, wodurch mehr Käufer auf den Artikel aufmerksam werden, was das Kaufverhalten ankurbelt.

Bei einem hohen Kaufverhalten wird ein Händler dazu angehalten, mehr von dem Artikel nachzubestellen, wodurch das Angebot wächst. Andererseits entsteht bei den Kunden ein Sättigungseffekt, der das Kaufverhalten eindämmt.

Das Spiel zwischen Angebot A und Kaufverhalten K lasse sich für ein spezielles Produkt durch das folgende lineare Differentialgleichungssystem beschreiben:

$$18A'(t) = K(t) - 9A(t) \quad \text{und} \quad 2K'(t) = -K(t) + A(t).$$

a) Geben Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems an!

b) Weisen Sie die lineare Unabhängigkeit der einzelnen Fundamentallösungen nach!

Tipp: Schreiben Sie die Fundamentallösungen in eine Matrix und berechnen Sie deren Determinante. Diese sogenannte „Wronski-Determinante“ darf keine Nullstelle enthalten, um die lineare Unabhängigkeit der Lösungen nachzuweisen.

c) Wie entwickeln sich die beiden Funktionen, wenn am Anfang ein großes Angebot ($A(0) = 100$), aber kein Interesse der Käufer ($K(0) = 0$) vorhanden ist?

d) Was stellen sie beim Vergleich von $\int_0^\infty A(t) dt$ mit $\int_0^\infty K(t) dt$ fest?



DGL/SysHomDiag/Ag_DGLSysHomDiag_keineTextaufgabe.tex

Aufgabe 17.129 (Lineare homogene Differentialgleichungssysteme erster Ordnung)

Geben Sie alle reellen Lösungen der folgenden Differentialgleichungssysteme an!

a) $f'(t) = 2f(t) - 4g(t) + h(t), \quad g'(t) = -2f(t) + 3g(t) + 2h(t), \quad h'(t) = -f(t) - 2g(t) + 4h(t)$

b) $u'(x) = 5w(x) - 2u(x) - v(x), \quad v'(x) = 2v(x) - w(x) - u(x), \quad w'(x) = u(x) - 3v(x)$

c) $p'(z) = -3p(z) + q(z) - 3r(z), \quad q'(z) = 3p(z) + 4r(z), \quad r'(z) = 6p(z) - q(z) + 6r(z)$



DGL/SysHomDiag/
Ag_DGLSysHomJordan_DGLSysZweiterOrdAlsSysErsterOrdSchreibenHVLsgAngegeben.txt

Aufgabe 17.130 ()

Die Aufgabe

DGLSysJordan/Ag_DGLSysHomJordan_DGLSysZweiterOrdAlsSysErsterOrdSchreibenHVLsgAngegeben.tex
ist auch ohne die Bestimmung von Hauptvektoren lösbar.



DGL/ZTests/Ag_DGL_EineGlgVieleVerfahren.tex

Aufgabe 18.131 (Eine Gleichung, viele Verfahren)

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$u''(x) - 16u(x) = 0$$

- a) Klassifizieren Sie die Differentialgleichung, indem Sie in der folgenden Liste zutreffende Adjektive unterstreichen und unzutreffende durchstreichen:

linear — nicht-linear — erster Ordnung — höherer Ordnung — konstante Koeffizienten —
variable Koeffizienten — homogen — inhomogen — einzelne Gleichung — Gleichungssystem

- b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung durch einen geeigneten Ansatz.
- c) Bestimmen Sie die Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems mit $u(0) = -2$ und $u'(0) = 8$.
- d) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x)$ für die Lösung des Anfangswertproblems.
- e) Vergessen Sie jetzt alles, was Sie in den vorhergehenden Aufgabenteilen über u erfahren haben!
Schreiben Sie die Differentialgleichung als lineares homogenes Differentialgleichungssystem erster Ordnung $\vec{y}' = M\vec{y}$ für $y_1(x) = u(x)$ und $y_2(x) = u'(x)$ und bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieses Systems.

- f) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$u''(x) - 16u(x) = -36x \cdot e^{-2x} \quad \text{mit} \quad u(0) = 1 \quad \text{und} \quad u'(0) = -3$$

durch einen Ansatz vom Typ der rechten Seite. Bestimmen Sie außerdem den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x)$.

Bemerkung: Sie dürfen die Ergebnisse der vorherigen Aufgabenteile jetzt wieder verwenden.

- g) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$u''(x) - 16u(x) = -36x \cdot e^{-2x} \quad \text{mit} \quad u(0) = 1 \quad \text{und} \quad u'(0) = -3$$

durch Laplacetransformation.

- h) *Zusatzaufgabe:* Bestimmen Sie eine zu M ähnliche Diagonalmatrix D — sowie die zugehörige Basistransformationsmatrix T und deren Inverse.

Aufgabenblatt 19

DiffEinDim/DiffQuot



DiffEinDim/DiffQuot/Ag_Ableitung_DefinitionStetigDiffbar.tex

Aufgabe 19.132 (Stetigkeit und Differenzierbarkeit)

Bestimmen Sie die Konstante $a \in \mathbb{R}$ jeweils so, dass die angegebene Funktion bei $x = 0$ stetig ist. Untersuchen Sie anschließend für welche $x \in \mathbb{R}$ die Funktion differenzierbar ist und für welche $x \in \mathbb{R}$ die Funktion stetig differenzierbar ist.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{für } x \neq 0 \\ a, & \text{für } x = 0 \end{cases} \quad \text{b) } g(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} \cdot \ln(1 + |x|), & \text{für } x \neq 0 \\ a, & \text{für } x = 0 \end{cases}$$



DiffEinDim/DiffQuot/Ag_Ableitung_Differenzenquotient2.tex

Aufgabe 19.133 (Differenzenquotienten und Ableitung)

Untersuchen Sie mittels der Definition der Ableitung, ob die Funktion f_k an der Stelle x_k differenzierbar ist, und berechnen Sie in diesem Fall die Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten:

$$\text{a) } f_1(x) = \frac{(x-2)^4}{6} \text{ in } x_1 = 5 \quad \text{b) } f_2(x) = \sqrt{7-x} \text{ in } x_2 = 3 \quad \text{c) } f_3(x) = |x^2 - 16|, x_3 = -4$$



DiffEinDim/DiffQuot/Ag_Ableitung_Differenzenquotient5.tex

Aufgabe 19.134 (Lücken füllen)

Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass $f_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$x \mapsto f_\alpha(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} \cdot \sin(x), & \text{falls } x \neq 0 \text{ ist} \\ \alpha, & \text{falls } x = 0 \text{ ist} \end{cases}$$

stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist! Wo ist die Funktion dann differenzierbar?



DiffEinDim/DiffQuot/Ag_Ableitung_Differenzenquotient6.tex

Aufgabe 19.135 (Einseitige Ableitungen)

Bestimmen Sie sämtliche ein- und zweiseitigen Ableitungen (falls vorhanden) der Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto f(x) := \begin{cases} x^2 - 1, & \text{falls } x < 1 \text{ ist} \\ 0, & \text{falls } x = 1 \text{ ist} \\ \ln(x), & \text{falls } x > 1 \text{ ist} \end{cases}$$

auf dem Definitionsbereich $\mathbb{R}$ und entscheiden Sie, wo die Funktion stetig bzw. differenzierbar ist.



DiffEinDim/DiffQuot/Ag_Differenzierbarkeit_Abschnittsweise.tex

Aufgabe 19.136 (Differenzierbarkeit)

Gegeben seien die Funktionen $f: (-\infty; \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: (-\infty; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$t \mapsto f(t) := \begin{cases} \frac{1+t}{1-t}, & \text{für } t < 0 \\ e^{\sin(t)}, & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{und} \quad x \mapsto g(x) := \begin{cases} 0, & \text{für } x \leq 0 \\ \frac{x}{\ln(x)}, & \text{für } 0 < x < 1 \end{cases}$$

- Untersuchen Sie f und g auf Stetigkeit in $a := 0$.
- Berechnen Sie $f'(t)$ für $t \in (-\infty; \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\}$ und $g'(x)$ für $x \in (-\infty; 1) \setminus \{0\}$ und prüfen Sie, ob f und g an der Stelle $a = 0$ differenzierbar sind.
- Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von f und g und den Wertebereich von f .

Quelle: Aufgabe 4a, Klausur HM1 für Bauingenieure, 15.08.2015 bzw. 03.03.2015

Aufgabenblatt 20

DiffEinDim/DiffRegeln



DiffEinDim/DiffRegeln/Ag_Ableitung_EHochLn.tex

Aufgabe 20.137 (Ableiten mit dem „e hoch ln“-Trick)

Bestimmen Sie die Ableitung von $f: (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x)$ und $f(x)$ wie jeweils angegeben.

a) $f(x) := x^x$

b) $f(x) := (x^2 + 1)^{\frac{1}{x}}$

c) $f(x) := x^{x^2}$



DiffEinDim/DiffRegeln/Ag_Ableitung_Rechenregeln2.tex

Aufgabe 20.138 (Ableitung)

Berechnen Sie die Ableitung von g_1 bis g_6 mit

a) $g_1(x) = 6 \ln(x + 3 + x^2)$,

c) $g_3(x) = (3 \cos x + \sin x)^7$,

e) $g_5(x) = (2 - x) \tan(3x)$,

b) $g_2(x) = 4e^{x^2-3x}$,

d) $g_4(x) = x \sin(e^x)$,

f) $g_6(x) = 2x\sqrt{1+x^4}$.



DiffEinDim/DiffRegeln/Ag_Ableitung_RechenregelnAnwenden3.tex

Aufgabe 20.139 (Ableitungen)

Berechnen Sie die Ableitung von $f_k: D_k \rightarrow \mathbb{R}$ mit

a) $f_1(x) = \frac{2x-x^2}{x+1}$

c) $f_3(x) = \frac{\frac{x}{3}-x^2}{1-x}$

e) $f_5(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

b) $f_2(x) = \frac{x+x^2}{2+3x}$

d) $f_4(x) = \frac{\sin(x)-1}{\cos(x)+1}$

f) $f_6(x) = \frac{x-x^3}{e^{2x}}$



DiffEinDim/DiffRegeln/Ag_Ableitung_RechenregelnAnwenden6a.tex

Aufgabe 20.140 (Ableitung)

Berechnen Sie die Ableitung von $f_k: D_k \rightarrow \mathbb{R}$ für $k \in \{1, 2, 3\}$ mit

a) $f_1(x) := e^{\sin(2x)}$

b) $f_2(x) := \ln(\sin(8x))$

c) $f_3(x) := \cos(\ln(x^2))$



DiffEinDim/DiffRegeln/Ag_Ableitung_RechenregelnAnwenden6c.tex

Aufgabe 20.141 (Ableitung)

Berechnen Sie die Ableitung von $f_k: D_k \rightarrow \mathbb{R}$ mit

a) $f_1(x) := \arctan\left(\frac{x^2}{4}\right)$

b) $f_2(x) := \ln(\cos^2(\pi x))$

c) $f_3(x) := \arctan\left(\frac{1}{\ln(3x^2)}\right)$



DiffEinDim/DiffRegeln/Ag_Differentialrechnung_AbleitungUmkehrfunktion1.tex

Aufgabe 20.142 (Ableitung der Umkehrfunktion)

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := x + e^{2x}$.

a) Zeigen Sie, dass f umkehrbar ist!

b) Zeigen Sie, dass f^{-1} in $\ln(2e^4)$ differenzierbar ist und geben Sie die Ableitung der Umkehrfunktion in diesem Punkt an!



DiffEinDim/DiffRegeln/Ag_Differentialrechnung_AbleitungUmkehrfunktion2.tex

Aufgabe 20.143 (Ableitung der Umkehrfunktion)

Gegeben sei $f : (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := \ln(x) + x^2 - 1$. Zeigen Sie, dass f surjektiv und injektiv (und damit umkehrbar) ist und berechnen Sie mit dem Umkehrsatz die Ableitung von f^{-1} im Nullpunkt.



DiffEinDim/DiffRegeln/Ag_Differentialrechnung_Ableitung_DefBereich.tex

Aufgabe 20.144 (Definitionsbereiche und Ableitung)

Bestimmen Sie den Definitionsbereich D_0 der Funktion f , den Definitionsbereich D_1 der Ableitung f' , und berechnen Sie die Ableitung f' von:

- | | | |
|--|-------------------------|---------------------------------|
| a) $f(x) = x^2 + t^2$ mit $t \in \mathbb{R}$ | d) $f(x) = \cos(3x)$ | g) $f(x) = (x^5 + \sin(x))^7$ |
| b) $f(t) = x^2 + t^2$ mit $x \in \mathbb{R}$ | e) $f(x) = \cos(x^3)$ | h) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ |
| c) $f(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^5$ | f) $f(x) = (\cos(x))^3$ | i) $f(x) = \sqrt{-x^4 + 11}$ |



DiffEinDim/DiffRegeln/Ag_Differentialrechnung_Ableitung_erste_gemischt.tex

Aufgabe 20.145 (Ableitungsfunktion)

Berechnen Sie die erste Ableitung f' von

- | | | |
|---|---------------------------------------|--|
| a) $f(x) = \tan(x) + \arctan(x)$ | d) $f(x) = \cos(x) + \frac{2}{x} + 5$ | g) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$ |
| b) $f(x) = \exp(2x) + \exp(-x) \cdot x$ | e) $f(x) = \arctan(x^2 + 2x)$ | h) $f(x) = x^{-3} \cdot \cot(x)$ |
| c) $f(x) = \sqrt{1 - (\cos(x))^2}$ | f) $f(x) = \ln(\sin(\sqrt{x}))$ | i) $f(x) = \frac{\exp(\sqrt{x})}{\cos(x)}$ |



DiffEinDim/DiffRegeln/Ag_Differentialrechnung_Ableitung_erste_leicht.tex

Aufgabe 20.146 (Erste Ableitung)

Berechnen Sie die erste Ableitung f' von

- | | | |
|---|---|---|
| a) $f(x) = 4x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x}$ | d) $f(x) = (\cos(x))^2 - \tan(x)$ | g) $f(x) = (e^x)^3 + \arcsin(x)$ |
| b) $f(x) = \frac{3}{x^3} + 4x^{-1}$ | e) $f(x) = \arctan(x) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ | |
| c) $f(x) = -\sin(2x)$ | f) $f(x) = e^{-x} + e^{x^{-2}}$ | h) $f(x) = \ln(x) + \ln\left(\frac{2}{3x}\right)$ |



DiffEinDim/DiffRegeln/Ag_Differentialrechnung_Ableitung_erste_mittel.tex

Aufgabe 20.147 (Ableiten und zusammenfassen)

Berechnen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen f , und fassen Sie den Term der Ableitungsfunktion f' so weit wie möglich zusammen:

- | | |
|---|--------------------------------------|
| a) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{1 - x^2}$ | d) $f(x) = \frac{\sqrt{4x+1}}{x^2}$ |
| b) $f(x) = \frac{1 + \sin(2x)}{1 - \sin(2x)}$ | e) $f(t) = \sqrt{1 + (\cos(t^2))^2}$ |
| c) $f(x) = \tan(x) + \frac{2}{3} \cdot (\tan(x))^3 + \frac{1}{5} \cdot (\tan(x))^5$ | f) $f(t) = 182t - 169t^2 - 49 $ |



DiffEinDim/DiffRegeln/Ag_Differentialrechnung_Ableitungen_erste_zweite_leicht.tex

Aufgabe 20.148 (Erste und zweite Ableitung)

Bilden Sie die erste und zweite Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 3x^5 - 4x^3 + \frac{1}{2} \cdot x - 5$

d) $f(x) = \cos(x) \cdot \ln(x)$

g) $f(x) = \frac{\sin(x)}{x^3}$

b) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$

e) $f(x) = \exp\left(\frac{1}{2} \cdot x^2\right)$

c) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 3}$

f) $f(x) = x^2 \cdot \arctan(x)$

h) $f(x) = \tan(e^x)$



DiffEinDim/DiffRegeln/Ag_Diffrechnung_Ableitung_DefBereich_Betrag_mittel.tex

Aufgabe 20.149 (Definitionsbereiche und Ableitung; Ableitung von Funktionen mit Beträgen)

Bestimmen Sie den Definitionsbereich D_0 der Funktion f , den Definitionsbereich D_1 der Ableitung, und berechnen Sie die Ableitung f' von:

a) $f(x) = |x|$

e) $f(x) = \sqrt{\sin(x)}$

h) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

b) $f(x) = \tan\left(\frac{1}{x^2}\right)$

f) $f(x) = \sqrt{|\sin(x)|}$

i) $f(x) = \left|(\cos(-3x))^2\right|$

c) $f(x) = \sin(\sqrt{x})$

g) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$

d) $f(x) = \sin(|x|)$



DiffEinDim/DiffRegeln/Ag_KetteProdNFach_HermitePolynome.tex

Aufgabe 20.150 (Hermite-Polynome als Ableitung)

Die Hermite-Polynome $H_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \mapsto H_n(x)$ sind unter anderem in der Physik von Bedeutung. Eine mögliche Darstellung erfolgt über die Ableitung:

$$H_n(x) = (-1)^n \cdot e^{x^2} \cdot \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Werten Sie die Ableitung für $n \leq 3$ aus, um eine explizite Darstellung der ersten Polynome zu erhalten!



DiffEinDim/Geometrisches/Ag_Ableitung_Tangente.tex

Aufgabe 21.151 (Tangente an den Graphen einer Funktion)

Gegeben sei die Kurve $K := \left\{ \left(x, 1 - \exp\left(\frac{x}{2}\right) \right)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \right\}$.

- a) Stellen Sie die Gleichung der Tangenten an die Kurve K im Schnittpunkt von K mit der vertikalen Achse auf!
- b) Zeichnen Sie die Kurve, die Tangente und die horizontale Asymptote der Kurve in ein gemeinsames Koordinatensystem!

Aufgabenblatt 22

DiffEinDim/Kurvendisk



DiffEinDim/Kurvendisk/Ag_DiffEinDim_FktEigenschaftenExtremaWendepkte1a.tex

Aufgabe 22.152 (Charakteristische Punkte von Polynomfunktionen)

Ermitteln Sie die Extrem- und Wendepunkte der folgenden Funktionen, und skizzieren Sie anschließend die Funktionsgraphen.

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3$

d) $f(x) = -2x^3 + 3x + 5$

b) $f(x) = 2x^3 + 2x - 6$

e) $f(x) = 4x^3 + 2x^2 + 5x - 3$

c) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^3 - 2x^2 + 3x - 4$

f) $f(x) = -3x^3 - 6x^2 + 5x - 5$



DiffEinDim/Kurvendisk/Ag_DiffEinDim_FktEigenschaftenExtremaWendepkte2.tex

Aufgabe 22.153 (Charakteristische Stellen von Funktionen)

Bestimmen Sie die Extrem- und die Wendestellen der Funktionen

a) $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := \frac{x^2 - 4}{(x - 1)^2}$

b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto g(t) = t^3 \cdot e^{-t^2}$



DiffEinDim/Kurvendisk/Ag_Differentiation_KurvendiskussionGemischt.tex

Aufgabe 22.154 (Extrempunkte und Wendepunkte von verschiedenen Funktionen)

Für die Funktionen:

a) $f(x) = x - \sqrt{2} \sin(x)$

c) $f(x) = xe^x$

e) $f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

b) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 3}$

d) $f(x) = x^2 e^x$

f) $f(x) = x \ln(x)$

- Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich
- Bestimmen Sie die Nullstellen (wenn möglich) und Asymptoten
- Untersuchen Sie die Funktionen auf lokale Extrema und Wendepunkte
- Geben Sie an, wo die Funktionen monoton wachsend bzw. fallend sind
- Geben Sie an, wo die Funktion konvex bzw. konkav sind
- Skizzieren Sie den Graph der Funktion



DiffEinDim/Kurvendisk/Ag_Kurvendiskussion.tex

Aufgabe 22.155 (Ermittlung des Qualitativen Verlaufs von Funktionsgraphen)

Führen Sie für die folgenden Funktionen eine vollständige Kurvendiskussion durch:

a) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + x - 3$

c) $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + 1}$

e) $f(x) = (2x - x^2) \cdot e^x$

b) $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 2}$

d) $f(x) = x \cdot \sqrt{9 - x^2}$

f) $f(x) = \frac{(\ln(x))^2}{x}$



DiffEinDim/Kurvendisk/Ag_Kurvendiskussion_mitElastizitaetTangente.tex

Aufgabe 22.156 (Kurvendiskussion, Tangente)

Berechnen Sie jeweils die ersten drei Ableitungen dieser Funktionen und führen Sie eine vollständige Kurvendiskussion durch (Monotonieverhalten, lokale/globale Extrema, Wendepunkte, Konvexität, Elastizität). Berechnen Sie bei diesen Funktionen ebenfalls die Tangente im Punkt $x_0 = 1$.

Hinweis: Elastizität ϵ einer positiven Funktion ist definiert als $\epsilon_f(x) = \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)}$.

- a)** $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$ auf $(0; \infty)$ **b)** $g(x) = \ln(x^2 + 1)$ auf $\mathbb{R}$ **c)** $h(x) = \cos(\pi x)$ auf $\mathbb{R}$

Aufgabenblatt 23

DiffEinDim/LHospital



DiffEinDim/LHospital/Ag_Funktionsgrenzwerte_lHospital_leicht.tex

Aufgabe 23.157 (Grenzwerte ausrechnen)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte (falls vorhanden):

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x \cdot (x - 1)}{x^2 - 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln(x) + x^2)}{\ln(x)}$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 4}{\sqrt{9x^2 - 8x + 3}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln(x))$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1000}}{e^x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x}$



DiffEinDim/LHospital/Ag_Funktionsgrenzwerte_mittelLHospital.tex

Aufgabe 23.158 (Die Regel von de l'Hôpital)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin(x)}{2x - \pi \cdot \sin(x)}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{x^2}$

e) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^7(t)}{\sin(7t)}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(2x)}{x + \sin(x)}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln(x)}$

f) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \cdot \sin(t)}{t^2 - \sin(t)}$



DiffEinDim/MWS/Ag_MWS_CosSqrtUngleichung.tex

Aufgabe 24.159 (Mittelwertsatz)

Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, dass

$$|\cos(\sqrt{x}) - \cos(\sqrt{y})| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $y \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < y < x + 2$ gilt.



DiffEinDim/MWS/Ag_MWS_GemischteUngleichungen.tex

Aufgabe 24.160 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

Verwenden Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung, um folgende Aussagen zu verifizieren:

- a) Für alle $a \in \mathbb{R}$ und alle $b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$ gilt $1 - \frac{a}{b} \leq \ln\left(\frac{b}{a}\right) \leq \frac{b}{a} - 1$.
- b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ gilt $1 - x < e^{-x}$ und $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.
- c) Für alle $\alpha \in (0; 1)$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ gilt $1 + \frac{\alpha x}{(1+x)^{1-\alpha}} < (1+x)^\alpha < 1 + \alpha x$.
- d) Es sind $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0$ und $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.



DiffEinDim/MWS/Ag_MWS_MitOderOhneMWS.tex

Aufgabe 24.161 (Ein nützlicher Grenzwert)

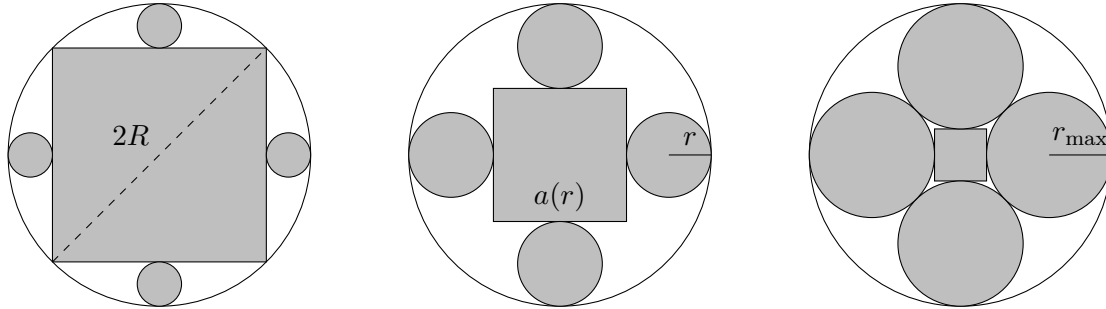
Beweisen Sie den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right) = 1$.



DiffEinDim/Optimierung/Ag_DiffEinDimOptimierung_Kreisfuellen.tex

Aufgabe 25.162 (Kreis füllen)

Ein Kreis vom Radius $R \in \mathbb{R}$ mit $R > 0$ soll möglichst großflächig mit einem Quadrat der Kantenlänge $a(r)$ und vier Kreisen mit Radius r abgedeckt werden, siehe Skizzen. Zwischen den Randfällen mit größtem Quadrat beziehungsweise größten Kreisen kommen „Kompromisse“ in Frage:



- Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $a(r)$ und daraus die Funktionsgleichung $S(r)$ für die insgesamt abgedeckte Fläche bei gegebenem R .
- Welche Form hat $S(r)$? Was bedeutet dies für Extrempunkte? Sie können die Ableitung zur Extrempunktbestimmung verwenden.
- Für die Extremwertbestimmung müssen die Randpunkte betrachtet werden. Die größtmögliche Kantenlänge liefert der Satz von Pythagoras. Die Mittelpunkte der größtmöglichen Kreise bilden ein Quadrat, dessen Diagonalen auf Durchmessern des äußeren Kreises liegen. Bestimmen Sie damit die zugehörigen Radien $r_{\min}$ und $r_{\max}$ sowie die Flächen $S(r_{\min})$ und $S(r_{\max})$. Für die Bestimmung des größeren der beiden Randwerte können Hilfsmittel verwendet werden.



DiffEinDim/Optimierung/Ag_Differentialrechnung_Extremwertaufgabe.tex

Aufgabe 25.163 (Angewandte Extremwertrechnung — Kreiszylinder in einer Kugel)

Berechnen Sie den Radius r des Grundkreises und die Höhe h des in eine Kugel vom Radius $R \in \mathbb{R}$ mit $R > 0$ eingesetzten Kreiszylinders maximalen Volumens.



DiffEinDim/Optimierung/Ag_Extremwerte_Intervalle.tex

Aufgabe 25.164 (Extremwerte)

Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extremwerte:

- | | |
|---|--|
| a) $f(x) = x, x \in (1, 4]$ | d) $f(x) = x + \sin(x), x \in [0, 4\pi]$ |
| b) $f(x) = -x^2 + 4x - 4, x \in [1, 4]$ | e) $f(x) = x + 2 \cdot \cos(x), x \in [0, 4\pi]$ |
| c) $f(x) = -x^2 + 4x - 4, x \in [1, 4]$ | f) $f(x) = \frac{2}{3} \cdot x^3 - x^2 + 2, x \in [-1, 2]$ |



DiffEinDim/Optimierung/Ag_ParamKurven_AbstandZumUrsprung.tex

Aufgabe 25.165 (Abstand zum Ursprung)

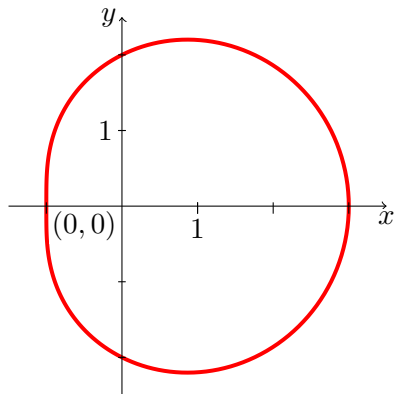
Für die angegebenen parametrisierten Kurven

$$K : \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

berechnen Sie die Punkte mit maximalem und minimalem Abstand zum Ursprung!

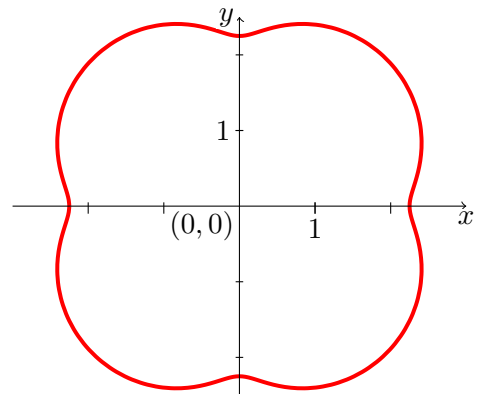
a) $x(t) = \cos^2(t) + 2 \cos t$

$y(t) = \cos t \sin t + 2 \sin t$



b) $x(t) = \frac{5}{2} \cos t - \frac{1}{4} \cos(5t)$

$y(t) = \frac{5}{2} \sin t - \frac{1}{4} \sin(5t)$



Hinweis: $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$
 $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$

Aufgabenblatt 26**DiffEinDim/Taylor**

DiffEinDim/Taylor/Ag_Taylorpolynom_Grad2Gemischt.tex

Aufgabe 26.166 (Taylorpolynome)

Bestimmen Sie jeweils das Taylorpolynom 2. Grades von den Funktionen beim Entwicklungspunkt $x_0 = 1$, wobei $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ Konstanten sind:

a) $f(x) = a + bx + cx^2$

b) $g(x) = e^x \cdot \log(x)$

c) $h(x) = \frac{1}{2-x}$

Versuchen Sie danach, zu f und h die vollständigen Taylorreihen zu bestimmen, *ohne* die Koeffizientenformel $a_n = \frac{h^{(n)}(x_0)}{n!}$ zu verwenden.



DiffEinDim/Taylor/Ag_Taylorreihe_Fktxplus1exp.tex

Aufgabe 26.167 (Taylorreihen)

Gesucht ist die Taylorreihe der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := (x + 1) \cdot e^x$.

- a)** Berechnen Sie die ersten vier Ableitungen von f .
- b)** Stellen Sie eine Vermutung für $f^{(n)}(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ auf.
- c)** Beweisen Sie Ihre Vermutung durch vollständige Induktion.
- d)** Stellen Sie damit die Taylorreihe von f um 0 auf und bestimmen Sie den Konvergenzradius.



DiffEinDim/ZUebersichten/Ag_Differentiation_Info_ListeAbleitungen.tex

Funktion f	Ableitung f'	Bemerkung
$c = c \cdot x^0$	0	konstante Funktion f mit Wert $c \in \mathbb{R}$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$n \geq 1$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$n \leq -1, x \neq 0$
x^r	$r \cdot x^{r-1}$	$r \in \mathbb{R}, x > 0$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
$\cot(x)$	$-1 - \cot^2(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)}$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\exp(x)$	$\exp(x)$	
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	
$\operatorname{arccot}(x)$	$\frac{-1}{1+x^2}$	
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1 < x < 1$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1 < x < 1$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	
$\tanh(x)$	$1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$	
$\coth(x)$	$1 - \coth^2(x) = \frac{-1}{\sinh^2(x)}$	$x \neq 0$

Aufgabenblatt 28

DiffMehrDim/DiffbarPart



DiffMehrDim/DiffbarPart/Ag_Gradient_Anwendung.tex

Aufgabe 28.168 (Anwendungen des Gradienten)

- a) Der Zusammenhang zwischen potentieller Energie U und Kraft $\vec{F}$ lautet $\vec{F} = -\nabla U$. Berechnen Sie jeweils die zugehörige Kraft für die elektrostatische Potentielle Energie (Coulomb-Energie) $U_C(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r}$ zwischen der Ladung Q_2 und der im Koordinatenursprung ruhenden Ladung Q_1 mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ sowie für das zur Modellierung von intermolekularen Wechselwirkungen eingesetzte Lennard-Jones-Potential $U_{LJ}(r) = \varepsilon \left(\left(\frac{r_m}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{r_m}{r} \right)^6 \right)$ mit den Parametern ε, r_m .
- b) Ein kleiner Ball bewege sich reibungsfrei auf der Mantelfläche eines (unendlich langen) Zylinders mit Radius 5, dessen Symmetrieachse auf der y -Achse liegt. Welche Gleichung der Form $g(x, y, z) = 0$ erfüllen die Punkte auf der Zylindermantelfläche? Auf den Ball wirke die Gravitationskraft $\vec{F}_g = (0 \ 0 \ -1)^T$. Wie groß ist die Gesamtkraft $\vec{F}$ auf den Ball am Punkt $(3, 0, 4)$?



DiffMehrDim/DiffbarPart/Ag_HoeherePartielleAbleitungen.tex

Aufgabe 28.169 (Höhere partielle Ableitungen)

Berechnen Sie die angegebenen partiellen Ableitungen:

- a) $f(x, y) = 3xy^4 + x^3y^2$; f_{xyy} ; f_{yyy}
- b) $f(x, t) = x^2e^{-ct}$, $c \in \mathbb{R}$; f_{ttt} ; f_{txx}
- c) $f(x, y, z) = \cos(4x + 3y + 2z)$; f_{xyz} ; f_{yzz}
- d) $f(r, s, t) = r \ln(rs^2t^3)$; f_{rss} ; f_{rst}
- e) $u(r, \vartheta) = e^{r\vartheta} \sin(\vartheta)$; $u_{r\vartheta r}$
- f) $u(x, y, z) = x^a y^b z^c$, $(a, b, c)^T \in \mathbb{R}^3$; u_{xyyzzz}



DiffMehrDim/DiffbarPart/Ag_PartDiffbar_DiffQuotMitWurzeltrickUndKontrolle.tex

Aufgabe 28.170 (Differentialquotient für partielle Ableitungen)

Seien $D := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x > -y^2\}$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto f(x, y) := \frac{1}{\sqrt{(x+y^2)}}$.

- a) Berechnen Sie $\frac{\partial f}{\partial x}(7, 3)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(7, 3)$ mit Hilfe der entsprechenden Differentialquotienten!
- b) Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse aus Aufgabenteil a), indem Sie den Gradienten von f mit den Ableitungsregeln und Standardableitungen ausrechnen und an der Stelle $(7, 3)^T$ auswerten!



DiffMehrDim/DiffbarPart/Ag_PartDiffbar_Einstieg8MitUnd40hneDiffquot.tex

Aufgabe 28.171 (Erste partielle Ableitung)

Bestimmen Sie für die Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto f(x, y)$ und $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, t)^T \mapsto g(x, t)$ die angegebenen partiellen Ableitungen! Dabei seien für alle $x \in \mathbb{R}$, alle $y \in \mathbb{R}$ und alle $t \in \mathbb{R}$

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x-y}{x+y}, & \text{für } x \neq -y \\ x+1, & \text{für } x = -y \end{cases} \quad \text{und} \quad g(x, t) := \begin{cases} te^{\frac{x}{t}}, & \text{für } t \neq 0 \\ 0, & \text{für } t = 0 \end{cases}.$$

- a) $f_x(0, 0)$ c) $f_x(1, 2)$ e) $f_y(3, -3)$ g) $g_x(0, 0)$ i) $g_x(2, 1)$ k) $g_t(2, 0)$
- b) $f_x(3, -3)$ d) $f_y(0, 0)$ f) $f_y(1, 2)$ h) $g_x(2, 0)$ j) $g_t(0, 0)$ l) $g_t(2, 1)$



DiffMehrDim/DiffbarPart/Ag_PartDiffbar_ErstePartAblNachStewartCalculus.tex

Aufgabe 28.172 (Gradient)

Für die angegebenen Funktionen berechnen Sie den Gradienten!

a) $f(x, y) := 3x - 2y^4$

f) $f(x, y, z) := xy^2z^3 + 3yz$

k) $f(x, y) := x^y$

b) $f(x, y) := x^5 + 3x^3y^2 + 3xy^4$

g) $f(x, y, z) := \ln(x + 2y + 3z)$

l) $f(x, t) := \arctan(x \cdot \sqrt{t})$

c) $f(x, y) := x \cdot e^{3y}$

h) $f(x, t, \vartheta) := x \cdot e^{-t} \cdot \sin(\vartheta)$

m) $f(x, y, z) := x^2 \cdot e^{yz}$

d) $f(x, y) := \sin(x) \cdot \cos(y)$

i) $f(x, y, z, t) := \frac{yz^2}{x} \cdot \tan(yt)$

n) $f(r, s, t) := \sqrt{r^2 + s^2 + t^2}$

e) $f(r, s) := r \cdot \ln(r^2 + s^2)$

j) $f(x, y) := y \cdot \ln(x)$

o) $f(x, y, z, t) := \frac{xy^2}{t+2z}$



DiffMehrDim/DiffbarPart/Ag_PartDiffbar_KritischenPunktBerechnenIn3D.tex

Aufgabe 28.173 (Der Gradient)

Bestimmen Sie den Gradienten von $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y, z)^T \mapsto f(x, y, z) := x^2 + e^x y^2 + x e^{xyz}$ und finden Sie die „kritischen Punkte“ von f , also alle $(a, b, c)^T \in \mathbb{R}^3$ mit $(\text{grad } f)(a, b, c) = \vec{0}$.



DiffMehrDim/DiffbarPart/Ag_PartDiffbar_ZweiteAbl3D2DUnd4D0hneDiffQuot.tex

Aufgabe 28.174 (Partielle Ableitungen)

Seien $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y, z)^T \mapsto f(x, y, z)$, $g: (\mathbb{R} \setminus \{0\})^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto g(x, y)$ und $h: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y, z, t)^T \mapsto h(x, y, z, t)$ Funktionen mit den unten angegebenen Zuordnungsvorschriften.

Bestimmen Sie sämtliche 2. partiellen Ableitungen dieser Funktionen:

a) $f(x, y, z) := x + yz + z \cdot \sin(xy)$

b) $g(x, y) := \frac{x+y}{xy}$

c) $h(x, y, z, t) := xyz t$



DiffMehrDim/DiffbarRichtung/Ag_RichtAbl_Zwei2DNachDefinition.tex

Aufgabe 29.175 (Definition der Richtungsableitung)

Prüfen Sie jeweils durch Untersuchung eines geeigneten Differenzenquotienten, ob die Funktion im angegebenen Punkt in der angegebenen Richtung differenzierbar ist und geben Sie gegebenenfalls den Wert der entsprechenden Ableitung an!

a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto f(x, y) := (xy)^2$ in $(4, -1)^T$ in der Richtung $\left(\frac{35}{37}, \frac{12}{37}\right)^T$

b) $f: \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto f(x, y) := \frac{\sqrt{|x|}}{y}$ in $(3, 2)^T$ in der Richtung $\left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)^T$



DiffMehrDim/DiffbarRichtung/Ag_Richtungsableitung_Standard.tex

Aufgabe 29.176 (Richtungsableitung)

Berechnen Sie jeweils die Ableitung der Funktion im angegebenen Punkt in Richtung des Vektors $\vec{v}$.

a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto f(x, y) := 5xy^2 - 4yx^3$, $(x_0, y_0)^T := (1, 2)^T$ und $\vec{v} := \left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)^T$

b) $f: (0; \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto f(x, y) := y \cdot \ln(x)$, $(x_0, y_0)^T := (1, -3)^T$ und $\vec{v} := \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)^T$

c) $f: \mathbb{R} \times [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto f(x, y) := 1 + 2 \cdot x \cdot \sqrt{y}$, $(x_0, y_0)^T := (3, 4)^T$ und $\vec{v} := \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)^T$

d) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto f(x, y) := \ln(x^2 + y^2)$, $(x_0, y_0)^T := (2, 1)^T$ und $\vec{v} := \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^T$



DiffMehrDim/DiffbarRichtung/Ag_Richtungsableitungen_Definition.tex

Aufgabe 29.177 (Richtungsableitungen)

Für die Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto f(x, y)$, $(x, y, z)^T \mapsto g(x, y, z)$,

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{für } (x, y)^T \neq (0, 0)^T \\ 0, & \text{für } (x, y)^T = (0, 0)^T \end{cases} \quad \text{und} \quad g(x, y, z) := \begin{cases} x^{\frac{y}{z}}, & \text{für } z \neq 0 \text{ und } x \geq 0 \\ 0, & \text{für } z = 0 \text{ oder } x < 0 \end{cases}$$

sowie die Vektoren $\vec{a} = (0, 0)^T$, $\vec{b} = (1, 2)^T$, $\vec{c} = (0, 0, 0)^T$, $\vec{d} = (1, 2, 1)^T$,

$$\vec{u} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)^T, \quad \vec{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^T \quad \text{und} \quad \vec{w} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)^T$$

berechnen Sie die angegebenen Richtungsableitungen, falls diese existieren:

a) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\vec{a}^T)$ b) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\vec{b}^T)$ c) $\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(\vec{c}^T)$ d) $\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(\vec{d}^T)$ e) $\frac{\partial g}{\partial \vec{w}}(\vec{c}^T)$ f) $\frac{\partial g}{\partial \vec{w}}(\vec{d}^T)$



DiffMehrDim/DiffbarTotal/Ag_DiffbarPartiellTotal.tex

Aufgabe 30.178 (Partielle und totale Differenzierbarkeit)

Untersuchen Sie die Funktion $f(x, y) = xy^2 + |x|$ auf partielle und totale Differenzierbarkeit.



DiffMehrDim/DiffbarTotal/Ag_DiffbarTotal_CeinsMitAbleitenNachDemHauptsatz.tex

Aufgabe 30.179 (Ableiten mit dem Hauptsatz)

Seien $D := (0; \infty)$ und $f: D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x, y) := \int_{2x+1}^3 \frac{e^{yt}}{t} dt$.

- Berechnen Sie auf $D \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ die Hesse-Matrix H_f von f !
- Berechnen Sie $\partial_y f(x, 0)$ für alle $x \in D$ und untersuchen Sie f auf totale Differenzierbarkeit!

Tipps: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass man Grenzwerte, in denen y „läuft“, und Ableitungen nach y mit der Integration vertauschen, also am Integralzeichen vorbeiziehen darf.

Hilft Ihnen die Potenzreihe von $\exp$ bei der Berechnung von $\lim_{(t,y)^T \rightarrow (x,0)^T} \partial_y f(t, y)$?



DiffMehrDim/DiffbarTotal/Ag_DiffbarTotal_LimesBedMitNullEinUndZweifachemSandwich.tex

Aufgabe 30.180 (Gradient und totale Ableitung)

- Bestimmen Sie den Gradienten von $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto f(x, y) := x + y$ und zeigen Sie mit der Limesbedingung, dass er die Ableitung von f in $(1, 2)^T$ liefert!
- Bestimmen Sie den Gradienten von $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto f(x, y) := xy^2$ und zeigen Sie mit der Limesbedingung, dass er die Ableitung von f in $(4, -3)^T$ liefert!
- Bestimmen Sie den Gradienten von $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y, z)^T \mapsto f(x, y, z) := x + y^2 - \sin(z)$ und zeigen Sie mit Hilfe der Definition, dass er die Ableitung von f im Nullpunkt liefert!



DiffMehrDim/DiffbarTotal/Ag_DiffbarTotal_NachweisMitUndOhneCEinsKriterium.tex

Aufgabe 30.181 (Partielle Differenzierbarkeit und Stetigkeit)

Untersuchen Sie die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y = 0 \\ \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{sonst} \end{cases}$$

auf Stetigkeit, partielle Differenzierbarkeit und totale Differenzierbarkeit auf $\mathbb{R}^2$.

Zeigen Sie die totale Differenzierbarkeit sowohl mit dem C^1 -Kriterium als auch mit der Definition.



DiffMehrDim/DiffbarTotal/Ag_DiffbarTotal_NichtCEinsAberTotalDiffbar.tex

Aufgabe 30.182 (Nicht C^1 aber doch total diffbar)

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{für } x = y = 0 \\ (x^2 + y^2) \cdot \sin\left((x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}\right), & \text{sonst} \end{cases}.$$

- Zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar ist und geben Sie den Gradienten an!

b) Zeigen Sie, dass $\text{grad } f$ in $(0, 0)^T$ unstetig ist!

c) Zeigen Sie, dass f in $(0, 0)^T$ trotzdem total differenzierbar ist!

Bemerkung: Weil für $(x, y)^T \neq (0, 0)^T$ das C^1 -Kriterium anwendbar ist — f ist dort stetig partiell diff'bar —, ist f damit also total differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}^2$.



DiffMehrDim/DiffbarTotal/Ag_DiffbarTotal_NichtDBMehrereGrunde.tex

Aufgabe 30.183 (Totale Differenzierbarkeit und Stetigkeit)

Bestimmen Sie (falls vorhanden) die partiellen Ableitungen von

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x, y) := \begin{cases} \frac{x}{x^2 + y^2}, & \text{falls } (x, y)^T \neq (0, 0)^T \\ 0, & \text{falls } (x, y)^T = (0, 0)^T \end{cases}.$$

Finden Sie mehrere Gründe dafür, dass f in $(0, 0)^T$ nicht total differenzierbar ist!

Tipp: Bestimmen Sie den Gradienten in $(x, y)^T \neq (0, 0)^T$ durch Differentiationsregeln und die beiden partiellen Ableitungen im Nullpunkt mit dem Differentialquotienten!



DiffMehrDim/DiffbarTotal/Ag_Differentiation_Mehrdimensional_PartiiellNichtTotaldb.tex

Aufgabe 30.184 (Stetigkeit und partielle Ableitungen)

Betrachten Sie die folgende Abbildung und beweisen Sie die nachfolgenden Aussagen.

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{für } x = y = 0 \\ \frac{y^3}{x^2 + y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

a) f ist stetig auf ganz $\mathbb{R}^2$.

b) Die partiellen Ableitungen von f in jedem Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ existieren.

c) f ist im Punkt $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ nicht differenzierbar.



DiffMehrDim/DiffbarVermischt/Ag_Diffbar_GradExistiertRichtungsablAberNicht.tex

Aufgabe 31.185 (Differenzierbarkeit)

Für die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{für } x = y = 0 \\ \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{sonst} \end{cases}$

- a) überprüfen Sie die Stetigkeit auf dem gesamten Definitionsbereich!
- b)berechnen Sie die partiellen Ableitungen $f_x(0, 0)$ und $f_y(0, 0)$!
- c)untersuchen Sie die partiellen Ableitungen auf Stetigkeit im Punkt $(0, 0)^T$!
- d)berechnen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0)$ mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$!
- e)Warum kann man die Richtungsableitung nicht mit dem Gradienten berechnen?



DiffMehrDim/ExtremaMitNB/Ag_ExtGebietMitRand.tex

Aufgabe 32.186 (Extrema auf Gebiet mit Rand)Bestimmen Sie alle Extrema der Funktion $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x, y) = x^4 + y^2,$$

und

$$\mathbb{D} := \{(x, y)^T : h(x, y) := x^2 + y^2 - 1 \leq 0\}.$$



DiffMehrDim/ExtremaMitNB/Ag_ExtGebietMitRand2.tex

Aufgabe 32.187 (Extrema auf Gebiet mit Rand)Bestimmen Sie alle Extrema der Funktion $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 + 3,$$

und

$$\mathbb{D} := \{(x, y)^T : h(x, y) := 4x^2 + y^2 - 1 \leq 0\}.$$



DiffMehrDim/ExtremaOhneNB/Ag_DiffMehrDim_UnsymmetrischeHesse.tex

Aufgabe 33.188 (Nichtsymmetrische Hessematrix)

Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{für } x = y = 0 \\ \frac{yx^3 - xy^3}{x^2 + y^2}, & \text{sonst} \end{cases}$.

- Zeigen Sie, dass f im Punkt $(0, 0)^T$ stetig ist.
- Zeigen Sie, dass $(0, 0)^T$ ein stationärer Punkt von f ist.
- Berechnen Sie die partiellen Ableitungen abseits des Nullpunktes.
- Prüfen Sie, ob es weitere stationäre Punkte von f gibt.
- Berechnen Sie die Hessematrix $H_f(0, 0)$.
- Zeigen Sie, dass im Punkt $(0, 0)^T$ keine lokale Extremstelle vorliegt.



DiffMehrDim/ExtremaOhneNB/Ag_Differentiation_Mehrdimensional_Extremstellen3.tex

Aufgabe 33.189 (Extremwerte)

Bestimmen Sie alle Extremwerte der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad (x, y)^T \mapsto f(x, y) := 3x - x^3 - 2y^2 + y^4.$$



DiffMehrDim/ExtremaOhneNB/Ag_ExtrOhneNB_EntscheidungMitWenigInformationen.tex

Aufgabe 33.190 (Lokales Verhalten einer Funktion in der Umgebung eines Punktes)

Reichen die angegebenen Informationen aus, um zu entscheiden, ob am Punkt $\vec{a}$ ein lokales Extremum (also Maximum oder Minimum) vorliegt?

Falls ja, geben Sie bitte an, ob ein Maximum, ein Minimum oder keines von beiden vorliegt.

Alle Funktionen seien zweimal stetig differenzierbar und „ H_f “ bezeichne die Hesse-Matrix von f .

- $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(\text{grad } f)(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $H_f(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
- $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(\text{grad } g)(\vec{a}) = 0$ und $H_g(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
- $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(\text{grad } h)(\vec{a}) = 0$ und die Eigenwerte von $H_h(\vec{a})$ sind 0 und -3 .
- $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(\text{grad } p)(\vec{a}) = 0$ und $\det(H_p(\vec{a})) = 3$.
- $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(\text{grad } q)(\vec{a}) = 0$ und $\det(H_q(\vec{a})) = -4$.
- $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(\text{grad } u)(\vec{a}) = 0$ und $\det(H_u(\vec{a})) = 3$.
- $v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(\text{grad } v)(\vec{a}) = 0$ und $\det(H_v(\vec{a})) = -4$.
- $w: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(\text{grad } w)(\vec{a}) = 0$ und $H_w(\vec{a})$ hat die Eigenwerte -4 , 0 und 6.
- $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto r(x, y) := (x^2 + y^2)^3$ in $\vec{a} = (0, 0)^T$.
- $s: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto s(x, y) := x^3 \cdot y^5$ in $\vec{a} = (0, 0)^T$.



DiffMehrDim/ExtremaOhneNB/Ag_ExtrOhneNB_HeranfuehrungAnDefinitheitsverfahren.tex

Aufgabe 33.191 (Lokale Extremstellen in mehreren Veränderlichen)

Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch $(x, y)^T \mapsto f(x, y) := 3x - x^3 - 2y^2 + y^4$.

- Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f (also die Nullstellen des Gradienten)!
- Untersuchen Sie, ob im kritischen Punkt $\vec{p} := (1, 0)^T$ ein Hoch-, ein Tief- oder ein Sattelpunkt des Graphen von f vorliegt, indem Sie untersuchen, wie sich die Funktionswerte längs aller Geraden durch diesen Punkt verändern!

Tipp: Eine Gerade durch $\vec{r}$ mit Richtungsvektor $\vec{v}$ ist gegeben durch $\vec{g}_{\vec{r}, \vec{v}}(t) := \vec{r} + t \cdot \vec{v}$. Untersuchen Sie die verkettete Funktion $h_{\vec{r}, \vec{v}} := f \circ \vec{g}_{\vec{r}, \vec{v}}$, die nur noch von *einer* Veränderlichen abhängt.

- Rechnen Sie nach, dass für $h_{\vec{r}, \vec{v}} := f \circ \vec{g}_{\vec{r}, \vec{v}}$ mit $\vec{r} = (a, b)^T \in \mathbb{R}^2$, $\vec{v} = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{R}^2$, $\|\vec{v}\| = 1$, $\vec{g}_{\vec{r}, \vec{v}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $t \mapsto \vec{g}_{\vec{r}, \vec{v}}(t) = \vec{r} + t \cdot \vec{v}$ wie im Tipp zu Aufgabenteil b) gilt:

$$h''_{\vec{r}, \vec{v}}(0) = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (\text{Matrixmultiplikation})$$

- Untersuchen Sie auch die anderen kritischen Punkte nach der Herangehensweise aus b)!

Tipp: Verwenden Sie die Erkenntnis aus Aufgabenteil c), um Rechenarbeit zu sparen.



DiffMehrDim/ExtremaOhneNB/Ag_ExtrOhneNB_HochstensEinKritischerPunkt2D.tex

Aufgabe 33.192 (Extremstellensuche ohne Nebenbedingungen)

Bestimmen Sie die Extremstellen der nachfolgenden reellwertigen Abbildungen mit zwei Variablen!

- $f(x, y) := x^2 - y^2 - 2x - 2y$
- $g(x, y) := x^2 \cdot e^{y-1} + x$
- $h(x, y) := e^{x^2+y^2}$



DiffMehrDim/ExtremaOhneNB/Ag_ExtrOhneNB_PolynomAusKlausurHMIETIT.tex

Aufgabe 33.193 (Differenzialrechnung in $\mathbb{R}^n$, Teilaufgabe einer Klausur für ETIT aus dem Herbst 2012)

Bestimmen Sie alle Stellen lokaler Extrema der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad (x, y)^T \mapsto f(x, y) := 3y^2 - 6xy + 9x - x^3 + 2$$

und entscheiden Sie, ob es sich dabei um Maximal- oder Minimalstellen handelt!



DiffMehrDim/ExtremaOhneNB/Ag_ExtrOhneNB_SattelpktMitUndOhneHessematrix3D.tex

Aufgabe 33.194 (Die Hesse-Matrix)

Sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y, z)^T \mapsto f(x, y, z) := x^2 - xze^y$.

- Bestimmen Sie den Gradienten $\text{grad } f$ und die Hesse-Matrix H_f von f !
- Der Nullpunkt ist ein stationärer Punkt von f . Prüfen Sie durch Rechnung die Definitheit von H_f im Nullpunkt! Nimmt f dort ein Extremum an?
- Geben Sie ein von H_f unabhängiges Argument, warum der Nullpunkt keine Maximal- oder Minimalstelle sein kann!



DiffMehrDim/ExtremaOhneNB/Ag_ExtrOhneNB_SattelpktMitUndOhneHessematrixEinstieg.tex

Aufgabe 33.195 (Per Hand prüfen)

Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto f(x, y) := x^2 \cdot e^y - y^2$.

- Bestimmen Sie die kritischen Punkte (sprich die Nullstellen des Gradienten) von f !
- Prüfen Sie mit Hilfe der Hesse-Matrix, ob f in einem kritischen Punkt ein Extremum annimmt!
- Bestätigen Sie durch Einsetzen von Folgen oder Kurven in f Ihre Ergebnisse aus Aufgabenteil b)!



DiffMehrDim/Geometrisches/Ag_DiffMehrDim_Tangentialebenen.tex

Aufgabe 34.196 (Tangentialebene und Tangente)**a)** Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^3y^2 + 2xy$

- (i) Bestimmen Sie die Tangentialebene zu dem Graphen der Funktion f im Punkt $(2, -1)$.
- (ii) Skizzieren Sie die Höhenlinie zum Niveau $0 = f(x, y)$.
- (iii) Bestimmen und skizzieren Sie die Tangente an die Höhenlinie zum Niveau $0 = f(x, y)$ im Punkt $(-1, -2)$.
- (iv) Bestimmen und skizzieren die Richtung des steilsten Anstiegs im Punkt $(-1, -2)$.

b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2y + x$

- (i) Bestimmen Sie die Tangentialebene zu dem Graphen der Funktion f im Punkt $(1, 3)$.
- (ii) Skizzieren Sie die Höhenlinie zum Niveau $0 = f(x, y)$.
- (iii) Bestimmen und skizzieren Sie die Tangente an die Höhenlinie zum Niveau $0 = f(x, y)$ im Punkt $(1, -1)$.
- (iv) Bestimmen und skizzieren die Richtung des steilsten Anstiegs im Punkt $(1, -1)$.

`DiffMehrDim/HoehereAbl/Ag_DiffMehrDim_WiderspruchDurchSatzVonSchwarz.tex`**Aufgabe 35.197** (Gibt es sowas?)

Man entscheide (mit Beweis), ob es eine differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ geben kann, sodass $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x \cdot (y^2 - x^2)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = y \cdot (y^2 - x^2)$ in jedem Punkt $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ gilt!

Tipp: Schreiben Sie die zugehörige Hesse-Matrix auf und verwenden Sie deren Gestalt.

Aufgabenblatt 36

DiffMehrDim/ImplDefFktn



DiffMehrDim/ImplDefFktn/Ag_ImplDefFktn_1Dnach1DEinstiegMitXHochDreiGleichYPlusEHochXY.tex

Aufgabe 36.198 (Implizit definierte Funktionen)

Bestimmen Sie, ob durch die Gleichung

$$x^3 - y - e^{xy} = 0$$

in einer Umgebung des Punktes $(a, b)^T := (1, 0)^T$ implizit eine Funktion $y = g(x)$ definiert wird. Falls ja, bestimmen Sie die Ableitung $g'(1)$.



DiffMehrDim/ImplDefFktn/Ag_ImplDefFktn_1Dnach1DErstDieYsZuZweiFinden.tex

Aufgabe 36.199 (Implizit definierte Funktionen)

Seien $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto h(x, y) := 3x^3 - 13xy + 2y^3$ und $\mathcal{H}_0 := \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid h(x, y) = 0 \right\}$.

- Bestimmen Sie $M := \left\{ y \in \mathbb{R} \mid (2, y)^T \in \mathcal{H}_0 \right\}$!
- Prüfen Sie für alle $y \in M$, ob es ein $\varepsilon_y \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon_y > 0$ und eine differenzierbare Funktion $g_y: D_y \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D_y \supseteq \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| < \varepsilon_y\}$, $g_y(2) = y$ und $h(x, g_y(x)) = 0$ für alle $x \in D_y$ gibt!
Berechnen Sie $g'_y(2)$ für jede der existierenden implizit definierten Funktionen!
- Gibt es Punkte in $\mathcal{H}_0$, in denen der Hauptsatz über implizit definierte Funktionen *keine* differenzierbare Funktion g liefert, deren Definitionsbereich eine offene Umgebung von x ist, so dass die Gleichung „ $h(x, y) = 0$ “ via „ $y = g(x)$ “ gelöst wird? Wenn ja, welche?



DiffMehrDim/ImplDefFktn/Ag_ImplDefFktn_1Dnach1DMehrerePunkteProGleichung.tex

Aufgabe 36.200 (Implizit definierte Funktionen: Skalarwertiger Fall)

Überprüfen Sie, ob die Gleichung $F(x, y) = 0$ in einer Umgebung von $(a, b)^T$ lokal eindeutig durch eine implizit definierte Funktion g mit $y = g(x)$ auflösbar ist, und berechnen Sie $g'(a) = \frac{dy}{dx}(a)$.

- $F(x, y) = y + xy^2 - e^{xy}$ für alle $(a, b)^T \in \left\{ (0, 1)^T; (2, -1)^T; \left(\frac{2}{e}, \frac{e}{2}\right)^T \right\}$
- $F(x, y) = xy + \frac{1}{2} - \sin(y)$ für alle $(a, b)^T \in \left\{ \left(0, \frac{\pi}{6}\right)^T; \left(\frac{1}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right)^T \right\}$



DiffMehrDim/ImplDefFktn/Ag_ImplDefFktn_1Dnach2DAusFischerKaul22Fuenf6.tex

Aufgabe 36.201 (Satz über implizit definierte Funktionen)

Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) &:= x + y - e^{y+2z} + e^{x+y+z} = 0 \\ F_2(x, y, z) &:= x + y + z + 2 \cdot \sin(x + y + z) = 0. \end{aligned}$$

- Zeigen Sie mittels des Satzes über implizit definierte Funktionen, dass dieses Gleichungssystem in einer Umgebung des Nullpunkts nach $(y, z)^T$ aufgelöst werden kann.
- Sei nun $\vec{g}: (-\varepsilon; \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Lösungskurve mit $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $\vec{g}(0) = (0, 0)^T$, $F_1(x, \vec{g}(x)) = 0$ und $F_2(x, \vec{g}(x)) = 0$ für alle $x \in (-\varepsilon; \varepsilon)$.

Bestimmen Sie den Tangentialvektor $\vec{g}'$ der Lösungskurve an der Stelle $x = 0$.

**Aufgabe 36.202** (Implizit definierte Funktionen)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^3$ und $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y, z)^T \mapsto F(x, y, z)$ sowie $(a, b, c)^T \in D$ wie in den Aufgabenteilen angegeben. Überprüfen Sie, ob der Hauptsatz über implizit definierte Funktionen Ihnen für die Gleichung „ $F(x, y, z) = 0$ “ in einer Umgebung von $(a, b, c)^T$ die Existenz einer lokal eindeutigen Funktion g mit $z = g(x, y)$ garantiert, und berechnen Sie gegebenenfalls $g'(a, b)$.

a) $D := \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) := xy + yz^2 + x^2z - z$ für alle $(a, b, c)^T \in \left\{ (0, 1, 1)^T; (1, 1, 0)^T; (1, 0, 1)^T \right\}$

b) $D := \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) := z \cdot \sin(x^2 \cdot y)$ für alle $(a, b, c)^T \in \left\{ (2, \frac{\pi}{2}, 0)^T; (1, \frac{\pi}{2}, 0)^T \right\}$

c) $D := \left\{ (r, s, t)^T \in \mathbb{R}^3 \mid t \neq -2s \right\}$, $F(x, y, z) := \frac{x}{2y+z} - \frac{1}{4}$ und $(a, b, c)^T := (1, 1, 2)^T$



DiffMehrDim/MWS/Ag_DifferentiationMehrdimensional_MWSmitExponentialfunktion.tex

Aufgabe 37.203 (Mittelwertsatz im Mehrdimensionalen)

- a) Seien a und b beliebige Zahlen. Zeigen Sie die Ungleichung $|ab| \leq \frac{1}{2} \cdot (|a|^2 + |b|^2)$!
- b) Es seien $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto f(x, y) := e^{xy}$ und $U_2 \left((0, 0)^T \right) := \{ \vec{w} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\vec{w}\| < 2 \}$.
Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, dass

$$|f(\vec{u}) - f(\vec{v})| < 2e^2 \cdot \|\vec{u} - \vec{v}\| \quad \text{für alle } \vec{u} \in U_2 \left((0, 0)^T \right) \text{ und alle } \vec{v} \in U_2 \left((0, 0)^T \right) \text{ gilt.}$$

Aufgabenblatt 38

DiffMehrDim/Taylor



DiffMehrDim/Taylor/Ag_DiffMehrDim_Taylor3DLinearMitRestgliedabschaetzung.tex

Aufgabe 38.204 (lineares Taylorpolynom im Mehrdimensionalen)

Seien $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x \ y \ z)^T \mapsto f(x, y, z) := y^2 + z \cdot \sin(x)$ und $\vec{a} := \left(\frac{\pi}{4} \ -1 \ \sqrt{2}\right)^T$.

Geben Sie das Taylorpolynom $T_{1,f,\vec{a}}$ an und zeigen Sie $|f(x, y, z) - T_{1,f,\vec{a}}(x, y, z)| \leq \frac{41}{2000}$ für alle $(x \ y \ z)^T \in D := \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{v} - \vec{a}\| \leq \frac{1}{10}\}$!

Tipps: Für die „Zwischenstelle“ $\vec{\xi}$ existiert ein $t \in (0; 1)$ mit $\vec{\xi} = \vec{a} + t \cdot \left((x \ y \ z)^T - \vec{a}\right)$.

Vielleicht wollen Sie $\varphi_{t,x} := \frac{\pi}{4} + t \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ als Abkürzung verwenden.



DiffMehrDim/Taylor/Ag_DiffMehrDim_TaylorMATEX.tex

Aufgabe 38.205 (Taylorpolynome)

Berechnen Sie das Taylor-Polynom $T_{2,f,(x_0,y_0)}((x,y))$ vom Grad 2 für die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ am Entwicklungspunkt (x_0, y_0) :

a) $f(x, y) = 2x^4 + 2x^3y - 2xy^2 - 2y^3,$
 $(x_0, y_0) = (2, -2),$

c) $f(x, y) = \cos(-2x - y), (x_0, y_0) = (-1, 2),$

d) $f(x, y) = \cos(y^3 - 2x - 1),$
 $(x_0, y_0) = (2, 0),$

b) $f(x, y) = x^3y + x^2y^2 + 2x^3 + 2x^2y - 2xy^2 - 2y^3,$
 $(x_0, y_0) = (2, -2),$

e) $f(x, y) = e^{(-xy^2 + x^2 + 2y)}, (x_0, y_0) = (0, 1).$



DiffMehrDim/Umkkehrbar/Ag_UmkkehrbarMehrDim_Einstieg3D.tex

Aufgabe 39.206 (Umkehrsatz)

Sei $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $(x, y, z)^T \mapsto \vec{f}(x, y, z) := (x + y + z, xy, yz)^T$.

- Zeigen Sie, dass $\vec{f}$ in einer Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^3$ des Punktes $(2, 1, 2)^T$ lokal umkehrbar ist!
- Bestimmen Sie alle $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ mit $\vec{f}(x, y, z) = (5, 2, 2)^T$!
- Berechnen Sie die Ableitung $\left(\vec{f}|_U^{-1}\right)'(5, 2, 2) = J_{\vec{f}|_U^{-1}}(5, 2, 2)$, wobei $\vec{f}|_U$ die Einschränkung von $\vec{f}$ auf den neuen Definitionsbereich U bezeichnet!



DiffMehrDim/Umkkehrbar/Ag_UmkkehrbarMehrDim_ErstInvertierenDannEinsetzen2DVierUrbilder.tex

Aufgabe 39.207 (Umkehrbarkeit)

Sei $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $(x, y)^T \mapsto \vec{f}(x, y) := (2x + y^2, 3xy^2)^T$.

- Prüfen Sie, an welchen Stellen $\vec{f}$ nicht lokal umkehrbar mit stetig differenzierbarer Umkehrfunktion ist und zeichnen Sie alle diese Stellen in ein Koordinatensystem ein!
- Berechnen Sie dort, wo $\vec{f}$ lokal umkehrbar mit stetig differenzierbarer Umkehrfunktion ist, die Ableitung der Umkehrfunktion!
Hinweis: Sie können $\left(\vec{f}|_U^{-1}\right)'(v, w)$ in Abhängigkeit von x und y mit $(x, y)^T = \vec{f}|_U^{-1}(v, w)$ angeben.
- Geben Sie für alle möglichen Umkehrfunktionen von $\vec{f}$, deren Definitionsbereich den Punkt $(6, 12)^T$ enthält, die Ableitung der Umkehrfunktion an diesem Punkt an!

Aufgabenblatt 40

DiffMehrDim/Vektorwertig



DiffMehrDim/Vektorwertig/Ag_DiffMehrDimKettenregel_Eindimensional.tex

Aufgabe 40.208 („eindimensionale“ Funktionen mit der Kettenregel ableiten)

Berechnen Sie die Ableitung von $f \circ \vec{g}$ einmal, indem Sie die mehrdimensionale Kettenregel verwenden, und einmal, indem Sie $\vec{g}$ in f einsetzen und die sich ergebende Funktion einer Variablen ableiten!

a) $f(x, y) = xy^2, \vec{g}(t) = \begin{pmatrix} t^2 + 1 \\ \sqrt{t} \end{pmatrix}$

c) $f(x, y) = x^2 + y^2, \vec{g}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) - 2 \end{pmatrix}$

b) $f(x, y) = \frac{e^x}{y}, \vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 5 \cdot \ln(t) \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix}$

d) $f(x, y) = \arctan(x) + \arctan(y), \vec{g}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ \frac{1}{t^2} \end{pmatrix}$



DiffMehrDim/Vektorwertig/Ag_DiffMehrDimKettenregel_R2NachR2InR2NachR1Einsetzen.tex

Aufgabe 40.209 (Die Kettenregel)

Es sei $F(\vec{z}) := f(\vec{g}(\vec{z}))$ die Verkettung der Funktionen $\vec{g}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Ableitung von F jeweils direkt (erst verketteten, dann ableiten) und durch die Kettenregel:

a) $\vec{g}(x, y) := \begin{pmatrix} x^2 + y \\ y^2 \end{pmatrix}$
 $f(u, v) := u^2 - v$

b) $\vec{g}(x, y) := \begin{pmatrix} \sin(\pi x) \\ \cos(\pi x) \end{pmatrix}$
 $f(u, v) := u^2 + v^2$

c) $\vec{g}(x, y) := \begin{pmatrix} 1 \\ 2x - 3y \end{pmatrix}$
 $f(u, v) := 5uv$



DiffMehrDim/Vektorwertig/Ag_DiffMehrDimKettenregel_R2NachR4UndR4NachR2.tex

Aufgabe 40.210 (Kettenregel im komplett mehrdimensionalen Fall)

Seien $\vec{g}: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)^T \mapsto \vec{g}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) := \begin{pmatrix} \alpha\beta + \delta^3 \\ \gamma\delta + \beta^2 - 1 \end{pmatrix}$

und $\vec{h}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ mit $(x, y)^T \mapsto \vec{h}(x, y) := (x^3y^2, xy + x^2, x^2y, x)^T$.

Berechnen Sie jeweils die Ableitungen von $\vec{g} \circ \vec{h}$ und von $\vec{h} \circ \vec{g}$ mit Hilfe der Kettenregel!

Tipp: Benutzen Sie $s := \alpha\beta + \delta^2$ und $t := \gamma\delta + \beta^2 - 1$, um Schreibarbeit zu sparen!



DiffMehrDim/Vektorwertig/
Ag_DiffMehrDimVektor_JacobiMatrizenOhneStationaerePunkteBestimmen.tex

Aufgabe 40.211 (Totales Differential)

Berechnen Sie die Ableitungsmatrix (Jacobi-Matrix) von folgenden Funktionen! Schreiben Sie auf, von welchem Raum und in welchen Raum diese Funktionen abbilden:

a) $\vec{g}(x, y) := \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ x^2 - y + 1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{h}(x, y, z) := \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y + x \\ 1 - z \\ \sin(\pi xyz) \end{pmatrix}$

Finden Sie, falls möglich, jeweils einen stationären Punkt der Funktion, also einen Punkt, in dem die Ableitung die Nullmatrix ist.

b) $\vec{k}(t) := \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix}$



DiffMehrDim/Vektorwertig/Ag_Differentiation_Mehrdimensional_Kettenregel3.tex

Aufgabe 40.212 (Kettenregel)

Für die Funktionen $\vec{g}: \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $\vec{h}: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\mathbb{R}_+ := \{t \in \mathbb{R} : t > 0\}$,

$$(x, y, z)^T \mapsto \vec{g}(x, y, z) := \begin{pmatrix} \sin(x) \cdot \cos(y) - z \\ x \cdot \ln(y) + \sin(z) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (u, v)^T \mapsto \vec{h}(u, v) := \begin{pmatrix} \sqrt{u} + v \\ u^2 \cdot v \\ uv \end{pmatrix}.$$

berechnen Sie die Ableitung der Funktion $\vec{f} := \vec{g} \circ \vec{h}$ in dem Sie

- a) die Funktion $\vec{f}$ explizit bestimmen und die Ableitungen berechnen.
- b) die Ableitungen $\vec{g}'$ und $\vec{h}'$ bestimmen und die Kettenregel verwenden.



DiffMehrDim/Vektorwertig/Ag_Differentiation_Mehrdimensional_Klausur_HM2ETIT.tex

Aufgabe 40.213 (Differenzialrechnung in $\mathbb{R}^n$, Teilaufgabe einer Klausur für ETIT aus dem Herbst 2012)
 Die Funktion $\vec{g}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $(x, y)^T \mapsto \vec{g}(x, y)$ sei auf $\mathbb{R}^2$ differenzierbar. Die Komponentenfunktionen von $\vec{g}$ werden mit $g_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $g_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet, so dass

$$\vec{g}(x, y) = \begin{pmatrix} g_1(x, y) \\ g_2(x, y) \end{pmatrix} \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

ist. Weiter sei $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto \varphi(t)$ eine differenzierbare Funktion mit

$$g_1 = \varphi \circ g_2 \quad \text{auf } \mathbb{R}^2,$$

d.h. es gilt $g_1(x, y) = \varphi(g_2(x, y))$ für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie

$$\det(D\vec{g}(x, y)) = 0 \quad \text{für alle } (x, y)^T \in \mathbb{R}^2$$

Hinweis zur Notation: $D\vec{g} = \vec{g}' = J_{\vec{g}}$ bezeichnet die Ableitung bzw. Jacobi-Matrix von $\vec{g}$.



FktAllg/BildUrbild/Ag_BildUrbild_Diskret.tex

Aufgabe 41.214 (Bild und Urbild einer diskreten Abbildung)

Gegeben sei die Abbildung $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ über die Wertetabelle

m	1	2	3	4	5	Sonst
$g(m)$	2	3	1	4	5	6

sowie die Mengen $A = \{0, 2, 6\}$, $B = \mathbb{R}$ und $C = [0, 1]$. Bestimmen Sie die folgenden Mengen:

- a) $g(B)$ b) $g(C)$ c) $g^{-1}(A)$ d) $g^{-1}(B)$ e) $g^{-1}(C)$



FktAllg/BildUrbild/Ag_BildUrbild_Diskret2.tex

Aufgabe 41.215 (Bild und Urbild einer diskreten Abbildung)

Gegeben sei die Abbildung $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ über die Wertetabelle

m	1	2	3	4	5	Sonst
$g(m)$	2	3	1	4	5	6

sowie die Mengen $A = \{0, 2, 6\}$, $B = \mathbb{R}$ und $C = [0, 1]$. Bestimmen Sie die folgenden Mengen:

- a) $g(B)$ b) $g(C)$ c) $g^{-1}(A)$ d) $g^{-1}(B)$ e) $g^{-1}(C)$

Bestimmen Sie zudem die Klasseneinteilung/Partitionierung von $\mathbb{R}$ durch die Äquivalenzrelation $a \sim b \Leftrightarrow g(a) \sim g(b)$ sowie die Urbildmengen $g^{-1}([x])$ der Klassen.



FktAllg/BildUrbild/Ag_BildUrbild_Parabel.tex

Aufgabe 41.216 (Bild und Urbild einer Parabel)

Gegeben sei die Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := x^2 - x$ sowie die Mengen $A = \{0, 2, 6\}$, $B = \mathbb{R}$ und $C = [0, 1]$.

- a) Bestimmen Sie die Bildmengen $f(A)$, $f(B)$ und $f(C)$
b) sowie die Urbildmengen $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$ und $f^{-1}(C)$.



FktAllg/BildUrbild/Ag_BildUrbild_ParabelSchoeneZahlen.tex

Aufgabe 41.217 (Bild und Urbild einer Parabel)

Gegeben sei die Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := 4x - x^2$ sowie die Mengen $A = \{0, 3, 4\}$, $B = \mathbb{R}$ und $C = [0, 3]$.

- a) Bestimmen Sie die Bildmengen $f(A)$, $f(B)$ und $f(C)$
b) sowie die Urbildmengen $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$ und $f^{-1}(C)$.

Aufgabenblatt 42

FktAllg/Eigenschaften



FktAllg/Eigenschaften/Ag_Abbildungen_Paarabbildungen.tex

Aufgabe 42.218 (Paarabbildungen)

Es seien A und B jeweils Mengen und $f : A \rightarrow A$ sowie $g : B \rightarrow B$ jeweils bijektive Selbstabbildungen. Rechnen Sie nach, dass die Paarabbildung

$$f \times g : A \times B \longrightarrow A \times B, (a, b) \longmapsto (f(a), g(b))$$

ebenfalls bijektiv ist.



FktAllg/Eigenschaften/Ag_BildUrbild_Schnittoperation.tex

Aufgabe 42.219 (Schnitte von Bildmengen)

Zeigen Sie für Abbildungen $f : A \rightarrow B$, dass $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$ ist, und Gleichheit falls f bijektiv ist (mit Gegenbeispiel, dass im Allgemeinen nicht Gleichheit gilt).



FktAllg/Eigenschaften/Ag_InjSur_BegriffeAnZweiEndlichenMengenUeben.tex

Aufgabe 42.220 (Injektivität und Surjektivität von Funktionen)

Seien $\Phi := \{\text{Tisch; Hocker; Couch; Bett; Regal}\}$ und $\Omega := \{\text{Deutsch; Englisch; Latein; Spanisch}\}$.

Geben Sie jeweils eine Funktion $f : D \rightarrow W$ mit $x \mapsto f(x)$ und $\{D; W\} = \{\Phi; \Omega\}$ an,

- a) die surjektiv, aber nicht injektiv ist! b) die injektiv, aber nicht surjektiv ist! c) die weder injektiv noch surjektiv ist!
- d) Finden Sie eine Menge $\Xi \supseteq \Omega$, so dass es eine bijektive Funktion $g : \Phi \rightarrow \Xi$ mit $t \mapsto g(t)$ gibt! Geben Sie eine solche Funktion g und auch deren Umkehrfunktion an!



FktAllg/Eigenschaften/Ag_InjSur_QuadrateUndKartesischesProdukt.tex

Aufgabe 42.221 (Eigenschaften von Abbildungen)

Sei $W := \{0, 2, 4, 6\}$. Entscheiden Sie für jede dieser Abbildungen, ob sie surjektiv/injektiv/bijektiv ist. Geben Sie jeweils einen kleinen Beweis oder ein Gegenbeispiel an, um Ihre Aussagen zu begründen:

- a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := 2 - 2x$ d) $q : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 2]$ mit $q(x, y) := x^2 + y^2$
- b) $g : \{1, 2, 3\} \rightarrow W$ mit $g(a) := a^2 - a$
- c) $h : \{0, 1, 3\} \rightarrow W$ mit $h(a) := a^2 - a$ e) $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $z(x) := (x^2, -x)$



FktAllg/Eigenschaften/Ag_InjSur_VerschBeweiseVerkettungProdukt.tex

Aufgabe 42.222 (Eigenschaften abstrakt nachweisen)

Zeigen Sie mit einem kleinen Beweis, dass diese Aussagen richtig sind:

- a) Sind $g : B \rightarrow C$ und $f : A \rightarrow B$ injektiv, dann ist auch die Verkettung $g \circ f$ injektiv.
- b) Sind $g : B \rightarrow C$ und $f : A \rightarrow B$ bijektiv mit Umkehrabbildungen $g^{-1} : C \rightarrow B$ und $f^{-1} : B \rightarrow A$, dann ist auch $g \circ f$ bijektiv mit $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
- c) Verkettung ist assoziativ: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (damit macht der Ausdruck $h \circ g \circ f$ erst Sinn).
- d) Ist $f : A \rightarrow B$ irgend eine Abbildung, so ist die Abbildung $A \rightarrow A \times B, a \mapsto (a, f(a))$ injektiv. Ist sie auch bijektiv?

**Aufgabe 42.223** (Abbildungseigenschaften: injektiv, surjektiv, bijektiv)

Entscheiden Sie, welche der Eigenschaften injektiv, surjektiv bzw. bijektiv welcher Abbildung zugeschrieben werden können!

$$\text{a) } f : \begin{cases} \{0, 1, 2\} & \rightarrow \{0, 1, 2\}, \\ x & \mapsto f(x) := x^2 - x \end{cases}$$

$$\text{d) } u : \begin{cases} [\pi, 3\pi] & \rightarrow [-1, 1], \\ x & \mapsto u(x) := \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \end{cases}$$

$$\text{b) } g : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow [0, \infty), \\ x & \mapsto g(x) := \sqrt{x^2} \end{cases}$$

$$\text{e) } v : \begin{cases} \{0, 1\} \times \{a, b\} & \rightarrow \{a, b\} \times \{0, 1\}, \\ (x, y) & \mapsto v(x, y) := (y, x) \end{cases}$$

$$\text{c) } h : \begin{cases} \{0, 1, 2\} & \rightarrow \mathbb{R}, \\ x & \mapsto h(x) := \cos\left(\frac{1}{2}\pi x\right) \end{cases}$$

$$\text{f) } w : \begin{cases} \{0, 1\} \times \{0, 1\} & \rightarrow \{0, 1\}, \\ (x, y) & \mapsto w(x, y) := |y - x| \end{cases}$$



FktAllg/Verkettung/Ag_Verkettung_AbbRaumLinksInverse.tex

Aufgabe 43.224 (Abbildungen und Verknüpfungen)

Sei M die Menge aller Abbildungen von $\{-1, 0, 1\}$ in sich, und $g \in M$ mit $g(x) = -x$ für $x \in \{-1, 0, 1\}$. Weiter werden die Abbildungen $A: M \rightarrow M$ mit $f \mapsto -f$ und $B: M \rightarrow M$ mit $f \mapsto g \cdot f$ betrachtet.

- Berechnen Sie die Kompositionen $A \circ A \circ A$ und $B \circ B$. Geben Sie außerdem eine Abbildungen $H: M \rightarrow M$ an, sodass $H \circ A$ die identische Abbildung auf M ist.
- Warum gibt es keine Abbildung $K: M \rightarrow M$, sodass $K \circ B$ die identische Abbildung auf M ist?



FktAllg/Verkettung/Ag_Verkettung_DiskretHoch100.tex

Aufgabe 43.225 (Abbildungen verketteten)

Es sei $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Abbildung aus Aufgabe 41.215. Bestimmen Sie die Wertetabellen für die folgenden Abbildungen. Dabei wird die Potenz einer Funktion als entsprechend häufige Mehrfachausführung interpretiert:

- g^0
- g^1
- g^2
- g^{100}



FktAllg/Verkettung/Ag_Verkettung_NotationUeben.tex

Aufgabe 43.226 (Abbildungen verketteten und umkehren)

Seien $\mathbb{R}_0^+ := \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\}$ und $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $z \mapsto p(z) := z^3$. Berechnen Sie für alle $u \in \{f; g; h\}$ jeweils Zuordnungsvorschriften der Abbildungen $u^3 := u \circ u \circ u$, u^{-1} , $u^{-3} := (u^3)^{-1}$ und $p \circ u$:

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := 5x$
- $g: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $t \mapsto g(t) := t^2$
- $h: \{1; 5; 7\} \rightarrow \{1; 5; 7\}$ mit $1 \mapsto h(1) := 5$,
 $5 \mapsto h(5) := 1$ und $7 \mapsto h(7) := 7$.

Hinweis: Diese Abbildungen sind bijektiv, das brauchen Sie aber nicht zu zeigen.



FktEinDim/EigenschaftenReell/Ag_Funktionen_MengeGraphUmkehrfunktion.tex

Aufgabe 44.227 (Funktion, Umkehrfunktion und Zusammenhänge)

Für jede der folgenden Funktionen führen Sie jeweils folgende Schritte aus:

- bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge sowie die Bildmenge,
- skizzieren Sie den Graph,
- ermitteln Sie die Umkehrfunktion, sofern diese existiert, und
- skizzieren Sie auch deren Graph (im selben Koordinatensystem wie den Graph der Funktion).

a) $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} + 1}$

b) $g(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}$

d) $u(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{x^2}{4}}\right)$

c) $h(x) = 2^{-3x} + 1$



FktEinDim/EigenschaftenReell/Ag_Funktionen_ParameterBestimmenNichtLineareGl.tex

Aufgabe 44.228 (Funktionsterm spezifizieren)

- a) Bestimmen Sie die Parameter $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R} \setminus \{0; -\frac{1}{2}\}$ einer Funktion

$$f: \left\{ t \in \mathbb{R} \mid (\sin(\pi t))^2 \neq -2c \right\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto f(x) := \frac{a \cdot 4^{bx}}{(\sin(\pi x))^2 + 2c}$$

derart, dass der Graph von f durch die Punkte $(-1; 12)$, $(0; 3)$ und $(\frac{1}{2}; 2)$ verläuft!

- b) Das System der Gleichungen zur Bestimmung der Parameter ist nichtlinear. Begründen Sie dies!

Aufgabenblatt 45

FktEinDim/ExpLn



FktEinDim/ExpLn/Ag_ExpFkt_AUndBINAMalBHochXAusZweiPktBestimmen.tex

Aufgabe 45.229 (Exponentialfunktionen bestimmen)

Seien $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ mit $1 \neq b > 0$ und $f_{a;b}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f_{a;b}(x) := a \cdot b^x$. Bestimmen Sie a und b derart, dass die folgenden Mengen eine Teilmenge des Graphen $\mathcal{G}_{f_{a;b}}$ von $f_{a;b}$ bilden!

- a) $\{(1; 12)^T; (3; 108)^T\}$ b) $\{(-1; 3)^T; (2; 192)^T\}$ c) $\{(\frac{1}{2}; 20)^T; (1; 4)^T\}$ d) $\{(0; \frac{5}{2})^T; (\frac{5}{2}; 1)^T\}$



FktEinDim/ExpLn/Ag_Exponentialfunktion_GraphenExpLn1_mittel.tex

Aufgabe 45.230 (Graphen von Funktionen, die exp und ln enthalten)

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich der jeweiligen Funktion und skizzieren Sie den zugehörigen Graphen:

- a) $x \mapsto f(x) = e^{x-4}$ c) $z \mapsto h(z) = 2 - e^{1-z^2}$ e) $s \mapsto v(s) = \ln(4 - s)$
b) $y \mapsto g(y) = \frac{10^{(y^2)}}{e}$ d) $r \mapsto u(r) = \ln(r^2)$ f) $t \mapsto w(t) = \ln(9 - t^2)$



FktEinDim/ExpLn/Ag_Exponentialfunktion_Grundlagen_leicht.tex

Aufgabe 45.231 (Grundlagen Exponentialfunktionen)

Gegeben ist eine Exponentialfunktion der Form $y = a \cdot b^x$ mit $a \neq 0$ und $b > 0$ (sowie $b \neq 1$, warum?).

- a) Wir setzen $a > 0$ voraus. Geben Sie jeweils ein (Anwendungs)Beispiel für eine wachsende und eine fallende Exponentialfunktionen an und skizzieren Sie die zugehörigen Graphen.
b) Wir setzen nun $a < 0$ voraus. Geben Sie wiederum jeweils ein (Anwendungs)Beispiel für eine wachsende und eine fallende Exponentialfunktionen an und skizzieren Sie deren Graphen.
c) Können Sie a und b derart wählen, dass der Graph von $y = a \cdot b^x$ die x -Achse schneidet? Falls ja, geben Sie ein Beispiel an.
d) Können Sie a und b derart wählen, dass der Graph von $y = a \cdot b^x$ eine Gerade ist? Falls ja, geben Sie ein Beispiel an.
e) Der Graph einer Exponentialfunktion verläuft durch die Punkte $P = (0; \frac{5}{2})$ und $Q = (\frac{5}{2}; 1)$. Bestimmen Sie den Koeffizienten a und die Basis b .



FktEinDim/ExpLn/Ag_Exponentialfunktion_WachstumsfunktionenAufstellen_mittel.tex

Aufgabe 45.232 (Exponentialfunktionen aufstellen)

Als *Verdopplungszeit* t_2 bezeichnet man die Zeitspanne, in der sich ein Bestand $B(t)$ verdoppelt. Entsprechend ist die *Halbwertszeit* $t_{1/2}$ bei abnehmendem Bestand definiert:

$$B(t + t_2) = 2 \cdot B(t) \quad \text{bzw.} \quad B\left(t + t_{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot B(t).$$

Bestimmen Sie jeweils eine exponentielle Bestandsfunktion B mit $B(t) = a \cdot b^t$, für die gilt:

- a) $B(0) = 10$ und Verdopplungszeit $t_2 = 3$; c) $B(0) = 15$ und Halbwertszeit $t_{\frac{1}{2}} = 4$;
b) $B(0) = 5$ und 2% Zunahme pro Zeiteinheit; d) $B(0) = 2$ und Verzehnfachung in 5 Zeitein-

heiten;

e) $B(0) = 100$ und 15 % Abnahme pro Zeiteinheit.



FktEinDim/ExpLn/Ag_Logfkt_ExpWachstumsprozesseVergleichen_mittel.tex

Aufgabe 45.233 (Exponentielle Wachstumsprozesse vergleichen)

Bei drei exponentiellen Wachstumsprozessen mit $B_k(t) = a_k \cdot b_k^t$, wobei $k \in \{1, 2, 3\}$, wurden jeweils zu zwei unterschiedlichen Zeitpunkten Messwerte erfasst:

$$B_1(3) = \frac{1}{2}, B_1(9) = 32 ; \quad B_2(3) = \frac{1}{3}, B_2(7) = 27 ; \quad B_3(3) = \frac{3}{2}, B_3(5) = \frac{2}{3}.$$

- a) Zu welchem Zeitpunkt wird jeweils die Messwertgrenze von 100 erreicht?
- b) Zu welchem Zeitpunkt hat sich der jeweilige Bestand B_k verdoppelt?
- c) Gibt es einen Zeitpunkt, an dem alle drei Prozesse den gleichen Bestand haben?



FktEinDim/Fortsetzung/Ag_Fkt_VerschiedenFortsetzen.tex

Aufgabe 46.234 (Fortsetzungen von Funktionen)

Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x)$, $D \neq \emptyset$ und $-x \in D$ für alle $x \in D$ heißt „gerade“, falls $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D$ gilt und „ungerade“, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D$ gilt.

Seien $I := [0; \pi]$ und $h: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto h(x) := \begin{cases} -3x^2 + \pi x, & \text{für } x < \frac{\pi}{2} \\ -\sin(2x), & \text{für } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$.

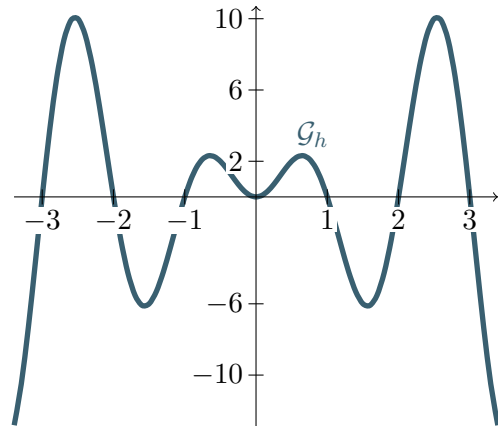
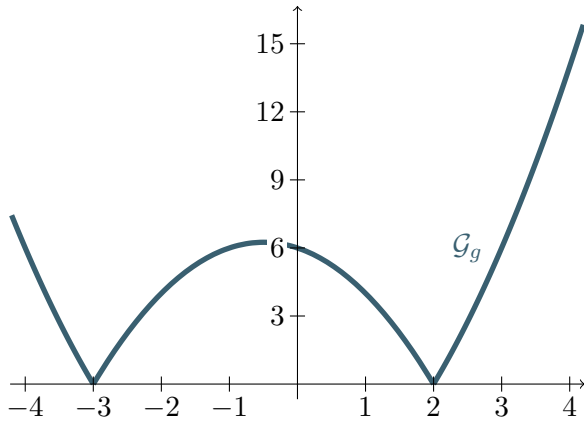
- a) Geben Sie eine π -periodische Funktion h_p mit $h_p|_I = h$ an und skizzieren Sie ihren Graphen!
- b) Geben Sie eine gerade Funktion g mit $g|_I = h$ an und skizzieren Sie ihren Graphen!
- c) Geben Sie eine ungerade Funktion u mit $u|_I = h$ an und skizzieren Sie ihren Graphen!
- d) Geben Sie eine 2π -periodische gerade Funktion g_p mit $g_p|_I = h$ an!
- e) Geben Sie eine 2π -periodische ungerade Funktion u_p mit $u_p|_I = h$ an!
- f) Welche Voraussetzung muss eine auf I definierte Funktion erfüllen, um ungerade fortgesetzt werden zu können?
- g) Welche Voraussetzung muss eine auf I definierte Funktion erfüllen, um ungerade und 2π -periodisch fortgesetzt werden zu können?



FktEinDim/Graphen/Ag_FktEinDim_GraphTransform.tex

Aufgabe 47.235 (Graphen transformieren)

Seien $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto g(x)$ und $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto h(x)$ zwei Funktionen, von deren Graphen $\mathcal{G}_g$ und $\mathcal{G}_h$ Sie in den folgenden beiden Schaubildern jeweils einen Ausschnitt sehen.



Skizzieren Sie für alle $f \in \{g; h\}$ Ausschnitte der Graphen der folgenden Funktionen!

a) $u_f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) + 4$

d) $r_f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(3x)$

b) $v_f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \frac{1}{2} \cdot f(x) - 3$

e) $s_f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto -2 \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) + 1$

c) $w_f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(2 - x)$

f) $t_f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \frac{1}{3} \cdot f(2x + 4) + 2$



FktEinDim/Graphen/Ag_Funktionen_DefmengeUndGraphen.tex

Aufgabe 47.236 (Definitionsmengen und Graphen)

Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ der Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x)$, deren Werte sich durch die angegebene Zuordnungsvorschrift berechnen lassen!

Skizzieren Sie zudem einen passenden Ausschnitt des Graphen $\mathcal{G}_f$ von f !

a) $f(x) := \sqrt{x+1}$

d) $f(x) := -x^3 + \frac{4}{3}$

g) $f(x) := |x^2 + 2x + 1|$

b) $f(x) := \frac{1}{x^2}$

e) $f(x) := \sqrt{4-2x}$

h) $f(x) := \frac{|4x-7|}{3}$

c) $f(x) := |-3+2x|$

f) $f(x) := \frac{2}{(4-x)^2}$

i) $f(x) := \frac{|3-x^2|}{-2}$



FktEinDim/Graphen/Ag_Funktionen_GraphenAusNullstellenZeichnen.tex

Aufgabe 47.237 (Graphen skizzieren)

Skizzieren Sie die Graphen der durch ihre Gleichungen gegebenen Funktionen nur mit Hilfe der Nullstellen:

a) $f(x) = -(x^2 - 9) \cdot (x - 1)$

d) $f(x) = (4 - x) \cdot (4 + x) \cdot (2 - x)$

b) $f(x) = (x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4)$

e) $f(x) = x^2 \cdot (x - 2) \cdot (x - 4)$

c) $f(x) = (1 - x) \cdot (x^2 - 1)$

f) $f(x) = (3 - x) \cdot (x^2 + 1)$

g) $f(x) = (x-1) \cdot (1+x) \cdot (2-x) \cdot (6+x)$

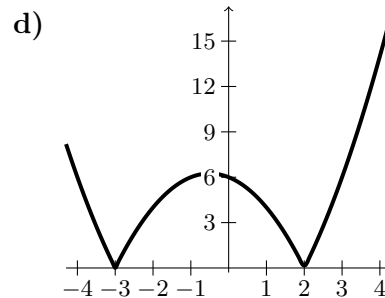
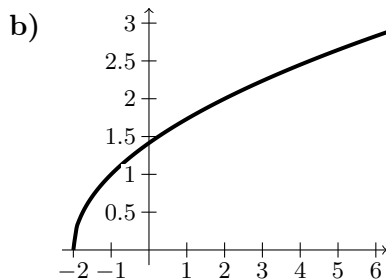
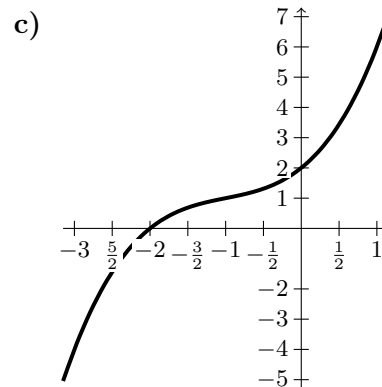
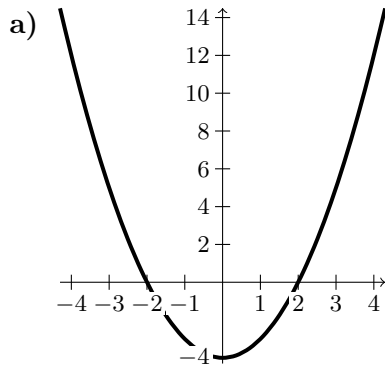
h) $f(x) = (x^2-3) \cdot (3-x^2)$



FktEinDim/Graphen/Ag_Funktionen_GraphenTransformieren.tex

Aufgabe 47.238 (Graphen transformieren)

Betrachten Sie die folgenden Schaubilder ...



... jeweils als Graph einer Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$.

Skizzieren Sie zu jeder Funktion unter a) bis d) die Graphen der Funktionen

(i) $f_1: D_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) + 2$

(v) $f_5: D_5 \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f\left(\frac{x}{2}\right) + 1$

(ii) $f_2: D_2 \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 2 \cdot f(x) - 3$

(vi) $f_6: D_6 \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(2x+3) - 2$

(iii) $f_3: D_3 \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(-x+1)$

(vii) $f_7: D_7 \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 3 \cdot f(-3x-1) + 5$,

(iv) $f_4: D_4 \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(4x)$

wobei $D_j \subseteq \mathbb{R}$ für alle $j \in \{1, 2, 3, \dots, 7\}$.

Verständnisfrage: Wieviele Graphen sollen Sie skizzieren?



FktEinDim/Hyperb/Ag_HyperbolischeFunktionen_tanh.tex

Aufgabe 48.239 (Umkehrfunktion des $\tanh$)

Zeigen Sie, dass der Tangens hyperbolicus $\tanh$ auf seinem Definitionsbereich $\mathbb{R}$ injektiv ist und geben Sie eine Zuordnungsvorschrift der Umkehrfunktion Area Tangens hyperbolicus artanh an.

Aufgabenblatt 49

FktEinDim/Polynome



FktEinDim/Polynome/Ag_Funktionen_PolynomtermBestimmen.tex

Aufgabe 49.240 (Funktionsterm aufstellen)

Der Graph einer Polynomfunktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x)$ und $\text{grad}(f) \leq 3$ verläuft durch die Punkte $(-3; 0)$, $(-2; 8)$, $(0; -6)$ und $(-1; 4)$.

Wie lautet der zugehörige Funktionsterm?



FktEinDim/Polynome/Ag_Polyn_FaktorisierenMitZweiIrreduziblenTermen.tex

Aufgabe 49.241 (Multiplikative Darstellung von Polynomen)

Geben Sie von den folgenden Polynomen die multiplikative Darstellung an!

a) $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto p(x) := 2x^6 - 5x^5 + 9x^4 - 30x^3 - 45x - 27$

b) $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto p(x) := 4x^5 - 12x^4 - 9x^3 - 25x^2 - 9x - 12$

Tipp: p hat eine ganzzahlige Nullstelle. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $7x^2 = 4x^2 + 3x^2$.



FktEinDim/Polynome/Ag_Polyn_FaktorisierenOhneHuerden.tex

Aufgabe 49.242 (Polynome faktorisieren)

Geben Sie für die folgenden reellen Polynome jeweils eine Menge von möglichen rationalen Nullstellen an! Bestimmen Sie außerdem die multiplikative Darstellung der Polynome!

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := x^3 + 5x^2 - 8x - 12$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := 2x^3 - 5x^2 - 94x + 48$

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := x^5 - 5x^4 + 5x^3 - x^2 + 24x - 36$



FktEinDim/Polynome/Ag_Polyn_UmentwickelnAusFaktorisierenOhneHuerden.tex

Aufgabe 49.243 (Polynome umentwickeln)

Entwickeln Sie die folgenden Polynome je einmal um 2 und einmal um -6 !

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := x^3 + 5x^2 - 8x - 12$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := 2x^3 - 5x^2 - 94x + 48$

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := (x - 2)^2 \cdot (x - 3) \cdot (x^2 + 2x + 3)$



FktEinDim/Polynome/Ag_Polynome_HornerSchema_leicht.tex

Aufgabe 49.244 (HornerSchema)

Berechnen Sie mit dem HornerSchema

a) $p(3)$, $p(-1)$ und $p(2)$ für $p(x) = x^4 - x^2 + x - 3$,

b) $p(5)$, $p(-3)$ und $p(4)$ für $p(x) = x^5 - 6x^4 - 7x^3 + 61x^2 + x - 6$.



FktEinDim/Polynome/Ag_Polynome_ParabelnInteressantePunkte_leicht.tex

Aufgabe 49.245 (Eigenschaften von Parabeln)

Berechnen Sie die Scheitelpunkte, Nullstellen und die gemeinsamen Punkte der folgenden Parabeln und zeichnen Sie diese anschließend:

- a) $f(x) = 3x^2 + 4x - 2$
 $g(x) = -2x^2 + 6x - 1$
- b) $p(x) = 4x^2 - 10x - 4$
 $q(x) = -3x^2 + 4x - 6$
- c) $u(x) = -4x^2 - 2x + 5$
 $v(x) = x^2 - x - 3$



FktEinDim/Polynome/Ag_Polynome_PolyDivLinearfaktorAbspalten.tex

Aufgabe 49.246 (Linearfaktor abspalten)

Das Polynom $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto p(x) := 3x^3 - 3x^2 - 12x + 12$ besitzt die Nullstelle $x_1 := 1$.

Schreiben Sie p als Produkt zweier Polynome!

Können Sie auch die multiplikative Darstellung von p angeben?



FktEinDim/Polynome/Ag_Polynome_PolyDivMitRestDreiBisZweiSchritte.tex

Aufgabe 49.247 (Polynomdivision)

Führen Sie eine Polynomdivision aus!

- a) $\frac{2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 3}{x^2 + x - 2}$
- b) $\frac{4x^4 + 15x^3 + \frac{23}{2} \cdot x^2 - x}{x^2 + 4x + 4}$
- c) $\frac{-x^4 + 2x^3 - 3x + 7}{2x^2 - 8}$
- d) $\frac{2x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 20x - 8}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}$



FktEinDim/Polynome/Ag_Polynome_PolyDivMitRestDreiZweiDreiSchritte.tex

Aufgabe 49.248 (Polynomdivision)

Führen Sie eine Polynomdivision aus!

- a) $\frac{6x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 22x - 13}{2x^2 + 3x - 4}$
- b) $\frac{2x^4 + 7x^3 - 24x + 4}{x^3 + 2x^2 - 4x}$
- c) $\frac{9x^4 - 27x^3 + 29x^2 - 23}{3x^2 - 4x + 6}$



FktEinDim/Polynome/Ag_Polynome_PolyDivMitRestZweiBisDreiSchritte.tex

Aufgabe 49.249 (Polynomdivision)

Führen Sie eine Polynomdivision aus!

- a) $\frac{2x^3 + x^2 - 6x + 4}{x^2 + 3}$
- b) $\frac{x^4 + x^2 - 3x + 1}{x^3 + 3x^2 + x}$
- c) $\frac{6x^4 - x^3 + 2x + 4}{2x^2 - x - 3}$



FktEinDim/Polynome/Ag_Polynome_PolynomeAusPunktenBestimmen_leicht.tex

Aufgabe 49.250 (Polynomfunktionen bestimmen)

Es werden jeweils Polynomfunktionen gesucht, zu deren Graphen die angegebenen Punkte gehören. Die Terme der Funktionszuordnung $y = f(x)$ sollen möglichst einfach aufgebaut sein.

- a) $P_1 = (1, 2)$ und $P_2 = (2, -3)$
- b) $P_1 = (3, -1)$ und $P_2 = (1, 0)$
- c) $P_1 = (0, 0)$ und $P_2 = (-7, 6)$
- d) $P_1 = (-2, 3)$ und $P_2 = (3, -2)$
- e) $P_1 = (\frac{1}{2}, 1)$ und $P_2 = (2, \frac{1}{2})$
- f) $P_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und $P_2 = (1, \frac{1}{2})$
- g) $P_1 = (1, 2)$, $P_2 = (2, 1)$ und $P_3 = (3, 2)$
- h) $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (-2, 1)$ und $P_3 = (2, -1)$
- i) $P_1 = (2, -1)$, $P_2 = (1, 1)$ und $P_3 = (-2, -2)$
- j) $P_1 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, $P_2 = (\frac{7}{4}, \frac{21}{8})$ und $P_3 = (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$



FktEinDim/Polynome/Ag_Polynome_QuadErgDreiEinfuehrungsBspe.tex

Aufgabe 49.251 (quadratische Ergänzung)

Seien $a \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ und $p_{a,\beta,\gamma}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto p_{a,\beta,\gamma}(x) := a \cdot (x - \beta) \cdot (x - \gamma)$. Bestimmen Sie a , β und γ unter Zuhilfenahme von quadratischer Ergänzung, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $p_{a,\beta,\gamma}(x) = x^2 + 8x - 48$ b) $p_{a,\beta,\gamma}(x) = 5x^2 + 20x - 60$ c) $p_{a,\beta,\gamma}(x) = 9x^2 - 30x + 24$



FktEinDim/Polynome/Ag_Polynome_faktorisieren_mittel.tex

Aufgabe 49.252 (Faktorisieren)

Schreiben Sie folgende Polynome als Produkt von Linearfaktoren und gegebenenfalls quadratischen Termen, die keine Nullstellen besitzen.

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

e) $q(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$

b) $g(x) = -x^3 + 11x$

f) $u(x) = x^4 - x^3 - 13x^2 + 25x - 12$

c) $h(x) = -x^3 - 2x^2 + 4x + 8$

g) $v(x) = 4x^4 + 4x^3 - 13x^2 - 7x + 6$

d) $p(x) = 3x^3 - 4x^2 + 9x - 12$

h) $w(x) = 3x^4 + 11x^3 - x^2 - 19x + 6$



FktEinDim/Polynome/Text_LGS_PolynomfktKleinstenGradesDurchGegebenePkte.tex

In \MAGSPfadLA/LGS/ReellEindeutigeLsg/Ag_LGS_PolynomfktKleinstenGradesDurchGegebenePkte findet sich eine weitere Aufgabe zu Polynomen.



FktEinDim/Rational/Ag_Funktionen_DefmengeUndGraphen2.tex

Aufgabe 50.253 (Definitionsmengen und Graphen)

Betrachten Sie die nachstehenden Zuordnungsvorschriften und bestimmen Sie derart die maximale Definitionsmenge in $\mathbb{R}$, dass sich jeweils eine Funktion in die reellen Zahlen ergibt. Skizzieren Sie zudem einen passenden Ausschnitt des Graphen.

a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

c) $f(x) = \frac{x^3 - x + 3x^2 - 3}{x - 1}$

e) $f(x) = \frac{4x}{x^2 - 2}$

b) $f(x) = \frac{2}{(x - 4)^2}$

d) $f(x) = \frac{x^3 - x + 3x^2 - 3}{(x - 1) \cdot (x - 2)}$

f) $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + 1}$



FktEinDim/Trig/Ag_ArkusFkt_GraphenUndIneinanderUmrechnen.tex

Aufgabe 51.254 (Umrechnungsformeln für die Arkus-Funktionen)

In dieser Aufgabe soll untersucht werden, wie die Arkus-Funktionen miteinander zusammenhängen.

- Zeichnen Sie die Graphen von $\arcsin$ und $\arccos$ mit unterschiedlichen Farben!
- Spiegeln Sie die beiden Graphen an der horizontalen Achse! Was stellen Sie fest?
- Setzen Sie in eine Umrechnungsformel von $\sin$ zu $\cos$ eine geeignete Arkus-Funktion ein, um eine Umrechnungsformel von $\arcsin$ zu $\arccos$ zu erhalten!

Tipp: Verwenden Sie eine Umrechnungsformel, bei welcher Argumente des Sinus, die aus dem Wertebereich des Arkus Sinus kommen, in Argumente des Kosinus aus dem Wertebereich des Arkus Kosinus verwandelt werden!

- Entwickeln Sie aus den für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gültigen Umrechnungsformeln $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos(\varphi)$ und $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos(\varphi)$ eine Umrechnungsformel zwischen Tangens und Kotangens!

Gewinnen Sie hieraus eine Umrechnungsformel zwischen Arkus Tangens und Arkus Kotangens!



FktEinDim/Trig/Ag_ArkusFkt_NegativeArgumente.tex

Aufgabe 51.255 (Negative Argumente in den Arkusfunktionen)

Zur Lösung von Gleichungen der Form $\sin(\varphi) = t$, $\cos(\varphi) = t$, $\tan(\varphi) = x$ oder $\cot(\varphi) = x$ mit vorgegebenen $t \in [-1; 0]$ und $x \in (-\infty; 0]$ ist es hilfreich, $\arcsin(-t)$, $\arccos(-t)$, $\arctan(-x)$ und $\operatorname{arccot}(-x)$ mit Hilfe von $\arcsin(t)$, $\arccos(t)$, $\arctan(x)$ und $\operatorname{arccot}(x)$ darzustellen.

- Finden Sie für alle $t \in [-1; 1]$ eine Darstellung von $\arcsin(-t)$ durch $\arcsin(t)$, indem Sie $\arcsin(t)$ in die Symmetriegleichung $\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ einsetzen!
- Gehen Sie analog für $\arctan$, $\arccos$ und arccot vor!



FktEinDim/Trig/Ag_Funktionen_Additionstheoreme.tex

Aufgabe 51.256 (Additionstheoreme)

- Zerlegen Sie $6 \cdot \sin\left(3u + \frac{7\pi}{6}\right)$ für alle $u \in \mathbb{R}$ in einen Sinus- und einen Kosinusterm!
- Zerlegen Sie $2 \cdot \cos\left(2v - \frac{5\pi}{6}\right)$ für alle $v \in \mathbb{R}$ in einen Sinus- und einen Kosinusterm!
- Beweisen Sie $\sin(4x) = 4 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) - 8 \cdot \cos(x) \cdot (\sin(x))^3$ für alle $x \in \mathbb{R}$!
- Beweisen Sie $\cos(4t) = 8 \cdot (\cos(t))^4 - 8 \cdot (\cos(t))^2 + 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$!
- Beweisen Sie $\sin(y) + \sin(z) = 2 \cdot \sin\left(\frac{y+z}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{y-z}{2}\right)$ für alle $y \in \mathbb{R}$ und alle $z \in \mathbb{R}$!
- Finden Sie ein $(C, p, \psi)^T \in \mathbb{R}^3$ mit $3 \cdot \sin(4s) - \sqrt{3} \cdot \cos(4s) = C \cdot \sin(ps + \psi)$ für alle $s \in \mathbb{R}$!
- Finden Sie ein $(D, q, \vartheta)^T \in \mathbb{R}^3$ mit $\sin(w) + 3 \cdot \cos(w) = D \cdot \sin(qw + \vartheta)$ für alle $w \in \mathbb{R}$!
- Finden Sie ein $(E, r, \chi)^T \in \mathbb{R}^3$ mit $\sin(\pi t) - \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = E \cdot \sin(rt + \chi)$ für alle $t \in \mathbb{R}$!

Tipp: Es ist $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$.



FktEinDim/Trig/Ag_TrigFkt_AddTheoFuerDoppelteWinkelNachweisen.tex

Aufgabe 51.257 (Doppelte Winkel)

Verwenden Sie in dieser Aufgabe für Ihre Nachweise nur die Additionstheoreme

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta),$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$\text{und} \quad 1 = (\cos(\alpha))^2 + (\sin(\alpha))^2 \quad !$$

- a) Zeigen Sie $\cos(x) \cdot \sin(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin(2x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$!
- b) Zeigen Sie $\cos(2\varphi) = 2 \cdot (\cos(\varphi))^2 - 1$ für alle Winkel $\varphi \in \mathbb{R}$!
- c) Welche reellen Zahlen x erfüllen die Gleichung $\cos(x) = \cos(2x)$?

Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis aus Aufgabenteil b)!



FktEinDim/Trig/Ag_TrigFkt_FormelnFuerDieWeierstrassSubstitution.tex

Aufgabe 51.258 (Formeln für die Weierstraß-Substitution)

Ermitteln Sie jeweils den Definitionsbereich der folgenden trigonometrischen Beziehungen und verifizieren Sie jede der Beziehungen durch eine Rechnung!

a) $(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1,$

Hinweis: Was ist $\cos(x - x)$?

c) $\sin(x) = \frac{2 \cdot \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}$

b) $\frac{1}{(\cos(x))^2} = 1 + (\tan(x))^2$

d) $\cos(x) = \frac{1 - \left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{1 + \left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}$



FktEinDim/Trig/Ag_TrigFkt_GraphenPeriodischerFunktionen.tex

Aufgabe 51.259 (Graphen periodischer Funktionen)

Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen mit den nachstehenden Zuordnungsvorschriften!

a) $x \mapsto \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

c) $x \mapsto \sin(2x + \pi)$

e) $x \mapsto \sin(x) \cdot \cos(x)$

b) $x \mapsto 2 \cdot \sin\left(\frac{2}{3} \cdot x\right)$

d) $x \mapsto \left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|$

f) $x \mapsto \sin(x) + \cos(x)$

Hinweis: Falls erforderlich, können Sie jeweils eine Wertetabelle aufstellen. Alle geforderten Graphen gehen aus den Graphen von Sinus, Kosinus oder Tangens durch Verschiebungen, Streckungen und Spiegelungen hervor. Wie genau lässt sich in den Aufgabenteilen e) und f) mit Hilfe der Additionstheoreme ermitteln.



FktEinDim/Trig/Ag_TrigFkt_KotangensFuerDoppelteWinkel.tex

Aufgabe 51.260 (Doppelwinkel-Additionstheorem für den Kotangens)

Drücken Sie $\cot(2x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ mittels eines Terms aus, der $\cot(x)$ enthält!

Hinweis: Benutzen Sie dazu die Additionstheoreme!



FktEinDim/Trig/Ag_TrigFkt_TangensUndKotangensVonPiAchtelAusSinusBerechnen.tex

Aufgabe 51.261 (Trigonometrische Funktionen ineinander umrechnen)

Verwendet man den trigonometrischen Pythagoras $(\cos(\alpha))^2 + (\sin(\alpha))^2 = 1$ für ein konkretes $\alpha \in \mathbb{R}$ zur Berechnung von $\sin(\alpha)$ oder $\cos(\alpha)$, so ist stets zu prüfen, welches Vorzeichen das Ergebnis hat.

Berechnen Sie $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ und $\cot\left(\frac{\pi}{8}\right)$ nur unter Zuhilfenahme von $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ und geben Sie die Werte in einer Darstellung ohne Wurzeln im Nenner an!



FktEinDim/Trig/Ag_TrigFkt_UmrechnungenUndSymmetrieformeln.tex

Aufgabe 51.262 (Umrechnungsformeln für trigonometrische Funktionen)

Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gelten $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$ und $\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$.

Verwenden Sie die Additionstheoreme, um die folgenden Ausdrücke zu vereinfachen!

- | | | | | |
|--|--|-------------------------|-------------------------|--|
| a) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ | c) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ | e) $\sin(\pi - \alpha)$ | g) $\sin(\alpha + \pi)$ | i) $\frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{2}$ |
| b) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ | d) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ | f) $\cos(\pi - \alpha)$ | h) $\cos(\alpha + \pi)$ | |



FktEinDim/Trig/Ag_TrigGlnn_EinstiegInLoesungsmethodeOhneArkus.tex

Aufgabe 51.263 (Trigonometrische Gleichungen)

Bestimmen Sie alle reellwertigen Lösungen der folgenden Gleichungen!

- | | | |
|--|--------------------------------|--------------------------------|
| a) $\sin(x) = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$ | c) $\sin(x) \cdot \cos(x) = 0$ | e) $\cot(x) = -\sqrt{3}$ |
| b) $\cos(2x + 5) = 0.5$ | d) $(\sin(x))^2 = \frac{1}{4}$ | f) $\tan(2 \cdot (x + 1)) = 1$ |

Hinweise: Hierzu bietet es sich an, zunächst die Graphen der Funktionen zu betrachten.

Falls Sie Näherungswerte mit einem Taschenrechner berechnen wollen (was in der Aufgabe nicht gefordert ist), müssen Sie Bogenmaß (radian) einstellen. Warum?



FktEinDim/Trig/Ag_TrigGlnn_GlnnUmstellenMitEtwasAufwand.tex

Aufgabe 51.264 (Trigonometrische Gleichungen)

Bestimmen Sie alle reellwertigen Lösungen der folgenden Gleichungen!

- | | | |
|--|---------------------------------------|-----------------------------|
| a) $4 \cdot (\sin(x))^2 + 3 \cdot \cos(x) = \frac{9}{2}$ | b) $\sin(x) = \sqrt{1 - (\sin(x))^2}$ | c) $\cos(2x) + 1 = \cot(x)$ |
|--|---------------------------------------|-----------------------------|



FktEinDim/Trig/Ag_TrigGlnn_GlnnUmstellenUndMitArkusLoesen.tex

Aufgabe 51.265 (Trigonometrische Gleichungen)

Lösen Sie die folgenden Gleichungen allgemein!

- | | | |
|--|-----------------------------|--|
| a) $3 \cdot \sin(x) + 2 \cdot \cos(x) = 0$ | b) $\sin(2x) + \cos(x) = 0$ | c) $6 \cdot (\cos(x))^2 + \sin(x) = 5$ |
|--|-----------------------------|--|



FktEinDim/Trig/Ag_Winkelfunktionen_FunktionsgraphZeichnen.tex

Aufgabe 51.266 (Winkelfunktion zeichnen)

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto f(x)$ mit $f(x) := 2 \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$.

- a) Zeichnen Sie den Graphen von f für $-\pi \leq x \leq 5\pi$. Auf der x -Achse sollen drei Zentimeter 2π entsprechen; als Längeneinheit der y -Achse soll ein Zentimeter gewählt werden.
- b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $f(x) = \sqrt{3}$.



FktEinDim/Umkehrung/Ag_Fkt_AbschnWeiseUmkehrfktnBestimmenFuerParabeln.tex

Aufgabe 52.267 (abschnittsweise definierte Umkehrfunktionen)

Seien $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$x \mapsto f(x) := x \cdot |x| \quad \text{und} \quad x \mapsto g(x) := 2x^3 - 6x^2 + 6x - 2.$$

f und g sind bijektive Funktionen.

Geben Sie für beide Funktionen die Zuordnungsvorschrift der Umkehrfunktion an!



FktEinDim/Umkehrung/Ag_Fkt_UmkehrfktnBestimmenUndZeichen.tex

Aufgabe 52.268 (Umkehrfunktion bestimmen)

Geben Sie jeweils einen möglichst großen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ und einen passenden Zielbereich $W \subseteq \mathbb{R}$ an, für welche die Funktionen $f: D \rightarrow W$ mit $x \mapsto f(x)$ und den folgenden Zuordnungsvorschriften bijektiv sind!

Bilden Sie anschließend jeweils die Umkehrfunktion f^{-1} von f und skizzieren Sie die Graphen von f und f^{-1} im selben Diagramm!

a) $f(x) := 4 - \sqrt{x}$

c) $f(x) := 2^x + 1$

e) $f(x) := 2$

b) $f(x) := \frac{x+1}{x-1}$

d) $f(x) := 1 - e^x$

f) $f(x) := \ln(x^2)$



FktMehrDim/Grenzwerte/Ag_GWMehrDim_Elf2DUndEin3D.tex

Aufgabe 53.269 (viele Grenzwerte berechnen)

Seien $\vec{c} := (-1, 2)^T$ und $\vec{d} := (0, 3)^T$. Berechnen Sie die angegebenen Grenzwerte!

- | | | |
|--|--|---|
| a) $\lim_{(x,y)^T \rightarrow (2,3)^T} \frac{x^2 + 3y - xy}{2y^2 + xy - 5x}$ | e) $\lim_{(x,y)^T \rightarrow \vec{0}} \frac{ 4x + 8y }{\sqrt{x^2 + y^2}}$ | i) $\lim_{(x,y)^T \rightarrow \vec{0}} \frac{x^6 \cdot y^4 + x^{12} + y^{14}}{x^{10} + y^{12}}$ |
| b) $\lim_{(x,y)^T \rightarrow \vec{0}} \frac{3y^2 - (\sqrt{3} \cdot xy)^2}{xy^2 + 2y^2}$ | f) $\lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,1)^T} \frac{x^2 \cdot (y-1)}{xy^2 + x - 2xy}$ | j) $\lim_{(x,y)^T \rightarrow \vec{0}} \frac{xy}{\cos(x) - 1}$ |
| c) $\lim_{(x,y)^T \rightarrow \vec{c}} \frac{y^2 + xy^2}{xy - x^3 + y - x^2}$ | g) $\lim_{(x,y)^T \rightarrow \vec{d}} \frac{ x \cdot (y-1)}{\sqrt{ x + y^2 - y}}$ | k) $\lim_{(x,y)^T \rightarrow \vec{0}} \frac{y^3 + xy^2}{x^2 + 2xy + 2y^2}$ |
| d) $\lim_{(x,y)^T \rightarrow \vec{0}} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$ | h) $\lim_{(x,y,z)^T \rightarrow \vec{0}} \frac{xy^2 + z^2}{\sqrt{x^2 + y^4 + z^2}}$ | l) $\lim_{(x,y)^T \rightarrow \vec{0}} \frac{\cos(x-y) - 1}{x^2 + y^2}$ |



FktMehrDim/Grenzwerte/Ag_GWMehrDim_PolynomBruchDefBereichBeachten.tex

Aufgabe 53.270 (Variablen gewichten und gemeinsame Potenz rausteilen)

Seien $D_f := \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0 \right\}$ und $D_g := \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 0 \text{ und } |2x| \leq |y| \leq 3 \right\}$.

- a) Skizzieren Sie D_g !

Zeigen Sie durch Einsetzen von Folgen $\left((x_k, y_k)^T \right)_{k \in \mathbb{N}}$ und $\left((r_k, s_k)^T \right)_{k \in \mathbb{N}}$ oder Kurven $\vec{\gamma}: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $I \subseteq \mathbb{R}$ und $\vec{\delta}: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $J \subseteq \mathbb{R}$, dass die Funktionen $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto f(x, y)$ und $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto g(x, y)$ keinen Grenzwert im Nullpunkt besitzen:

- | | |
|---|--|
| b) $f(x, y) := \frac{(x+y)^3}{x^2 \cdot y^2}$ | c) $g(x, y) := \frac{x^2 - y^2}{3x^2 - y^2 + 2xy + x^5}$ |
|---|--|

Tipp: Setzen Sie die Folgen $a_k := \frac{1}{k}$ und $b_{c,k} := \frac{c}{k}$ bzw. die Kurve $\vec{\alpha}_c(t) := (t, ct)^T$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ ein! Welche c werden von D_f bzw. D_g erlaubt? Welche der erlaubten c sind hilfreich?



FktMehrDim/Grenzwerte/Ag_Grenzwerte_Mehrdimensional_einfach.tex

Aufgabe 53.271 (Einfache Bausteine)

Zeigen Sie durch einfache Umformungen und Grenzwertregeln, dass diese Bausteine einen Grenzwert im Punkt $(x, y) = (0, 0)$ besitzen:

- | | | |
|---|---|--|
| a) $f(x, y) := (y+1) \cdot \frac{e^x - y}{e^x}$ | b) $g(x, y) := \frac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ | c) $h(x, y) := \frac{xy^2 + x^2y}{xy}$ |
|---|---|--|



FktMehrDim/Grenzwerte/Ag_Grenzwerte_Mehrdimensional_gemischt.tex

Aufgabe 53.272 (Verschiedene Grenzwerte)

Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren, und bestimmen Sie ggf. auch deren Wert.

- a) $\lim_{(x,y)^T \rightarrow (5,-2)^T} \frac{x^5 + 4x^3y}{-5xy^2}$ f) $\lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} \frac{6x^3y}{2x^4 + y^4}$ k) $\lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$
- b) $\lim_{(x,y)^T \rightarrow (6,3)^T} xy \cdot \cos(x - 2y)$ g) $\lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ l) $\lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$
- c) $\lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} \frac{y^4}{x^4 + 3y^4}$ h) $\lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} \frac{x^2 \cdot (\sin(y))^2}{x^2 + 2y^2}$
- d) $\lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} \frac{x^2 + (\sin(y))^2}{2x^2 + y^2}$ i) $\lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$ m) $\lim_{(x,y,z)^T \rightarrow (0,0,0)^T} \frac{xy + yz^2 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^4}$
- e) $\lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} \frac{xy \cdot \cos(y)}{3x^2 + y^2}$ j) $\lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} \frac{xy^4}{x^2 + y^8}$ n) $\lim_{(x,y,z)^T \rightarrow (0,0,0)^T} \frac{x^2 + 2y^2 + 3z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$



FktMehrDim/Grenzwerte/Ag_Grenzwerte_Mehrdimensional_vorbereitung.tex

Aufgabe 53.273 (Funktionen und Folgen)

Gegeben seien die drei Folgen

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \quad (u_n, v_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right), \quad (p_n, q_n) = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right)$$

und zwei Funktionen

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad g(x, y) = \frac{y^4}{x^4 + 3y^4}.$$

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, v_n)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} (p_n, q_n)$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n, v_n)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f(p_n, q_n)$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n, y_n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} g(u_n, v_n)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} g(p_n, q_n)$

Fällt Ihnen etwas auf?



FktMehrDim/Hoehenlinien/Ag_FunktionenMehrdimensional_Hoehenlinien.tex

Aufgabe 54.274 (Funktionen in $\mathbb{R}^2$)

Bestimmen und skizzieren Sie den natürlichen Definitionsbereich sowie die Höhenlinien zur Höhen $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ und $c_3 = -1$.

a) $f(x, y) = (y - 2x)^2$

d) $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^2}$

g) $f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$

b) $f(x, y) = y - \ln x$

e) $f(x, y) = x^3 - y$

c) $f(x, y) = ye^x$

f) $f(x, y) = e^{\frac{y}{x}}$

Aufgabenblatt 55

FktMehrDim/Stetigkeit



FktMehrDim/Stetigkeit/Ag_StetigMehrDim_Drei2DPolynombrueche.tex

Aufgabe 55.275 (Stetige und unstetige Funktionen)

Prüfen Sie, ob die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto f(x, y)$ in $\vec{a} := (a_x, a_y)^T := (0, 0)^T$ stetig ist!

- a) $f(x, y) := \frac{y}{8x}$ für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ und $f(0, z) := 0$ für alle $z \in \mathbb{R}$
- b) $f(x, y) := \frac{x^3 \cdot y^3}{x^2 + 4y^2}$ für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ oder $y \neq 0$ und $f(0, 0) := 0$
- c) $f(x, y) := \frac{xy}{x-y}$ für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}$ mit $x \neq y$ und $f(z, z) := 0$ für alle $z \in \mathbb{R}$



FktMehrDim/Stetigkeit/Ag_StetigMehrDim_EbeneZerlegen.tex

Aufgabe 55.276 (Stetigkeit in $\mathbb{R}^2$)

Seien $M_1 := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y < -\frac{x^3}{8}\}$, $M_2 := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y < -|x|\}$,
 $M_3 := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid -x \leq y \leq |\sin(x)|\}$ und $M_4 := \mathbb{R}^2 \setminus (M_1 \cup M_2 \cup M_3)$.

Sei nun $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x, y) := \begin{cases} \frac{8}{x} \cdot (y - |\sin(x)|), & \text{für } (x, y)^T \in M_1 \\ \left(\frac{8}{|y|}\right)^{\frac{y+x}{2y}} \cdot \left(|\sin(y)| - \frac{x^2}{y}\right), & \text{für } (x, y)^T \in M_2 \\ |\sin(x)| - y, & \text{für } (x, y)^T \in M_3 \\ \frac{x^2}{y} \cdot |\sin(x)| - x^2, & \text{für } (x, y)^T \in M_4 \end{cases}$.

- a) Skizzieren Sie die Mengen M_1 , M_2 , M_3 und M_4 in ein Koordinatensystem und notieren Sie in den entsprechenden Bereichen die jeweilige Zuordnungsvorschrift von f !
- b) Untersuchen Sie f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ auf Stetigkeit!
Tipp: Was passiert, wenn Sie sich den Abschnittsgrenzpunkten, die auf der positiven horizontalen Achse liegen, senkrecht von oben nähern?
- c) Ist f im Ursprung stetig?



FktMehrDim/Stetigkeit/Ag_StetigMehrDim_EinstiegAltklausurBau.tex

Aufgabe 55.277 (Stetigkeit in $\mathbb{R}^2$)

Die folgenden Aufgaben sind Altklausuren der Mathematik II für Bauingenieurwesen entnommen.

- a) Untersuchen Sie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{für } x = y = 0 \\ \frac{2 \cdot |x| \cdot y}{x^2 + y^2}, & \text{sonst} \end{cases}$ auf Stetigkeit!
- b) Untersuchen Sie $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto g(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{für } x = y = 0 \\ \frac{xy \cdot \sin(y)}{x^2 + y^2}, & \text{sonst} \end{cases}$ auf Stetigkeit!



FktMehrDim/Stetigkeit/Ag_Stetigkeit_Mehrdimensional.tex

Aufgabe 55.278 (Stetige Funktion?)

Überprüfen Sie die folgenden Funktionen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ auf Stetigkeit im Nullpunkt.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{2x^2 + y^2}, & \text{für } xy \neq 0 \\ 0, & \text{für } xy = 0 \end{cases} & \text{c) } u(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } 0 \neq x = y^2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ \text{b) } g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + xy + y^2}, & \text{für } xy \neq 0 \\ 0, & \text{für } xy = 0 \end{cases} & \text{d) } v(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2 + y^4}, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x \leq 0 \end{cases} \end{array}$$



FktMehrDim/Stetigkeit/Ag_Stetigkeit_WiWiKlausuraufgaben.tex

Aufgabe 55.279 (Stetigkeit in WiWi Alt-Klausuren)

a) In Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die Funktion

$$f_\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_\alpha(x, y) := \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{y}, & \text{falls } y \neq 0 \\ -2 \cdot \alpha \cdot x, & \text{falls } y = 0, \end{cases}$$

gegeben. Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass f_α auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

b) Gegeben seien die Funktion

$$h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x, y, z) := \begin{cases} x \cdot y \cdot z, & \text{falls } (x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und die Menge

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \cdot y \cdot z = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass h in jedem Punkt aus M stetig ist.

Hinweis: Das Symbol $\mathbb{Q}$ bezeichnet die Menge der rationalen Zahlen.

c) Gegeben sei die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) := \begin{cases} \frac{4x^4 - x^2 y^2}{x^3 + y^6}, & x \neq -y^2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Funktion im Punkt $(0, 0)$ unstetig ist.

d) Es sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 \cdot y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Untersuchen Sie die Funktion f auf Stetigkeit.



FktMehrDim/Stetigkeit/Ag_Stetigkeit_altKlausur_bau_2012_H_A2b.tex

Aufgabe 55.280 (Klausur BauIng August 2012)

In welchen Punkten ist die Funktion $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 \cdot y}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

stetig?

Aufgabenblatt 56

Folgen/Definition



Folgen/Definition/Ag_Folgen_DivergenzNachDef.tex

Aufgabe 56.281 (Divergente Folgen)

Zeigen Sie durch Widerspruch zu der Definition der Konvergenz, dass die Folgen divergent sind:

- a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = 7 - (-1)^n$ b) $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $b_n = 2^n - 3^n$ c) $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n = n + 1 + (-1)^n \cdot n$



Folgen/Definition/Ag_Folgen_KonvergenzEpsilonNKriterium.tex

Aufgabe 56.282 $((\varepsilon, N_\varepsilon)$ -Kriterium)

Beweisen Sie, dass $\frac{1}{3}$ der Grenzwert der Folge $\left(\frac{n^2-1}{3n^2+1}\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist. Verwenden Sie dazu die Definition der Konvergenz.



Folgen/Definition/Ag_Folgen_KonvergenzVerstaendnis.tex

Aufgabe 56.283 $((\varepsilon, N_\varepsilon)$ -Kriterium)

Entscheiden Sie, ob die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unter folgenden Kriterien konvergiert: Es gibt zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N_\varepsilon$ gilt:

- a) $|a_n| < 2 \cdot \varepsilon^2$ c) $|a_n \cdot a_{n+1}| < \varepsilon$ d) $|a_n - a_{n+1}| < \varepsilon$
b) $|a_n + a_{n+1}| < \varepsilon$ e) $|a_n \cdot a_m| < \varepsilon$ für alle $m \in \mathbb{N}$

Beweisen Sie Ihre Vermutungen (Beweis oder Gegenbeispiel). Es gilt: $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist unbeschränkt.



Folgen/FktnFolgen/Ag_Funktionenfolgen_SinusVonNF.tex

Aufgabe 57.284 (Punktweise und gleichmäßige Konvergenz)

Untersuchen Sie die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ und $x \mapsto f_n(x) := \sin\left(\frac{1}{nx}\right)$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz!

Aufgabenblatt 58

Folgen/Häufung



Folgen/Häufung/Ag_Folgen_HPMitTricks.tex

Aufgabe 58.285 (Wechselnde Vorzeichen)

Bestimmen Sie die Häufungspunkte und das Konvergenzverhalten der Folge

$$a_n = (-1)^n \cdot n^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \cdot (-1)^n\right)^n \cdot \left(\sqrt{n^2 + 1} + (-1)^n \cdot n\right)$$

indem Sie geeignete Teilfolgen untersuchen.



Folgen/Häufung/Ag_Folgen_HPVorzeichenSinus.tex

Aufgabe 58.286 (Vorzeichen kombinieren)

Zerlegen Sie diese Folge in sechs Teilfolgen passend zu den wechselnden Vorzeichen in den Termen und bestimmen jeweils Sie die Grenzwerte der Teilfolgen:

$$a_n := \left(2 - (-1)^n\right)^n \cdot \sin\left(\frac{2}{3} \cdot \pi \cdot n\right) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Tipp: $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin(120^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sin(240^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Folgen/Häufung/Ag_Folgen_LiminfLimsupBeispieleHeuser.tex

Aufgabe 58.287 (einfache Häufungswerte)

Bestimmen Sie alle Häufungswerte der gegebenen Folgen. Gibt es jeweils einen Limes Inferior und/oder einen Limes Superior?

a) $a_n := \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{für ungerades } n \in \mathbb{N} \\ 1, & \text{für gerades } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

c) $c_n := (-1)^n \cdot \sqrt[n]{n} + \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$

b) $b_n := \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, & \text{für ungerades } n \in \mathbb{N} \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, & \text{für gerades } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

d) $d_n := \begin{cases} 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n, & \text{falls } n = 3k \\ 2 + \frac{n+1}{n}, & \text{falls } n = 3k + 1 \\ 2, & \text{falls } n = 3k + 2 \end{cases}$



Folgen/Häufung/Ag_Folgen_vieleHäufungswerte.tex

Aufgabe 58.288 (Häufungswerte berechnen)

Geben Sie für die folgenden Folgen sämtliche Häufungswerte an!

a) $x_n := (-1)^n \cdot \frac{12n}{6n+7}$

c) $a_n := \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) + 1$

e) $u_1 := 2, u_{n+1} := \frac{1}{u_n}$

b) $y_n := \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$

d) $b_n := \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot n\right)$

f) $v_1 := 2, v_{n+1} := \frac{1}{v_n^2}$



Folgen/Komplex/Ag_Folgen_Sandwichkriterium3.tex

Aufgabe 59.289 (Sandwich-Kriterium (Einschließungssatz))

Begründen Sie, warum die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit den nachstehenden Folgengliedern konvergieren, und bestimmen Sie den Grenzwert A der Folgen. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte

a) $a_n := \frac{\sin(n) + 5n}{n + 2}$

b) $a_n := \sqrt[n]{3^n + 1}$

c) $a_n := \frac{n \cdot i + \sqrt{n^3}}{4n^2 + 2}$

Aufgabenblatt 60**Folgen/Konvergenz**

Folgen/Konvergenz/Ag_Folgen_Divergenz2.tex

Aufgabe 60.290 (Divergente Folgen)

Begründen Sie, weshalb die nachstehenden Folgen divergent sind:

a) $(7 - (-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$

b) $(2^n - 3^n)_{n \in \mathbb{N}}$

c) $(n + 1 + (-1)^n \cdot n)_{n \in \mathbb{N}}$

Welche der Folgen sind bestimmt divergent, welche nicht?



Folgen/Konvergenz/Ag_Folgen_Divergenz3.tex

Aufgabe 60.291 (Divergente Folgen)

Begründen Sie, weshalb die nachstehenden Folgen divergent sind:

a) $((-2)^n)$

b) $(\sin(\frac{n\pi}{6}))$

c) $(n^3 + (-1)^n \cdot n^2)$

Welche der Folgen sind bestimmt divergent, welche nicht?



Folgen/Konvergenz/Ag_Folgen_MengenSchranksFolgen_vkmw.tex

Aufgabe 60.292 (Obere Schranken)

Es sei A_j für $j \in \mathbb{N}$ eine Folge von Teilmengen von $\mathbb{R}$, so dass jedes A_j beschränkt ist. Zeigen Sie, dass der Schnitt $\bigcap A_j$ ebenfalls beschränkt ist, aber dass die analoge Aussage für die Vereinigung im Allgemeinen falsch ist.



Folgen/Konvergenz/Ag_Folgen_Mittelwertfolge_vkmw.tex

Aufgabe 60.293 (Folngengrenzwerte)

Es sei (a_n) eine konvergente Zahlenfolge. Leiten Sie her, dass auch die Mittelwertfolge $\frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n)$ konvergent ist. Wie lautet ihr Grenzwert?

Warum sollten Sie in der Klausur nicht die Formel für die Summe von Grenzwerten benutzen?

Aufgabenblatt 61

Folgen/Rekursiv



Folgen/Rekursiv/Ag_FktFolge_HermitePolynome.tex

Aufgabe 61.294 (Hermite-Polynome als Rekursion)

Die Hermite-Polynome $H_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sind unter anderem in der Physik von Bedeutung. Eine mögliche Darstellung erfolgt über die Rekursion:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}$$

mit den Startpolynomen $H_0(x) = 1$ und $H_1(x) = 2x$. Werten Sie die Rekursionsvorschrift für $n+1 \leq 3$ aus, um eine explizite Darstellung der ersten Polynome zu erhalten.



Folgen/Rekursiv/Ag_FolgenRekursiv_NichtMonoton.tex

Aufgabe 61.295 (Abwechslungsreiche rekursiv dargestellte Folge)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch $a_1 \in \mathbb{R}$ und

$$a_{n+1} := -a_n^2 + a_n + 2 = (a_n + 1) \cdot (2 - a_n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

- Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für $a_1 \in \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$ konvergiert.
- Bestimmen Sie alle Häufungspunkte von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im Fall $a_1 = 1$.
- Begründen Sie, warum die Folge bestimmt divergiert, wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_N < -\sqrt{2}$ gibt.
- Sei $a_1 = -\frac{1}{2}$. Zeigen Sie: Die Folge ist weder monoton noch beschränkt durch $-\frac{1}{2}$ und $\sqrt{2}$. Sie können Folgenglieder numerisch berechnen lassen. Bonus: Lassen Sie die ersten fünfzig Folgenglieder numerisch berechnen – welche Vermutung liegt nahe?



Folgen/Rekursiv/Ag_FolgenRekursiv_StartwertIstEinhalb.tex

Aufgabe 61.296 (viele rekursiv dargestellte Folgen)

Untersuchen Sie die Folgen mit der angegebenen Rekursionsformel auf Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz! Der Startwert der Folgen sei $\frac{1}{2}$, sofern nicht anders angegeben.

- | | | |
|---|-------------------------------------|--|
| a) $a_{n+1} = 1 + \left(\frac{a_n}{2}\right)^2$ | d) $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n+2}$ | g) $a_{n+1} = \frac{a_n^2+2}{3}$ |
| b) $a_{n+1} = 2a_n - a_n^2$ | e) $a_{n+1} = \frac{3a_n+2}{a_n+2}$ | für jedes $a_1 \in \left\{\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right\}$ |
| c) $a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n}$ | f) $a_{n+1} = 1 - \sqrt{1-a_n}$ | h) $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$ |



Folgen/Rekursiv/Ag_FolgenRekursiv_StartwertVariabel.tex

Aufgabe 61.297 (Rekursiv dargestellte Folge mit Startwert aus Intervall)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch $a_1 \in [-1; \infty)$ und

$$a_{n+1} = \frac{3 \cdot a_n + 2}{a_n + 2} = 3 - 4 \cdot \frac{1}{a_n + 2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

- Falls die Folge konvergiert: Welche Grenzwerte sind aufgrund der Rekursionsvorschrift möglich?
- Zeige: Aus $a_1 \in [-1; 2]$ folgt $a_n \in [-1; 2]$ und aus $a_1 \in (2; \infty)$ folgt $a_n \in (2; \infty)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- Was gilt für Monotonie und Konvergenz von (a_n) ?

**Aufgabe 61.298** (Rekursiv dargestellte Folge mit Startwert aus Intervall)

Sei $f: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := \frac{3x+2}{x+2} = 3 - 4 \cdot \frac{1}{x+2}$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch $a_1 \in [-1; \infty)$ und

$$a_{n+1} := f(a_n) = \frac{3 \cdot a_n + 2}{a_n + 2} = 3 - 4 \cdot \frac{1}{a_n + 2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

- a) Falls die Folge konvergiert, gilt mit den Rechenregeln für konvergente Folgen:

$$A := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) = f(A).$$

Ist diese sogenannte Fixpunktgleichung $f(A) = A$ unlösbar, kann die Folge nicht konvergieren. Bestimmen Sie für $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ alle Lösungen der Fixpunktgleichung $f(A) - A = 0$.

- b) Was gilt allgemein, wenn der Startwert a_1 eine Lösung der Fixpunktgleichung ist?
- c) Die Rekursionsvorschrift selbst ergibt hier wegen der Polstelle -2 von f keine Schranken für die Folge. Die Beschränktheit kann demnach nur induktiv gezeigt werden. Zeigen Sie: Aus $a_1 \in [-1; 2]$ folgt $a_n \in [-1; 2]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und aus $a_1 \in (2; \infty)$ folgt $a_n \in (2; \infty)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Tipp: In der zweiten Form von f ist z.B. $a_n \in (-1, 2) \Rightarrow a_{n+1} \in (-1, 2)$ gut zu sehen. Allgemein in zwei Schritten: $a_{n+1} + 1 > 0$ und $a_{n+1} - 2 < 0$, jeweils $a_n \in (-1, 2)$ vorausgesetzt.
- d) Ist die Beschränktheit der Folge nachgewiesen, liefert ein Beweis von Monotonie die Konvergenz nach dem Monotoniekriterium. Es gilt also, das Vorzeichen von $a_{n+1} - a_n = f(a_n) - a_n$ zu untersuchen (vergleiche Fixpunktgleichung!). Was gilt für Monotonie und Konvergenz von (a_n) ?

**Aufgabe 61.299** (Konvergenz rekursiv definierter Folgen)

Zeigen Sie mit dem Monotoniekriterium, dass die rekursiv definierte Folge (c_n) mit $c_1 = 0$ und $c_{n+1} = \sqrt{6 - \sqrt{6 - c_n}}$ konvergent ist.

Berechnen Sie die ersten beiden Folgenglieder und bestimmen Sie dann den Grenzwert dieser Folge.

Tipp: Bei dem auftretenden Polynom vierten Grades sind $x = 2, -3$ einige mögliche Nullstellen.

**Aufgabe 61.300** (Quadratische Rekursion)

Es sei (a_n) rekursiv definiert durch

$$a_1 := 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} := 2a_n - \frac{1}{2} \cdot a_n^2 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

- a) Zeigen Sie, dass $a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (*Tipp:* Quadratische Ergänzung).
- b) Zeigen Sie per Induktion, dass $a_n \geq 0$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ (dabei dürfen Sie Teil a) verwenden).
- c) Begründen Sie, dass (a_n) eine konvergente Folge ist und bestimmen Sie ihren Grenzwert über die Testgleichung.

**Aufgabe 61.301** (Konvergenz rekursiv definierter Folgen)

Zeigen Sie mit dem Monotoniekriterium, dass die nachstehenden Folgen konvergieren, und bestimmen Sie deren Grenzwert:

- a) Es ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch $a_1 := 6$ und $a_{n+1} := \sqrt{\frac{3}{2} \cdot a_n + 7}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert.
- b) Es ist $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch $b_1 := 2.25$ und $b_{n+1} := \sqrt{b_n - \frac{1}{4}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert.



Folgen/Vektorwertig/Ag_Folgen_vieleHaeufungswerte_2D.tex

Aufgabe 62.302 (Häufungswerte berechnen)

Geben Sie für die folgenden Folgen sämtliche Häufungswerte an!

a) $(x_n, y_n)^T = \left((-1)^n \cdot \frac{12n}{6n+7}, \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \right)^T$

b) $(x_n, y_n)^T = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) + 1, \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot n\right) \right)^T$

c) $(x_n, y_n)^T$ mit $x_1 := 2$, $x_{n+1} := \frac{1}{x_n}$ und $y_1 := 2$, $y_{n+1} := \frac{1}{y_n^2}$



GWStetig/FktGW/Ag_Asymptoten_Abschaetzungen_vmkw.tex

Aufgabe 63.303 (Abschätzen in Ungleichungen)

Zeigen Sie durch eine Abschätzung, dass es für jedes $x > 0$ und jedes $C > 0$ ein n_0 gibt, ab dem $x^n/n! < C$ für $n \geq n_0$ ist.

Warum sollten Sie nicht die Ungleichungsliste mit den Bausteinen vom Auswendig-Blatt verwenden?



GWStetig/FktGW/Ag_Asymptoten_RationaleFunktionen.tex

Aufgabe 63.304 (Asymptoten von algebraischen Funktionen)

Bestimmen Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ und die Gleichung(en) der Asymptote(n) des Graphen der Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit

a) $x \mapsto f(x) := \frac{3}{x+1}$

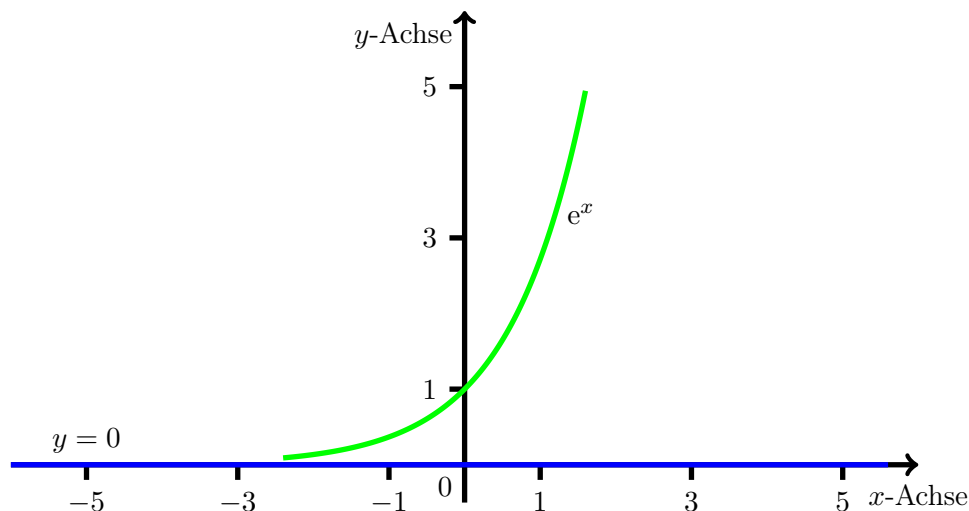
b) $x \mapsto f(x) := \frac{6x^2}{x^2-4}$

c) $x \mapsto f(x) := \frac{p(x)}{4x^2+4},$

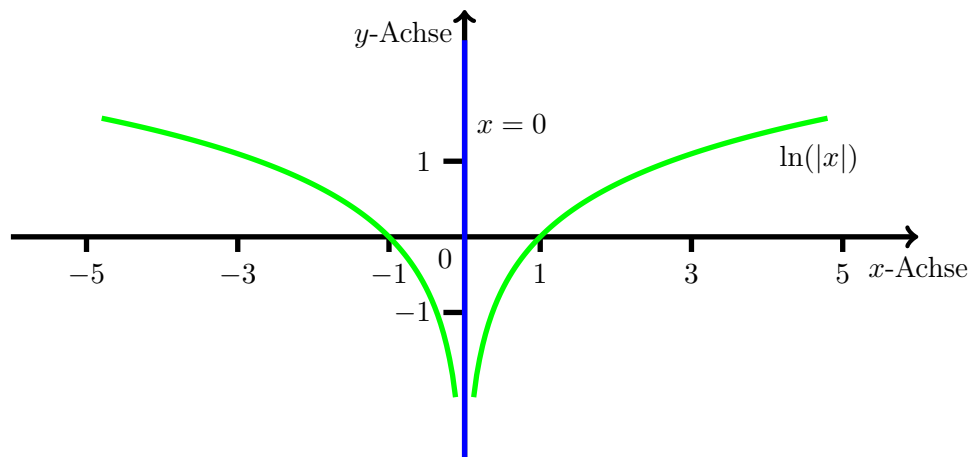
wobei $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto p(x) := 8x^3 - x^2 + 12x + 11$ ein Polynom dritten Grades darstellt.



GWStetig/FktGW/Ag_Asymptoten_TranszendenteFktZeichnung1.tex

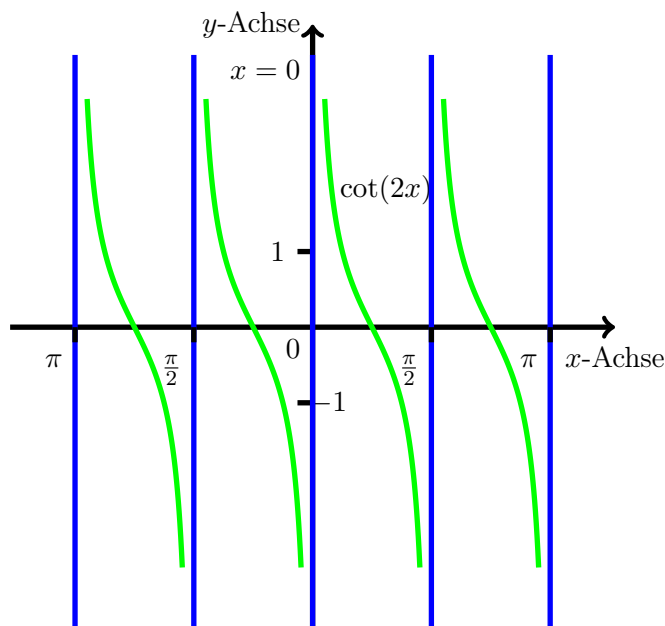


GWStetig/FktGW/Ag_Asymptoten_TranszendenteFktZeichnung2.tex

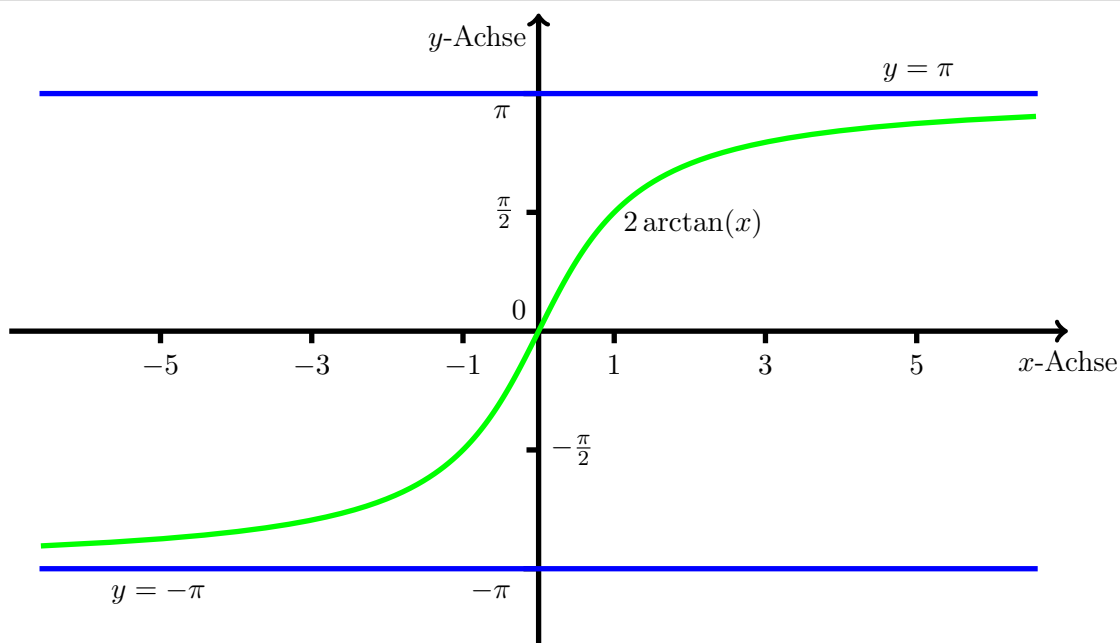




GWStetig/FktGW/Ag_Asymptoten_TranszendenteFktZeichnung3.tex



GWStetig/FktGW/Ag_Asymptoten_TranszendenteFktZeichnung4.tex



GWStetig/FktGW/Ag_Asymptoten_TranszendenteFunktionen.tex

Aufgabe 63.305 (Asymptoten von transzendenten Funktionen)

Zeichnen Sie jeweils die Asymptoten des Graphen der Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit

- | | |
|---|---|
| a) $x \mapsto f(x) := \exp(x)$ und $D := \mathbb{R}$ | c) $x \mapsto f(x) := \cot(2x)$ und $D := [-\pi; \pi]$ |
| b) $x \mapsto f(x) := \ln(x)$ und $D := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ | d) $x \mapsto f(x) := 2 \cdot \arctan(x)$ und $D := \mathbb{R}$ |



GWStetig/FktGW/Ag_Grenzwerte_RationaleTerme.tex

Aufgabe 63.306 (Grenzwerte)

Ermitteln Sie folgende Grenzwerte, sofern diese existieren:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x}{16 - x}$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 + 8}{x^3 + 4}$

e) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{6}{(x - 8)^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 3 - 21x^2}{4 - 3x^2 - 20x}$

d) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{6 - x - x^2}{x + 3}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{12}{x^3 - 1}$



GWStetig/FktGW/Ag_Grenzwerte_Sandwich.tex

Aufgabe 63.307 (Sandwich Theorem)

Verwenden Sie das Sandwich Theorem um die folgenden Grenzwerte zu berechnen:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + \sin(x)}$

c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} e^{3 + \cos(x) \cdot \arctan(x)}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{5x^2 + 3}{\ln(x^2 + 1)}\right)$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) + 1}{x \cdot \tanh\left(\frac{1}{x}\right) + 5}$



GWStetig/FktGW/Ag_Grenzwerte_UmformungenSandwichlemma.tex

Aufgabe 63.308 (Grenzwerte)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{8}{x}\right)$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x} \cdot \cos(6x))$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x \cdot \cos(x)}$

Hinweis: Es gilt: $x - \frac{1}{6}x^3 \leq \sin(x) \leq x$ für alle $x \geq 0$.

GWStetig/FktGW/Ag_Grenzwerte_einfach.tex

Aufgabe 63.309 (Grenzwerte)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 3)^2 - (3 - x^2)^2}{6x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin(x)}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 + 7x}$



GWStetig/FktGW/Ag_Grenzwerte_einfach2_bau.tex

Aufgabe 63.310 (Noch mehr Grenzwerte wiederholen)

Bestimmen Sie diese Grenzwerte (mit ausführlichem Rechenweg):

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x}{x^2 - 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 32}{x^2 - 4}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(x)}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$

d) $\lim_{x \rightarrow \pi} \tan(x)$



GWStetig/FktGW/Ag_Grenzwerte_einfach_wiwi.tex

Aufgabe 63.311 (Einseitige Funktionsgrenzwerte)

Bestimmen Sie diese Funktionsgrenzwerte:

a) $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow 0-} \left(1 - \frac{x+1}{x} \right)$

d) $\lim_{x \rightarrow 0+} \left(1 - \frac{x+1}{x} \right)$



GWStetig/FktGW/Ag_Grenzwerte_elementar_mittel.tex

Aufgabe 63.312 (Grenzwerte)

Untersuchen Sie, ob die (rechtsseitigen, linksseitigen) Grenzwerte existieren:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (3\sqrt{x+2} - \sqrt{9x}).$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(-6x)}{\sin(4x)},$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x} - \frac{1}{2}},$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|1-x|}{5x-5},$



GWStetig/FktGW/Ag_Grenzwerte_ohneLH.tex

Aufgabe 63.313 (Grenzwerte, teilweise schwer)

Bestimmen Sie, soweit existent, die folgenden Funktionsgrenzwerte. Keine Begründung erforderlich.

	Grenzwert		Grenzwert
a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 1}{x^4 + 1}$		g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x)}{x - 1}$	
b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$		h) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$	
c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 + 3x^3 - 18x^2 - 6x + 18}{x^2 - x - 6}$		i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$	
d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x}$		j) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(4 + \frac{\sin(x)}{x} \right)$	
e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x}$		k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2} + e^x}{e^{x^2} + e^{-x^2}}$	
f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 5x}{5x - 1}$			

Hinweis: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0.$



GWStetig/GlmUndLStetig/Ag_StetigkeitGlm_ExistenzDesGWLiefertGlmStetigkeit.tex

Aufgabe 64.314 (Beweisaufgabe zur gleichmäßigen Stetigkeit)

Zeigen Sie: Ist $f: [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x)$ stetig und existiert $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ (im eigentlichen Sinne, das heißt, es gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) =: \alpha \in \mathbb{R}$), so ist f gleichmäßig stetig auf $[0; \infty)$.

Tipp: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \alpha$ gilt genau dann, wenn für alle $\tilde{\varepsilon} \in \mathbb{R}$ mit $\tilde{\varepsilon} > 0$ ein $X_{\tilde{\varepsilon}} \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq \max(\{0; X_{\tilde{\varepsilon}}\})$ die Ungleichung $|f(x) - \alpha| < \tilde{\varepsilon}$ gilt.

Zerlegen Sie $[0; \infty) = \left[0; X_{\frac{\tilde{\varepsilon}}{3}}\right] \cup \left[X_{\frac{\tilde{\varepsilon}}{3}}; \infty\right)$ und unterscheiden Sie drei Fälle, je nachdem, aus welchem der beiden Intervalle Ihre Variablen stammen.

Wie hilft Ihnen der Satz von Heine?



GWStetig/GlmUndLStetig/Ag_StetigkeitGlm_SinusVonEinsDurchX.tex

Aufgabe 64.315 (Chaos bei der Null)

Seien $a \in (0; 1)$ und $f: (0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Untersuchen Sie f und $f|_{(a; 1]}$ auf gleichmäßige Stetigkeit!



GWStetig/Stetigkeit/Ag_Stetigkeit_Definition_leicht2.tex

Aufgabe 65.316 (Stetigkeit von Funktionen)

Untersuchen Sie, ob die nachstehenden Funktionen an der Stelle $a = 0$ stetig sind:

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := \begin{cases} \sin(x) \sin\left(\frac{2}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

b) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto g(x) := \begin{cases} \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ \pi & \text{für } x = 0. \end{cases}$



GWStetig/Stetigkeit/Ag_Stetigkeit_Definition_mittel.tex

Aufgabe 65.317 (Stetigkeit von Funktionen)

Bestimmen Sie diejenigen $p \in \mathbb{R}$, für welche die Funktion $f_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist mit (14 · 16 = 224)

$$x \mapsto f_p(x) := \begin{cases} \frac{12x^2+3x-42}{2x+4} & \text{für } x < -2, \\ px^2 + 6x - 2p^2 & \text{für } -2 \leq x < 4, \\ \frac{12-p^2x^2-px}{x} & \text{für } x \geq 4. \end{cases}$$



GWStetig/Stetigkeit/Ag_Stetigkeit_parameter_wiwi.tex

Aufgabe 65.318 (Stetigkeit und Monotonie)

Finden Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{R}$ so, dass

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto f(x) := \begin{cases} |\log_5(1-x)|, & \text{falls } x < 0 \\ \alpha + \cos(\pi x), & \text{falls } 0 \leq x \leq 1. \\ \beta e^{x-1}, & \text{falls } x > 1 \end{cases}$$

überall stetig ist. Finden Sie dann die Monotoniebereiche und die beiden Randasymptoten.



GWStetig/ZWS/Ag_ZWS_BildbereichBestimmen.tex

Aufgabe 66.319 (Bildbereich zweier Abbildungen)Bestimmen Sie die maximalen Definitionsbereiche $D_f \subseteq \mathbb{R}$ und $D_g \subseteq \mathbb{R}$ sowie die Bildbereiche von

$$f : D_f \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto f(x) := \frac{3+4x}{1+x^2} \quad \text{und} \quad g : D_g \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto g(x) := \log_5 \left(1 + \frac{3+4x}{1+x^2} \right)$$

mit Hilfe des Zwischenwertsatzes!



GWStetig/ZWS/Ag_ZWS_ExistenzEinerLoesung.tex

Aufgabe 66.320 (Zwischenwertsatz)Es sei $f : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := \frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{1}{4} \cdot \cos(x)$.Zeigen Sie: Es gibt ein $x \in [-1; 1]$ mit $f(x) = \text{id}(x) = x$.



IntEinDim/DefRiemann/Ag_Integration_OberUntersumme_Bild1.png

Aufgabenblatt 68

IntEinDim/Integrale



IntEinDim/Integrale/Ag_IntEinDim_IntBereichZerlegenZweiBetrageEineWurzelAusQuadrat.tex

Aufgabe 68.321 (Integrationsbereich zerlegen)

Berechnen Sie die folgenden Integrale!

a) $\int_{-2}^2 |x^2 - 4x + 3| dx$

b) $\int_{-2}^2 (1 - x) \cdot |x + 1| dx$

c) $\int_{-3}^2 \sqrt{(x^2 + x - 2)^2} dx$



IntEinDim/Integrale/Ag_Integrale_altKlausur_bau_2010_Teil_a.tex

Aufgabe 68.322 (bestimmte Integration (5))

Berechnen Sie die Werte folgender Integrale:

a) $\int_{-\pi}^{\pi} 3x \cdot \cos(x) dx$

b) $\int_1^{e^2} 3 \cdot |x^2 - 4| dx$

c) $\int_e^{e^2} \frac{\ln(x^2)}{4x} dx$



IntEinDim/Integrale/Ag_Integrale_vieleIntegrale.tex

Aufgabe 68.323 (viele Integrale)

Sei $\kappa := \sqrt{\ln(\ln(3))}$. Berechnen Sie die folgenden Integrale bzw. Stammfunktionen!

a) $\int_1^4 \frac{1 - x^2}{\sqrt{x}} dx$

g) $\int \frac{\ln(x)}{x^2} dx$

m) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

b) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

h) $\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{2\sqrt{2}}{3}} \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

n) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\tan(x))^2}{2} dx$

c) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{3}{\sqrt{4 - x^2}} dx$

i) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\cos(x))^2}{1 + \sin(x)} dx$

o) $\int \arcsin(x) dx$

d) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} \sin(\pi x) \cdot e^{\cos(\pi x)} dx$

j) $\int_e^{e^3} \frac{1}{x \cdot \ln(x)} dx$

p) $\int 2x \cdot \arctan(x) dx$

e) $\int \frac{\sin(x)}{(\cos(x))^3} dx$

k) $\int_0^2 \frac{x - 4}{x + 1} dx$

q) $\int_0^{\kappa} \frac{x}{e^{x^2 - x^2}} dx$

f) $\int_{16}^{81} \sqrt{\xi} \cdot \sqrt{\xi} d\xi$

l) $\int \arctan(x) dx$

r) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin(x)} \cdot \sin(2x) dx$



IntEinDim/Integrale/Ag_Integration_Integralwerte1.tex

Aufgabe 68.324 (bestimmte Integration (4) — die Qual der Wahl)

Berechnen Sie die folgenden Integralwerte:

a) $\int_1^4 \frac{1 - x^2}{\sqrt{x}} dx$

b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(t) \cdot \exp(\cos(t)) dt$

c) $\int_{16}^{81} \sqrt{x \cdot \sqrt{x}} dx$

Zusatz: Diskutieren Sie auch kurz, welche der drei Integrationsmethoden (elementar, partiell, per Substitution) für das jeweilige Integral möglich und welche *sinnvoll* sind.



IntEinDim/Integrale/Ag_Integration_Integralwerte2.tex

Aufgabe 68.325 (bestimmte Integration (5))

Berechnen Sie die Werte folgender Integrale:

$$\text{a) } \int_{-\pi}^{\pi} 3x \cdot \cos(x) \, dx$$

$$\text{b) } \int_1^4 3 \cdot |x^2 - 4| \, dx$$

$$\text{c) } \int_e^{e^2} \frac{\ln(x^2)}{4x} \, dx$$



IntEinDim/Integrale/Ag_Integration_Substitution.tex

Aufgabe 68.326 (Integration per Substitution)

Verwenden Sie die Substitutionsregel, um die folgenden Stammfunktionen bzw. Integralwerte zu berechnen:

$$\text{a) } \int_{-1}^3 \frac{1}{x+2} \, dx$$

$$\text{b) } \int \frac{3x^2 - 2}{2x^3 - 4x + 2} \, dx$$

$$\text{c) } \int_{-1}^4 \sqrt{x+5} \cdot e^{\sqrt{x+5}} \, dx$$



IntEinDim/Integrale/Ag_Integration_Zerlegen2.tex

Aufgabe 68.327 (Integrale zerlegen)

Seien $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$x \mapsto f(x) := |x-1|, \quad x \mapsto g(x) := \begin{cases} 2x, & \text{für } x \geq 1 \\ x+1, & \text{für } 0 < x < 1 \\ 1, & \text{für } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad x \mapsto h(x) := |2x-4| + x.$$

Berechnen Sie die folgenden Integralwerte:

$$\text{a) } \int_{-3}^2 f(x) \, dx$$

$$\text{b) } \int_{-2}^4 g(x) \, dx$$

$$\text{c) } \int_{-1}^5 h(x) \, dx$$

Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f , g und h und markieren Sie die Fläche, die dem jeweiligen Integralwert entspricht!



IntEinDim/Integrale/Ag_Integration_bestimmteGrundintegrale_leicht.tex

Aufgabe 68.328 (bestimmte Integration (1))

Berechnen Sie die folgenden Integralwerte:

$$\text{a) } \int_1^3 2x^2 \, dx$$

$$\text{b) } \int_1^2 \frac{2}{x^3} \, dx$$

$$\text{c) } \int_2^3 (2x^4 + 4x) \, dx$$



IntEinDim/Integrale/Ag_Integration_bestimmteIntegrale2.tex

Aufgabe 68.329 (bestimmte Integration)

Berechnen Sie die folgenden Integralwerte:

$$\text{a) } \int_{-2}^3 (x^3 - 3x) \, dx$$

$$\text{c) } \int_1^2 x \cdot \exp(x) \, dx$$

$$\text{e) } \int_0^2 \frac{3}{\sqrt{5x+2}} \, dx$$

$$\text{b) } \int_0^{\frac{3\pi}{5}} 2 \cdot \sin(2x) \, dx$$

$$\text{d) } \int_1^2 \ln(x) \, dx$$

$$\text{f) } \int_{-1}^{-2} 2x^2 \cdot \exp\left(-\frac{x^3}{2}\right) \, dx$$



IntEinDim/Integrale/Ag_Integration_bestimmteIntegrale_leicht.tex

Aufgabe 68.330 (bestimmte Integration)

Berechnen Sie die folgenden Integralwerte:

a) $\int_2^4 (3x^2 - 2x) \, dx$

c) $\int_0^4 e^{-x} \, dx$

e) $\int_0^2 (4x^2 - 3x^4 + 2x) \, dx$

b) $\int_{-\pi}^{2\pi} (\sin(x) - \cos(x)) \, dx$

d) $\int_1^2 \sqrt{5x-1} \, dx$

f) $\int_1^2 (2x^2 - 5)^2 \, dx$



IntEinDim/PBZ/Ag_IntEinDim_PBZMitAnsatzImTipp.tex

Aufgabe 69.331 (Partialbruchzerlegungen zum Integrieren)

Geben Sie die folgenden Stammfunktionen an!

a) $\int \frac{-3x - 17}{x^2 + 2x - 3} dx$

b) $\int \frac{x^2 + 2x - 4}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} dx$

c) $\int \frac{2x^2 + 5x + 7}{x^3 - 3x^2 + x - 3} dx$

Tipps: Finden Sie in Aufgabenteil a) Konstanten $A \in \mathbb{R}$ und $B \in \mathbb{R}$ mit $\frac{r}{p \cdot q} = \frac{A}{p} + \frac{B}{q}$.In Aufgabenteil b) brauchen Sie $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$ und $C \in \mathbb{R}$ mit $\frac{r}{p \cdot q^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{q} + \frac{C}{q^2}$.In Aufgabenteil c) suchen Sie $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$ und $C \in \mathbb{R}$ mit $\frac{r}{p \cdot q} = \frac{A}{p} + \frac{B \cdot \text{id} + C}{q}$ und $q \neq 0$. p , q und r sind dabei Polynome, aus denen die Integranden zusammengesetzt sind.



IntEinDim/Partiell/Ag_IntEinDim_PartiiellMitUndOhneTricks.tex

Aufgabe 70.332 (partielle Integration)

Berechnen Sie die folgenden Integrale bzw. Stammfunktionen mittels partieller Integration!

a) $\int_{-1}^3 (6x^2 + 1) \cdot 2x \, dx$

d) $\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} x^3 \cdot \cos(x) \, dx$

g) $\int \frac{\sin(\ln(x))}{x^2} \, dx$

b) $\int_1^{\ln(2)} x \cdot e^x \, dx$

e) $\int \cos(x) \cdot e^x \, dx$

h) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} \, dx$

c) $\int_1^e \ln(x) \, dx$

f) $\int_{-\pi}^{\pi} (\sin(x))^2 \, dx$

i) $\int x \cdot \arcsin(x) \, dx$

Tipp: Addieren Sie in den Aufgabenteilen h) und i) im Zähler des neuen Integranden eine geschickte 0, nachdem Sie einmal partiell integriert und anschließend aufgeräumt haben!



IntEinDim/Partiell/Ag_IntEinDim_PartiiellOhneTricks.tex

Aufgabe 70.333 (partielle Integration)

Berechnen Sie folgende Integrale mit Hilfe partieller Integration:

a) $\int (x+1) \cdot e^{x+4} \, dx$

b) $\int x^2 \cdot \sin(x) \, dx$

c) $\int_1^e \sqrt{x} \cdot \ln(x) \, dx$



IntEinDim/Stammfkt/Ag_AbleitenUndIntegrieren_Einstieg.tex

Aufgabe 71.334 (Ableiten und Integrieren)

Füllen Sie die folgende Tabelle aus!

$f(x)$	$f'(x)$	$\int f(x) dx$
$x^2 + 2x^5$		
$\sin x + \cos x$		
$\cos x + \frac{2}{x} + 5$		
$\frac{3}{x^3} + 4x^{-1}$		
	$3x^4$	
	e^{2x}	
		$\arctan x + C, C \in \mathbb{R}$
		$\frac{1}{x^2} + \ln x + C, C \in \mathbb{R}$



IntEinDim/Stammfkt/Ag_IntStammFkt_WurzelEinsMinusSinus.tex

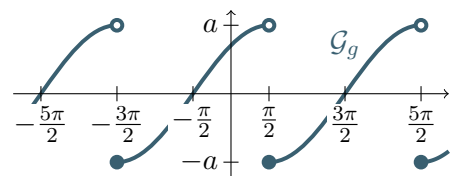
Aufgabe 71.335 (Was ist eine Stammfunktion?)

Seien $a := 2 \cdot \sqrt{2}$ und $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := \sqrt{1 - \sin(x)}$.

a) Substituieren Sie $t = \sin(x)$, um mit Hilfe des trigonometrischen Pythagoras' $\int f(x) dx$ zu berechnen!

b) Aufgabenteil a) scheint zu suggerieren, dass $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$ gilt. Warum kann das nicht sein und wie wird das Integral korrekt berechnet? Welcher Integralwert ergibt sich?

c) Rechts ist der Graph $\mathcal{G}_g$ der Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto g(x) := \begin{cases} 2 \cdot \sqrt{1 + \sin(x)}, & \text{falls } \cos(x) > 0 \\ -2 \cdot \sqrt{1 + \sin(x)}, & \text{falls } \cos(x) \leq 0 \end{cases}$ angedeutet. Warum ist g keine Stammfunktion von f ? Können Sie eine Stammfunktion von f angeben (ohne Beweis)?



IntEinDim/Stammfkt/Ag_Integrale_NachObererGrenzeAbleiten.tex

Aufgabe 71.336 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen stetig differenzierbar sind und bestimmen Sie ihre Ableitung!

a) $f : (0; 1) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := \int_0^x e^{\frac{t^2 - \arcsin(t)}{\ln(t+2)}} \cdot \sqrt{t^2 + 2} \, dt$

b) $g : (-1; 1) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto g(x) := \int_x^0 \operatorname{artanh}\left(\frac{y + \sin(y)}{2}\right) \cdot 3^{2y^2+1} \, dy$

c) $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto u(t) := \int_0^{t^2+t} \sin(z) \cdot \cosh(\arctan(z^2 + 2)) \, dz$

d) $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto v(t) := \int_{-e^t}^{\ln(1+t^2)} \left(\sqrt{3s^2 - 4s + 2} \cdot e^{\frac{1}{2}s^2} + 3 \cos(s^2) \right) \, ds$



IntEinDim/Stammfkt/Ag_Integration_EinstiegMitAbleitungen.tex

Aufgabe 71.337 (Ableiten rückwärts)

Bestimmen Sie die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, falls dessen Ableitung $f'(x)$ und der Wert in einem Punkt bekannt sind!

a) $D = \mathbb{R}$, $f'(x) = 4x^3 + 2x$, $f(1) = 2$

d) $D = \mathbb{R}$, $f'(x) = \cos(2x + \pi)$, $f(\pi) = 1$

b) $D = \mathbb{R}$, $f'(x) = \cos(x)$, $f(\pi) = 1$

e) $D = \mathbb{R}$, $f'(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$, $f(\frac{\pi}{2}) = 1$

c) $D = [-1, \infty)$, $f'(x) = \sqrt{x+1}$, $f(0) = 1$

f) $D = (0, \infty)$, $f'(x) = 2x \cdot \ln(x) + x$, $f(1) = 1$



IntEinDim/Stammfkt/Ag_Integration_Grundintegrale.tex

Aufgabe 71.338 (elementare Stammfunktionen)

Bestimmen Sie die folgenden Stammfunktionen:

a) $\int x^4 \, dx$

d) $\int \frac{2}{x} \, dx$

g) $\int 2 \cdot \sin(x) \, dx$

b) $\int (x^2 + 3x^3) \, dx$

e) $\int \frac{5}{x^2} \, dx$

h) $\int (x + \sin(x) - e^x) \, dx$

c) $\int (\sqrt[3]{8x} + 7) \, dx$

f) $\int \frac{3}{2 + 2x^2} \, dx$

i) $\int (4 + 4 \cdot (\tan(x))^2) \, dx$



IntEinDim/Stammfkt/Ag_Integration_Stammfunktionen1.tex

Aufgabe 71.339 (Stammfunktionen (1))

Bestimmen Sie die nachstehenden Stammfunktionen:

a) $\int \frac{\ln(x)}{x} \, dx$

b) $\int \arctan(x) \, dx$

c) $\int \frac{x+2}{x+3} \, dx$



IntEinDim/Stammfkt/Ag_Integration_Stammfunktionen2.tex

Aufgabe 71.340 (Stammfunktionen (2))

Bestimmen Sie die nachstehenden Stammfunktionen:

a) $\int 2x \cdot (6x^3 + 1) \, dx$

b) $\int (\cos(x))^2 \, dx$

c) $\int x \cdot (x^2 - 2)^5 \, dx$



IntEinDim/Stammfkt/Ag_Integration_Substitution_leicht.tex

Aufgabe 71.341 (Substitutionsregel)

Ermitteln Sie folgende Stammfunktionen mit Hilfe der Substitutionsregel:

a) $\int \sin(2x - 5) \, dx$ b) $\int \sqrt[4]{2x + 2} \, dx$ c) $\int 2x \cdot \sin(x^2) \, dx$ d) $\int \frac{x^2}{5x^3 - 4} \, dx$



IntEinDim/SubstRegel/Ag_IntEinDim_SubstRegelOhneTricks.tex

Aufgabe 72.342 (Substitutionsregel)

Berechnen Sie die folgenden Integrale bzw. Stammfunktionen mit Hilfe der Substitutionsregel!

a) $\int_0^2 x \cdot (x^2 - 2)^5 dx$ c) $\int_{-1}^3 \frac{2^x}{2^x + 2} dx$ e) $\int \frac{3x^2 - 2}{2x^3 - 4x + 2} dx$ g) $\int \tan(x) dx$

b) $\int_{-1}^4 \sqrt{x+5} dx$ d) $\int \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3} dx$ f) $\int_0^{\sqrt[3]{2}} \frac{x^2}{3} \cdot e^{x^3-2} dx$ h) $\int \frac{\cos(\ln(x))}{x} dx$

Aufgabenblatt 73

IntEinDim/Uneigentlich



IntEinDim/Uneigentlich/Ag_IntEinDimUneig_CauchyHW.tex

Aufgabe 73.343 (Cauchy'scher Hauptwert)

Prüfen Sie zu den folgenden Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto f(t)$ jeweils, ob das uneigentliche Integral $I := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$ und der Cauchy'sche Hauptwert $C := \text{CH-} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-x}^x f(t) dt$ existieren!

- | | | |
|----------------------|---|--|
| a) $f(t) := \sin(t)$ | c) $f(t) := t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$ | e) $f(t) := \frac{\ln(\arctan(t) + \frac{\pi}{2})}{1+t^2}$ |
| b) $f(t) := \cos(t)$ | d) $f(t) := t \cdot e^{\frac{t^2}{2}}$ | f) $f(t) := \cos(t) \cdot e^{-t}$ |



IntEinDim/Uneigentlich/Ag_IntegraleUneigentlich_MajMinKriterium.tex

Aufgabe 73.344 (Majoranten- und Minorantenkriterium)

Entscheiden Sie, ob diese Integrale konvergieren:

- | | | |
|---|--|--|
| a) $\int_1^{\infty} \frac{(\cos(\varphi))^2}{1+\varphi^2} d\varphi$ | c) $\int_1^{\infty} \frac{1}{u+e^{2u}} du$ | e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t \cdot \sin(t)} dt$ |
| b) $\int_1^{\infty} \frac{2+e^{-x}}{x} dx$ | d) $\int_1^{\infty} \frac{r}{\sqrt{1+r^6}} dr$ | f) $\int_0^1 \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} dz$ |



IntEinDim/Uneigentlich/Ag_IntegraleUneigentlich_vermischt.tex

Aufgabe 73.345 (Uneigentliche Integrale)

Geben Sie bitte an, warum folgende Integrale uneigentlich sind und bestimmen Sie den Integralwert, falls dieser existiert.

- | | | |
|---|--------------------------------------|---|
| a) $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$ | c) $\int_0^1 \frac{x}{x-1} dx$ | e) $\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ |
| b) $\int_1^2 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx$ | d) $\int_2^1 \frac{x^2+1}{x^2-1} dx$ | |



IntEinDim/Uneigentlich/Ag_IntegraleUneigentlich_vieleUneigentlicheIntegrale.tex

Aufgabe 73.346 (viele uneigentliche Integrale)

Prüfen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren und geben Sie gegebenenfalls ihren Wert an!

- | | | | |
|---------------------------------------|---|--|---|
| a) $\int_0^2 \frac{1}{x^2} dx$ | d) $\int_1^{\infty} \frac{1}{y} dy$ | g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan(\varphi)} d\varphi$ | j) $\int_0^{\infty} \ell^5 \cdot e^{-\ell^2} d\ell$ |
| b) $\int_0^2 \frac{1}{y} dy$ | e) $\int_{2\pi}^{\infty} q \cdot \sin(q) dq$ | h) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-u^2}} du$ | k) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh(z)} dz$ |
| c) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ | f) $\int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2} dt$ | i) $\int_1^{\infty} \frac{1}{\mu \cdot (\mu+4)} d\mu$ | l) $\int_1^e \frac{1}{s \cdot \sqrt[3]{\ln(s)}} ds$ |

Tipp: Klammern Sie in Aufgabenteil k) e^{-z} im Nenner aus und substituieren Sie danach geschickt!



IntEinDim/Uneigentlich/Ag_Orthogonal_HermitePolynome.tex

Aufgabe 73.347 (Orthogonalität der Hermite-Polynome nachrechnen)

Die Hermite-Polynome $H_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sind unter anderem in der Physik von Bedeutung. Es gilt

$$\langle H_n(x), H_m(x) \rangle = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nm}$$

mit dem uneigentlichen Integral (L^2 -Skalarprodukt)

$$\langle H_n(x), H_m(x) \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx \quad \text{und} \quad \delta_{nm} := \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}.$$

Überprüfen Sie dies durch Berechnung der Integrale für $n = m = 0$, $n = 0$ und $m = 1$ sowie $n = m = 1$ mit $H_0(x) = 1$ und $H_1(x) = 2x$. Verwenden Sie dabei $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.



IntEinDim/Vermischt/Ag_IntEinDim_EinBetragDreiSubstRegelEinePIEineWahlbarZweiBeides.tex

Aufgabe 74.348 (Vermischte Integrale)

Berechnen Sie die folgenden Integrale und Stammfunktionen!

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \int_{-2}^2 |t-1| dt & \text{c)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2} \cdot \sin(2t) dt & \text{e)} \int \frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}} dt & \text{g)} \int t \cdot e^{2t^2} \cdot \sin(e^{t^2}) dt \\ \text{b)} \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t} \cdot (1+\sqrt{t})} dt & \text{d)} \int_1^e \frac{1}{t \cdot (1+\ln(t))} dt & \text{f)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \cdot \cos(t) dt & \text{h)} \int \cos(\sqrt{t}) dt \end{array}$$



IntEinDim/Vermischt/Ag_IntEinDim_KosinusHochDreiPartiellUndSubst.tex

Aufgabe 74.349 (Integral auf verschiedenen Wegen berechnen)

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := (\cos(x))^3$.

- Finden Sie eine Stammfunktion von f mittels partieller Integration!
- Finden Sie eine Stammfunktion von f mit Hilfe der Substitutionsregel!

Tipp: Verwenden Sie den trigonometrischen Pythagoras!



IntEinDim/Vermischt/Ag_IntEinDim_KosinuspotenzenImNenner.tex

Aufgabe 74.350 (Negative Potenzen des Kosinus integrieren)

In dieser Aufgabe wollen wir Stammfunktionen der Funktionen $f_n: \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \in \mathbb{R} : k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f_n(x) := \frac{1}{(\cos(x))^n}$ und $n \in \mathbb{N}$ berechnen.

- Finden Sie ein $A \in \mathbb{R}$ und ein $B \in \mathbb{R}$ mit $\frac{1}{t^2-1} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1}$ für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$!
- Macht man im Fall $n = 1$ die Substitution $t = \sin(x)$, so erhält man mit Aufgabenteil a) eine Stammfunktion von f_1 . Geben Sie eine Stammfunktion von f_1 an!
- Um uns auf den Fall $n = 3$ vorzubereiten, suchen wir zunächst eine Stammfunktion der Funktion $g: \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \in \mathbb{R} : k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto g(x) := \frac{\sin(x)}{(\cos(x))^3}$.

Integrieren Sie g mit Hilfe der Substitution $y = (\cos(x))^2$!

Bemerkung: Wenn Sie wollen, können Sie im Anschluss auch die Substitution $z = \cos(x)$ versuchen.

- Verwenden Sie im Fall $n = 3$ zunächst im Zähler den trigonometrischen Pythagoras, um unter Verwendung der partiellen Integration mit der Funktion aus Aufgabenteil c) und mit Hilfe des Falls $n = 1$ eine Stammfunktion von f_3 zu finden!
- Für die geraden Potenzen $n = 2$ und $n = 4$ findet man „leicht“ Stammfunktionen, wobei man für $n = 4$ partiell integriert. Geben Sie Stammfunktionen von f_2 und f_4 an!
- Zeigen Sie folgende für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1; 2\}$ gültige Rekursionsformel:

$$\int f_n(x) dx = \frac{\sin(x)}{(n-1) \cdot (\cos(x))^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1} \cdot \int f_{n-2}(x) dx$$



IntEinDim/Vermischt/Ag_Integrale_vermischt.tex

Aufgabe 74.351 (Vermischte Integrale)

Berechnen Sie die Integrale.

$$\begin{array}{llll}
 \text{a)} \int_{-2}^2 |t-1| \, dt & \text{c)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2} \cdot \sin(2t) \, dt & \text{e)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \cdot \cos(t) \, dt & \text{g)} \int \frac{\cos(\sqrt{t})}{2} \, dt \\
 \text{b)} \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t} \cdot (1 + \sqrt{t})} \, dt & \text{d)} \int_1^e \frac{1}{t \cdot (1 + \ln(t))} \, dt & \text{f)} \int \frac{1}{t^2 + t^4} \, dt & \text{h)} \int \frac{t^2 + 1}{t^2 - 4} \, dt
 \end{array}$$



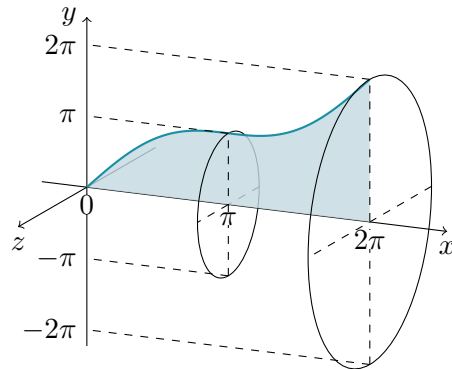
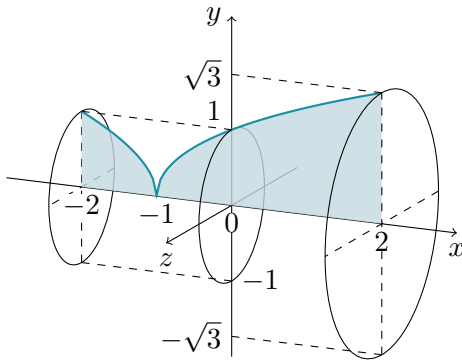
IntMehrDim/CavalieriRotation/Ag_Anwendung_Rotationsvolumen_mit_Funktion.tex

Aufgabe 75.352 (Volumen von Rotationskörpern)

Die folgenden Rotationskörper entstehen durch Rotation der Fläche unterhalb des Graphen der Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x)$ um die x -Achse. Berechnen Sie das Volumen V dieser Rotationskörper!

a) $f(x) := \sqrt{|x+1|}$, $D := [-2; 2]$

b) $f(x) := x + \sin(x)$, $D := [0; 2\pi]$



IntMehrDim/CavalieriRotation/Ag_Cavalieri_KugelOhneZylinder1.tex

Aufgabe 75.353 (HM III - Klausur April 2021 (Aufgabe 2))

Es sei

$$N := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_2 \leq \sqrt{2}, x \geq 1 \right\}.$$

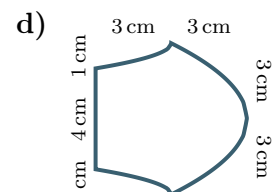
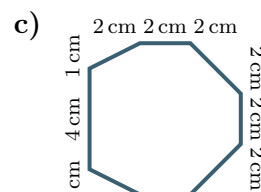
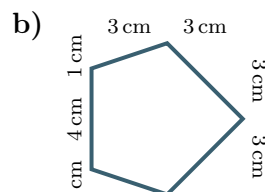
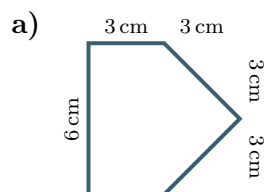
- Stellen Sie N als Normalbereich bezüglich der y -Achse dar.
- Bestimmen Sie den Flächeninhalt $F(N)$ von N .
- Es sei L der Körper, der sich bei der Rotation von N um die y -Achse ergibt. Bestimmen Sie das Volumen $V(L)$ von L .



IntMehrDim/CavalieriRotation/Ag_RotInt_Gardinenstangenenden.tex

Aufgabe 75.354 (Enden von Gardinenstangen)

Eine Firma plant, Enden von Gardinenstangen herzustellen. Die gedrechselten Enden sollen die in den Aufgabenteilen angezeigten Querschnitte bekommen. Die gebogenen Begrenzungslinien in Aufgabenteil d) sind dabei alle Parabel-förmig mit Scheitel. Berechnen Sie jeweils das Volumen der Enden!



IntMehrDim/CavalieriRotation/Ag_RotInt_SektglasUndEichstrich.tex

Aufgabe 75.355 (Sektglas eichen)

Das Innere eines Sektglases ist wie ein Paraboloid geformt. Die Randkurve des Paraboloids ist symmetrisch zur vertikalen Achse und geht durch die Punkte $(0, 12 \text{ cm})^T$ und $(3 \text{ cm}, 24 \text{ cm})^T$. Das Glas ist insgesamt 24 cm hoch.

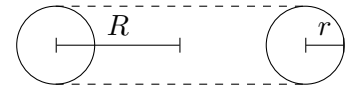
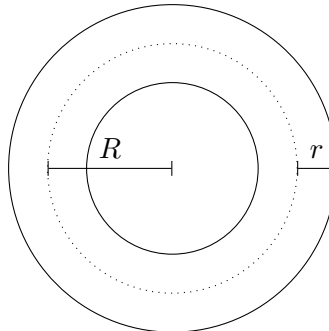
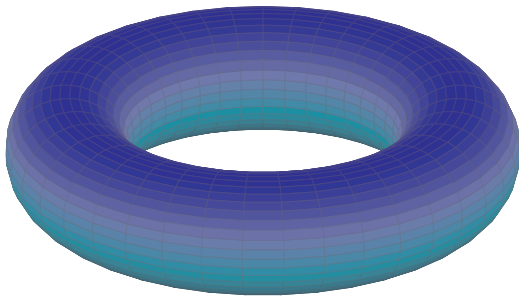
- Geben Sie die Funktionsgleichung der Randkurve an!
- Bestimmen Sie die Füllmenge des Glases!
- In welcher Höhe müssen Sie den Eichstrich für 0.1 Liter anbringen?



IntMehrDim/CavalieriRotation/Ag_RotInt_TorusVolumen.tex

Aufgabe 75.356 (Volumen eines Torus)

Berechnen Sie das Volumen eines Torus'!



Ganz links sehen Sie die 3D-Darstellung, rechts davon die Draufsicht und oben den Querschnitt eines Torus'.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\int 2 \cdot \sqrt{a - t^2} dt = t \cdot \sqrt{a - t^2} + a \cdot \arcsin\left(\frac{t}{\sqrt{a}}\right)$ für alle $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und alle $t \in \mathbb{R}$ mit $-\sqrt{a} \leq t \leq \sqrt{a}$ gilt.



IntMehrDim/CavalieriRotation/Text_IntMehrDim_ZylinderZentriertAusHalbkugelAusstanzen.txt

Aufgabe 75.357 ()

IntMehrDim/StandardSub/Ag_IntMehrDim_ZylinderZentriertAusHalbkugelAusstanzen kann auch mit Hilfe des Prinzips von Cavalieri gelöst werden.

Aufgabenblatt 76

IntMehrDim/Intervalle



IntMehrDim/Intervalle/Ag_IntMehrDim_Fubini2DohneHuerdenNachStewCalc.tex

Aufgabe 76.358 (Satz von Fubini)

Berechnen Sie für $B := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ und } -3 \leq y \leq 3\}$
und $\Omega := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0; \frac{\pi}{2}] \text{ und } y \in [0; \frac{\pi}{3}]\}$ die folgenden Integrale!

a) $\int_B \frac{xy^2}{x^2 + 1} d(x, y)$ b) $\int_\Omega x \cdot \sin(x + y) d(x, y)$



IntMehrDim/Intervalle/Ag_IntMehrDim_Fubini3DohneHuerdenNachArensHettlich.tex

Aufgabe 76.359 (Integrale über Quader)

Berechnen Sie die Volumenintegrale $\int_B f(x, y, z) d(x, y, z)$ für die angegebenen Mengen $B \subseteq \mathbb{R}^3$ und Funktionen $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ als iterierte Integrale.

a) $f(x, y, z) = \frac{x \cdot (x + z)}{1 + y^2}, \quad B = [0; 1]^3$ c) $f(x, y, z) = \frac{xz}{(x^2 + y^2)^2}, \quad B = \left[\frac{\sqrt{3}}{3}; 1\right] \times [0; 1]^2$
b) $f(x, y, z) = \frac{\sin(x + z)}{y + 2}, \quad B = \left[-\frac{\pi}{4}; 0\right] \times [0; 2] \times \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ d) $f(x, y, z) = \frac{\sinh(xz)}{y^2 + 1}, \quad B = [\ln(2); 1] \times [0; \sqrt{3}] \times [-1; 1]$



IntMehrDim/Intervalle/Ag_IntMehrDim_Fubini3DReihenfolgeVonUnwichtigNachWichtig.tex

Aufgabe 76.360 (Integrale über Quader)

Berechnen Sie die folgenden Volumenintegrale als iterierte Integrale!

a) $\int_{[0; 2] \times [-1; 1] \times [1; 3]} \frac{x \cdot (x^2 + y)}{z^3} d(x, y, z)$ c) $\int_{[0; \frac{\pi}{12}] \times [0; \sqrt{3}] \times [0; 2]} \frac{xz^2 \cdot \cos(xz^3)}{1 + y^2} d(x, y, z)$
b) $\int_{[0; 1]^3} \frac{x \cdot (y + z)}{1 + y + y^2} d(x, y, z)$ d) $\int_{[1; 2]^2 \times [0; 1]} \frac{xy^2}{\sqrt{yx^2 + z}} d(x, y, z)$



IntMehrDim/Intervalle/Ag_IntMehrDim_FubiniGegenbeispielSubstBetragsQuadrat.tex

Aufgabe 76.361 (Integrationsreihenfolge bei iterierten Integralen)

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy \cdot (x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3}, & \text{falls } x \neq 0 \text{ oder } y \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = y = 0. \end{cases}$$

- a) Berechnen Sie die beiden iterierten Integrale $\int_0^2 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx$ und $\int_0^1 \left(\int_0^2 f(x, y) dx \right) dy$
unter Verwendung der Substitution $u = x^2 + y^2$.
b) Wieso erhalten Sie unterschiedliche Ergebnisse für die beiden iterierten Integrale?



IntMehrDim/Intervalle/Ag_IntMehrDim_IterierteIntegrale2DohneHuerdenNachStewCalc.tex

Aufgabe 76.362 (Iterierte zweidimensionale Integrale)

Berechnen Sie die folgenden Integrale!

$$\text{a) } \int_1^3 \left(\int_0^1 (1 + 4xy) \, dx \right) dy \quad \text{b) } \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin(y) \, dy \right) dx \quad \text{c) } \int_0^1 \left(\int_1^2 \frac{x \cdot e^x}{y} \, dy \right) dx$$



IntMehrDim/Intervalle/Ag_IntMehrDim_IteriertesIntegral4D0hneHuerden.tex

Aufgabe 76.363 (Iteriertes vierdimensionales Integral)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-1}^1 \left(\int_0^2 \left(\int_{-1}^2 \left(\int_1^2 -\frac{x \cdot (w^2 \cdot x + y)}{(1+z)^2} \, dz \right) dy \right) dx \right) dw$$

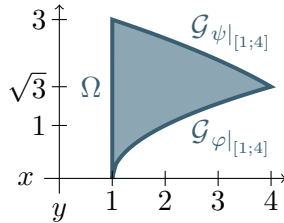


IntMehrDim/Normalbereiche/Ag_IntMehrDim_NB2DFahneDreieckFaecher.tex

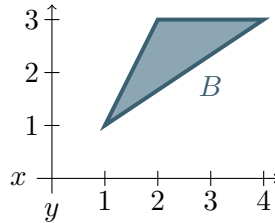
Aufgabe 77.364 (Normalbereichsintegrale in der Ebene)

Seien $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto \varphi(t) := \sqrt{|t-1|}$, $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto \psi(t) := \sqrt{|11-2t|}$, $a := 3 - \sqrt{3}$ und $\mathbb{R}_+ := \{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\}$. Überlegen Sie, bezüglich welcher Achsen die skizzierten Mengen Normalbereiche sind und integrieren Sie die angegebenen Funktionen über die Mengen!

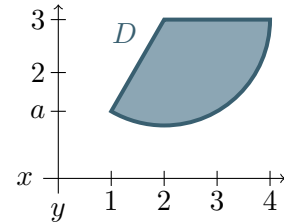
a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto$
 $f(x, y) := xy\pi^4 \cdot \sin(\pi y^2)$



b) $g: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto$
 $g(x, y) := \left(\frac{6x}{y}\right)^2$



c) $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto$
 $h(x, y) := 5x^2 \cdot (y-3)$



IntMehrDim/Normalbereiche/Ag_IntMehrDim_NB3DNachStewartCalculus.tex

Aufgabe 77.365 (Integrale über 3-dimensionale Normalbereiche)

Berechnen Sie die Volumenintegrale $\int_B f(x, y, z) d(x, y, z)$ für die angegebenen Mengen $B \subseteq \mathbb{R}^3$ und Funktionen $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y, z)^T \mapsto f(x, y, z)$ als iterierte Integrale.

a) $f(x, y, z) := z$, $B = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \min\{x; y; z\} \text{ und } x + y + z \leq 1\}$

Tipp: B ist die durch die Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und $x + y + z = 1$ begrenzte Pyramide.

b) $f(x, y, z) := z \cdot \sqrt{x^2 + z^2}$, $B = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \leq y \leq 4 \text{ und } z \geq 0\}$

Tipp: B ist ein halbes um die y -Achse drehendes und durch die Ebene $y = 4$ begrenztes Rotationsparaboloid. Wählen Sie als Integrationsreihenfolge (von innen nach außen) $z \rightarrow y \rightarrow x$.

c) $f(x, y, z) := y^{-1} \cdot \exp\left(\frac{z}{y}\right)$, $B = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < y \leq 1, y \leq x \leq 1 \text{ und } 0 \leq z \leq xy\}$

d) $f(x, y, z) := z^3 + \sin(y) + 3x$, $B = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$



IntMehrDim/Normalbereiche/Ag_IntMehrDim_NB3NurRechnenOhneSkizze.tex

Aufgabe 77.366 (Integrale über 3-dimensionale Normalbereiche)

Berechnen Sie die folgenden Volumenintegrale!

a) $\int_B z d(x, y, z)$ mit $B := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 1, y \geq 2, x \cdot y \leq 6 \text{ und } 0 \leq x \cdot z \leq y\}$

b) $\int_B \sin(z + y^2) \cdot x d(x, y, z)$ mit $B := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq \frac{\pi}{2}, y^2 \leq z \text{ und } 0 \leq x \leq \sqrt{|zy|}\}$

c) $\int_B yz^2 d(x, y, z)$ mit $B := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \min(\{y; z\}) \text{ und } y + z \leq 2 - |x|\}$

Tipp: Eventuell können Sie $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \varphi_x := 2 - |x|$ als Abkürzung verwenden.



IntMehrDim/Normalbereiche/Ag_IntMehrDim_NBERkennenUndFlaecheninhaltBerechnen.tex

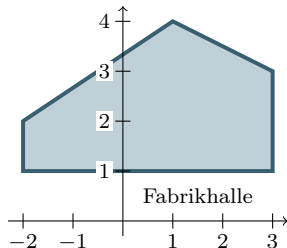
Aufgabe 77.367 (Normalbereiche erkennen)

Welche der folgenden Mengen B stellen einen Normalbereich bezüglich der x - bzw. y - bzw. ggf. z -Achse dar? Schreiben Sie die Mengen in der entsprechenden Form!

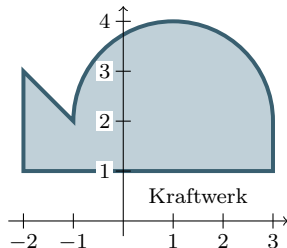
Berechnen Sie außerdem jeweils den Flächeninhalt bzw. das Volumen $\int_B 1 \, d\vec{r}$ der Figur!

Tip: Eine Stammfunktion zu $\sqrt{a^2 - (t-b)^2}$ ergibt sich mit der Substitution $s = t - b$, partieller Integration mit dem Faktor 1, Addieren von $a^2 - a^2$, der Substitution $u = \frac{s}{|a|}$ und Integralgleichungsumstellung zu $\int \sqrt{a^2 - (t-b)^2} \, dt = \frac{1}{2} \cdot \left(a^2 \cdot \arcsin\left(\frac{t-b}{|a|}\right) + (t-b) \cdot \sqrt{a^2 - (t-b)^2} \right)$. Sie dürfen diese Aussage ohne Beweis verwenden.

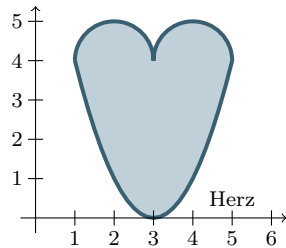
a)



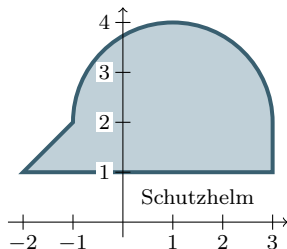
c)



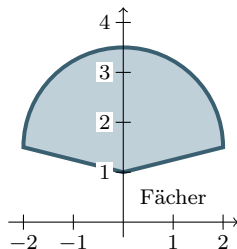
e)



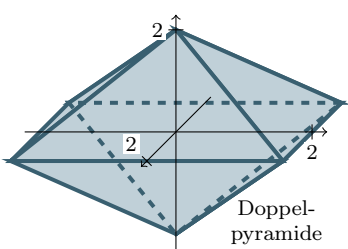
b)



d)



f)



IntMehrDim/Normalbereiche/Ag_IntMehrDim_NBIntegrationsReihenfolgeTauschen.tex

Aufgabe 77.368 (Integrationsreihenfolge vertauschen)

Für eine auf dem angegebenen Integrationsgebiet B stetige Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto f(x, y)$ und $B \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^2$ sei ein Doppelintegral gegeben in der Form

$$I_f := \int_0^3 \left(\int_{x^2}^9 f(x, y) \, dy \right) dx.$$

- Vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge, also finden Sie $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ sowie $g: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $h: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $y \mapsto g(y)$, $y \mapsto h(y)$ und $g(y) \leq h(y)$ für alle $y \in [a; b]$, so dass $I_f = \int_a^b \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) \, dx \right) dy$ gilt!
- Testen Sie ihre Umparametrisierung aus Aufgabenteil a), indem Sie I_1 für $\mathbf{1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto \mathbf{1}(x, y) := 1$ über beide Parametrisierungen berechnen und die Ergebnisse vergleichen!
- Berechnen Sie I_φ für $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto \varphi(x, y) := x \cdot e^{-y^2}$!



IntMehrDim/Normalbereiche/Ag_IntegralrechnungImRn_Normalbereiche2D_mittel.tex

Aufgabe 77.369 (Integrale über 2-dimensionale Normalbereiche)

Skizzieren Sie nachfolgend jeweils den (Normal-)Bereich B und berechnen Sie das Integral $\int_B f(x, y) \, d(x, y)$ mit $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ und $(x, y)^T \mapsto f(x, y)$ als iterierte Integrale.

- a) $f(x, y) := x^4 y + 3$, $B = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1 \text{ und } x^2 \leq y \leq 1\}$
- b) $f(x, y) := 5 - x^2 - y^2$, $B = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$
- c) $f(x, y) := x^2 - y^2$, wobei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ die Menge zwischen den Graphen der Funktionen $x \mapsto x^2$ und $x \mapsto x^3$ ist (die x -Koordinate variiert zwischen den Schnittstellen der beiden Funktionen)
- d) $f(x, y) := y^{-1} \cdot \sin(y)$, $B = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < y \leq \frac{\pi}{2}\}$



IntMehrDim/Normalbereiche/Ag_IntegrationMehrdimensional_Normalbereiche_Teil.tex

Aufgabe 77.370 (Integration in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$)

Berechnen Sie die Integralwerte

- a) $\int_0^1 \int_0^{x^2} (x + 2y) dy dx$
- b) $\int_0^1 \int_0^v \sqrt{1 - v^2} du dv$
- c) $\int_0^1 \int_0^z \int_0^{x+z} (6xz) dy dx dz$
- d) $\int_0^3 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} z \cdot e^y dx dz dy$
- e) $\int_0^1 \int_x^{2x} \int_0^y (2xyz) dz dy dx$

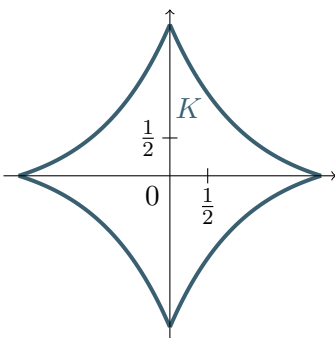
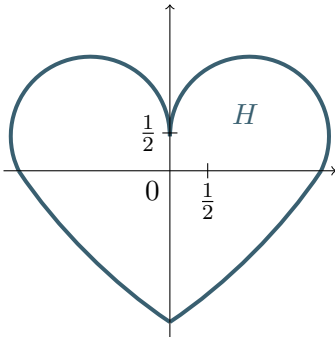
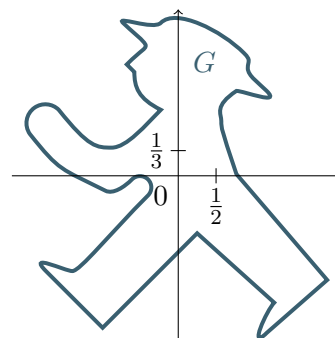
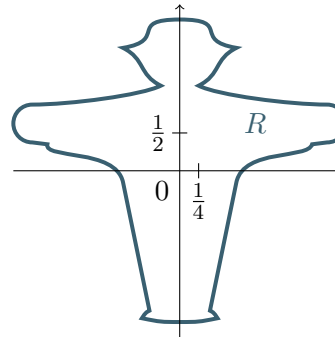
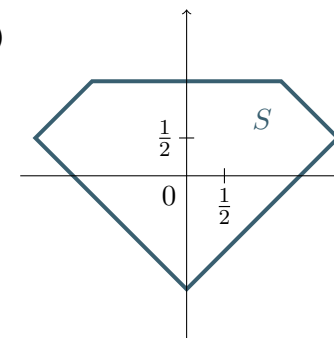
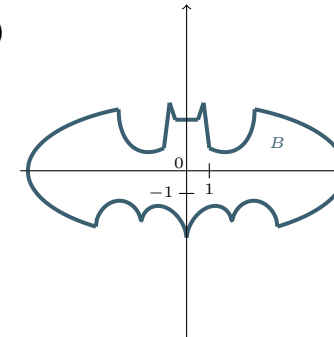


IntMehrDim/Normalbereiche/Ag_Mengen_NB0derNichtKartenAmpelHelden.tex

Aufgabe 77.371 (Normalbereich oder nicht)

Geben Sie an, welche der folgenden Mengen einen Normalbereich bezüglich der entsprechenden Achsen darstellt! (h für „horizontale Achse“, v für „vertikale Achse“, k für „keine der beiden Achsen“)

Die Mengen sind jeweils das Innere der gezeichneten Berandung inklusive des Rands.

- a) 
☐ h ☐ v ☐ k
- b) 
☐ h ☐ v ☐ k
- c) 
☐ h ☐ v ☐ k
- d) 
☐ h ☐ v ☐ k
- e) 
☐ h ☐ v ☐ k
- f) 
☐ h ☐ v ☐ k

Die Schnittpunkte mit der horizontalen Achse liegen in Aufgabenteil e) bei $-\frac{3}{2}$ und $\frac{3}{2}$, die mit der vertikalen Achse bei $-\frac{3}{2}$ und $\frac{5}{4}$. Drei der fünf Innenwinkel haben ein Bogenmaß von $\frac{\pi}{2}$.

Geben Sie die Menge S in Normalbereichsnotation bezüglich der Achse(n) an, bezüglich derer es sich um einen Normalbereich handelt!

**Aufgabe 77.372** (Vollständige Induktion mit Integration über einen Normalbereich)

Seien $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$ mit $a \leq 0 \leq b$, $D := [a; b]$, $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto g(t)$ eine integrierbare Funktion, $f_0: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f_0(x) := \int_0^x g(t) dt$ und $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f_n(x) := \int_0^x f_{n-1}(t) dt$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

$$f_n(x) = \frac{1}{n!} \cdot \int_0^x g(t) \cdot (x-t)^n dt \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 \text{ und alle } x \in D \quad !$$



IntMehrDim/StandardSub/Ag_IntMehrDim_3ZylKoord2KugelKoordKoerpernamenInAgText.tex

Aufgabe 78.373 (Integration in Zylinder- und Kugelkoordinaten)

Berechnen Sie die folgenden Integrale über einen schrägen Halbzylinderstumpf, eine Viertelkugelschale, einen Halbzylinderring, einen Zylinder mit Paraboloid-Ausschnitt und eine Halbkugel!

- a) $\int_{\Omega} xz \, d(x, y, z)$ mit $\Omega := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 16 + 6y \text{ und } 0 \leq x \leq z \leq 6\}$
Tipp: Hilft Ihnen eine quadratische Ergänzung und der trigonometrische Pythagoras?
- b) $\int_{\Omega} \frac{2xy}{x^2 + y^2} \, d(x, y, z)$ mit $\Omega := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16 \text{ und } \min\{x; y\} \geq 0\}$
- c) $\int_{\Omega} yz \cdot e^{xz} \, d(x, y, z)$ mit $\Omega := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 2 \leq e^{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 4, y \geq 0 \text{ und } -2 \leq z \leq 3\}$
- d) $\int_{\Omega} \frac{x + |y|}{z^2} \, d(x, y, z)$ mit $\Omega := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq z \leq 1 + x^2 + y^2 \leq 4\}$
Tipp: Für alle $w \in \mathbb{R}$ ist $\frac{w^2}{1+w^2} = \frac{1+w^2-1}{1+w^2}$.
- e) $\int_{\Omega} z \cdot \sin(\sqrt{x^2 + y^2}) \, d(x, y, z)$ mit $\Omega := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq \pi^2 \text{ und } z \geq 0\}$



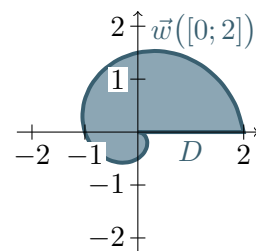
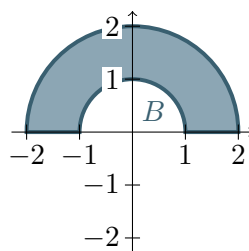
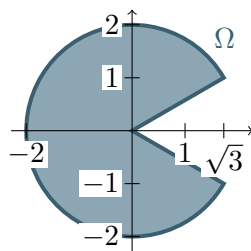
IntMehrDim/StandardSub/Ag_IntMehrDim_PolarKoordPacmanRegenbogenArchSpirale.tex

Aufgabe 78.374 (Integration in Polarkoordinaten)

Sei $\vec{w}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $t \mapsto \vec{w}(t) := \begin{pmatrix} t \cdot \cos(\pi t) \\ -t \cdot \sin(\pi t) \end{pmatrix}$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ folgt dann $\vec{w}(t) = \begin{pmatrix} t \cdot \cos(2\pi - \pi t) \\ t \cdot \sin(2\pi - \pi t) \end{pmatrix}$.

Sei $\mathbb{R}_0^2 := \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$. Berechnen Sie die Integrale der gegebenen Funktionen über die skizzierten Mengen!

- a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto f(x, y) := 3x + y$
- b) $g: \mathbb{R}_0^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto g(x, y) := \left(\frac{8xy}{x^2+y^2}\right)^2$
- c) $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^T \mapsto h(x, y) := \pi x$



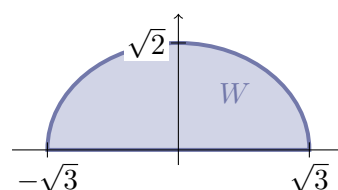
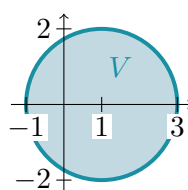
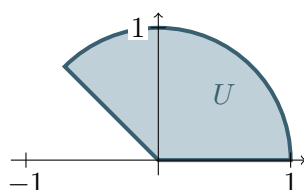
Tipp zu Aufgabenteil b): Verwenden Sie das Additionstheorem für doppelte Winkel im Sinus!



IntMehrDim/StandardSub/Ag_IntMehrDim_PolarkoordOderNB.tex

Aufgabe 78.375 (Integration in Polarkoordinaten)

Die folgenden Mengen sind Normalbereiche bezüglich beider Koordinatenachsen:



Berechnen Sie die folgenden Integrale möglichst geschickt!

- a) $\int_U (x^3 + xy^2) d(x, y)$ c) $\int_V x^3 d(x, y)$ e) $\int_W \frac{y}{1+x^2} d(x, y)$
- b) $\int_U x \cdot e^{\sqrt{2} \cdot y} d(x, y)$ d) $\int_V (y^3 \cdot \sin(x)) d(x, y)$ *Hinweis:* Funktionaldeterminante Ellipse: *abr*



IntMehrDim/StandardSub/Ag_IntMehrDim_Polarkoordinaten.tex

Aufgabe 78.376 (WiWi-HM III - Klausur Februar 2013 (Aufgabe 1, Teil 1))

- a) Geben Sie die Polarkoordinatendarstellung der „Kurvengleichung“

$$(x^2 + y^2)^2 = 2 \cdot x^2 + y^2, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

an.

- b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Menge

$$M := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 \leq 2 \cdot x^2 + y^2 \text{ und } x^2 + y^2 \geq 1 \text{ und } x, y \geq 0 \right\}.$$

Hinweis: Es gilt:

$$\int 2 \cdot \cos^2(t) dt = \cos(t) \cdot \sin(t) + t + \text{const.}, \quad t \in \mathbb{R}.$$



IntMehrDim/StandardSub/Ag_IntMehrDim_Substitution3D.tex

Aufgabe 78.377 (Substitution in $\mathbb{R}^3$)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

- a) $\int_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} d(x, y, z), \Omega := \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 16 \text{ und } -5 \leq z \leq 4 \right\}$
- b) $\int_{\Omega} e^z d(x, y, z), \Omega$ liegt zwischen den Flächen $\left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 + x^2 + y^2 \right\},$
 $\left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 5 \right\}$ und der xy -Ebene.
- c) $\int_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) d(x, y, z), \Omega$ ist die Einheitskugel $\left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \right\}.$
- d) $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 (xz) dz dx dy.$ *Hinweis:* Zylindrische Koordinaten.
- e) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} (xy) dz dy dx.$ *Hinweis:* Kugelkoordinaten.
- f) $\int_{\Omega} x^2 \cdot y d(x, y, z), \Omega$ liegt innerhalb des Ellipsoids $\left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}.$

Hinweis: Sie können zunächst die Substitution $x = |a|u, y = |b|v, z = |c|w$ verwenden.



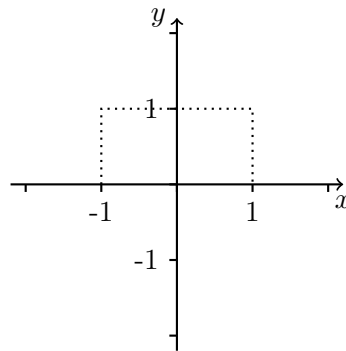
IntMehrDim/StandardSub/Ag_IntMehrDim_WiWi_HMIII_2012_April.tex

Aufgabe 78.378 (WiWi-HM III - Klausur April 2012 (Aufgabe 1))

Gegeben sei die Menge

$$A := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [0, 1], x^2 + y^2 \leq 2, y \geq |x| \right\}.$$

- a) Skizzieren Sie die Schnittmenge von A mit der xy -Ebene im gegebenen Koordinatensystem.



- b) Beschreiben Sie die Menge A mit Hilfe von Zylinderkoordinaten. Vereinfachen Sie dabei so weit wie möglich.
- c) Transformieren Sie das Integral

$$I := \int_A (x^2 + y^2) e^{(x^2+y^2)z} d(x, y, z)$$

von kartesischen Koordinaten in Zylinderkoordinaten und vereinfachen Sie den Integranden.

- d) Berechnen Sie den Wert von I . Sie können dabei eine Formel als Zwischenergebnis angeben, um bei Rechenfehlern Teilpunkte zu erhalten.



IntMehrDim/StandardSub/Ag_IntMehrDim_ZylinderZentriertAusHalbkugelAusstanzen.tex

Aufgabe 78.379 (Volumen eines Körpers, Klausuraufgabe vom Frühjahr 2013, ETIT)
Gegeben ist der Körper

$$B := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\} \cap \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \geq 1 \text{ und } z \geq 0\}.$$

Skizzieren Sie B und berechnen Sie das Volumen von B .



IntMehrDim/Substitution/Ag_InegrationMehrDim_LineareSubs.tex

Aufgabe 79.380 ((Affin-)lineare Koordinatentransformation)

Berechnen Sie das Integral $\int_B f(x, y) d(x, y)$ mit

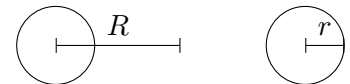
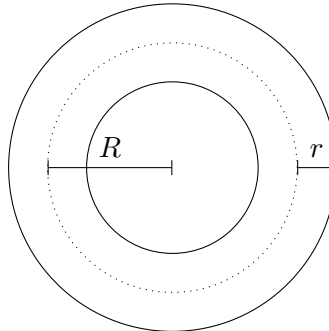
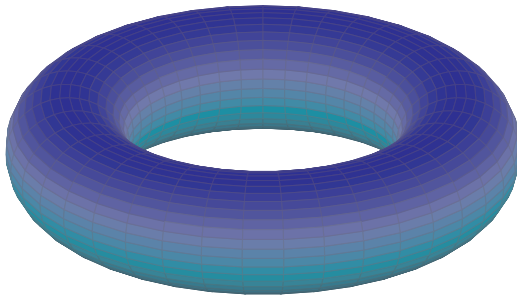
- $f(x, y) = e^x$, B ist ein Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 2)$ und $(3, 1)$.
- $f(x, y) = x \cdot y$, B ist ein Viereck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$ und $(3, 3)$.
- $f(x, y) = x - 2y$, B ist ein Dreieck mit den Eckpunkten $(-2, -1)$, $(3, 1)$ und $(-1, 2)$.
- $f(x, y) = x - y$, B ist ein Viereck mit den Eckpunkten $(-1, -1)$, $(1, 0)$, $(0, 2)$ und $(-2, 1)$.



IntMehrDim/Substitution/Ag_IntMehrDimSubst_TorusVolumen.tex

Aufgabe 79.381 (Volumen eines Torus)

Berechnen Sie das Volumen eines Torus'!



Ganz links sehen Sie die 3D-Darstellung, rechts davon die Draufsicht und oben den Querschnitt eines Torus'.

Hinweis: Der Torus mit $R \geq r > 0$ ist das Bild $f_R([0; r] \times [0; 2\pi]^2)$ der Funktion $f_R: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $(\varrho, \varphi, \psi)^T \mapsto f_R(\varrho, \varphi, \psi) := ((R + \varrho \cdot \cos(\psi)) \cdot \cos(\varphi), (R + \varrho \cdot \cos(\psi)) \cdot \sin(\varphi), \varrho \cdot \sin(\psi))^T$.



IntMehrDim/Substitution/Ag_IntegrationMehrdimensional_Substitution2D.tex

Aufgabe 79.382 (Substitution im $\mathbb{R}^2$)

Berechnen Sie die Integrale $\int_{\Omega} f(x, y) d(x, y)$ mit $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $(x, y)^T \mapsto f(x, y)$, indem Sie die angegebenen Substitutionen verwenden:

- Mit der Substitution in Polarkoordinaten: $x = r \cdot \cos(\varphi)$, $y = r \cdot \sin(\varphi)$
 - $f(x, y) := xy$, Ω ist der Kreis mit Radius 3 und Mittelpunkt $(0, 0)^T$.
 - $f(x, y) := x + y$, Ω ist der links der y -Achse liegende Teil von $\{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \in [1; 4]\}$
 - $f(x, y) := x + y$, $\Omega := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1 \text{ und } y \leq x \leq \sqrt{2 - y^2}\}$.
- $f(x, y) := x^2$, Ω ist das Innere der Ellipse $9x^2 + 4y^2 = 36$. Substitution: $x = 2u$, $y = 3v$.
- $f(x, y) := x^2 - xy + y^2$, Ω ist das Innere der Ellipse $x^2 - xy + y^2 = 2$.
Substitution: $x = \sqrt{2} \cdot u - \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot v$, $y = \sqrt{2} \cdot u + \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot v$.
- $f(x, y) := xy$, Ω liegt im ersten Quadranten (also $\Omega \subseteq \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \text{ und } 0 \leq x\}$) zwischen den Linien $y = x$, $y = 3x$, $xy = 1$ und $xy = 3$. Substitution: $x = u/v$, $y = v$.



IntMehrDim/Theorie/Ag_IntegralrechnungImRn_2dimGebietsintegralNichtFubini.tex

Aufgabe 80.383 (Integral über 2-dimensionalen Bereich — Fubini anwendbar?)

Berechnen Sie die beiden iterierten Integrale

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx dy \quad \text{und} \quad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy dx \quad !$$

Kann man hier den Satz von Fubini anwenden? Wenn ja, zeigen Sie, dass die Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind! Wenn nein, geben Sie eine Voraussetzung des Satzes an, die verletzt ist!

Hinweis: Wenn Sie möchten, können Sie nur das erste iterierte Integral explizit berechnen (*Tipp:* 0 addieren) und den Wert des zweiten Integrals durch eine Symmetrieüberlegung ermitteln.



IntMehrDim/Theorie/Ag_RiemannIntegrierbar_IntegrierbarkeitUebepreuefen.tex

Aufgabe 80.384 (Integrierbarkeit überprüfen)

Verwenden Sie die Zerlegungen

$$Z_n := \left\{ \left(\frac{i}{2^n}, \frac{j}{2^n} \right) ; i, j \in \{0, 1, \dots, 2^n\} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

des Quadrates $[0, 1]^2$ um zu zeigen, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = x^2 + y$$

über $[0, 1]^2$ Riemann-integrierbar ist.

Bemerkung: Das Riemann-Integral selbst brauchen Sie nicht auszurechnen!



IntMehrDim/Theorie/Ag_RiemannIntegrierbar_MitSummenIntegrieren.tex

Aufgabe 80.385 (Mit Summen integrieren)

Bestimmen Sie das Riemann-Integral der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = x - y$$

über $Q = [0, 1]^2$ als Grenzwert von Ober- und Untersummen.

Verwenden Sie dafür die Zerlegungen

$$Z_n := \left\{ \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right), i, j \in \{0, 1, \dots, n\} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$



IntMehrDim/Theorie/Ag_RiemannIntegrierbar_NichtIntegrierbar.tex

Aufgabe 80.386 (Nicht integrierbare Funktion)

Zeigen Sie mit Hilfe der Untersummen, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y} & , y \neq 0 \\ 0 & , y = 0 \end{cases}$$

über $Q = [0, 1]^2$ nicht Riemann-integrierbar ist.



IntTrafo/Fourier/Ag_FouTrafo_IntegralUeberRuecktrafoBerechnen.tex

Aufgabe 81.387 (Uneigentliches Integral mit Hilfe der (inversen) Fourier-Transformation berechnen)

- a) Zeigen Sie, dass die Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto g(x) := \frac{1}{1+x^2}$ absolut integrierbar ist!
- b) Ermitteln Sie eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\mathcal{F}f = g$, indem Sie das Ergebnis einer bereits gelösten Aufgabe auf diesem Blatt zur Hilfe nehmen!
- Hinweis:* Man nennt diese Vorgehensweise „Rücktransformation durch Nachschlagen in einer Transformationstabelle“.
- c) Berechnen Sie das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot \exp(i \cdot x) dx$ mit Hilfe der inversen Fourier-Transformation!
- d) Verwenden Sie den Integralwert aus Aufgabenteil c), um das reelle uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx$$

zu berechnen! Dies ist mit elementaren Mitteln (ohne Fourier-Transformation) nicht möglich.



IntTrafo/Fourier/Ag_Fouriertrans_AbsgeschnitteneSignumFktInklFaltung.tex

Aufgabe 81.388 (Fouriertransformierte und Faltung)

Für eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x)$, welche stückweise stetig und absolut integrierbar ist, bildet $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $s \mapsto \hat{f}(s) := \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-isx} dx$ die Fouriertransformierte von f .

Für zwei quadratisch integrierbare Funktionen $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto g(x)$ und $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto h(x)$ bildet $g * h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto (g * h)(t) := \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(t-x) \cdot h(x) dx$ die Faltung von g und h .

Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$, sowie

$$y_{\alpha,b}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto y_{\alpha,b}(x) := \begin{cases} b, & \text{für } 0 < x \leq \alpha \\ -b, & \text{für } -\alpha \leq x < 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- a) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\hat{y}_{\alpha,b}$!
- b) Berechnen Sie die Faltung von $y_{\alpha,b}$ mit sich selbst!
- Tipp:* Fallunterscheidung für $t \in (-\infty; -2\alpha) \cup [-2\alpha; -\alpha) \cup [-\alpha; 0) \cup [0; \alpha] \cup (\alpha; 2\alpha] \cup (2\alpha; \infty)$.
- c) Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Faltung aus Aufgabenteil b)!



IntTrafo/Fourier/Ag_Fouriertrans_DGLMitFouriertransLoesenRSistEHochMinusBetrag.tex

Aufgabe 81.389 (Lösen einer Differentialgleichung mit Hilfe von Fouriertransformation)

Sei $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto b(t) := -e^{-|t|}$.

Sei $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto y(t)$ zweimal differenzierbar auf $\mathbb{R}$, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$y''(t) - y(t) = b(t).$$

- a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung!

- b) Für die Fouriertransformierte $\widehat{b}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $s \mapsto \widehat{b}(s) := \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} b(t) \cdot e^{-ist} dt$ gilt

$$\widehat{b}(s) = \frac{-1}{\pi \cdot (1 + s^2)} \quad \text{für alle } s \in \mathbb{R}.$$

Wenden Sie auf beide Seiten der Differentialgleichung die Fouriertransformation an, um eine Darstellung der Fouriertransformierten $\widehat{y_P}$ einer partikulären Lösung y_P der Differentialgleichung zu erhalten!

- c) Mit Hilfe des Faltungssatzes lässt sich die partikuläre Lösung als Faltung zweier Funktionen aufschreiben. Geben Sie eine integralfreie Darstellung der partikulären Lösung an!

Tipp: Machen Sie eine Fallunterscheidung für $t \geq 0$ und $t < 0$!

Teilen Sie in beiden Fällen das zu berechnende Integral an t und an 0 auf!

- d) Berechnen Sie die Lösung der Differentialgleichung, welche die Randwerte $y(-1) = y(1) = 0$ erfüllt!



IntTrafo/Fourier/Ag_Fouriertrans_FaltungEinesRechteckimpulsesMitSichSelbst.tex

Aufgabe 81.390 (Faltung und Fouriertransformation)

Gegeben sei die Funktion $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit der Vorschrift $t \mapsto h(t) := \begin{cases} 1, & \text{für } -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$.

- a) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\widehat{h}$ von h .

- b) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte $\widehat{h * h}$, ohne die Faltung $h * h$ auszurechnen.

Tipp: Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis durch Anwenden des trigonometrischen Pythagoras und des Additionstheorems $\cos(x + y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$ mit $x = y = \frac{s}{2}$.

- c) Berechnen Sie jetzt die Faltung $h * h$ mit Hilfe der Definition der Faltung.

- d) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis aus Aufgabenteil b), indem Sie $\widehat{h * h}$ mit Hilfe der Definition der Fouriertransformation ausrechnen. Welcher Weg zur Bestimmung von $\widehat{h * h}$ ist einfacher?

Aufgabenblatt 82

IntTrafo/FourierAusrechnen



IntTrafo/FourierAusrechnen/Ag_FouTrafoAusrechnen_AbklingendeExpMalHeaviside.tex

Aufgabe 82.391 (Eine nützliche Korrespondenz)

Seien $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto \sigma(t) := \begin{cases} 1, & \text{für } t \geq 0 \\ 0, & \text{für } t < 0 \end{cases}$ die Einheitssprung- bzw. Heavisidefunktion, $b \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$ und $f_b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto f_b(t) := e^{-bt} \cdot \sigma(t)$. Beweisen Sie durch Integration, dass $\mathcal{F}f_b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\omega \mapsto (\mathcal{F}f_b)(\omega) := \frac{b-i\omega}{2\pi(b^2+\omega^2)}$ die Fouriertransformierte von f_b ist!



IntTrafo/FourierAusrechnen/Ag_FouTrafoAusrechnen_DreiExpUndEineLineare.tex

Aufgabe 82.392 (Fouriertransformationen ausrechnen)

Berechnen Sie jeweils die Fouriertransformierte der angegebenen Funktion!

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto f(t) := \begin{cases} e^{-t}, & \text{falls } t \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

b) $f \circ |\cdot|: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto f(|x|) = e^{-|x|}$

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto f(t) := \begin{cases} 3t - 2, & \text{falls } -4 \leq t \leq 4 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto f(t) := \begin{cases} \cos(t), & \text{falls } -\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$



IntTrafo/FourierAusrechnen/Ag_FouTrafoAusrechnen_Dreiecksimpuls.tex

Aufgabe 82.393 (Fouriertransformierte)

Bestimmen Sie die Fouriertransformierte des Dreieckimpulses

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad t \mapsto f(t) := \begin{cases} 1+t, & \text{für } -1 \leq t \leq 0 \\ 1-t, & \text{für } 0 < t \leq 1 \\ 0, & \text{für } |t| > 1 \end{cases}.$$

Hinweise: Die Fouriertransformierte ist reellwertig, da f eine gerade Funktion ist.

Mittels partieller Integration lässt sich $\int x \cdot e^{-ikx} dx = \frac{ix}{k} \cdot e^{-ikx} + \frac{1}{k^2} \cdot e^{-ikx} + C$ zeigen.



IntTrafo/FourierAusrechnen/Ag_FouTrafoAusrechnen_ProduktMitCharFkt.tex

Aufgabe 82.394 (Fourier-Transformationen ausrechnen)

Es ist $\text{id}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto \text{id}(t) := t$. Sei $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto g(t) := e^{-|t|}$. Berechnen Sie die Fourier-Transformierte des Produkts der angegebenen Funktion mit der charakteristischen Funktion

$$1_D: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto 1_D(x) := \begin{cases} 1, & \text{für } x \in D \\ 0, & \text{für } x \notin D \end{cases} \quad \text{für das zugehörige } D \subseteq \mathbb{R} \quad !$$

a) id auf $D := [-5; 5]$

c) $\sin$ auf $D := [-\pi; \pi]$

e) $\cosh$ auf $D := [-1; 1]$

b) g auf $D := \mathbb{R}$

d) $\sin$ auf $D := [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$



KomplAna/Laurentreihen/Ag_Laurentreihe2.tex

Aufgabe 83.395 (Laurentreihen)

Entwickeln Sie die Funktionen jeweils in eine Laurentreihe für $0 < |z - z_0| < R$ und geben Sie das Residuum $\text{res}(f; z_0)$ an:

a) $f(z) = \frac{1}{z^3 - z^4}$ für $z_0 = 0, R = 1$

b) $f(z) = \frac{1}{z \cdot (z + 5)}$ für $z_0 = 0, R = 5$

c) $f(z) = \frac{z}{z^2 - 9}$ für $z_0 = 3, R = 6$

d) $f(z) = \frac{2}{(z - 1)^2(z + 1)}$ für $z_0 = 1, R = 2$

e) $f(z) = z^5 \cdot e^{\frac{1}{z}}$ für $z_0 = 0, R = \infty$

Aufgabenblatt 84

KomplAna/Residuensatz



KomplAna/Residuensatz/Ag_Residuensatz_reelleKurvenintegrale.tex

Aufgabe 84.396 (Reelle Integrale mit Residuensatz 1)

Berechnen Sie die Integrale

a) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 + \cos(t)} dt$

b) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta)}{3 - 2 \sin(\theta)} d\theta$

indem Sie diese als Kurvenintegrale in der komplexen Ebene (Kurve: Kreis um Ursprung mit Radius 1) auffassen.



KomplAna/Residuensatz/Ag_Residuensatz_reelleKurvenintegrale2.tex

Aufgabe 84.397 (Reelle Integrale mit Residuensatz 2)

Berechnen Sie die Integrale mit Hilfe der Formel

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^S \text{Res}(f; z_k)$$

wobei $z_1, \dots, z_S$ die Pole von $f(z)$ mit $\text{Im}(z_k) > 0$ sind. (Gilt für $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(Re^{it}) \cdot Re^{it} dt = 0$.)

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 4)^2} dx$

e) $\int_0^{\infty} \frac{x \sin(x)}{x^4 + 1} dx$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - a^2}{x^4 + 1} dx$

d) $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^6 + 1} dx$



KomplZahlen/Darstellung/Ag_BeweiseMitKomplexenZahlen.tex

Aufgabe 85.398 (Kleine Beweise mit komplexen Zahlen in WiWi Alt-Klausuren)

- a) Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $z^2 \geq 0$. Insbesondere gelte also $z^2 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $z \in \mathbb{R}$ gilt.
- b) Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen mit $\operatorname{Re}(z_2), \operatorname{Im}(z_2) \neq 0$ und es gelte

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\operatorname{Re}(z_1)}{\operatorname{Re}(z_2)}.$$

- (i) Beweisen Sie, dass $\operatorname{Im}(z_1) \operatorname{Re}(z_2) = \operatorname{Re}(z_1) \operatorname{Im}(z_2)$.
- (ii) $|z_1| = 1 = |z_2|$ und $\operatorname{Im}(z_1), \operatorname{Im}(z_2) > 0$. Folgern Sie, dass $z_1 = z_2$.
- c) Beweisen Sie für alle $z \in \mathbb{C}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ die Formel von Moivre:

$$(\cos(z) + i \sin(z))^n = \cos(nz) + i \sin(nz)$$



KomplZahlen/Darstellung/Ag_KomplDarst_AddTheoAusEuler.tex

Aufgabe 85.399 (Additionstheoreme mit der Eulerformel beweisen)

Setzen Sie in beide Seiten der Gleichung $e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy}$ die Eulerformel ein, multiplizieren Sie aus und vergleichen Sie Real- und Imaginärteil, um zwei Additionstheoreme zu erhalten!

Hinweis: Die Gleichung gilt für alle $x \in \mathbb{C}$ und alle $y \in \mathbb{C}$.



KomplZahlen/Darstellung/Ag_KomplZahlen_KartesischZuTrigonometrischUndEuler.tex

Aufgabe 85.400 (Trigonometrische Darstellung komplexer Zahlen)

Geben Sie die komplexen Zahlen in der trigonometrischen Darstellung $r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$ an, die auch polare Darstellung oder Polarform genannt wird. Sie können zudem die Schreibweise mit der Exponentialfunktion $r \cdot e^{i\varphi}$ angeben, die auch Exponentialform oder Eulerform heißt.

- | | | |
|--------------------|------------------------------------|-----------------------------|
| a) $4 + 4 \cdot i$ | c) $\sqrt{18} - \sqrt{18} \cdot i$ | e) $\sqrt{12} + 2 \cdot i$ |
| b) $-1 + i$ | d) i^3 | f) $-4 - \sqrt{48} \cdot i$ |



KomplZahlen/Darstellung/Ag_KomplZahlen_RealUImagBestimmen.tex

Aufgabe 85.401 (Real und Imaginärteil, Betrag und Konjugieren in WiWi Alt-Klausuren)

Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil sowie den Betrag und das komplex Konjugierte der folgenden komplexen Zahlen

- | | |
|---|---|
| a) $z_1 = \frac{1+i}{1-i}$ | c) $z_3 = 5 e^{i \cdot \frac{7\pi}{4}}$ |
| b) $z_2 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{36}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{36}\right) \right)^9$ | d) $z_4 = \frac{4(1-i)}{3+i}$ |



KomplZahlen/Darstellung/Ag_KomplZahlen_Rechenregeln1.tex

Aufgabe 85.402 (Potenzen komplexer Zahlen)

Vereinfachen Sie folgende komplexe Zahlen.

a) $(5e^{-\frac{\pi}{16}i})^4$, b) $(\frac{1}{3}e^{\frac{3\pi}{4}i})^{-1}$, c) $(2-i)^3$, d) $(4+3i)^{-2}$.



KomplZahlen/Darstellung/Ag_KomplZahlen_Rechenregeln3.tex

Aufgabe 85.403 (Kehrwerte und Quotienten komplexer Zahlen bilden)

Berechnen Sie $\frac{1}{z}$ bzw. $\frac{w}{z}$ für:

a) $z = 4i$, c) $z = 6e^{\frac{\pi}{6}i}$, e) $z = i + 3, w = 6i$,
b) $z = 3 - i$, d) $z = -8i, w = 3 + 16i$, f) $z = 2e^{\pi i}, w = 8 - 5i$.



KomplZahlen/Darstellung/Ag_KomplZahlen_RechenregelnDarstellung.tex

Aufgabe 85.404 (Rechnen mit komplexen Zahlen)

Schreiben Sie diese komplexen Zahlen in der Form $a + bi$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$:

a) $5i(i+4)^2$, c) $-3 + 7i + |3 - 7i|$, e) $\frac{z+\bar{z}}{2}$, g) $\left| \frac{7i-4}{4-7i} \right|$,
b) $\frac{15i}{4+3i}$, d) $3 + 7i - \overline{3 - 7i}$, f) $\frac{z-\bar{z}}{2}$, h) $\left| i - e^{\frac{7\pi}{4}i} \right|$.



KomplZahlen/Darstellung/Ag_KomplexeZahlen_Rechenregeln4.tex

Aufgabe 85.405 (Komplexe Zahlen konjugieren und Quotienten berechnen)

Gegeben sind die komplexen Zahlen $z = -1 - 2i$, $w = 3i$, $v = 4ie^{\frac{\pi}{4}i}$ und $u = e^{-\frac{\pi}{3}i}$. Stellen Sie die daraus gebildeten, folgenden Zahlen in kartesischer und polarer Form dar!

a) $1 + \bar{z}$, c) $\frac{1}{w}$, e) $\frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}}$,
b) $\bar{v}$, d) $\frac{48i}{u^2 v^2 \bar{w}}$, f) $\left| \frac{v}{u} \right|^3$.



KomplZahlen/Funktionen/Ag_KomplexeFunktionen_ReziprokeGeraden.tex

Aufgabe 86.406 (Reziproke Geraden)

Die Funktion $g: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $w \mapsto g(w) := \frac{1}{w}$ bildet eine Gerade

$$\mathcal{G}_{m;b} := \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(w) = m \cdot \operatorname{Re}(w) + b\}$$

mit $m \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ auf den folgenden Kreis ab:

$$g(\mathcal{G}_{m;b}) = \left\{ s \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid |2bs + m + i| = \sqrt{m^2 + 1} \right\}.$$

Sei $f: \mathbb{C} \setminus \{2 - i\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $z \mapsto f(z) := \frac{1}{z-2+i}$.

Skizzieren Sie das Bild $f(\mathcal{G}_{3;-5})$ mit Hilfe der folgenden Vorüberlegungen:

- Bestimmen Sie eine Funktion h mit $f = g \circ h$, sprich $f(z) = g(h(z))$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{2 - i\}$!
- Zeichnen Sie $\mathcal{G}_{3;-5}$ und $h(\mathcal{G}_{3;-5})$!
Finden Sie ein $m \in \mathbb{R}$ und ein $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $h(\mathcal{G}_{3;-5}) = \mathcal{G}_{m;b}$!
- Bestimmen Sie $g(\mathcal{G}_{m;b})$ für die in Aufgabenteil b) bestimmten Werte von m und b !
- Zeichnen Sie $f(\mathcal{G}_{3;-5})$!

Aufgabenblatt 87

KomplZahlen/GlgnAlg



KomplZahlen/GlgnAlg/Ag_Gleichungen_QuadratischReellundKomplex.tex

Aufgabe 87.407 (Quadratische Gleichungen mit komplexen Zahlen)

Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen. Geben Sie diese in der Form $a + i \cdot b$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ an.

- a) $z^2 + 1 = 0$ c) $z^2 - z + \frac{5}{4} = 0$ e) $6z^2 + 1 = iz$ g) $\frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} = 2$
b) $z^2 + 5z + 6 = 0$ d) $8z^2 - 12z + 5 = 0$ f) $iz - z^2 + z = i$ h) $\frac{z^2 - z - 2}{z+1} = 1$



KomplZahlen/GlgnAlg/Ag_KomplGlgn_KartWurzelziehenCosSinVonArctan.tex

Aufgabe 87.408 (Komplexe „Wurzeln“ kartesisch ziehen)

Verwenden Sie das kartesische Verfahren zum Ziehen von komplexen „Quadratwurzeln“!

- a) Bestimmen Sie $\{z \in \mathbb{C} \mid z^4 = -\frac{7}{16} + \frac{3}{2} \cdot i\}$!
b) Betrachten Sie $2 + 6i$, um $\sin\left(\frac{1}{2} \cdot \arctan(3)\right)$ und $\cos\left(\frac{1}{2} \cdot \arctan(3)\right)$ zu bestimmen!
c) Bestimmen Sie $\sin\left(\frac{1}{4} \cdot \arctan\left(\frac{24}{7}\right)\right)$ und $\cos\left(\frac{1}{4} \cdot \arctan\left(\frac{24}{7}\right)\right)$ mit Aufgabenteil a)!



KomplZahlen/GlgnAlg/Ag_KomplGlgn_PolynomglgnOhneKomplWurzeln.tex

Aufgabe 87.409 (einfache Polynomgleichungen mit komplexen Lösungen)

Geben Sie die kartesische Darstellung aller komplexen Zahlen an, die die folgenden Gleichungen lösen:

- a) $z^3 + 7z^2 + 19z + 13 = 0$ b) $4z^3 + 18z = 12z^2 + 20$ c) $6z^3 + 6z = z^4 + 26z^2 + 25$

Tipp: Die Polynome $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $z \mapsto 6z^3 + 6z$ und $q: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $z \mapsto z^4 + 26z^2 + 25$ haben (mindestens) eine gemeinsame Nullstelle.



KomplZahlen/GlgnAlg/Ag_KomplGlgn_PolynomglgnOhneKomplWurzelnMehr.tex

Aufgabe 87.410 (einfache Polynomgleichungen mit komplexen Lösungen)

Geben Sie die kartesische Darstellung aller komplexen Zahlen an, die die folgenden Gleichungen lösen:

- a) $z^3 + 21z + 82 = 8z^2$ b) $9z^3 + 55z = 33z^2 + 111$ c) $14z^3 + 56z = z^4 + 54z^2 + 200$

Tipp: Die Polynome $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $z \mapsto 14z^3 + 56z$ und $q: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $z \mapsto z^4 + 54z^2 + 200$ haben (mindestens) eine gemeinsame Nullstelle.



KomplZahlen/GlgnAlg/Ag_KomplGlgn_QuadEineOhneUndEineMitLeitkoeff.tex

Aufgabe 87.411 (Komplexe quadratische Gleichungen)

Berechnen Sie alle komplexen Zahlen, welche die nachstehenden quadratischen Gleichungen lösen!

- a) $z^2 + (1 - i) \cdot z - (2 + 2i) = 0$ b) $(1 - i) \cdot z^2 + (-2 + 6i) \cdot z - 15 - 5i = 0$



KomplZahlen/GlgnAlg/Ag_KomplGlgn_QuadOhneKomplWurzeln.tex

Aufgabe 87.412 (einfache quadratische Gleichungen mit reellen oder komplexen Lösungen)

Lösen Sie die folgenden Gleichungen allgemein! ($i^2 = -1$)

- a) $z^2 + 34 = 10z$ c) $2z^2 = z + 36$ e) $4z^2 + 16i = 32iz + 4z + 79$
b) $4z^2 + 53 = 28z$ d) $9z^2 + 40 = 12z$ f) $iz^2 + 2z - 5i = 6iz - 3z^2 + 15$



KomplZahlen/GlgnAlg/Ag_KomplGlgn_QuadWurzelnQuadBiquad.tex

Aufgabe 87.413 (komplexe quadratische Gleichungen)

Finden Sie alle komplexen Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen!

- a) $z^2 = 21 + 20i$ d) $z^2 + 2z - 8 = (2z - 4) \cdot i$ g) $z^2 + z = 2z \cdot i - 3 - 4i$
b) $z^2 = -5 - 12i$ e) $z^2 + z + 3 + 15i = 0$ h) $z^4 + 25 = 6z^2$
c) $z^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{9} \cdot i$ f) $z^2 - (1 + i) \cdot 3z = 2 - 3i$ i) $z^4 + 3z^2 - 32 = 12iz^2 + 24i$

Hinweis: Es gelten $27^2 = 729$, $29^2 = 841$, $32^2 = 1024$, $45^2 = 2025$ und $61^2 = 3721$.



KomplZahlen/GlgnAlg/Ag_KomplGlgn_WurzelnDreiQuadrGlgnVierBiquadrGlgnZwei.tex

Aufgabe 87.414 (komplexe quadratische Gleichungen)

Finden Sie alle komplexen Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen! ($13^2 = 169$, $17^2 = 289$)

- a) $z^2 = -16 + 30i$ d) $z^2 + 12 = 4z + 6i$ g) $z^2 + iz + 3i + 1 = 0$
b) $w^2 = 15 - 8i$ e) $w^2 + 2w + 4i = 18 + 4i \cdot w$ h) $w^4 = 4i \cdot (w^2 + 1) + 2w^2 + 3$
c) $s^2 = -\frac{2}{9} + \frac{i}{6}$ f) $s^2 + 2i \cdot (5s - 6) = 6s + 16$ i) $\frac{s^4}{4} + 2s^2 + 36i = 9i \cdot s^2 + 77$



KomplZahlen/GlgnAlg/Ag_KomplGlgn_WurzelnHoehereUndPolynomglgn.tex

Aufgabe 87.415 (komplexe „Wurzeln“)

Berechnen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit

- a) $z^2 = -1$ d) $z^3 = -2 + 2i$ g) $z^3 = \sqrt{3} - i$ j) $z^2 + (1 - 2i) \cdot z = 2i$
b) $z^2 = 2 + \sqrt{12} \cdot i$ e) $z^3 = 1 - 2i$ h) $z^2 = -3 + 4i$ k) $z^3 - (3 + 6i) \cdot z^2 + (-8 + 12i) \cdot z + 10 = 0$ & $z \neq 1 + i$
c) $z^4 = -8 - 8 \cdot \sqrt{3} \cdot i$ f) $z^4 = 24 + 7i$ i) $z^3 + z^2 = 2$



KomplZahlen/GlgnAlg/Ag_KomplZahlen_PolynomeFaktorisieren.tex

Aufgabe 87.416 (Zerlegung in Linearfaktoren)

Schreiben Sie die Polynome als Produkte von Linearfaktoren! Hierzu ist bis auf im letzten Aufgabenteil jeweils eine Nullstelle angegeben.

- a) $f(x) := 2x^3 + x^2 + 6x + 3$ mit $f(\sqrt{3} \cdot i) = 0$ c) $h(x) := x^4 - 3x^2 - 4$ mit $h(-2) = 0$
b) $g(x) := 3x^3 + 2x^2 + 12x + 8$ mit $g(-2i) = 0$ d) $p(x) := x^4 - 16$



KomplZahlen/GlgnTransz/Ag_KomplTranszGlgn_ErsteExpUndLogarithmusGlgn.tex

Aufgabe 88.417 (komplexer Logarithmus)

Sei $\text{Ln}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $z \mapsto \text{Ln}(z) := \ln(|z|) + i \cdot \arg(z)$ der Hauptzweig des komplexen Logarithmus. Lösen Sie die folgenden Gleichungen in den komplexen Zahlen!

a) $\exp(z) = 2 - \sqrt{12} \cdot i$

c) $\text{Ln}(z^2 + 2 - \sqrt{3} \cdot i) = \ln(6) + i \cdot \frac{\pi}{3}$

b) $\exp(-i \cdot z) = 5 + 12 \cdot i$

d) $\exp(4z - 3 + i) = -e^5 \cdot i$



KomplZahlen/GlgnTransz/Ag_KomplTranszGlgn_ExpGlgnEinstieg.tex

Aufgabe 88.418 (Einfache Gleichungen mit der komplexen Exponentialfunktion)

a) Bestimmen Sie jeweils alle Lösungen der angegebenen Gleichungen und skizzieren Sie diese in der komplexen Ebene!

(i) $e^z = 1 + i$

(iii) $i + e^z = \sqrt{3}$

(v) $e^{iz} = -i$

(ii) $2i \cdot e^z = (1 - i)^2$

(iv) $-e^{iz} = 1$

(vi) $\text{Re}(e^{iz}) = \text{Im}(e^{iz}) = -1$

b) Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen!

(i) $e^{2z+3i} = -1 - i$

(ii) $e^{z^2} = -1$

(iii) $e^z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i$



KomplZahlen/GlgnTransz/Ag_KomplTranszGlgn_TrigHypGlgnFastOhneExpKorrekturfaktor.tex

Aufgabe 88.419 (komplexe Gleichungen lösen)

Finden Sie alle komplexen Zahlen, die die folgenden Gleichungen erfüllen! *Hinweis:* $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

a) $17 \cdot \sin(z) + 15i \cdot \cos(z) = 4$

c) $(1 - 2i) \cdot \cos(z) - (2 - i) \cdot \sin(z) + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot e^{-iz} = 1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3}) \cdot i$

b) $5 \cdot \cosh(z) - (7 + 4i) \cdot \sinh(z) = 5 - 5i$



KomplZahlen/GlgnTransz/Ag_KomplTranszGlgn_TrigHypGlgnMitExpKorrekturfaktor.tex

Aufgabe 88.420 (komplexe Gleichungen lösen)

Finden Sie alle komplexen Zahlen, die die folgenden Gleichungen erfüllen!

a) $2 \cdot \cos(z) + 3e^{iz} = 2 \cdot \sqrt{2}$

c) $\sinh(z) + \frac{5}{8} \cdot e^z - \frac{i}{4} = \sqrt{3} + i$

b) $\sin(z) + \frac{1}{4} \cdot e^{iz} = 1$

Tipp: $(5 \cdot \sqrt{3} + 4 \cdot i)^2 = 59 + 40 \cdot \sqrt{3} \cdot i$



KomplZahlen/Kartesisch/Ag_KomplZahlen_RechnenInKartDarst.tex

Aufgabe 89.421 (Rechnen mit komplexen Zahlen in kartesischer Darstellung)

Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen!

a) $(-4 + i) - (7 - 3i)$

d) $\left(-\frac{1}{3} + \frac{3i}{2}\right) - (4 - 2i)^{-1}$

g) $\frac{4 \cdot \overline{3-i}}{(-1+i) \cdot (1+i)}$

b) $(5i - 2) \cdot (4 - 2i)$

e) $\frac{1-2i}{(7+i) \cdot (-2+3i)}$

h) $\frac{(-2+i) \cdot \overline{3-6i}}{-2+4i \cdot (3-i)}$

c) $\frac{4-\frac{i}{2}}{-4+3i}$

f) $(3 + 2i)^2 \cdot (6 - 4i)^2$

i) $\frac{(3+2i) \cdot \overline{4-3i}}{i \cdot 2 - 5i}$



KomplZahlen/Kartesisch/Ag_KomplZahlen_RechnenInKartDarstMehr.tex

Aufgabe 89.422 (Rechnen mit komplexen Zahlen in kartesischer Darstellung)

Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen!

a) $(3 + 4i) + (7i - 4)$

d) $\frac{4 - 2i}{3 - i}$

g) $\overline{(-3 + 4i) \cdot (6 - 8i)}$

b) $\frac{14 - 3i}{4} - \frac{17 - 8i}{5}$

e) $\frac{12 - 5i}{3} - \left(\frac{1 + 5i}{6}\right)^{-1}$

h) $\overline{\left(\frac{(3 - 7i) \cdot \overline{-5 + i}}{3i \cdot \overline{5}}\right)}$

c) $\frac{21 - 3i}{9} \cdot \frac{2 - 4i}{8}$

f) $\frac{\overline{5 + 2i} \cdot (2 - i)}{\overline{7i} - 1}$

i) $\frac{5 + i}{7 + 3i} - \overline{\left(\frac{16 - 11i}{29}\right)}$



KomplZahlen/Kartesisch/Ag_KomplZahlen_RechnenInKartDarstTermeAusDreiZahlen.tex

Aufgabe 89.423 (Terme berechnen)

Berechnen Sie für die komplexen Zahlen $z := -4i$, $w := 3 - 2i$ und $s := -1 + i$ kartesische Darstellungen der folgenden Zahlen!

a) $z - 2w + 3s$

c) $\frac{\overline{z} \cdot w}{s}$

e) $\frac{z - \overline{w}}{3\overline{s}}$

b) $2z \cdot \overline{w}$

d) $z \cdot (2\overline{w} - z) + \overline{s}$

f) $\frac{z + \overline{s}}{\overline{w} \cdot s}$



KomplZahlen/Polar/Ag_KomplZahlen_Dreifachwinkelformeln.tex

Aufgabe 90.424 (Dreifachwinkel)

Zeigen Sie mit Hilfe der Formel von de Moivre, dass für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\text{a) } \cos(3\alpha) = (\cos(\alpha))^3 - 3\cos(\alpha) \cdot (\sin(\alpha))^2, \quad \text{b) } \sin(3\alpha) = 3(\cos(\alpha))^2 \cdot \sin(\alpha) - (\sin(\alpha))^3.$$



KomplZahlen/Polar/Ag_KomplZahlen_PolarRechenregeln.tex

Aufgabe 90.425 (Kartesische Darstellung und Polardarstellung komplexer Zahlen)

Seien $z \in \mathbb{C}$, $s \in \mathbb{C}$ und $w \in \mathbb{C}$ mit

Hinweis: $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$

$$|z| = 8, \quad \arg(z) = \frac{\pi}{6}, \quad |s| = 2 \quad \arg(s) = \frac{2\pi}{3}, \quad |w| = 32 \quad \text{und} \quad \arg(w) = \frac{\pi}{3}.$$

Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in Polardarstellung an und berechnen Sie jeweils Real- und Imaginärteil!

a) $1 + i$	d) $(1 + 2i) \cdot (3 - i)$	g) $\frac{-1 + 2i}{(-2 - i) \cdot (3 + 4i)}$	i) $(-2 + 3i) \cdot 3s$
b) z	e) $i \cdot \overline{3 - 4i}$	h) $\frac{(3 + 2i)^2 \cdot (-1 + i)}{5 - 12i}$	j) $(\sqrt{3} + i)^5 + 4z$
c) $-\sqrt{3} + 3i$	f) $(1 + i)^{20}$	k) $w \cdot s$	



KomplZahlen/Wurzeln/Ag_KomplZahlen_WurzelnDirekt.tex

Aufgabe 91.426 (komplexe „Wurzeln“)

Berechnen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit

a) $z^2 = -1$

c) $z^4 = -8 - 8 \cdot \sqrt{3} \cdot i$

e) $z^3 = 5 - 12i$

g) $z^3 = \sqrt{3} - i$

b) $z^2 = 2 + \sqrt{12} \cdot i$

d) $z^3 = -2 + 2i$

f) $z^4 = 3 + i$

h) $z^2 = -3 + 4i$

Aufgabenblatt 92

KomplZahlen/Zahlenebene



KomplZahlen/Zahlenebene/Ag_KomplMengen_AllesZusammen.tex

Aufgabe 92.427 (Komplexe Zahlen und Mengen Skizzieren in WiWi Alt-Klausuren)

- a) Skizzieren Sie die Menge aller $z \in \mathbb{C}$ mit $(z - (1 + i))^2 \in \mathbb{R}$.
b) Skizzieren Sie die Menge aller $z \in \mathbb{C}$ auf der die (komplexe) Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{i\pi k} (z - 1)^k$$

absolut konvergiert.

- c) Skizzieren Sie die komplexwertige Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definiert durch

$$a_n := \exp\left(\frac{\pi i n}{4}\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

in einem geeigneten Koordinatensystem.



KomplZahlen/Zahlenebene/Ag_KomplMengen_Geom2Kreise2Ebenen.tex

Aufgabe 92.428 (Teilmengen der Gaußschen Zahlenebene)

Beschreiben Sie die Teilmengen geometrisch:

- a) $T_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z| < 4\}$ c) $T_3 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(i \cdot z) < 2\}$
b) $T_2 := \{z^3 \in \mathbb{C} \mid z \in \mathbb{C} \text{ und } 0 < |z| < 4\}$ d) $T_4 := \{z^2 \in \mathbb{C} \mid z \in \mathbb{C} \text{ und } \operatorname{Re}(z) < 0\}$



KomplZahlen/Zahlenebene/Ag_KomplMengen_Geom2Punkte2Geraden3Kreise1Ellipse.tex

Aufgabe 92.429 (Teilmengen komplexer Zahlen geometrisch beschreiben)

Beschreiben Sie die Teilmengen $T_k := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Es gilt } A_k(z)\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq 8$ geometrisch:

- a) $A_1(z): z = 3$ d) $A_4(z): iz - i\bar{z} = 8$ g) $A_7(z): |2iz + 6 + 2i| = 3$
b) $A_2(z): 3z + 12i = 0$ e) $A_5(z): |i - 5 + z| = 3$ h) $A_8(z):$
c) $A_3(z): z = 6 - \bar{z}$ f) $A_6(z): |z - 3 - i| \leq 2$ $|z + i| = 7 - |4i - z|$



KomplZahlen/Zahlenebene/Ag_KomplMengen_Geom3Kreise1Halbebene.tex

Aufgabe 92.430 (komplexe Teilmengen)

Beschreiben Sie die Teilmengen aller $z \in \mathbb{C}$, die jeweils die folgende Bedingung erfüllen, geometrisch:

- a) $\left| \frac{z}{z-3} \right| < \frac{1}{2}$ b) $\left| \frac{2z+5-i}{z+2i} \right| \geq 3$ c) $\operatorname{Re}\left(\frac{6+2i}{z}\right) > 1$ d) $\operatorname{Im}\left(\frac{5z-8i}{3i-2}\right) \leq \frac{1}{13}$



KomplZahlen/Zahlenebene/Ag_KomplMengen_GeomEinfuehrung1Kreis.tex

Aufgabe 92.431 (Teilmengen der Gauß'schen Zahlenebene)

In dieser Aufgabe soll die Ungleichung aus der Mengendefinition von M geeignet umformt werden, damit M in die Gauß'sche Zahlenebene gezeichnet werden kann:

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |8 - z| > \sqrt{|8 - 2 \cdot \operatorname{Im}(z)|} \right\}.$$

- a) Quadrieren Sie die Ungleichung aus der Mengendefinition! (Überlegen Sie sich, ob es sich beim Quadrieren um eine Äquivalenzrelation handelt!)
- b) Drücken Sie $z \in \mathbb{C}$ mit Hilfe ihres Real- und Imaginärteils aus und schreiben Sie die Differenz im Betrag auf der linken Seite der Ungleichung als eine komplexe Zahl in kartesischer Darstellung!
- c) Auf der linken Seite steht nun der Betrag einer komplexen Zahl. Dieser kann mit Hilfe der Definition des Betrages aufgelöst werden. Auf der rechten Seite steht der Betrag einer reellen Zahl. Dieser kann mit Hilfe einer Fallunterscheidung aufgelöst werden.

Verwenden Sie jeweils eine quadratische Ergänzung, um zu zeigen,

- (i) dass alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im}(z) > 4$ Elemente von M sind!
 - (ii) dass die Ungleichung aus der Definition von M für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im}(z) \leq 4$ einer Kreisungleichung entspricht!
- d) Überlegen Sie sich vor dem Zeichnen
- (i) wohin der Kreis vom Ursprung aus verschoben wird,
 - (ii) welchen Radius der Kreis hat,
 - (iii) ob der Rand des Kreises in der Menge enthalten ist und
 - (iv) ob der Bereich innerhalb oder außerhalb des Kreises in der Menge enthalten ist!



KomplZahlen/Zahlenebene/Ag_KomplMengen_GgfVereinfachenUndZeichnen.tex

Aufgabe 92.432 (Teilmengen der Gauß'schen Zahlenebene)

Vereinfachen Sie falls nötig die folgenden Mengen und zeichnen Sie sie in die Gauß'sche Zahlenebene!

- | | |
|--|---|
| a) $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq z < 3\}$ | f) $\{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(w^2) \geq \operatorname{Im}(w)\}$ |
| b) $\{w \in \mathbb{C} \mid \frac{3\pi}{4} < \arg(w) < \pi\}$ | g) $\{z \in \mathbb{C} \mid z - i \leq z - i + 1 \}$ |
| c) $\{z \in \mathbb{C} \mid z - 1 > 1 \text{ und } z - 2 < 2\}$ | h) $\{s \in \mathbb{C} \mid s - 2 < s \}$ |
| d) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = 2 \cdot \operatorname{Im}(z) + 1\}$ | i) $\{z \in \mathbb{C} \mid z \cdot \bar{z} + 3z + 3\bar{z} = 0\}$ |
| e) $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s^2) < 0\}$ | j) $\{z \in \mathbb{C} \mid z + i + z - i < 2\}$ |



KurvenOberfl/IntSaetze/Ag_Divergenzsatz.tex

Aufgabe 93.433 (Integralsatz von Gauß (Divergenzsatz))

Berechnen Sie jeweils den Fluss des gegebenen Feldes durch die angegebene geschlossene Oberfläche A mit Hilfe des Satzes von Gauß.

- $\vec{f}(x, y, z) = (x^2 - yx - yz)^T$, A : Oberfläche des Würfels $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$
- $\vec{f}(x, y, z) = (xy^2 - yx^2 - \frac{1}{3}z^3)^T$, A : Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $R > 0$
- Berechnen Sie die Flussintegrale aus a) und b) noch einmal direkt, ohne den Satz von Gauß.



KurvenOberfl/IntSaetze/Ag_GaussGreen.tex

Aufgabe 93.434 (Satz von Gauß-Green)

Verwenden Sie jeweils den Satz von Gauß-Green, um die Kurvenintegrale zu berechnen.

- $\int_{\partial E} \begin{pmatrix} e^x \\ xy \end{pmatrix} \cdot d\vec{s}$, wobei ∂E der im mathematisch positiven Umlaufsinn durchlaufene Rand der Fläche $E = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$ ist.
- $\int_{\partial D} \begin{pmatrix} y - \sin(x) \\ -x \end{pmatrix} \cdot d\vec{s}$, wobei ∂D der im mathematisch positiven Umlaufsinn durchlaufene Rand des Dreiecks D mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$ und $(\frac{\pi}{2}, 1)$ ist.
- $\int_{\partial C} \begin{pmatrix} 2x + 2y \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix} \cdot d\vec{s}$, wobei ∂C der im mathematisch positiven Umlaufsinn durchlaufene Rand der Fläche $C = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, -\sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{x}\}$ ist.
- $\int_{\partial K} \begin{pmatrix} y^2 \\ 3xy \end{pmatrix} \cdot d\vec{s}$, wobei ∂K der im mathematisch positiven Umlaufsinn durchlaufene Rand der Fläche $K = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ ist.
- Berechnen Sie die Kurvenintegrale aus b) und d) noch einmal direkt, ohne den Satz von Gauß-Green.



KurvenOberfl/IntSaetze/Ag_Integralsatze_GaussDivergenzsatz2D.tex

Aufgabe 93.435 (Gaußscher Divergenzsatz in $\mathbb{R}^2$)

Berechnen Sie für die angegebenen zweidimensionalen Vektorfelder $\vec{F}$ und Gebiete $G \subseteq \mathbb{R}^2$ mit dem Gaußschen Divergenzsatz das Integral

$$\oint_{\partial G} \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle ds,$$

wobei $\vec{N}$ das äußere Einheitsnormalenvektorfeld des Randes von G ist.

- $\vec{F}(x, y) := \begin{pmatrix} xy \\ -x^2 \end{pmatrix}$ und $G := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0, x^2 + y^2 < 1 \right\}$.
- $\vec{F}(x, y) := \begin{pmatrix} \sin(x) \\ 2xy \end{pmatrix}$ und $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ist das offene Dreieck mit den Eckpunkten $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \pi \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Berechnen sie die Integrale aus a) und b) noch einmal direkt, ohne den Divergenzsatz.

**Aufgabe 93.436** (Anwendung des Satzes von Stokes)

Eine elektrische Stromdichte sei durch $\vec{j}(x, y, z) = j_0 \cdot e^{-a(x^2+y^2)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit Konstanten a und j_0 gegeben.

- a) Berechnen Sie den Stromfluss I durch eine Kreisfläche um die z -Achse mit Radius $R > 0$ (Normalenvektor in positive z -Richtung).
- b) In der Magnetostatik gilt zwischen der Stromdichte und der Magnetischen Flussdichte $\vec{B}$ der Zusammenhang $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ mit der Naturkonstante μ_0 . Machen Sie für $\vec{B}$ den aus der Symmetrie des Problems folgenden Ansatz $\vec{B}(x, y, z) = f(r) \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und berechnen Sie $f(R)$ und $||\vec{B}||$ für konstantes $R > 0$. Verwenden Sie dazu den Satz von Stokes und das Ergebnis aus a).

Aufgabenblatt 94

Mengen/Grundbegriffe



Mengen/Grundbegriffe/Ag_Mengen_ElementBzwTeilmengeJaOderNein.tex

Aufgabe 94.437 (Elemente und Teilmengen von Mengen)

Welche der Zeichen $\in$, $\notin$, $\subseteq$ bzw. $\not\subseteq$ anstelle von $\diamond$ führen auf eine wahre Aussage?

- | | |
|--|--|
| a) $1 \diamond \{1; 2; 3\}$ | f) $\{1; 2\} \diamond \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{2; 1\}\}$ |
| b) $11 \diamond \{1; 1; 2; 3\}$ | g) $\{1\} \diamond \{0; 1; 2\}$ |
| c) $-3 \diamond \mathbb{N}$ | h) $\{0\} \diamond \mathbb{N}_0$ |
| d) $-2 \diamond \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 4 = 0\}$ | i) $\emptyset \diamond \{B \mid B \subseteq \{\text{Auto}; \text{Fahrrad}\}\}$ |
| e) $0 \diamond \emptyset$ | j) $169 \diamond \{n^2 \in \mathbb{N} \mid n \in \mathbb{N}\}$ |



Mengen/Grundbegriffe/Ag_Mengen_Gleichheit_ZweiQPlusFuenf.tex

Aufgabe 94.438 (Mengengleichheiten zeigen)

Zeigen Sie, dass die Mengen $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$ und $\mathbb{Q}' = 2\mathbb{Q} + 5 = \{2q + 5 \mid q \in \mathbb{Q}\}$ gleich sind.



Mengen/Grundbegriffe/Ag_Mengen_Potenzmengen.tex

Aufgabe 94.439 (Potenzmengen)

- a) Seien $A := \{1, 2\}$ und $B := \{2, 3\}$. Bestimmen Sie
- | | | | |
|----------------------|------------------------------|---|--|
| (i) $\text{Pot}(A)$ | (iii) $\text{Pot}(A \cap B)$ | (v) $\text{Pot}(A) \cap \text{Pot}(B)$ | (vii) $\text{Pot}(\text{Pot}(A \cap B))$ |
| (ii) $\text{Pot}(B)$ | (iv) $\text{Pot}(A \cup B)$ | (vi) $\text{Pot}(A) \cup \text{Pot}(B)$ | |
- b) Seien C und D beliebige Mengen. Ersetzen Sie $\boxed{?}$ durch ein passendes Symbol aus der Menge $\{=, \neq\}$. Begründen Sie Ihre Antwort!
- | | |
|---|--|
| (i) $\text{Pot}(C \cup D) \boxed{?} \text{Pot}(C) \cup \text{Pot}(D)$ | (ii) $\text{Pot}(C \cap D) \boxed{?} \text{Pot}(C) \cap \text{Pot}(D)$ |
|---|--|



Mengen/Grundbegriffe/Ag_Mengen_Produktmenge.tex

Aufgabe 94.440 (Produktmenge)

Sei $A := \{2, 4, 6\}$ und $B := \{4, 8\}$.

- a) Berechnen Sie die Mächtigkeit von $A \times B$.
- b) Geben Sie alle Teilmengen $T \subseteq A \times B$ an, die zwei Elemente haben.
- c) Wie viele Teilmengen $T \subseteq A \times B$ gibt es, die vier oder mehr Elemente haben?



Mengen/Grundbegriffe/Ag_Mengen_TeilmengenDisjunktMitPrimzahlen.tex

Aufgabe 94.441 (Teilmengen und Disjunktheit)

Vergleichen Sie die folgenden Mengen! Für welche gilt die Teilmengeneigenschaft, welche sind disjunkt?

- | | |
|---|--|
| $A := \{p \in \mathbb{N} \mid p > 5^2 \text{ und } p \text{ ist eine Primzahl}\}$ | $E := \{5, 3, 23, 2, 17, 11\}$ |
| $B := \{2\ell + 2 \in \mathbb{N} \mid \ell \in \mathbb{N}\}$ | $F := \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ hat genau 2 natürliche Teiler}\}$ |
| $C := \{z \in \mathbb{Z} \mid z \text{ ist eine gerade Zahl}\}$ | $G := \{2, 3, 5, 11, 17, 23\}$ |
| $D := \{7, 13, 19\}$ | |



Mengen/Mächtigkeit/Ag_Abzaehlbar_UeberabzaehlbarkeitVonPotIN.tex

Aufgabe 95.442 (Wie viele Teilmengen hat $\mathbb{N}$?)

Zeigen Sie, dass es überabzählbar viele Teilmengen von $\mathbb{N}$ gibt!

Tipp: Gibt es eine surjektive Abbildung von $\mathbb{N}$ in die Potenzmenge $\text{Pot}(\mathbb{N})$ von $\mathbb{N}$?

Aufgabenblatt 96

Mengen/Schreibweisen



Mengen/Schreibweisen/Ag_Mengen_BeschreibendeFormZuZahlenmengenAngaben.tex

Aufgabe 96.443 (Mengen beschreiben)

Geben Sie folgende Mengen jeweils in beschreibender Form an!

Hinweis: Geben Sie die Mengen jeweils durch eine Eigenschaft X in der Form $\{x \in ?? \mid x \text{ hat die Eigenschaft } X\}$ an. X kann dabei verbal oder mittels eines Terms formuliert werden. ?? steht für eine zu wählende Zahlenmenge.

- | | |
|---|--|
| a) $A := \{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$ | e) $E := \{1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; \dots\}$ |
| b) $B := \{-3; -2; -1; 1; 2; 3\}$ | f) $F := \{119; 17; 51; 136; 85; 102; 34; 68; \dots\}$ |
| c) $C := \{-2; -1; 0; 1; 3; 4; 5; 6\}$ | g) $G := \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ |
| d) $D := \{64; 4; 8; 1; 32; 128; 2; 16\}$ | h) $H := \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ |



Mengen/Schreibweisen/Ag_Mengen_IntervalleAlsIntervalleSchreiben.tex

Aufgabe 96.444 (Intervallschreibweise von Teilmengen der reellen Zahlen)

Skizzieren Sie die folgenden Mengen auf einem Zahlenstrahl und schreiben Sie sie als Intervalle!

- | | |
|---|--|
| a) $A := \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x < 6\}$ | c) $C := A \cap B$ |
| b) $B := \{x \in \mathbb{R} \mid 4 \leq x \leq 9\}$ | d) $D := \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid -33 < x\}$ |



Mengen/Schreibweisen/Ag_Mengen_SchreibweisenGemischt.tex

Aufgabe 96.445 (Mengenschreibweisen)

Im Folgenden sind einige Mengen in aufzählender Schreibweise angegeben und andere in beschreibender Schreibweise mit einer Bedingung. Geben Sie die Mengen in der jeweils anderen Schreibweise an:

- | | | |
|--|---|--|
| a) $A := \{4, 5, 6, 7, 8\}$ | c) $C := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x = 1\}$ | e) $E := \{1, 5, 9, 13, \dots\}$ |
| b) $B := \{n \in \mathbb{N} \mid 2 < n^2 < 10\}$ | d) $D := \{n^2 + 1 \mid n \in \{1, 2, 3\}\}$ | f) $F := \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\}$ |



Mengen/Schreibweisen/Ag_Mengen_verschiedeneBeschreibungen.tex

Aufgabe 96.446 (Verschiedene Mengenbeschreibungen)

Geben Sie die Mengen A , B , C und D an:

- a) Sei $R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b)\}$: eine Relation auf der Menge $M = \{a, b, c\}$.

- | | |
|---------------------------------|---|
| (i) $A = \{x \in M \mid xRb\}$ | (iii) $C = \{x \in M \mid bRx \wedge cRx\}$ |
| (ii) $B = \{x \in M \mid bRx\}$ | (iv) $D = \{x \in M \mid bRx \vee cRx\}$ |

- b) Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

- | | |
|--|--|
| (i) $A = \{t \in \mathbb{R} \mid f(t) = 8\}$ | (iii) $C = \{t \in \mathbb{R} \mid f(t) < 8\}$ |
| (ii) $B = \{f(t) \mid t = 8\}$ | (iv) $D = \{f(t) \mid t < 8\}$ |

- c) Sei $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$(i) \ A = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid M\vec{x} = \vec{0} \right\}$$

$$(ii) \ B = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid M\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(iii) \ C = \left\{ M\vec{x} \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(iv) \ D = \{ M\vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \}$$

d) Sei $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

$$(i) \ A = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid M\vec{x} = \vec{0} \right\}$$

$$(ii) \ B = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid M\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(iii) \ C = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid M\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(iv) \ D = \{ M\vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \}$$



Mengen/Schreibweisen/Ag_Zahlbereiche_IntervalleSupInf.tex

Aufgabe 96.447 (Intervalle)

Beschreiben Sie die nachstehenden Mengen mit Hilfe von Intervallen (ohne Mengenverknüpfungen):

a) $\{x \in \mathbb{R} : x > -3 \text{ und } x \leq 17\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} : x > 2x^2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0.25\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} : x < 6\} \setminus (\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \geq -4\})$

d) $\{x \in \mathbb{R} : x^3 > x^2\} \cap (\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\})$

Besitzen die Mengen ein Supremum, Infimum, Maximum, Minimum?



Mengen/Skizzieren/Ag_Mengen_GeometrischBeschreiben.tex

Aufgabe 97.448 (Teilmengen in der Ebene)

Beschreiben Sie die folgenden Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $B \subseteq \mathbb{R}^2$, $C \subseteq \mathbb{R}^2$ und $D \subseteq \mathbb{R}^2$ der Ebene geometrisch und skizzieren Sie sie. Hierbei sei $\bar{M} := \mathbb{R}^2 \setminus M$ das Komplement einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ und es gelten die folgenden Mengengleichheiten:

a) $A = \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 8x - 4y \leq -4 \right\}$

b) $B = \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid -7y - 21 > 0 \right\}$

c) $\bar{C} = B \cup \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid |5x + 20| + 2y > 4 \right\}$

d) $D = \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 6x - 6 = 17 - y^2 + 4y \right\}$

Hinweis: $\left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x-x_0}{\alpha} \right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{\beta} \right)^2 = 1 \right\}$ beschreibt den Rand einer Ellipse mit Mittelpunkt $(x_0, y_0)^T$ und Halbachsenlängen von $|\alpha|$ in horizontaler und $|\beta|$ in vertikaler Richtung.



Mengen/Skizzieren/Ag_Mengen_ReelleTeilmengenUndVerknuepfungenSkizzieren.tex

Aufgabe 97.449 (Teilmengen der reellen Zahlen)

Skizzieren Sie die nachfolgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ auf einem Zahlenstrahl (sofern dies möglich ist), und finden Sie für die verbal beschriebenen Mengen M_7 , M_8 und M_9 eine formale Beschreibung mittels der Teilmengen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ von $\mathbb{R}$!

a) $M_1 := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$

f) $M_6 := (-4; 6)$

k) $M_{11} := M_2 \cup M_6$

b) $M_2 := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$

g) M_7 : alle geraden Zahlen

l) $M_{12} := (M_2 \cap M_1) \cup M_6$

c) $M_3 := (0; 10]$

h) M_8 : alle Brüche

m) $M_{13} := (M_4 \cup M_5) \cap M_7$

d) $M_4 := [0; 10)$

i) M_9 : alle ungeraden Zahlen

n) $M_{14} := M_5 \cup (M_7 \cap M_{11})$

e) $M_5 := [-5; 5]$

j) $M_{10} := M_1 \cap M_3$

o) $M_{15} := M_8 \cap M_2$

p) $M_{16} := (M_5 \cap M_6) \cup (M_4 \cap M_3) \cup (M_{10} \cap M_2) \cup (M_{13} \cap M_{14})$

Aufgabenblatt 98

Mengen/Topologie



Mengen/Topologie/Ag_AbstrakteSpiegelung.tex

Aufgabe 98.450 (Abstandsgleichungen)

Es sei V ein euklidischer Vektorraum und $U \neq \{0\}$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie: Erfüllen Punkte $x \neq y$ aus V die Abstandsgleichung $\forall p \in U : d(x, p) = d(y, p)$, so ist die Verbindungsstrecke $y - x$ orthogonal zu U und beide Punkte liegen auf dem gleichen Kreis um den Nullpunkt.



Mengen/Topologie/Ag_AequivalenteNormen.tex

Aufgabe 98.451 (Äquivalente Normen in $\mathbb{R}^2$)

Zeigen Sie, dass die folgenden Normen in $\mathbb{R}^2$ äquivalent sind:

- a) $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_a$ mit $\|\vec{x}\|_a := |x_1 + x_2| + |x_1 - x_2|$
- b) $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_b$ mit $\|\vec{x}\|_b := |x_1 - 2x_2| + |x_1 + 2x_2|$
- c) $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_c$ mit $\|\vec{x}\|_c := \max\{|x_1|, |x_1 + x_2|\}$

Dabei ist $\|\vec{x}\|_1 := |x_1| + |x_2|$ die standard $\|\cdot\|_1$ -Norm.

Hinweis: es kann hilfreich sein, x_i als $x_i = \frac{1}{2}x_i + \frac{1}{2}x_i$ zu schreiben.



Mengen/Topologie/Ag_Normen_OhneSP.tex

Aufgabe 98.452 (Normen)

- a) Zeigen Sie durch Nachrechnen der geforderten Eigenschaften, dass $\|\vec{x}\|_A = |x_1| + \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2}$ eine Norm auf $\mathbb{R}^2$ ist.
- b) Zeigen Sie, dass die Norm $\|x\|_A$ von keinem Skalarprodukt erzeugt wird, d.h., es gibt kein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ so dass $\|x\|_A^2 = \langle x, x \rangle$.
Hinweis: Versuchen Sie die Fundamentalmatrix des Skalarproduktes aufzustellen, indem Sie $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ und $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ berechnen!
- c) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass $\|\vec{x}\|_B = \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2}$ keine Norm auf $\mathbb{R}^2$ ist.



Mengen/Topologie/Ag_Normen_OhneSP_dahmen.tex

Aufgabe 98.453 (Normen)

- a) Zeigen Sie durch Nachrechnen der geforderten Eigenschaften, dass $\|\vec{x}\|_A = |x_1| + \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2}$ eine Norm auf $\mathbb{R}^2$ ist.
- b) Zeigen Sie, dass die Norm $\|x\|_A$ von keinem Skalarprodukt erzeugt wird, d.h., es gibt kein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ so dass $\|x\|_A^2 = \langle x, x \rangle$.

Hinweis: Bestimmen Sie mit Hilfe der Polarisationsformel die Werte

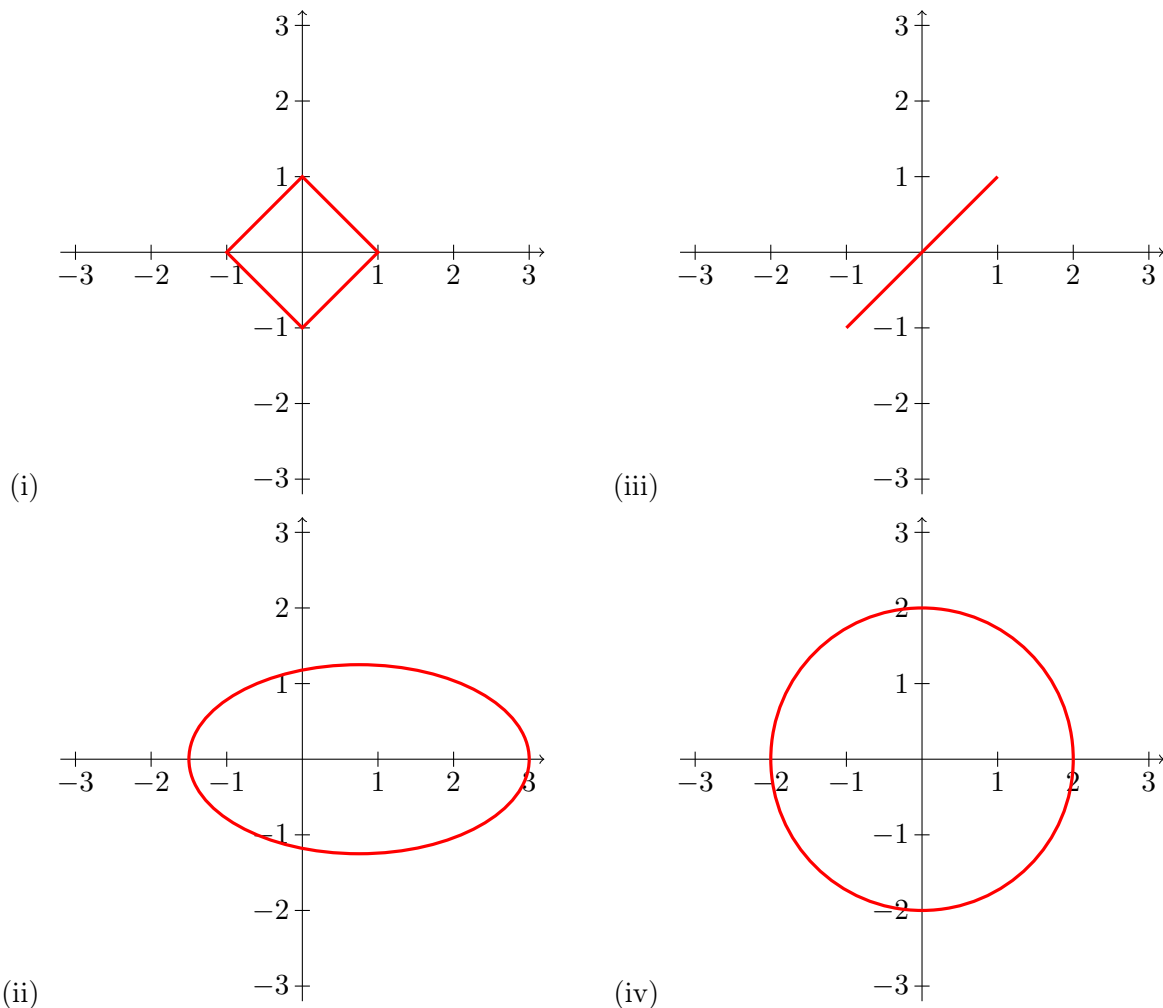
$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_A, \quad \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_A, \quad \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_A$$

und finden Sie einen Widerspruch, indem Sie $\|e_1 + 2e_2\|_A^2$ über deren Linearkombinationen berechnen.

- c) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass $\|\vec{x}\|_B = \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2}$ keine Norm auf $\mathbb{R}^2$ ist.

**Aufgabe 98.454** (Normen in WiWi Alt-Klausuren)

- a) Bei welchen der folgenden Skizzen handelt es sich um Einheitskreise einer Norm in $\mathbb{R}^2$, das heißt, für welche der folgenden Mengen existiert eine Norm $\|\cdot\|$ in $\mathbb{R}^2$, sodass die Abbildung die Menge $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2: \|\vec{x}\| = 1\}$ zeigt?



- b) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Auf dem $\mathbb{R}$ -Vektorraum $\mathbb{R}^n$ bezeichne $\|\cdot\|_1$ die 1-Norm, $\|\cdot\|_2$ die Euklidische Norm und $\|\cdot\|_\infty$ die Maximumsnorm. Zeigen Sie, dass $\alpha = 1$ und $\beta = \sqrt{n}$ die jeweils kleinsten reellen Zahlen sind, für welche die Ungleichungen

$$\|\vec{x}\|_2 \leq \alpha \cdot \|\vec{x}\|_1 \quad \text{und} \quad \|\vec{x}\|_2 \leq \beta \cdot \|\vec{x}\|_\infty$$

für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ gelten.

Hinweis: Für $k \in \mathbb{N}$ und $y_1, \dots, y_k \geq 0$ gilt

$$\sqrt{y_1 + \dots + y_k} \leq \sqrt{y_1} + \dots + \sqrt{y_k}.$$

Diese Ungleichung kann ohne Beweis verwendet werden.

**Aufgabe 98.455** (Normen und definite Matrizen)

Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass

- a) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{x} \mapsto f(\vec{x}) = \sqrt{\vec{x}^T A \vec{x}}$ eine Norm auf $\mathbb{R}^3$ definiert.

Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden, dass $\langle \vec{x}, A\vec{y} \rangle \leq f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y})$ für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

- b) $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{x} \mapsto g(\vec{x}) = \sqrt{\vec{x}^T B \vec{x}}$ keine Norm auf $\mathbb{R}^3$ definiert.



Mengen/Topologie/Ag_Normen_mitSkizzen.tex

Aufgabe 98.456 (Normen)

- a) Zeigen Sie durch Nachrechnen der geforderten Eigenschaften, dass die nachfolgenden Abbildungen $\|\vec{x}\|_a$ und $\|\vec{x}\|_b$ Normen sind:

(i) $\|\vec{x}\|_a := \max\{|x_1 + x_2|, |x_1 - x_2|\}$

(ii) $\|\vec{x}\|_b := |x_1 - 2x_2| + |6x_1 + 2x_2|$

- b) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass $\|\vec{x}\|_c := |x_1|^3 + |x_2|^3$ und $\|\vec{x}\|_d := \sqrt{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2}$ keine Normen auf $\mathbb{R}^2$ definieren.

- c) Zeichnen Sie für die Normen aus a) die sog. Einheitssphären $S_i^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_i = 1\}$.

Hinweis: eine geschickte lineare Substitution kann die Rechenarbeit erheblich vereinfachen!

Aufgabenblatt 99

Mengen/Verknuepfen



Mengen/Verknuepfen/Ag_MengenLogik_Zusammenhaenge.tex

Aufgabe 99.457 (Mengen und Aussagen)

Gegeben seien vier Mengen:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 2 = x\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid (2x - 2)^2 = x^2\},$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 2| = |x|\} \quad \text{und}$$

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(2x - 2)^2} = \sqrt{x^2}\right\}.$$

- a) Zeigen Sie, dass $A \subset B$, $B \not\subset A$ und $B = C$.
- b) Zu welche(r/n) der anderen Mengen ist die Menge D gleich?
- c) Setzen Sie an der Stelle $\boxed{?}$ zwischen den Aussagen den mathematisch am besten passenden Symbol aus der Menge $\{\implies, \impliedby, \iff\}$ ein.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $(2x - 2 = x) \boxed{?} ((2x - 2)^2 = x^2)$

(iii) $((2x - 2)^2 = x^2) \boxed{?} (|2x - 2| = |x|)$

(ii) $(2x - 2 = x) \boxed{?} (|2x - 2| = |x|)$

(iv) $(2x - 2 = x) \boxed{?} \left(\sqrt{(2x - 2)^2} = \sqrt{x^2}\right)$



Mengen/Verknuepfen/Ag_Mengen_EineAdjunktiveNformUeberVerknTab.tex

Aufgabe 99.458 (Verknüpfungstabellen zur Vereinfachung von Termen nutzen)

Seien G eine beliebige Menge, $A \subseteq G$, $B \subseteq G$, $C \subseteq G$, $\complement A := G \setminus A$, $\complement B := G \setminus B$, $\complement C := G \setminus C$ und

$$\mathcal{D} := \{ \emptyset; A; B; C; \complement A; \complement B; \complement C; G \}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe einer Verknüpfungstabelle, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ und für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ drei Mengen $X_k \in \mathcal{D}$, $Y_k \in \mathcal{D}$ und $Z_k \in \mathcal{D}$ gibt mit

$$L := ((A \cup B) \setminus C) \cup (A \setminus (B \cap C)) = \bigcup_{k=1}^n (X_k \cap Y_k \cap Z_k).$$

Geben Sie dann auf möglichst einfache Art an, wie L aus A , B und C entsteht!



Mengen/Verknuepfen/Ag_Mengen_EinfacheVerknuepfungen.tex

Aufgabe 99.459 (Mengen verknüpfen)

In den letzten Aufgabenteilen seien A und B beliebige Mengen.

- a) Vergleichen Sie die beiden Mengen

$$C := \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\} \quad \text{und} \quad D := \{x \mid 0 < x \leq 7 \text{ und } x \text{ ist eine natürliche Zahl}\}$$

und schreiben sie D als Schnitt eines Intervalls mit einer mathematischen Grundmenge auf!

- b) Bilden Sie die Vereinigung und den Durchschnitt der beiden Mengen

$$C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\} \quad \text{und} \quad E := \{-1; 2; 3; 4\} \quad !$$

- c) Bilden Sie die Differenzmenge $I \setminus J$ und den Durchschnitt der beiden Mengen

$$I := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\} \quad \text{und} \quad J := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\} \quad !$$

- d) Welche der Aussagen $A \subseteq (A \cup B)$ bzw. $A \subseteq (A \cap B)$ ist richtig? Begründen Sie Ihre Antwort!
- e) Geben Sie alle Teilmengen der Menge $M := \{1; 2; 3; 4\}$ an!
- f) Welche der Aussagen $(A \cap B) \subseteq (A \setminus (A \setminus B))$ bzw. $(A \cap B) \supseteq (A \setminus (A \setminus B))$ ist richtig? Begründen Sie Ihre Antwort!



Mengen/Verknuepfen/Ag_Mengen_Hockeyspielerinnen.tex

Aufgabe 99.460 (Hockeyspielerinnen gruppieren)

In einer Hockeymannschaft wurden die Spielerinnen befragt, was für Hobbys sie außer dem Hockeysport sonst noch verfolgen. Es wurde gefragt, ob sie eine weitere Sportart ausüben, ob sie sich musikalisch betätigen und ob sie einem anderen Zeitvertreib (wie Malen, Stricken, Computer spielen, etwas Sammeln, Holzbearbeitung, ...) nachgehen. Die Spielerinnen gaben folgende Antworten:

	Beate	Nele	Raphaela	Katrin	Theresa	Paula	Christine	Felicitas	Verena	Doris	Lisa
Sport	✓	×	×	✓	×	✓	✓	×	×	×	×
Musik	×	✓	×	✓	✓	×	×	✓	×	✓	×
Anderes	✓	✓	✓	✓	×	×	✓	×	✓	✓	×

- a) Geben Sie drei Mengen S , M und A an, die zeigen, welche Spielerinnen neben dem Hockey einen weiteren Sport machen, welche musizieren und welche einem anderen Hobby nachgehen!
- b) Welche Menge zeigt Ihnen, welche Spielerinnen Musik machen und einem anderen (nicht-sportlichen) Hobby nachgehen? Welche Elemente hat diese Menge?
- c) Welche Menge müssen Sie bilden, um die Spielerinnen zu sammeln, die mindestens zwei Sportarten betreiben oder Musik machen? Geben Sie die Menge an!
- d) Wer macht Musik, aber außer dem Hockey keinen anderen Sport?
- e) Gibt es Spielerinnen, die nur Sport oder Musik in ihrer Freizeit machen?
- f) Bilden Sie $S \cup (M \cap A)$ und $(S \cup M) \cap A$! Sind die beiden Mengen identisch?



Mengen/Verknuepfen/Ag_Mengen_MengenAbbildungen_vkmwmitki.tex

Aufgabe 99.461 (Mengen und Abbildungen)

Es seien $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{1, 2\}$:

- a) Listen Sie sämtliche Elemente von $\mathcal{P}(A \times B)$ auf, die genau zwei Elemente enthalten.
- b) Geben Sie sämtliche injektiven Abbildungen von A nach B sowie von B nach A an.

Warum sollten Sie nicht die Formeln für Kombinationen/Permutationen benutzen?



Mengen/Verknuepfen/Ag_Mengen_MengenOperationen_leicht.tex

Aufgabe 99.462 (Mengen beschreiben und verknüpfen)

Als Grundmenge sei $G := \{n \in \mathbb{N} \mid 0 < n \leq 10\}$ gegeben; weiter gegeben seien die Mengen

$$A := \{1, 4, 5\}, B := \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10\} \text{ und } C := A \cap B.$$

- a) Geben Sie die Mengen $A \cup B$, C , $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\overline{C} = \complement C = G \setminus C$, $\overline{A \setminus B}$ und $\overline{B \cap A} \cup A$ in aufzählender Weise an.

- b) Geben Sie alle Teilmengen von C an.
- c) Geben Sie die Potenzmenge von C an.
- d) Notieren Sie alle Teilmengen der Potenzmenge von C (das heißt, die Elemente der Potenzmenge der Potenzmenge).



Mengen/Verknuepfen/Ag_Mengen_MengenOperationen_vkmwmitki.tex

Aufgabe 99.463 (Mengenoperationen)

Es seien A , B und C beliebige Mengen (auch leere Menge ist möglich). Zeigen Sie, dass man für das kartesische Produkt ausmultiplizieren darf, also die Gleichheit

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C).$$



Mengen/Verknuepfen/Ag_Mengen_Mengengleichheit_mittel.tex

Aufgabe 99.464 (Mengengleichheit)

Welche der im Folgenden genannten Mengengleichheiten gelten für alle Mengen A , B und C ? Begründen Sie Ihre Aussage mit den Rechenregeln für logische Verknüpfungen, wenn die Gleichheit gilt, oder geben Sie anderenfalls ein Gegenbeispiel an:

- a) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$, b) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$, c) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.



Mengen/Verknuepfen/Ag_Mengen_SehrEinfacheVerknuepfungen.tex

Aufgabe 99.465 (Mengenoperationen)

Seien $G := \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 10\}$ die Grundmenge und $A := \{1, 2, 3, 4\}$, $B := \{n \in G \mid 2 < n \leq 7\}$.

Geben Sie die folgenden Mengen an:

- a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $A \setminus B$ d) $B \setminus A$ e) $\complement A$ f) $\complement A \setminus \complement B$



Mengen/Verknuepfen/Ag_Mengen_einfacheVerknuepfungen_beweise.tex

Aufgabe 99.466 (Kleine Beweise)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen für Mengen A und B wahr oder falsch sind, und geben Sie ggf. einen kleinen Beweis oder ein Gegenbeispiel:

- a) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$. d) $\text{Pot}(A \cup B) = \text{Pot}(A) \cup \text{Pot}(B)$.
- b) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$, e) $\text{Pot}(A \times B) = \text{Pot}(A) \times \text{Pot}(B)$.
- c) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$. f) $\bigcup_{a \in A} \{a\} = A$.



Mengen/Verknuepfen/Ag_Mengen_einfacheVerknuepfungen_mehrBeweise.tex

Aufgabe 99.467 (Kleine Beweise)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie ggf. einen kleinen Beweis oder ein Gegenbeispiel:

a) $\emptyset \times A = \emptyset$

b) $P(\emptyset) = \emptyset$

c) $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$

d) $(C \setminus A) \times (C \setminus B) = (C \times C) \setminus (A \times B)$

e) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C).$

f) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C),$

g) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B.$

h) $\text{Pot}(A \cup B) = \text{Pot}(A) \cup \text{Pot}(B).$

i) $\text{Pot}(A \times B) = \text{Pot}(A) \times \text{Pot}(B).$



Numerik/Gleichungen/Ag_NewtonVerfahren_1.tex

Aufgabe 100.468 (Newton-Verfahren)

Berechnen Sie die ersten drei Schritte des Newton-Verfahrens (d.h., x_1 , x_2 und x_3) für die Lösung der nichtlinearen Gleichung $2x = -\cos x$. Als Anfangswert nehmen Sie $x_0 = \frac{\pi}{2}$.



Numerik/Gleichungen/Ag_Numerik_NewtonVerfahren.tex

Aufgabe 100.469 (Newton-Verfahren)

Berechnen Sie die ersten drei Schritte des Newton-Verfahrens (d.h., x_1 , x_2 und x_3) für die Lösung der nichtlinearen Gleichung

$$x^3 - 2x^2 - x - 1 = 0 .$$

Als Anfangswert nehmen Sie $x_0 = 0$.

Aufgabenblatt 101

Reihen/Bekannt



Reihen/Bekannt/Ag_Reihen_ExpReiheErkennenMitIndexTransf.tex

Aufgabe 101.470 (Taylorreihe)

Bestimmen Sie die folgenden Reihenwerte mit Hilfe der Taylorreihe $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k}{k!}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^k}{k!}$

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k}{(k+1)!}$

d) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-2)^{k+1}}{(k-1)!}$



Reihen/Bekannt/Ag_Reihen_Partialsummen_Konvergenz_kurz.tex

Aufgabe 101.471 (Endliche Summen auswerten)

a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion die Gleichheit

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Rechnen Sie zuerst die ersten Gleichheiten für $n = 1, 2, 3$ per Hand nach.

b) Folgern Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot (k+1)}$$

konvergiert und berechnen Sie den Reihenwert.



Reihen/Bekannt/Ag_Reihen_ReihenwertPartialsummen.tex

Aufgabe 101.472 (Grenzwerte)

Untersuchen Sie, ob folgende Reihen konvergieren und berechnen Sie gegebenenfalls den Reihenwert. Stellen Sie hierfür die Partialsummenfolge $(s_N)_{N \in \mathbb{N}}$ auf und bilden Sie den Grenzwert $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N$.

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2 + k}$

b) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{8}{k^2 - k}$

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3 + 5^k}{6^k}$

d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k - 2^k}{4^k}$



Reihen/Bekannt/Ag_Reihen_Teleskopreihen.tex

Aufgabe 101.473 (Teleskopreihen)

Zeigen Sie, dass die nachfolgenden Reihen Teleskopreihen sind, welche konvergieren, und bestimmen Sie ihren Grenzwert:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k \cdot (k+1)}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1) \cdot (2k+1)}$

Tipp: Suchen Sie $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $\frac{c}{p(k) \cdot q(k)} = \frac{a}{p(k)} + \frac{b}{q(k)}$!



Reihen/Bekannt/Ag_Reihen_Teleskopreihen_leicht1.tex

Aufgabe 101.474 (Teleskopreihe)

Begründen Sie, weshalb die nachstehenden Reihen konvergieren, und bestimmen Sie den Grenzwert (Reihenwert).

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{k}}{(k+1)^2} - \sqrt{\frac{k-1}{k^4}} \right) \quad \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{k+1}}{2 \cdot (k+1)!} - \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{k} \cdot (k-1)!} \right) \quad \text{c) } \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2k}\right)}{\cos\left(\frac{2\pi}{k+1}\right)} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2k+2}\right)}{\cos\left(\frac{2\pi}{k+2}\right)} \right)$$



Reihen/Bekannt/Ag_Reihen_mehrGeometrischeReihen.tex

Aufgabe 101.475 (geometrische Reihen)

Konvergieren die folgenden Reihen? Wenn ja, gegen welchen Wert?

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^{k-1}}{4^k} & \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{2n}} & \text{e) } \sum_{p=1}^{\infty} 2^{2p} \cdot 3^{1-p} & \text{g) } \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{125^{\mu} \cdot 4^{\mu}}{5^{\mu-1} \cdot 10^{2\mu+1}} \\ \text{b) } \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi^m}{3^{m+1}} & \text{d) } \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{5^{-3+2j}} & \text{f) } \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{6^{3\ell}}{9^{2\ell} \cdot 8^{\ell}} & \text{h) } 5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} \pm \dots \\ & & & \text{i) } \frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{18}{25} + \frac{108}{125} + \dots \end{array}$$



Reihen/Bekannt/Ag_Reihen_vieleGeometrischeReihen.tex

Aufgabe 101.476 (geometrische Reihen)

Berechnen Sie die Grenzwerte der folgenden Reihen, sofern die Reihe konvergiert!

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \sum_{h=0}^{\infty} 4^{-3h} & \text{c) } \sum_{\ell=-1}^{\infty} \frac{7^{\ell-1}}{28^{\ell}} & \text{e) } \sum_{m=2}^{\infty} \frac{3^{2m+1} \cdot 5^{3m-1}}{15^{3m-2} \cdot 3^{-m+2}} & \text{g) } \sum_{u=1}^{\infty} \frac{(3^{4-u} - 1)^2}{9^u} \\ \text{b) } \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{5^{-(3-p)}} & \text{d) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{32^k}{3^{k+1} \cdot 2^{k+2} \cdot 5^{k-1}} & \text{f) } \sum_{t=1}^{\infty} 15^{2t-1} \cdot 3^{-5t} & \text{h) } \sum_{j=-1}^{\infty} 13^{2j} \cdot \frac{3^{2 \cdot (1-j)}}{16^j} \end{array}$$



Reihen/CauchyProd/Ag_Potenzreihen_Cauchyprodukt.tex

Aufgabe 102.477 (Cauchyprodukt von Potenzreihen)

Prüfen Sie, wo die beiden Potenzreihen absolut konvergieren und bestimmen Sie das Cauchyprodukt sowie die zugehörige (Wert-)Funktion. Berechnen Sie die Wertfunktion sowohl über die Auswertung des Cauchyprodukts als auch über das Produkt der Wertfunktionen der ursprünglichen Reihen:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \cdot (x-1)^j \quad \text{und} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k} \cdot (x-1)^k.$$



Reihen/CauchyProd/Ag_Zahlenreihen_Cauchyprodukt.tex

Aufgabe 102.478 (Cauchyprodukt von Reihen)

Zeigen Sie, dass die beiden Reihen absolut konvergieren und bestimmen Sie das Cauchyprodukt sowie seinen Wert. Berechnen Sie den Wert ab sowohl über die Auswertung des Cauchyprodukts als auch über das Produkt der beiden Reihenwerte!

$$a := \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \quad \text{und} \quad b := \sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k}$$

Aufgabenblatt 103

Reihen/Fourierreihen



Reihen/Fourierreihen/Ag_Fourierreihen_2RechteckeUnd1Saegezahn.tex

Aufgabe 103.479 (Fourierreihen von Rechteck- und Sägezahnsignalen)

Berechnen Sie die reellen Fourierreihen der folgenden Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto f(t)$, den angegebenen Funktionswerten für alle $t \in (-\pi; \pi]$ und $f(t + 2\pi) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$\text{a) } f(t) := \begin{cases} 1, & \text{für } |t| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{für } \frac{\pi}{2} \leq |t| \end{cases} \quad \text{b) } f(t) := \begin{cases} -1 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \quad \text{c) } f(t) := \frac{1}{\pi} \cdot \begin{cases} t, & \text{für } t \neq \pi \\ 0, & \text{für } t = \pi \end{cases}$$



Reihen/Fourierreihen/Ag_Fourierreihen_KoeffZuHalbemKosinusKompl.tex

Aufgabe 103.480 (Fourierkoeffizienten berechnen)

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x)$ eine 2π -periodische Funktion mit $f(x + 2\pi) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x), & \text{falls } |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{falls } \frac{\pi}{2} < |x| \leq \pi \end{cases} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| \leq \pi.$$

- Skizzieren Sie den Graphen von f , wobei die horizontale Achse den Bereich $[-7; 7]$ umfasst!
- Berechnen Sie den komplexen Fourierkoeffizienten c_0 zu f !
- Berechnen Sie die komplexen Fourierkoeffizienten c_n zu f mit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1; 0; 1\}$ über eine partielle Integration!
Tipp: Unterscheiden Sie gerade und ungerade n , um das Ergebnis zu vereinfachen!
- Verwenden Sie die Euler'sche Formel $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$ für alle $\varphi \in \mathbb{C}$, um auch die komplexen Fourierkoeffizienten c_1 und c_{-1} zu bestimmen!
- Berechnen Sie erneut alle komplexen Fourierkoeffizienten zu f , indem Sie $f(x)$ für alle $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ mit Hilfe der komplexen Exponentialfunktion schreiben! (Warum müssen Sie $c_{\pm 1}$ separat berechnen?)



Reihen/Fourierreihen/Ag_Fourierreihen_KoeffZuHalbemKosinusReell.tex

Aufgabe 103.481 (Fourierkoeffizienten berechnen)

Skizzieren Sie den Graphen von $f|_{[-7;7]}$ für die 2π -periodische Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x)$ und

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x), & \text{falls } |x| \leq \frac{\pi}{2} \text{ ist} \\ 0, & \text{falls } \frac{\pi}{2} < |x| \leq \pi \text{ ist} \end{cases} \quad \text{für alle } x \in (-\pi; \pi].$$

Berechnen Sie außerdem die reellen Fourierkoeffizienten a_0 , a_k und b_k für alle $k \in \mathbb{N}$ von f .

Hinweis: Für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $k \in \mathbb{R}$ gilt $2 \cdot \cos(x) \cdot \cos(kx) = \cos((k-1) \cdot x) + \cos((k+1) \cdot x)$.



Reihen/Fourierreihen/Ag_Fourierreihen_PiQuadratSechstel.tex

Aufgabe 103.482 ($\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$)

Sei $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto u(t)$ eine 2π -periodische Funktion mit $u(t) := t$ für alle $t \in (-\pi; \pi]$.

Seien $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x)$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto g(x)$, $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto h(x)$ und $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto y(x)$ Funktionen, für die für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x) := \begin{cases} u(x), & \text{für } \frac{x}{\pi} \notin \mathbb{Z} \\ 0, & \text{für } \frac{x}{\pi} \in \mathbb{Z} \end{cases}, \quad g(x) := |u(x)|, \quad h(x) := (u(x))^2 \quad \text{und} \quad y(x) := \left| \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right|.$$

Zeichnen Sie die Graphen von $f|_{[-7;7]}$, $g|_{[-7;7]}$ und $h|_{[-7;7]}$!

- a) Berechnen Sie die Fourierreihe von f !
- b) Zeigen Sie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$!
- c) Berechnen Sie die Fourierreihe von g !
- d) Zeigen Sie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$!
- e) Berechnen Sie die Fourierreihe von h !
- f) Zeigen Sie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$!
- g) Folgern Sie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$!
- h) Berechnen Sie die Fourierreihe von y !
- i) Zeigen Sie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}$!



Reihen/Fourierreihen/Ag_Fourierreihen_PktwKonvSignum.tex

Aufgabe 103.483 (Reihenwert über die Fourierreihe der Signumsfunktion berechnen)

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x)$, $f(x + 2\pi) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $f(0) := 0 =: f(\pi)$ und $f(x) = \frac{x}{|x|}$ für alle $x \in (-\pi; \pi) \setminus \{0\}$. Fertigen Sie eine Skizze des Graphen von $f|_{[-7;7]}$ an!

- a) Finden Sie eine endliche Menge $M \subseteq [-\pi; \pi]$, so dass f auf $\mathbb{R} \setminus \{t + 2k\pi \in \mathbb{R} \mid t \in M \text{ und } k \in \mathbb{Z}\}$ stetig differenzierbar ist!
- b) Prüfen Sie für jedes $x \in M$, ob die Limites $\lim_{t \rightarrow x^+} f(t)$, $\lim_{t \rightarrow x^-} f(t)$, $\lim_{t \rightarrow x^+} f'(t)$ und $\lim_{t \rightarrow x^-} f'(t)$ existieren!
- c) Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ mit Hilfe der zu f gehörenden Fourierreihe!



Reihen/Fourierreihen/Ag_Fourierreihen_ReziprokeBiquadrateUngeraderZahlenMitParseval.tex

Aufgabe 103.484 (Fourierkoeffizienten berechnen und Identität nachrechnen, Klausurniveau)

Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x)$ ist definiert als die ungerade 2π -periodische Fortsetzung von

$$\psi: [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad x \mapsto \psi(x) := \begin{cases} x, & \text{für } x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{für } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

- a) Skizzieren Sie den Graphen von $f|_{[-7;7]}$!
- b) Bestimmen Sie die reellen Fourierkoeffizienten a_0 sowie a_k und b_k für alle $k \in \mathbb{N}$ von f !
- c) Zeigen Sie mit Hilfe der Parseval'schen Gleichung

$$\frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi^2} \cdot \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

die Identität

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{(2\ell-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Hinweis: Sie können ohne Beweis das Ergebnis $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ verwenden.



Reihen/Fourierreihen/Ag_Fourierreihen_ReziprokeQuadrateUngeraderZahlen.tex

Aufgabe 103.485 (Fourierreihe, Reihenwert)

- a) Bestimmen Sie die reelle Fourierreihe der Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x)$, $f(x + 2\pi) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ für alle $x \in [-\pi; 0)$ und $f(x) = x$ für alle $x \in [0; \pi)$!
- b) Berechnen Sie mit Hilfe der Fourierreihe von f den Wert der Reihe $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$!



Reihen/Fourierreihen/Ag_Fourierreihen_UnGeradeFortsetzenUndNurDreiKoeffBerechnen.tex

Aufgabe 103.486 (Fourierkoeffizienten berechnen)

Gegeben ist die Funktion $f: [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x)$ durch $f(\pi) := 0$ und für alle $x \in [0; \pi)$

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}, & \text{falls } \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$$

- a) Skizzieren Sie die Graphen von f , sowie ihrer geraden 2π -periodischen Fortsetzung g und ihrer ungeraden 2π -periodischen Fortsetzung u in ein gemeinsames Koordinatensystem!
- b) Geben Sie die Zuordnungsvorschriften von g und u im Bereich $[-\pi; \pi]$ an!
- c) Berechnen Sie die reellen Koeffizienten a_0 , a_1 und b_1 der beiden Fortsetzungen!

Aufgabenblatt 104

Reihen/Komplex



Reihen/Komplex/Ag_ReihenKompl_GeometrischeReiheMitParameter.tex

Aufgabe 104.487 (Klausur Herbst 2004 Aufgabe 1 a (Physik))

Bestimmen Sie die Menge aller $w \in \mathbb{C}$, für welche die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{w} \right)^k$$

konvergiert. Beschreiben Sie die Menge geometrisch.



Reihen/Komplex/Ag_ReihenKompl_GeometrischeReiheMitUmformen.tex

Aufgabe 104.488 (Klausur SoSe 2009 Aufgabe 1 b (Physik))

Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(3i)^{n+1}}$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Reihenwert sowie den Betrag des Reihenwertes.



Reihen/Komplex/Ag_ReihenKompl_GeometrischeReihen.tex

Aufgabe 104.489 (Komplexe geometrische Reihen)

Bestimmen Sie die Reihenwerte, falls diese existieren!

$$\text{a) } \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3i}{4} \right)^k \quad \text{b) } \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3i-3}{4} \right)^k \quad \text{c) } \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3i}{3i-4} \right)^k \quad \text{d) } \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3i-4}{3i+4} \right)^k$$



Reihen/Komplex/Ag_ReihenKompl_Kriterien.tex

Aufgabe 104.490 (komplexe Reihen)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz!

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5i)^{n-2}}{(6+4i)^n} & \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^i} & \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n-i} - \frac{2}{n+i} \right) \\ \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4-2i)^{2n}}{(8+15i)^n \cdot n^2} & \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2+3i}} & \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^{n^2}}{(n!)^n} \end{array}$$

Aufgabenblatt 105

Reihen/Kriterien



Reihen/Kriterien/Ag_Reihen_Hilfsreihentrick.tex

Aufgabe 105.491 (Hilfsreihentrick für Nullfolgen)

Um zu zeigen, dass eine gegebene Folge a_n eine Nullfolge ist, kann man folgenden Trick anwenden:

- Definiere eine Hilfsreihe $R := \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, mit geeignetem $n_0 \in \mathbb{N}$.
- Zeige, dass die Hilfsreihe R konvergent ist (z.B. mit Quotienten- oder Wurzelkriterium).
- Aus dem Nullfolgenkriterium für Reihen folgt dann $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Wenden Sie den Trick auf diese Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ an:

a) $a_n = \frac{3^n}{n!}$

b) $a_n = \frac{n^8}{4^n}$



Reihen/Kriterien/Ag_Reihen_Konvergenz2.tex

Aufgabe 105.492 (Konvergenz von Reihen)

Untersuchen Sie, ob die Reihen konvergieren:

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{16k^{15}}{5^k}$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{k^2 - 8}$

e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{24}{\sqrt{16k} + 4k}$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{40 + 7^k}{6^k}$

d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{18k \cdot 3^k}{2^{4k}}$

f) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{2k^3 - 6}}$



Reihen/Kriterien/Ag_Reihen_KonvergenzkriterienGemischt.tex

Aufgabe 105.493 (Reihenkonvergenz entscheiden)

Prüfen Sie bei diesen Reihen mit jeweils nur einem Kriterium die Konvergenz/Divergenz:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} 15^{2n-1} \cdot 3^{-5n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(-3)^n}$

g) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-2)^j}{j^3}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6n + 1}{n^3 + 3n - 8}$

f) $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \cdot \ln \left(\frac{(j+2)^2}{(j+1)^2} \right)$



Reihen/Kriterien/Ag_Reihen_Leibnizkriterium.tex

Aufgabe 105.494 (Leibnizkriterium)

Untersuchen Sie die Reihen mittels Leibnizkriterium auf Konvergenz:

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-5)^k}{(2k+1)!}$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{(2k)!}{(k!)^2}$

c) $\sum_{k=5}^{\infty} \frac{\tan \left(\frac{\pi + 2k\pi}{4} \right)}{\ln(k+2)}$



Reihen/Kriterien/Ag_Reihen_Quotientenkriterium2.tex

Aufgabe 105.495 (Quotientenkriterium)

Welche Aussagen über die Konvergenz der folgenden Reihen erhalten Sie mit dem Quotientenkriterium?

$$\text{a) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^8 \sqrt{k}}{5^k}$$

$$\text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6\sqrt{4k}}{48k^6}$$

$$\text{c) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3k \cdot k!}{(2k)!}$$

$$\text{d) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^k}{k^{60}}$$



Reihen/Kriterien/Ag_Reihen_Wurzelkriterium2.tex

Aufgabe 105.496 (Wurzelkriterium)

Welche Aussagen über die Konvergenz der folgenden Reihen erhalten Sie mit dem Wurzelkriterium?

$$\text{a) } \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4k+2}{8+6k} \right)^{2k}$$

$$\text{b) } \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2k-7}{2k+3} \right)^k$$

$$\text{c) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5 \cdot (-1)^{k-1} \cdot k^{2k}}{(k^4 + 3)^k}$$

Aufgabenblatt 106

Reihen/Potenzreihen



Reihen/Potenzreihen/Ag_Konvergenzradius_Tricks.tex

Aufgabe 106.497 (Tricks bei der Berechnung von Konvergenzradien)

Geben Sie jeweils den Entwicklungspunkt x_0 und den Konvergenzradius r der Potenzreihen an.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4+(-1)^n} \right)^n (x-7)^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{x^2+1}{3} \right)^{n-1}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} 8^n \frac{(x-5)^{3n}}{n}$

d) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(1 - \frac{3}{n} \right)^{n^2} (x+2)^n$

Tipp: a) Wurzelkriterium bzw. Definition des Konvergenzradius verwenden und $\limsup$ mit Teilfolgen ausrechnen.

Tipp: b),c) Definiere $b_n(x) := 8^n \frac{(x-5)^{3n}}{n}$ bzw. $b_n(x) := n \left(\frac{x^2+1}{3} \right)^{n-1}$. Forme die Quotientenkriteriumsbedingung für Reihen, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}(x)}{b_n(x)} \right| < 1$ so lange um, bis sie wie $|x - x_0| < r$ aussieht und lese x_0 und r ab.

Tipp: d) Scharfes Hinsehen oder e-hoch-ln-Trick bei der Grenzwertberechnung.



Reihen/Potenzreihen/Ag_Potenzreihen_KonvergenzbereichBestimmen.tex

Aufgabe 106.498 (Konvergenzradius von Potenzreihen)

Berechnen Sie den Konvergenzradius r der folgenden reellen Potenzreihen, geben Sie den Entwicklungspunkt x_0 an und bestimmen Sie den Konvergenzbereich:

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{10} \right)^k \cdot x^k$

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} \cdot (4-x)^k$

e) $\sum_{k=0}^{\infty} (3k+2) \cdot x^k$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} \cdot (x-2)^k$

d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k-2}{k+2} \cdot (x+3)^k$

f) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sqrt{4k+1} - 2 \cdot \sqrt{k} \right) \cdot x^k$



Reihen/Potenzreihen/Ag_Potreihe_FktErkennen.tex

Aufgabe 106.499 (Potenzreihen in geschlossene Form bringen)

Geben Sie zu den folgenden „Potenzreihen“ eine geschlossene Form (also eine Darstellung ohne Summenzeichen) an! Geben Sie an für welchen Bereich die jeweilige Darstellung gültig ist. ($i^2 = -1$)

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \cdot x^{n+1}$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \left(t - \frac{1}{2} \right)^{3k+3}$

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n + (-i)^n + 1}{n!} \cdot (z-1)^n$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{(k+1)!} \cdot x^{k+1}$

d) $\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{2\ell+1}{(-1)^{\ell+1} \cdot (2\ell)!} \cdot t^{2\ell}$

f) $\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\ell}{3^\ell} \cdot (z+3)^{\ell-1}$



Reihen/Potenzreihen/Ag_Taylorreihe_BestimmenKonvergenzWert.tex

Aufgabe 106.500 (Taylorreihe)

Gegeben sei $f : (0; 2) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := \ln(|x-2|)$.

a) Zeigen Sie für die Ableitungen von f die Formel

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(x-2)^n} \quad \text{für alle } x \in (0; 2) \text{ und alle } n \in \mathbb{N}.$$

b) Stellen Sie die Taylorreihe von f im Punkt $x_0 := 1$ auf und bestimmen Sie den Konvergenzradius.

c) Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$.

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass sich f um $x_0 = 1$ in eine Potenzreihe entwickeln lässt.



WSTheorie/Begriffe/Ag_UntereFaktorielle.tex

Aufgabe 107.501 (Untere Faktorielle)

Berechnen Sie:

- | | | | | | |
|----|-----------------------|------------------------|----|------------------------|-------------------------|
| a) | (i) 5^4 | (ii) 5^4 | c) | (i) $(-5)^4$ | (ii) $(-5)^4$ |
| b) | (i) $(\frac{1}{5})^4$ | (ii) $(\frac{1}{5})^4$ | d) | (i) $(-\frac{1}{5})^4$ | (ii) $(-\frac{1}{5})^4$ |



WSTheorie/Kombinatorik/Ag_Kombinatorik_AbbildungenZaehlen.tex

Aufgabe 108.502 (Abbildungen zählen)

- Betrachten Sie alle Teilmengen $T \subseteq \{1, 2\}$ und alle Teilmengen $S \subseteq \{1, 2, 3\}$ mit $3 \in S$. Geben Sie eine bijektive Abbildung an, die jeder Menge T eine Menge S zuordnet.
- Wieviele Abbildungen $f: \{r, g, b\} \rightarrow \{0, 1\}$ gibt es?
- Sei $M := \{3, 8, 7, 19, 15\}$. Wieviele Bijektionen $f: M \rightarrow M$ gibt es?



WSTheorie/Kombinatorik/Ag_Kombinatorik_KombinationenMit.tex

Aufgabe 108.503 (Ungeordnete Stichproben mit Wiederholung)

- Wie viele Möglichkeiten gibt es, 6 ununterscheidbare Kugeln auf 3 Töpfe zu verteilen, wenn in jedem Topf mehrere Kugeln sein können?

Dabei hilft folgender Trick: Man verwendet eine Notation mit Kugeln $\bigcirc$ und Trennstrichen $|$ und schreibt z.B.

$\underbrace{\bigcirc\bigcirc}_{1.\text{Topf}} | \underbrace{\bigcirc}_{2.\text{Topf}} | \underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{3.\text{Topf}}$ für „2 Kugeln in Topf 1, 1 Kugel in Topf 2, 3 Kugeln in Topf 3“ oder

$\underbrace{\quad}_{1.\text{Topf}} | \underbrace{\bigcirc\bigcirc}_{2.\text{Topf}} | \underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{3.\text{Topf}}$ für „0 Kugeln in Topf 1, 2 Kugeln in Topf 2, 4 Kugeln in Topf 3“.

- Allgemein: Wie viele Möglichkeiten gibt es, k ununterscheidbare Objekte auf n Töpfe zu verteilen, wenn in jedem Topf mehrere Objekte sein können?



WSTheorie/Kombinatorik/Ag_Kombinatorik_KombinationenOhne.tex

Aufgabe 108.504 (Ungeordnete Stichproben ohne Wiederholung)

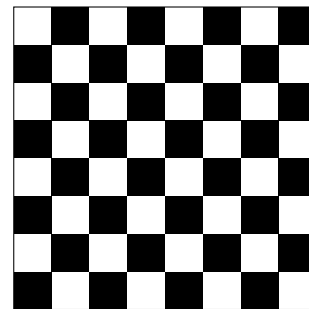
- Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus 9 verschiedenen Objekten vier Objekte **ohne** Beachtung der Reihenfolge auszuwählen?
- Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus n verschiedenen Objekten k Objekte **ohne** Beachtung der Reihenfolge auszuwählen?
- Wie viele mögliche Kombinationen eines ausgefüllten Lottoscheines gibt es beim Lottospiel „6 aus 49“?
- Wie viele 3-elementige Teilmengen einer Menge N mit 5 Elementen gibt es? Allgemein: Wie viele k -elementige Teilmengen einer Menge N mit n Elementen gibt es?



WSTheorie/Kombinatorik/Ag_Kombinatorik_TuermeAufSchachbrett.tex

Aufgabe 108.505 (Türme auf dem Schachbrett)

Ein Schachbrett besteht aus 64 quadratischen Feldern, die in 8 Zeilen und 8 Spalten angeordnet sind. Die Felder sind abwechselnd weiß und schwarz. Ein Turm darf sich auf dem Schachbrett nur horizontal oder vertikal bewegen. Fährt ein Spielstein einer Farbe auf ein Feld, auf dem ein Spielstein der anderen Farbe steht, so wird dieser Spielstein „geschlagen“. Wie viele Möglichkeiten gibt es, zwei Türme auf ein Schachbrett zu stellen,



- a) wenn einer weiß und einer schwarz ist?
- b) wenn beide schwarze sind?
- c) wenn einer weiß und einer schwarz ist und beide so stehen sollen, dass sie sich nicht im nächsten Zug schlagen können?
- d) Wie viele Möglichkeiten hätte man, acht verschiedenfarbige Türme auf das Spielbrett zu stellen, die sich alle nicht gegenseitig schlagen können, wenn es beim Schach acht verschiedene Farben gäbe, die sich untereinander alle schlagen dürften?
- e) Wie verändert sich die Situation aus Aufgabenteil d), wenn Sie Türme gleicher Farbe verwenden, die aber so stehen sollen, dass sie sich auch nicht schlagen könnten, wenn ihre Farben unterschiedlich wären?

Zusatzfrage:

Was passiert in Aufgabenteil d) oder Aufgabenteil e) bei sieben oder neun Türmen?



WSTheorie/Kombinatorik/Ag_Kombinatorik_Variationen.tex

Aufgabe 108.506 (Geordnete Stichproben (Permutationen/Variationen) mit und ohne Wiederholung)

- a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, n verschiedene Objekte anzuordnen?
- b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 3 blaue, 2 rote und 2 grüne Kugeln anzuordnen? Wie lautet die Lösung im allgemeinen Fall mit jeweils $k_1, k_2, \dots, k_j$ ununterscheidbaren Objekten?
- c) Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus 9 verschiedene Objekten vier Objekte **mit** Beachtung der Reihenfolge auszuwählen?
- d) Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus n verschiedene Objekten eine Anzahl $k \leq n$ **mit** Beachtung der Reihenfolge auszuwählen?
- e) Sei N eine Menge mit 3 Elementen und M eine Menge mit 5 Elementen.
 - (i) Wie viele Funktionen $N \rightarrow M$ gibt es?
 - (ii) Wie viele davon sind injektiv?
 - (iii) Wie sieht es aus im allgemeinen Fall für die Kardinalitäten $|N| = n$ und $|M| = m$?
 - (iv) Wie viele bijektive Abbildungen gibt es im Fall $n = m$?

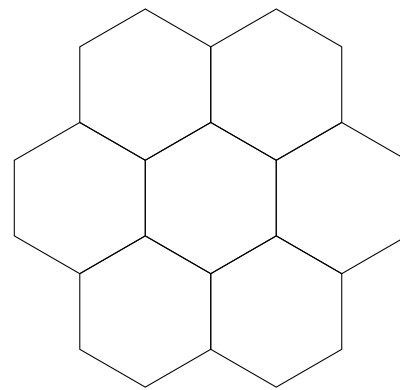


WSTheorie/Kombinatorik/Ag_Kombinatorik_WabeFaerben.tex

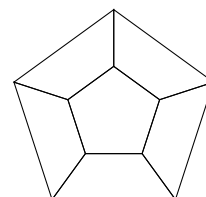
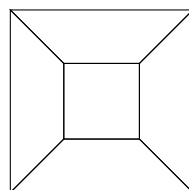
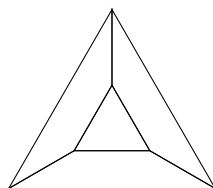
Aufgabe 108.507 (Felder färben)

Sie haben die neun Farben rot, orange, gelb, grün, blau, violett, türkis, rosa und braun. Wieviele Möglichkeiten haben Sie, die sieben rechts stehenden Felder zu färben, wenn

- keine Einschränkung besteht?
- das linke Feld rot und das rechte Feld blau werden sollen?
- alle Felder unterschiedlich gefärbt werden sollen?
- drei Felder rot, zwei blau und die anderen Felder grün sein sollen?
- zwei benachbarte Felder nicht die gleiche Farbe haben sollen?



Tipp: Überlegen Sie in Aufgabenteil e) zunächst, wie die Antwort auf die wirklich schwere Frage in den folgenden drei Fällen aussehen würde:



WSTheorie/Kombinatorik/Ag_Permutationen_Zerlegen.tex

Aufgabe 108.508 (Permutationen)

- a) Berechnen Sie die folgenden Permutationen aus Π_7 :

(i) $\pi = [1, 2] \circ [3, 5] \circ [5, 1] \circ [6, 7]$

(ii) $\sigma = [7, 1] \circ [4, 5] \circ [4, 7] \circ [1, 3]$

- b) Schreiben Sie die folgenden Permutationen als Kompositionen der Transpositionen und bestimmen Sie das Signum!

(i) $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

(ii) $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$



WSTheorie/WSRechnung/Ag_Wahrscheinlichkeiten_Skatblatt.tex

Aufgabe 109.509 (Skatblatt)

Wir betrachten ein übliches Skatblatt (französisch) mit 32 Karten:

♣ A	♣ K	♣ D	♣ B	♣ 10	♣ 9	♣ 8	♣ 7
♠ A	♠ K	♠ D	♠ B	♠ 10	♠ 9	♠ 8	♠ 7
♦ A	♦ K	♦ D	♦ B	♦ 10	♦ 9	♦ 8	♦ 7
♥ A	♥ K	♥ D	♥ B	♥ 10	♥ 9	♥ 8	♥ 7

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit

- ... in einem Zug aus dem vollen Stapel ein As zu ziehen?
- ... in einem Zug aus dem vollen Stapel kein As zu ziehen?
- ... in einem Zug aus dem vollen Stapel einen schwarzen Buben zu ziehen?
- ... in zwei Zügen **mit** zurücklegen zuerst einen schwarzen Buben und dann ein As zu ziehen?
- ... in zwei Zügen **mit** zurücklegen zwei Asse zu ziehen?
- ... in zwei Zügen **mit** zurücklegen genau ein As zu ziehen?
- ... in zwei Zügen **mit** zurücklegen mindestens ein As zu ziehen?
- ... in fünf Zügen **mit** zurücklegen genau zwei Asse zu ziehen?
- ... in zwei Zügen **ohne** zurücklegen zuerst einen schwarzen Buben und dann ein As zu ziehen?
- ... in zwei Zügen **ohne** zurücklegen zwei Asse zu ziehen?
- ... in zwei Zügen **ohne** zurücklegen genau ein As zu ziehen?
- ... in zwei Zügen **ohne** zurücklegen mindestens ein As zu ziehen?
- ... in fünf Zügen **ohne** zurücklegen genau zwei Asse zu ziehen?



ZUnfachliches/Sonstiges/Text_FroheWeihnachten.tex

Stellen Sie die Gleichung $y = \frac{1}{r^2} \cdot \ln\left(\frac{x}{m} - sa\right)$ möglichst schön um!



ZUnfachliches/Uebersichten/Text_GriechischesAlphabet.tex

α , A	„alpha“	ξ , Ξ	„xi“	ι , I	„iota“	o , O	„omikron“	π , Π	„pi“
β , B	„beta“*	ζ , Z	„zeta“	κ , K	„kappa“	ω , Ω	„omega“	φ , Φ	„phi“
γ , Γ	„gamma“	η , H	„eta“	λ , Λ	„lambda“	ϱ , P	„rho“	ψ , Ψ	„psi“
δ , Δ	„delta“	ϑ , Θ	„theta“	μ , M	„mü“	σ , Σ	„sigma“	χ , X	„chi“
ε , E	„epsilon“			ν , N	„nü“	τ , T	„tau“*	υ , Υ	„üpsilon“

*Im Neu-Griechischen wird das β /B als „vita“ und das τ /T als „taf“ gesprochen.